На правах рукописи

Скороходов Владимир Александрович

Графы с нестандартной достижимостью: маршрутизация, случайные процессы и потоковые задачи

05.13.17 — Теоретические основы информатики

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Воронеж

2017

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»

Научный консультант: доктор технических наук, профессор
Ерусалимский Яков Михайлович

Официальные оппоненты:

Мельников Борис Феликсович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГАНУ «Центр информационных технологий и систем органов исполнительной власти», главный научный сотрудник;

Провоторов Вячеслав Васильевич,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», математический факультет, кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей, профессор;

Башкин Владимир Анатольевич,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, факультет информатики и вычислительной техники, кафедра теоретической информатики, доцент

Ведущая организация: ФГБУН Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

Защита состоится «20» декабря 2017 г. в $17^{\underline{00}}$ часов на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 333.
С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, Воронеж, Университетская пл., 1, а также на сайте
http://www.science.vsu.ru/dissertations/5001/Диссертация_Скороходов_В.А..pdf

Автореферат разослан «18» сентября 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.038.20 С. А. Шабров
кандидат физико-математических наук, доцент

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Ориентированные графы стали хорошим средством математического моделирования большого количества дискретных процессов и явлений. Родившись при решении головоломок, теория графов свои первые применения нашла в химии (работы А. Келли по перечислению помеченных деревьев) и в электротехнике (законы Г. Кирхгоффа – теория электрических цепей). В самой математике развитие теории графов было связано с топологией (критерий планарности графа Л.С.Понтрягина и К. Куратовского) и многолетними попытками доказательства гипотезы четырех красок. Бурное развитие теории графов и её применения связано с началом компьютерной эры и появлением новой отрасли современной математики, которую называют компьютерными науками или информатикой. Маршрутизация в телекоммуникационных и компьютерных сетях, навигация в системах GPS, составление оптимальных расписаний движения транспорта и планирование перевозок в логистике лишь малая часть примеров применения теории графов в этом направлении.

Отметим, что большинство графовых моделей связано с некоторым передвижением по путям соответствующего графа, а основную роль в каждой конкретной модели обычно играет одна из трех задач: задача о достижимости (или ее модификация – задача о кратчайших путях), задача о случайном блуждании и потоковая задача, поскольку поток перемещается по путям графа. Заметим, что каждая из перечисленных задач (не только первая) связана с понятием достижимости на графе. Перечисленные задачи (в классической постановке, т.е. когда все пути являются допустимыми) хорошо изучены в работах Г. Данцига, Е. Диница, Д. Эдмондса, Р. Карпа, А. Голдберга, А.А. Зыкова, О. Оре, Л.Р. Форда, Д.Р. Фалкерсона, Ф. Харари, Р. Тарьяна и др.

Среди важнейших результатов особо выделим алгоритм Е. Дейкстры нахождения кратчайших путей на графах и теорию потоков в сетях, созданную Л.Р. Фордом и Д.Р. Фалкерсоном. Следует отметить, что основные методы теории потоков в сетях не слишком изменились с дней своего создания. Основными направлениями ее развития стали разработка и модификация алгоритмов решения потоковых задач в сетях. Сегодняшний интерес к теории потоков в сетях связан с интенсивным развитием инфокоммуникационных сетей, в том числе WWW, мобильных сетей, глобальных компьютерных сетей, теории нейронных сетей, логистики.

Укажем на ещё одну важную область применения методов теории графов – теоретическое программирование, в том числе такое важное и современное её направление – автоматическое распараллеливание компьютерных программ, в основе которого лежит построение и анализ информационного или управляющего графа программы. В этом направлении отметим работы В.В. Воеводина, В.А. Евстигнеева, В.Н. Касьянова, С.В. Огородова, Б.Я. Штейнберга, Л. Лампорта, Р. Аллэна, К. Кэннеди, М. Вольфа.

Настоящая работа посвящена нестандартной достижимости на ориентированных графах и методам решения классических задач на графах с нестандартной достижимостью. Нестандартная достижимость понимается нами как некоторое ограничение на множество путей графа. Это означает, что дуги могут не являться равноправными в формировании путей, вследствие чего некоторые пути становятся недопустимыми. Вместе с тем, обыкновенные ориентированные графы можно считать графами с нестандартной достижимостью (тривиальной). Переход от рассмотрения всего множества путей графа к рассмотрению выделенного подмножества путей существенно меняет характер задач связанных с достижимостью. Перечисленные выше известные алгоритмы «перестают работать», поскольку они не учитывают сужение множества рассматриваемых путей. Это относится и к задаче о кратчайших путях, и к задаче о случайных блужданиях по графу, и к задаче о максимальном потоке в сети. Кроме того, мультиграфовость (наличие кратных дуг) на графах с нестандартной достижимостью в отличие от графов без ограничений на достижимость является неустранимой. Если кратные дуги являюся дугами разного типа, то в задаче о кратчайших путях нельзя оставлять из кратных только кратчающую дугу, а в потоковых задачах заменять кратные дуги одной дугой с суммарной пропускной способностью.

Отметим, что ограничения на достижимость естественным образом проявляются во многих прикладных задачах. Приведём в качестве примера одну из них.

Рассмотрим компьютерную сеть, в которой для некоторых подсетей установлены определённые правила для приёма и передачи пакетов данных. Например, запрет на трансляцию широковещательных сообщений из внешних узлов или приоритет в передаче пакетов данных из доверенных источников, или для пакетов из источников, не являющихся доверенными, обязательна отправка их на проверку на одном из локальных узлов подсети. Подобные правила фактически являются ограничениями на множество путей, по которым «перемещаются» пакеты данных и, как следствие, могут существенно усложнять задачу маршрутизации пакетов в сети.

Заметим, что введение таких ограничений является в некотором смысле реконфигурированием сети, причём не аппаратными средствами, но программными средствами на некоторых узлах (серверах, шлюзах и пр.) сети. Следует отметить, что в данном случае реконфигурирование сети является гибким и по времени, и относительно топологии компьютерной сети.

Степень разработанности проблемы. Впервые графы с нестандартной достижимостью рассмотрены в работах Я.М. Ерусалимского и Е.О. Басанговой. В них рассматривались частично-ориентированные графы, т.е. такие графы на которых представлены как ориентированные дуги, так и неориентированные ребра. Основной особенностью этих работ стало то, что для частично-ориентированных графов рассмотрено два вида ограничений на достижимость. Для первого вида допустимыми путями являлись такие последовательность дуг и ребер, в которых две дуги не шли подряд, т.е. после прохождения по дуге необходимо продолжать движение только по ребру. Для второго вида ограничений, наоборот, допустимыми путями являлись такие последовательность дуг и ребер, в которых два ребра не шли подряд. Такие ограничения на достижимость существенно усложнили задачу нахождения кратчайшего пути, поскольку оказалось, что классические алгоритмы неприменимы и кратчайший путь, в общем случае, может быть найден только при помощи перебора всех возможных путей на графе. Авторами был предложен подход, основанный на построении вспомогательного графа, который позволил свести задачу нахождения кратчайшего пути на графе с ограничениями на достижимость к задаче о нахождении кратчайшего пути на вспомогательном графе без ограничений на достижимость. Перенос задачи о кратчайшем пути с ограничениями на достижимость на вспомагательный граф оказался эффективным с алгоритмической точки зрения. Задача о кратчайшем пути на вспомогательном графе не содержит ограничений на достижимость и может быть решена с помощью алгоритма Дейкстры, это означает что задача о кратчайших путях на графах со смешанной достижимостью решается за полиномиальное время. Следует отметить, что полученные результаты нашли приложение в теории базисов пространств Кёте (см. Басангова Е.О., Драгилев М.М. О пространствах Кёте с кратно-правильными базисами// Математические заметки. — 1986. — Т. 39, вып. 5, — С. 727-735).

