ТАМБОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Г.Р. ДЕРЖАВИНА

*На правах рукописи*

**Трещёв Валентин Сергеевич**

# ТЕОРЕМЫ О ВОЗМУЩЕНИЯХ ВЕКТОРНО НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Е.С. Жуковский

ТАМБОВ — 2017

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию задачи Коши и краевых задач для систем неявных (не разрешенных относительно производной) дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Основным инструментом исследования являются утверждения о липшицевых