Отметим, что в упомянутых работах сформировался довольно удобный на наш взгляд термин «ориентированный граф со смешанной достижимостью». Смешанная достижимость на ориентированном графе заключается в том, что множество дуг графа состоит из объединения двух непересекающихся множеств U_N и U_Z. Смешанным путем на таком графе называется путь, при формировании которого никакие две дуги множества U_Z не идут подряд. Граф со смешанной достижимостью — это граф, на котором рассматриваются в качестве допустимых только смешанные пути. Для графов со смешанной достижимостью рассмотрены задача о кратчайшем пути и задача о случайных блужданиях. Основным методом решения рассмотренных задач на графах со смешанной достижимостью стало построение вспомогательного графа большего размера, но на котором все пути являются допустимыми, и сведение предложенных задач на графах со смешанной достижимостью к аналогичным задачам на вспомогательных графах.

Дальнейшие исследования (работы Я.М. Ерусалимского, В.А. Скороходова, А.Г. Петросяна, М.В. Кузьминовой и Н.Н. Водолазова) посвящены изучению различных видов ограничений достижимости и решению классических задач, таких как задача о кратчайшем пути, задача о максимальном потоке и задача о случайных блужданиях частицы по вершинам, для каждого из рассмотренных ограничений. Среди рассмотренных ограничений выделим магнитные достижимости, барьерную достижимость, монотонную достижимость, вентильную и шлюзовую достижимости (см. [1], [20], [22]-[23]). Во всех перечисленных достижимостях есть свои, уникальные особенности, однако, оказалось, что с некоторыми дополнениями построение вспомогательного графа в каждом случае позволяет сводить классические задачи на графах с рассмотренными ограничениями к их аналогам на вспомогательных графах. В этих работах сформировался еще один термин: «граф с нестандартной достижимостью», т.е. ориентированный граф с некоторым, заранее заданным ограничением достижимости.

Следует отметить ещё одну особенность графов с нестандартной достижимостью — процесс случайного блуждания частицы по вершинам графа в этом случае не является марковским (см. [1], [2], [20], [21], [22]). Переход к рассмотрению соответсвующего процесса на вспомогательном графе, позволил свести этот немарковский процесс к марковскому на вспомогательном графе.

Задачи о потоках в сетях с нестандартной достижимостью (см. [1]-[19], [20], [22], [21]) оказались значительно сложнее зачи о кратчайших путях и о случайных блужданиях. При построении вспомогательного графа каждой дуге исходной сети на вспомогательной сети соответствует несколько дуг, т.е. при нахождении максимального потока для вспомогательной сети может получиться, что по таким дугам будет определен поток большей суммарной величины, чем соответствующая им дуга исходной сети. Таким образом, при переносе решения на исходную сеть, получим поток, который не является допустимым для исходной сети.

Первые итоги исследований по графам с нестандартной достижимостью были подведены в нашей монографии «Графы и сети с нестандартной достижимостью: задачи, приложения» (см. [20]) и диссертационной работе Я.М. Ерусалимского (см. Ерусалимский, Я.М. Разработка и исследование методов решения экстремальных задач на ориентированных графах и сетях с ограничениями на достижимость: дисс. ... д-ра тех. наук: 05.13.17 / — Ростов-на-Дону, 2015. — 258 с.). В последней предложен общий подход к решению классических задач, основанных на понятии достижимости, на графах с нестандартной достижимостью, основанный на построении «развертки» (вспомогательного графа) и сведении задачи на исходном графе с нестандартной достижимостью к соответствующей задаче на развертке без ограничений на достижимость. Одной из частей настоящей работы является обобщение и строгое обоснование такого подхода и исследование его алгоритмических аспектов.

Следующим этапом стали исследования динамической нестандартной достижимости, которая означает, что в каждый момент дискретного времени на графе с заданным ограничением на достижимость разбиение множества дуг формируется по определенному закону (см. [9], [20], [21]). Дальнейшая работа в этом направлении выявила существенную аналогию с нестандартной достижимостью на графах. В качестве таких аналогов нами рассмотрены графы с зависимостями весов дуг от времени и графы с зависимостями от времени длительностей прохождения по дугам (см. [3], [5], [8], [9], [20], [21]). В каждом из случаев мы рассматриваем дискретное время. Классические задачи на таких графах оказались схожими с аналогичными задачами на графах с нестандартной достижимостью, однако, для каждой задачи были выявлены уникальные особенности, существенно влияющие на ее решение. Одной из таких особенностей стал вопрос в задаче о кратчайших путях на графе с меняющимися весами: что считать кратчайшим путём? Путь как таковой — это некоторая последовательность дуг. Прохождение этой последовательности дуг можно начинать в разные моменты времени. Динамическая нестандартная достижимость делает некоторые пути на графе реализуемыми (возможными) только в определенные временные промежутки начала движения по таким путям. Следовательно, существенным становится время начала движения по заданному пути. Таким образом, требуется найти не только сам кратчайший путь как последовательность дуг, но и время начала движения по нему.

Немного в стороне от задач, основанных на понятии достижимости стоят исследования дискретного аналога оператора Лапласа на графах и краевых задач, порождаемых им. Зачастую при таких исследованиях рассматривают некоторые топологические сети, которые имеют только некоторые сходства с графами. Однако, имеются работы, посвященные изучению краевых задач именно на ориентированных графах. Так в работах Д.В. Степового рассмотрены дискретные аналоги оператора Лапласа на ориентированных графах, предложены оценки спектра лапласиана, предложены методы решения некоторых краевых задач, порождаемых оператором Лапласа, на ориентированных графах. Однако, при возникновении ограничений на достижимость метод декомпозиции, предложенный в указанных работах становятся неприменим. Нами предложен метод, позволяющий ставить краевые задачи на графах с нестандартной достижимостью и находить их решения. Все сказанное выше позволяет утверждать, что в данной работе представлены оригинальные задачи и методы их решения.

Цель исследования состоит в развитии и обосновании общих методов решения классических задач о кратчайших путях, о случайных блужданиях и потоковых задач на графах и сетях с нестандартной достижимостью (статической и динамической). В связи с этим ставится задача разработать методы в рамках общей теории графов с нестандартной достижимостью, позволяющие решать классические графовые задачи, такие как задача о кратчайшем пути или о максимальном потоке в сети, в тех случаях, когда неприменимы классические подходы, методы и алгоритмы теории графов.

Объект исследования — нестандартная достижимость и ее аналоги на ориентированных графах.

Предмет исследования — задачи о достижимости, о случайных блужданиях и потоковые задачи на графах с нестандартной достижимостью и ее аналогами.

Методы исследования. В работе использованы методы теории графов, комбинаторного анализа, теории случайных процессов, а также методы алгебры и математического анализа.

Достоверность и обоснованность полученных в диссертационном исследовании результатов обеспечена корректным применением математического аппарата и строгим математическим обоснованием предложенных методов и алгоритмов.

Научная новизна диссертационной работы определяется следующими научными результатами:

1. Введено общее понятие графа с нестандартной достижимостью. Для решения задач на графах с нестандартной достижимостью и их аналогах (динамические графы с зависимостью весов дуг от времени) обобщён и обоснован (теоремы 1.2, 1.7, 1.12, 1.13, 1.14)[1] метод развёрток Басанговой-Ерусалимского.

2. Получены точные оценки сверху для количества дуг кратчайшего пути на графах с нестандартной достижимостью и на графах с зависимостью дуг от времени (теоремы 1.3, 1.8, 5.3)

3. Проведено исследование процессов случайного блуждания частицы по вершинам графа с нестандартной достижимостью. Проанализировано возникновение-исчезновение устойчивых режимов для процесса случайного блуждания на графах с нестандартной достижимостью. Сформулирован и доказан критерий существования стационарного распределения в терминах графовой структуры цепи Маркова (теорема 3.5).

4. Введены и изучены новые объекты – сети со связанными дугами. Разработаны методы нахождения максимального потока в сети со связанными дугами, получены точные верхняя и нижняя оценки его величины (теоремы 4.4, 4.5). Рассмотрение разверток сетей с нестандартной достижимостью как сетей со связанными дугами корректно переносит потоковую задачу с сети с нестандартной достижимостью на её развертку.

[1] Здесь и далее номера теорем, определений и примеров соответствуют тексту диссертации.

5. Разработаны алгоритмы решения задач о кратчайшем пути и о максимальном потоке на графах с нестандартной достижимостью и их аналогах. Получена оценка вычислительной трудоёмкости алгоритма нахождения кратчайшего пути на графе с нестандартной достижимостью, учитывающая размер исходного графа и тип достижимости.

6. Предложены общие правила построения временной развёртки для произвольного графа с зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени и доказана сводимость задач о достижимости и о максимальном потоке на графе с зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени к аналогичным задачам на временной развёртке (теорема 5.7).

7. Доказаны существование и единственность решения задачи Дирихле на графе с нестандартной достижимостью (теорема 6.11).

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Значимость результатов диссертации заключается в том, что полученные результаты существенно расширяют возможности использования аппарата теории графов к исследованию дискретных процессов и явлений, в которых имеют место реальные ограничения, в том числе к задачам навигации и потоковым задачам в информационных сетях. Использование методов, разработанных для графов с нестандартной достижимостью, позволяет учитывать такие особенности моделей и процессов, которые не могут быть учтены при использовании методов классической теории графов.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Обобщены и обоснованы методы решения классических задач о кратчайших путях и случайных блужданиях на графах с нестандартной достижимостью (статической и динамической).

2. Введены и изучены новые объекты — графы и сети с зависимостью весов дуг от времени, в том числе с зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени.

3. Разработаны и обоснованы методы решения задач о максимальном потоке в сети в различных постановках, а также задач о кратчайших путях и о случайных блужданиях на графах с зависимостью весов дуг от времени.

4. Исследованы дискретные случайные процессы на графах с нестандартной достижимостью и их аналогах. Доказана сводимость в общем случае немарковского процесса случайного блуждания по вершинам графа с нестандартной достижимостью или её аналогом к марковскому процессу на вспомогательном графе.

5. Введены и изучены новые объекты — обобщенные сети со связанными дугами как средство моделирования потока в сети с нестандартной достижимостью.

6. Для задачи о максимальном потоке в обобщенной сети со связанными дугами получены точные оценки его величины. Разработаны методы нахождения максимального потока в обобщенной сети со связанными дугами.

7. Для дискретного аналога оператора Лапласа разработаны и обоснованы методы решения краевых задач на его основе на графах с нестандартной достижимостью.

Аппробация работы.

Основные результаты докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- IV Международная научная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2011)». Воронеж, 2011.

- V Международная научная конференция «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2012)». Воронеж, 2012.

- Международная конференция «Воронежская весенняя школа „Понтрягинские чтения — XXIV“». Воронеж, 2013 года.

- VI Международная научная конференция «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2013)». Воронеж, 2013.

- IV Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа — IV». Ростов-на-Дону, 2014.

- V Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа — V». Ростов-на-Дону, 2015.

- Международная конференция «Воронежская весенняя школа „Понтрягинские чтения — XXVI“». Воронеж, 2015.

- VIII Международная научная конференция «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2015)». Воронеж, 2015.

- VI Международная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа — VI». Ростов-на-Дону, 2016.

- Международная конференция «Воронежская весенняя школа „Понтрягинские чтения — XXVII“». Воронеж, 2016.

- IX Международная научная конференция «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2016)». Воронеж, 2016.

- Семинар в ИПУ РАН (Москва, 2015, рук. проф. Кузнецов О. П.).

- Семинар кафедры алгебры и дискретной математики Южного федерального университета (Ростов-на-Дону, 2008–2016, рук. проф. Ерусалимский Я. М.).

Результаты, приведенные в диссертационной работе, составляют пп. 2.3, 2.3.1-2.3.5 обзорной статьи Л.Ю. Жиляковой «Графовые динамические модели и их свойства»[2].

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 41 научной работе, в том числе 15 — в изданиях, рекомендованных ВАК РФ и в рецензируемых зарубежных журналах, индексируемых в Web of Science и Scopus ([1]-[15]), и в двух монографиях ([20], [21]). В диссертацию включены результаты, полученные либо соискателем лично, либо при его непосредственном участии. В работах [1], [16]-[17], выполненых совместно с научным консультантом, Я.М. Ерусалимскому принадлежит постановка задачи и определение общего подхода, автору диссертации принадлежат формулировки и подробные доказательства ключевых теорем, а также разработка алгоритмов. В работах [8]-[10], [15], выполненых в соавторстве с А.С. Чеботаревой, в работе [11], выполненной в соавторстве с М.В. Шевелевым и в работах [12] и [14], выполненных в соавторстве с Х. Абдулрахманом, вклад автора диссертации заключается в постановке задачи, ключевых идеях доказательств и непосредственном руководстве работой. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Содержание работы. Диссертация состоит из введения и шести глав. Общий объём работы составляет 255 стр., библиографический список содержит 139 наименований.

Во введении обоснованы актуальность и научная новизна исследования, сформулирована цель работы и дана краткая аннотация содержания диссертации.

В главе 1 «Нестандартная достижимость на ориентированных графах» рассмотрены различные виды нестандартной достижимости: магнитная достижимость нескольких видов, вентильная достижимость нескольких видов, механическая достижимость. Дано общее определение понятия графа с нестандартной достижимостью. Введены понятия допустимых и недопустимых путей на графах с нестандартной достижи-

[2]Жилякова Л.Ю. Графовые динамические модели и их свойства // Автоматика и телемеханика. 2015. № 8. С.115-139. англ пер. L.Yu. Zhilyakova. Dynamic Graph Models and Their Properties// Automation and Remote Control, 2015, Vol. 76, No. 8, pp. 1417-1435.

мостью.

Определение 1.1 *Ориентированным графом (орграфом) будем называть тройку $G(X, U, f)$, где $X (\neq \emptyset)$ – множество, называемое множеством вершин графа, U – множество (возможно и пустое), называемое множеством дуг, f – отображение, действующее из U в $X \times X$, называемое отображением инцидентности.*

Введём в рассмотрение стандартные отображения $p_1 : X \times X \to X$ и $p_2 : X \times X \to X$ по следующим правилам: $p_1(x, y) = x, p_2(x, y) = y$. Тогда вершину $x = (p_1 \circ f)(u)$ будем называть начальной вершиной дуги u, а вершину $y = (p_2 \circ f)(u)$ – концевой вершиной дуги u.

Определение 1.3 *Путем длины n $(n \in \mathbb{N})$ на графе G будем называть отображение $\mu : [1; n]_N \to U$ (где $[1; n]_N = \{1, 2, \ldots, n\}$), такое, что $(p_2 \circ f \circ \mu)(i) = (p_1 \circ f \circ \mu)(i + 1)$, $i \in [1; n - 1]_N$*

Графы с магнитной достижимостью

Пусть $G(X, U, f)$ – ориентированный граф, множество дуг которого разбито на два подмножества $U = U_M \cup U_H$, $U_M \cap U_H = \emptyset$. Множество U_M называется множеством магнитных дуг, а U_H – множеством немагнитных дуг.

Рассмотрено три вида вида условий магнитной достижимости:

1. Магнитная достижимость с накоплением неубывающей магнитности, которая состоит в том, что с каждым начальным отрезком $[1; m]_Z$ произвольного пути μ связана величина $\lambda_\mu(i)$, равная количеству магнитных дуг этого отрезка, причём каждая дуга считается столько раз, сколько она встретилась на рассматриваемом отрезке пути μ.

Определение 1.11 *Пусть μ – путь на графе G. Будем называть его магнитно-накопительным путем порядка k (≥ 1) длины n $(n \in \mathbb{N})$ с неубывающей магнитностью, если выполняется следующее условие:*

$$\forall m \ (\lambda_\mu(m) \geq k) \wedge \big([(p_2 \circ f \circ \mu)(m)]^+ \cap U_M \neq \emptyset\big) \Rightarrow (\mu(m + 1) \in U_M).$$

Последнее означает, что для каждого номера m, если путь μ к m-тому шагу от своего начала накопил магнитность величины $\lambda_\mu(i)$, не меньшей заданного значения k, и среди дуг, выходящих из концевой вершины m-той дуги, есть хотя бы одна магнитная, то следующая (m+1-я) дуга пути μ должна быть только дугой из множества U_M. В противном случае, путь μ не является магнитно-накопительным путём порядка k. Множество допустимых путей на графах с нестандартной достижимостью является подмножеством множества всех путей графа.

Определение 1.12 *Граф $G(X, U, f)$, на котором рассматриваются только магнитно-накопительные пути порядка k будем называть графом с накоплением неубывающей магнитности порядка k.*

Пример 1.1

Рассмотрим граф на рис.1 при $k = 2$, дуги $\{u_1, \ldots, u_{10}\}$ которого таковы, что $f(u_1) = (1, 2)$, $f(u_2) = (1, 4)$, $f(u_3) = (2, 3)$, $f(u_4) = (3, 4)$, $f(u_5) = (3, 5)$, $f(u_6) = (3, 6)$, $f(u_7) = (3, 7)$, $f(u_8) = (4, 2)$, $f(u_9) = (5, 7)$, $f(u_{10}) = (6, 7)$.

Положим $U_M = \{u_1, u_2, u_5, u_8, u_9\}$ и $U_H = \{u_3, u_4, u_6, u_7, u_{10}\}$.

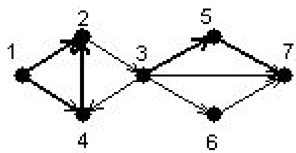

Рисунок 1 – Граф G с магнитной достижимостью.

Рассмотрим путь $\mu = \{u_2, u_4, u_3, u_9\}$. Он не является магнитно-накопительным путем порядка 2, так как величина $\lambda_\mu(3)$ $(= 2)$ не меньше значения k $(= 2)$, однако, следующая дуга пути μ (дуга u_9) является немагнитной.

Путь $\eta = \{u_2, u_4, u_3, u_5, u_8\}$ является магнитно-накопительным путем порядка 2.

Переход от рассмотрения всего множества путей к подмножеству приводит к утрате основных свойств, на использовании которых основаны известные алгоритмы нахождения кратчайших путей. Так, для большинства видов нестандартной достижимости множество допустимых путей не обладает транзитивным свойством. Другими словами, если вершина y достижима из x, а вершина z достижима из y при заданном ограничении, то из этого не следует достижимость вершины z из вершины x при заданном ограничении на прохождение по дугам.

Кратчайшие пути, в этом случае, не обладают и экстремальным свойством, состоящим в том, что любой отрезок кратчайшего пути является кратчайшим путем между своими граничными вершинами, а именно на нем основана большая часть алгоритмов нахождения кратчайших путей. Это означает, что классические алгоритмы нахождения кратчайших путей на графах с нестандартной достижимостью неприменимы.

Для решения задач о достижимости вершин и кратчайших путях в такой ситуации автором настоящей работы совместно с Я.М. Ерусалимским (см. [20], [21]) предложен подход, согласно которому строится вспомогательный граф (развёртка) большего размера, но на котором все пути являются допустимыми.

Опишем построение вспомогательного графа $G'(X', U', f')$ для графа G с накоплением неубывающей магнитности порядка k:

Каждой вершине x исходного графа G ставится в соответствие $k+1$ вершина $\{x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\}$ на вспомогательном графе G'. Дугам исходного графа ставятся в соответствие дуги вспомогательного графа по следующему правилу:

Каждой дуге $u \in U_M$ (для определённости положим $f(u) = (x, y)$) на G' соответствует $k+1$ дуга $\{u^{(0)}, \ldots, u^{(k)}\}$ такая, что
$f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(j+1)})\ \forall j \in [0; k-1]_Z$ и $f'(u^{(k)}) = (x^{(k)}, y^{(k)})$.

Каждой дуге $u \in U_H$ (для определённости положим $f(u) = (x, y)$) на G' соответствует:

А) если $U_M \cap [x]^+ \neq \emptyset$, то k дуг $\{u^{(0)}, \ldots, u^{(k-1)}\}$ таких, что
$f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(j)})\ \forall j \in [0; k-1]_Z$;

Б) если $U_M \cap [x]^+ = \emptyset$, то $k+1$ дуга $\{u^{(0)}, \ldots, u^{(k)}\}$ такая, что
$f'(u^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(j)})\ \forall j \in [0; k]_Z$.

Определение 1.13 *Зададим множества:* $X^{(0)} = \{x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\}$, $X^{(1)} = \{x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\}$, $\ldots$, $X^{(k)} = \{x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}\}$. *Очевидно,* $X' = X^{(0)} \cup X^{(1)} \cup \ldots \cup X^{(k)}$ *или другими словами, множество вершин вспомогательного графа разбивается на множества уровней магнитности. Каждое множество* $X^{(i)}$ *будем называть* i*-тым уровнем магнитности.*

Установлено однозначное соответствие множества путей вспомогательного графа и множества допустимых путей исходного графа:

Теорема 1.1 *Любому пути* μ' *с началом на нулевом уровне магнитности* $X^{(0)}$ *на вспомогательном графе* G' *соответствует маг-*

нитно-накопительный путь μ на исходном графе G и для того, чтобы вершина y была магнитно-достижима при условии накопления неубывающей магнитности из вершины x на графе G необходимо и достаточно, чтобы на G' была достижима из $x^{(0)}$, по крайней мере, одна из вершин множества $V_y = \{y^{(0)}, \ldots, y^{(k)}\}$.

Теорема 1.2 *Кратчайшему пути с началом на нулевом уровне магнитности на вспомогательном графе G' соответствует кратчайший магнитно-накопительный путь на исходном графе G.*

Теорема 1.3 *На вспомогательном графе для графа с накоплением неубывающей магнитности порядка k ($k \geq 1$) длина произвольного кратчайшего пути ограничена сверху величиной $n - 1$, где $n = |X|$.*

Пример 1.2

На рис.2 показан вспомогательный граф G' для графа из примера 1.1.

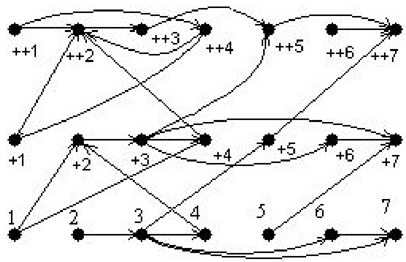

Рисунок 2 – Вспомогательный граф G'.

При рассмотрении примера 1.1 мы показали, что путь $\mu = \{u_2, u_4, u_3, u_9\}$ не является магнитно-накопительным путем порядка 2. И действительно, на вспомогательном графе ему не соответствует ни одного пути. Пути $\eta = \{u_2, u_4, u_3, u_5, u_8\}$ соответствует путь $\eta' :\ 1^{(0)} \to 4^{(1)} \to 2^{(2)} \to 3^{(2)} \to 5^{(2)} \to 7^{(2)}$.

2. Магнитная достижимость с возрастанием-убыванием магнитности, которая состоит в том, что с каждым начальным отрезком $[1; m]_Z$ произвольного пути μ связана величина

$$\hat{\lambda}_\mu(m) = \max_{l=1,\ldots,m} \left\{ \sum_{j=l}^{m} |\mu_0(j) \cap U_M| - \frac{k}{s} \sum_{j=l}^{m} |\mu_0(j) \cap U_H| \right\}.$$

Определение 1.16 *Путь μ будем называть магнитно-накопительным путем порядка (k, s) длины n ($\in N$) при величине размагничива-*

ния $\dfrac{k}{s}$ с возрастанием-убыванием магнитности на графе G, если выполняется следующее условие:

$$\forall\, m\; (\hat{\lambda}_\mu(m) \geq k) \wedge ([(p_2 \circ f \circ \mu)(m)]^+ \cap U_M \neq \emptyset) \Rightarrow (\mu(m+1) \in U_M).$$

Определение 1.17 *Граф G на котором рассматриваются только магнитно-накопительные пути порядка (k, s) с возрастанием-убыванием магнитности будем называть графом с возрастанием-убыванием магнитности k-того уровня при величине размагничивания $\dfrac{k}{s}$.*

Графы с вентильной достижимостью

Пусть граф $G(X, U, f)$ такой, что его множество дуг разбито на несколько подмножеств $U = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_k$, при этом $U_j \cap U_i = \emptyset$ для всех i и j таких, что $0 \leq i < j \leq k$.

Пусть μ – путь длины n на графе G'. С каждым начальным отрезком $[1; i]_Z$ пути μ свяжем числовую характеристику $\rho_\mu(i) = 1 + d$, где d – максимальное число, для которого выполняется соотношение

$$|\mu([1; i]_N) \cap U_d| \neq 0$$

Доопределим характеристику ρ_μ, полагая $\rho_\mu(0) = 0$.

Определение 1.20 *Путь μ будем называть вентильным путем порядка k на графе G, если выполняется следующее условие:*

$$\forall\, m \in [0; n-1]_Z\; (\rho_\mu(m) = j) \Rightarrow (\psi(m+1) \in \bigcup_{i=0}^{j} U_i).$$

Другими словами, прохождение по дуге множества U_i «открывает» для проходения множество U_{i+1} для всех $i \in [0; k-1]_Z$ и до тех пор, пока множество U_j не открыто для прохождения, его дуги не могут быть использованы для построения следующего отрезка пути.

Определение 1.21 *Граф G, на котором допустимыми считаются только вентильные пути порядка k будем называть графом с условием вентильно-накопительной достижимости порядка k.*

Графы с нестандартной достижимостью (общий подход)

Определение 1.27 *Графом с нестандартной достижимостью будем называть ориентированный граф $G(X, U, f)$, для которого заданы:*

1. *Два набора подмножеств дуг $U_\Delta = \{U_0, \ldots, U_m\}$ и $U^\Delta = \{U^{(0)}, \ldots, U^{(k)}\}$, при этом $U_i \cap U_j = \emptyset \ \forall\, i \neq j$. ($k$, $m \in \mathbb{Z}_+$ – заранее известные, фиксированные числа).*

2. *Отображение $\varphi_\mu : \mathbb{N} \to [0; k]_Z$, которое будем называть числовой характеристикой произвольного пути μ.*

3. *Формальное ограничение на достижимость.*

Далее будем считать, что характеристика φ_μ произвольного пути μ определяется рекуррентно следующим образом:

$$\varphi_\mu(i) = F(\varphi_\mu(i-1), a_i), \quad \forall\, i > 0,\ \varphi_\mu(0) = 0,$$

где число a_i зависит от того, к какому множеству из набора U_Δ принадлежит дуга $\mu(i)$, а $F : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to [0; k]_Z$ – некоторая функция, например, определяемая правилом: $F(x, y) = \min\{k, x + y\}$.

Формальные ограничения можно разбить на два типа: строгие и нестрогие.

Ограничения строгого типа можно записать в виде:

$$\forall\, i\ (\varphi_\mu(i) = j) \Rightarrow (\mu(i+1) \in U^{(j)}).$$

Другими словами, если характеристика φ пути μ на шаге i равна числу j, то следующая (i + 1-я) дуга пути μ обязана быть только из множества $U^{(j)}$.

Ограничения нестрогого типа можно записать в виде:

$$\forall\, i\ (\varphi_\mu(i) = j) \& ([(p_2 \circ f \circ \mu)(i)]^+ \cap U^{(j)} \neq \emptyset) \Rightarrow (\mu(i+1) \in U^{(j)}).$$

Другими словами, если характеристика φ пути μ на шаге i равна числу j и из концевой вершины i-той дуги выходит хотя бы одна дуга множества $U^{(j)}$, то следующая (i+1–я) дуга пути μ обязана быть только из множества $U^{(j)}$.

Определение 1.28 *Путь μ будем называть допустимым путем на графе G с нестандартной достижимостью, если он удовлетворяет формальному ограничению, заданному на G.*

Таким образом, выбором двух наборов подмножеств, числовой характеристики произвольного пути и заданием формального ограничения, любой граф, на котором не все пути являются допустимыми, можно записать в терминах графов с нестандартной достижимостью. Более того, классические ориентированные графы являются частным случаем графов с нестандартной достижимостью.

Общий подход к решению задачи о достижимости на графах с нестандартной достижимостью состоит в построении вспомогательного графа большего размера, на котором все пути являются допустимыми.

Вспомогательный граф $G'(X', U', f')$ будем строить следующим образом:

Каждой вершине x исходного графа G ставим в соответствие $k+1$ вершину $\{x^{(0)}, \ldots, x^{(k)}\}$ на вспомогательном графе G'. Дуги строятся по правилу:

Пусть u такая, что $f(u) = (x, y)$, тогда

а) для всех $i \in [0; m]_Z$, $j \in [0; k]_Z$ и каждой дуги $u \in U_i \cap U^{(j)}$ строим дугу $u_i^{(j)}$ такую, что $f'(u_i^{(j)}) = (x^{(j)}, y^{(F(j, a_i))})$.

б) если выбрано формальное ограничение нестрогого типа, то, кроме этих дуг, строим дополнительные дуги по правилу:

для всех $i \in [0; m]_Z$, $j \in [0; k]_Z$ и каждой дуги $u_i \in U_i \cap (U \backslash U^{(j)})$ такой, что $[(p_1 \circ f)(u_i))]^+ \cap U^{(j)} = \emptyset$ строим дугу u_i' такую, что $f'(u_i') = (x^{(j)}, y^{(F(j, a_i))})$.

Теорема 1.14 *Любому пути μ' на вспомогательном графе G' соответствует допустимый путь μ на исходном графе G и вершина y достижима из x на исходном графе с нестандартной достижимостью G тогда и только тогда, когда на вспомогательном графе G' из вершины $x^{(0)}$ достижима, по крайней мере, одна из вершин множества $V_y = \{y^{(0)}, \ldots, y^{(k)}\}$.*

Таким образом, для всех рассмотренных случаев предложены правила построения вспомогательного графа, установлено однозначное соответствие множества путей вспомогательного графа и множества допустимых путей исходного графа (теоремы 1.1, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.9, 1.10, 1.11, 1.14), а также кратчайших путей вспомогательного и исходного графов (теоремы 1.2, 1.8, 1.12, 1.13). Кроме этого, разработаны алгоритмы нахождения кратчайших путей на графе с нестандартной достижимостью и приведена их оценка сложности.

Завершает главу применение подхода нахождения кратчайшего пути на графе с нестандартной достижимостью к решению оптимизационной задачи о перераспределении ресурсов.

Глава 2 «Случайные процессы и нестандартная достижимость» посвящена изучению задачи о случайном блуждании частицы по вершинам графа с нестандартной достижимостью. Особенностью такой задачи является то, что процесс случайного блуждания на графе с нестандартной достижимостью не является марковским, поскольку у частицы появляется некоторая «память» о проделанном ею пути.

Показано, что такой немарковский процесс случайного блуждания сводится к марковскому процессу на вспомогательном графе. Разработаны методы нахождения вероятностей перехода из вершины в вершину графа с нестандартной достижимостью за некоторое конечное число шагов (теоремы 2.1, 2.2, 2.3).

В качестве приложений графов с нестандартной достижимостью рассмотрен «туннельный эффект», возникающий при бомбардировании твердокристаллической решетки частицами. Показано, что внутренняя структура связей такой решетки может существенно влиять на прохождение частиц через нее. Рассмотрен вид структур «ускоряющих» решеток и «абсолютно непропускающих» решеток.

Третья глава «Стационарное распределение на графах» посвящена вопросам устойчивости и стационарного распределения на графах, в том числе на графах с нестандартной достижимостью. Введены понятия устойчивых, полуустойчивых и неустойчивых режимов (циклов) графа. Разработаны алгоритмы нахождения устойчивых и неустойчивых циклов. Показано, что на графе с ограничением на достижимость устойчивыми циклами могут стать неустойчивые циклы на этом же графе без ограничения на достижимость, а устойчивые циклы (в этом случае) могут исчезнуть.

Так же, введено понятие периодического устойчивого цикла: *устойчивый режим называется периодическим, если при возведении матрицы переходных вероятностей в некоторую степень, все строки, соответствующие этому режиму вычисленной матрицы получаются некоторой перестановкой этих же строк исходной матрицы.* Такая ситуация возникает лишь в том случае, когда устойчивый режим является компонентой сильной связности и из каждой вершины этой компоненты выходит ровно одна дуга, ведущая в вершину данного режима с вероятностью перехода, по ней равной единице. Показано, что для цепи Маркова, в которой присутствует хотя бы один периодический режим не существует стационарного распределения.

Сформулирована и доказана теорема о виде (графовой структуре) марковской цепи для которой существует стационарное распределение (теорема 3.5).

В качестве приложения устойчивых и неустойчивых режимов рассмотрена задача нахождения областей локального экстремума ограниченных функций, заданных на сетке.

В главе 4 «Потоки в сетях с нестандартной достижимостью» изучается задача о максимальном потоке в сети с нестандартной достижимостью. Рассмотрение данной задачи для сетей с нестандартной достижимостью потребовало обобщения самого понятия ориентированной сети и допустимого потока в ней. В этой главе дано определение ориентированной сети со связанными дугами, т.е. такой сети, у которой выделены попарно непересекающиеся подмножества дуг. Для каждого из таких подмножеств определена не пропускная способность каждой из дуг, а только суммарная пропускная способность дуг этого подмножества. Ясно, что это потребовало корректировки и определения допустимого потока в такой сети. Предложен алгоритм нахождения максимального потока в сетях со связанными дугами.

Показано, что потоковая задача на исходном графе с нестандартной достижимостью сводится к потоковой задаче в сети со связанными дугами, которой является вспомогательный граф.

Однако, как показали дальнейшие исследования аналогов нестандартной достижимости на графах, такого определения сети со связанными дугами недостаточно. Поэтому было введено понятие обобщенной сети со связанными дугами: *обобщенной сетью со связанными дугами называется ориентированная сеть с введенным на множестве ее дуг отношением связанности.* Отношение связанности вносит следующие коррективы в задачу нахождения максимального потока: если по некоторой дуге u сети G пропущен поток величины F, то пропускная способность каждой дуги v, связанной с дугой u отношением влияния, становится равной $\max\{0, c(v) - F\}$.

Показано, что для сетей с нестандартной достижимостью и обобщенных сетей со связанными дугами нарушается справедливость теоремы Форда и Фалкерсона о том, что величина максимального потока в сети равна пропускной способности минимального разреза. Получены точные оценки величины максимального потока в обобщенной сети со связанными дугами (теоремы 4.5, 4.6). Предложены эвристические алгоритмы, которые в большинстве случаев находят максимальный поток в обобщенной сети со связанными дугами, а значит, и в сети с нестандартной достижимостью.

Так же рассмотрены и решены потоковые оптимизационные задачи по двум критериям:

1. Задача о максимальной прибыли в сети от прохождения по ней потока заданной величины, которая заключается в том, что для каждой дуги указаны пропускная способность, вероятность перехода по данной дуге (которая играет роль распределения потока) и величина прибыли от прохождения по ней единичного потока. Необходимо при заданной величине потока назначить вероятности перехода по дугам сети таким образом, чтобы прибыль от потока была максимальной.

2. Задача о максимальной прибыли от потоков с обратной связью в сетях с ограничениями на достижимость, которая состоит в том, что пропускная способность каждой дуги задана как в прямом направлении, так и в обратном. В результате возникает пара потоков, которая

образует поток с обратной связью. Ясно, что потоковая задача такого вида имеет смысл только в орсетях с ограничением на достижимость. Рассмотрена задача максимизации прибыли от потоков такого вида при условии связи и ограничениях на достижимость по дугам выделенных подмножеств.

Завершает главу рассмотрение задачи о максимальном потоке в сети, для каждой дуги которой вместе с пропускной способностью задана вторая величина – доля приходящего в её начальную вершину потока, которая должна быть пропущена по этой дуге. Рассмотрены два вида такого распределения потока: жёсткое и нежёсткое. В случае жёсткого распределения, приходящий в некоторую вершину поток распределяется по выходящим дугам строго в указанных для дуг долях. В случае нежёсткого распределения, приходящий в некоторую вершину поток распределяется по выходящим дугам таким образом, чтобы долевая пропорциональность величин потока выполнялась только для тех дуг, на которых полученная величина потока меньше пропускной способности. Последнее означает, что в некоторых случаях нежёстко распределённый поток приходящий в некоторую вершину можно «продавить» по выходящим дугам помимо того, что проходит через данную вершину при условии жёсткого распределения.

Показано, что для условия жёсткого распределения решение рассматриваемой задачи существует и единственно. Разработаны алгоритмы нахождения максимального потока для каждого условия распределения потока.

Глава 5 «Зависимость ограничений достижимости от времени» посвящена изучению графов с зависимостью некоторых характеристик от времени. В качестве меняющихся характеристик рассмотрены: зависимость весов дуг от времени, зависимость от времени длительности прохождения по дугам, а также зависимость самих условий нестандартной достижимости. Показано, что графы с такими зависимостями характеристик от времени являются аналогами графов с нестандартной достижимостью и для решения классических задач на таких графах можно использовать методы, разработанные для графов с нестандартной достижимостью. Однако, есть некоторые уточнения. Так для задачи о кратчайшем пути на графе с меняющейся длительностью прохождения по дугам возникает вопрос о нахождении не только кратчайшего пути, но и времени начала движения по нему, что существенно усложняет переборные алгоритмы поиска. Показано, что методы, разработанные для графов с нестандартной достижимостью, позволяют одновременно находить как сам кратчайший путь, так и время начала движения по нему.

Также показано, что потоковые задачи в сетях с зависимостью рассмотренных характеристик от времени сводятся к соответствующим потоковым задачам в обобщенных сетях со связанными дугами.

Что касается процессов случайного блуждания по вершинам рассматриваемых графов, то отметим, что такие процессы являются марковскими, в отличие от процессов случайного блуждания по вершинам графов с нестандартной достижимостью. Однако, можно утверждать, что методы, разработанные для графов с нестандартной достижимостью, позволяют более удобно осуществлять нахождение вероятностей перехода из вершины в вершину. Более того, показано, что классические методы неприменимы для процессов случайного блуждания по вершинам графов с зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени. Длительность прохождения по одной и той-же дуге может принимать различные значения в различные моменты времени, следовательно, нахождение вероятностей перехода из вершины в вершину возможно лишь при помощи перебора всех возможных путей, а затем выбора из них подходящих и нахождения вероятностей перехода.

Разработан подход, согласно которому вначале производится построение вспомогательного графа, затем матрица переходных вероятностей вспомогательного графа разбивается в сумму матриц $P = \sum_i P_i$, где матрица P_i – это матрица переходных вероятностей только по дугам длительности i. Нахождение вероятностей перехода из вершины в вершину сводится к определенному порядку действий над матрицами P_i (теорема 5.14).

Шестая глава «Оператор Лапласа и задача Дирихле на графах с нестандартной достижимостью» посвящена изучению дискретного аналога оператора Лапласа, а также задачи Дирихле, порождаемой лапласианом на графах с нестандартной достижимостью. Введено понятие границы графа с нестандартной достижимостью, изучены некоторые свойства гармонических и субгармонических функций, заданных в вершинах графа с нестандартной достижимостью. Получены дискретные аналоги первой и второй формул Грина (теорема 6.9).

Сформулирована и доказана теорема существования и единственности решения задачи Дирихле на графе с нестандартной достижимостью (теорема 6.11).

Из приведенного обзора результатов видно, что представленная защите диссертация соответствует паспорту специальности 05.13.17 – теоретические основы информатики (п.10. Разработка основ математической теории языков и грамматик, теории конечных автоматов и теории графов).

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в журналах из перечня ВАК, Scopus, Web of Science

1. Скороходов, В. А. Графы с вентильной достижимостью. Марковские процессы и потоки в сетях / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2003. — № 2, — С. 3–5. (Zbl 1050.68109)

2. Скороходов, В. А. Устойчивость и стационарное распределение на графах с нестандартной достижимостью / В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2007. — № 4. — С. 17–21

3. Скороходов, В. А. Достижимость на графах с ограничением на прохождение по дугам и зависимостью весов дуг от времени / В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. —2009. — № 6. — С. 14–17. (Zbl 1224.68064)

4. Скороходов, В. А. Задача о перераспределении ресурсов на графах с нестандартной достижимостью / В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2010. — № 1. — С. 22–26. (Zbl 1224.94073)

5. Скороходов, В. А. Потоки в сетях с меняющейся длительностью прохождения / В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кав-

казский регион. Естественные науки. — 2011. — № 1, — С. 21–26. (Zbl 1274.90061)

6. Скороходов, В. А. Потоки в обобщенных сетях со связанными дугами / В. А. Скороходов //Моделирование и анализ информационных систем. — 2012. — Т. 19, № 2. — С. 41–52.

7. Скороходов, В. А. Задача Дирихле на графах с нестандартной достижимостью / В. А. Скороходов // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2013. — № 1. — С. 211–223.

8. Скороходов, В. А. Максимальный поток в сети с циклической зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени / В. А. Скороходов, А. С. Чеботарева // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2011. — № 5. — С. 23–27.

9. Скороходов, В. А. Графы с зависимостью некоторых характеристик от времени: достижимость, случайные процессы / В. А. Скороходов, А. С. Чеботарева // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2012. — № 3. — С. 13–18.

10. Скороходов, В. А. Задача о максимальном потоке в сети с особыми условиями распределения потока / В. А. Скороходов, А. С. Чеботарева // Дискретный анализ и исследование операций. — 2015. — Т. 22, № 3. — С. 55–74. (Zbl 1349.90175)

11. Скороходов, В. А. Задачи о максимальном потоке в сетях с потерями в вершинах / В. А. Скороходов, М. В. Шевелев // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2015. — № 2 (186). — С. 47–53.

12. Скороходов, В. А. Полные двухресурсные сети с петлями / Х. Абдулрахман, В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2016. — № 2 (190). — С. 10–16.

13. Скороходов, В. А. Задача нахождения порогового значения в эргодической ресурсной сети / В. А. Скороходов // Управление большими системами. Выпуск 63. — М.: ИПУ РАН, 2016. — С. 6–23.

14. Скороходов, В. А. Ресурсные сети с магнитной достижимостью / Х. Абдулрахман, В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2016. — № 4 (192). — С. 4–10.

15. Skorokhodov, V. A. The Maximum Flow Problem in a Network with Special Conditions of Flow Distribution / V. A. Skorokhodov, A. S. Chebotareva // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2015. — Vol. 9, No. 3. — P. 435–446.

Статьи в спецвыпусках журналов из перечня ВАК РФ

16. Ерусалимский, Я. М. Достижимость на графах с условиями затухания и усиления / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2004. Спецвыпуск. Математика и механика. — С. 110–112. (Zbl 1061.05049)

17. Скороходов, В. А. Общий подход к нестандартной достижимости на графах / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естестественные науки. — 2005. Спецвыпуск. Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. — С. 64-67.

Статьи в приложениях к журналам из перечня ВАК РФ

18. Скороходов, В. А. Потоки в сетях со связанными дугами / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. — 2003. — № 8, — С. 3–8. (Zbl 1055.90538)

19. Скороходов, В. А. Прибыль от потоков с обратной связью в ор-сетях с ограничениями на достижимость / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Известия ВУЗов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. — 2003. — № 8. — С. 9–12. (Zbl 1055.90537)

Монографии

20. Ерусалимский, Я. М. Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения: моногр. / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов, М. В. Кузьминова, А. Г. Петросян. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2009. — 195 с.

21. Скороходов, В. А. Нестандартная достижимость на графах: модели и алгоритмы / В. А. Скороходов, Я. М. Ерусалимский. — Lambert Academic Publishing (LAP, Saarbrücken, Germany), 2011. — 188 p., ISBN 978-3-8433-0592-1.

Прочие публикации

22. Скороходов, В. А. Случайные блуждания и потоки в сетях с магнитной достижимостью / В. А. Скороходов // В сб.: Модели и дискретные структуры. — Элиста, 2002. — С. 93–100.

23. Скороходов, В. А. Графы с магнитной достижимостью. Марковские процессы и потоки в сетях / В. А. Скороходов. — Ростов-на-Дону, 2003. — 16 С. Деп. в ВИНИТИ 06.03.2003, № 410-В2003.

24. Скороходов, В. А. Зависимость нестандартной достижимости от времени / В. А. Скороходов // В сб.: Труды научной школы Симоненко И.Б. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2010. — С. 235–242.

25. Ерусалимский, Я. М. Достижимость на графах с зависимостью ограничений от времени / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2012): материалы V Международной научной конференции. — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2012. — С. 111-112.

26. Ерусалимский, Я. М. Задача о кратчайшем пути на графах с меняющейся длительностью при условии случайных задержек на дугах / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения XXIV». — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2013. — С. 79–80.

27. Ерусалимский, Я. М. Уравнения математической физики на графах с нестандартной достижимостью / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2013): сборник трудов VI международной конференции. — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2013. — С. 96–99.

28. Ерусалимский, Я. М. О гармонических функциях на графах с нестандартной достижимостью / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа — IV». Тезисы докладов. — Ростов н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ ЮФУ, 2014. — С. 88–89.

29. Ерусалимский, Я.М. О потоках в сети с ограничениями на достижимость. Вычислительный эксперимент / Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Современные методы теории краевых задач:

материалы Международной конференции: Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения — XXVI». — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. — С. 89–90.

30. Скороходов, В. А. Задача о случайных блужданиях на графах с зависимостью некоторых характеристик от времени / В. А. Скороходов, А. С. Чеботарева // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2011): материалы IV Международной научной конференции. — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2011. — С. 302–304.

31. Скороходов, В. А. Задача о случайных блужданиях на графах с зависимостью некоторых характеристик от времени / В. А. Скороходов, А. С. Чеботарева // Сб. научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции «Современные направления теоретических и прикладных исследований 2011», 15-28 марта 2011г. — Т. 8. Физика и математика. — Одесса: Черноморье, 2011. — С. 63–72.

32. Скороходов, В. А. Задача теплопроводности на графах с циклической зависимостью весов дуг от времени / В. А. Скороходов, А. С. Чеботарева // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2012): материалы V Международной научной конференции. — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2012. — С. 261–262.

33. Скороходов, В. А. Задача Дирихле на графах с зависимостью длительностей прохождения по дугам от времени начала движения по ним / В. А. Скороходов, А. С. Чеботарева // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2013): сборник трудов VI международной конференции. — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2013. — С. 223–224.

34. Скороходов, В. А. Задача о потере потока в ориентированных сетях / В. А. Скороходов, М. В. Шевелев // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2013): сборник трудов VI международной конференции. — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2013. — С. 275–277.

35. Скороходов, В. А. Оценка спектрального радиуса ориентированного графа при стягивании произвольной дуги / С. Ч. Муртузалиева,

В. А. Скороходов // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2015): сборник трудов VIII международной конференции. — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. — С. 261–263.

36. Скороходов, В. А. Задача о максимальном жёстко распределённом потоке / В. А. Скороходов // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа — V». Тезисы докладов. — Ростов н/Д: Изд-во ДГТУ, 2015. — С. 172–173.

37. Скороходов, В. А. О классических задачах на графах с нестандартной достижимостью / В. А. Скороходов, // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя школа «Понтрягинские чтения — XXVII». — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. — С. 249–250.

38. Скороходов, В. А. О потоках в двухресурсных сетях / Х. Абдулрахман, Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции: Воронежская весенняя школа «Понтрягинские чтения — XXVII». — Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2016. — С. 3–4.

39. Скороходов, В. А. О распределении ресурсного потока в двухресурсных сетях / Х. Абдулрахман, В. А. Скороходов // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения VI». Материалы конференции. — Ростов-на-Дону: Изд. Центр ДГТУ, 2016. — С. 150.

40. Скороходов, В. А. О ресурсных сетях с вентильной достижимостью / Х. Абдулрахман, Я. М. Ерусалимский, В. А. Скороходов // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. IX междунар. конф. «ПМТУКТ-2016». — Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2016. — С. 20–21.

41. Скороходов, В. А. О пороговом значении в ресурсных сетях с магнитной достижимостью / В. А. Скороходов // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. IX междунар. конф. «ПМТУКТ-2016». — Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2016. — С. 319–321.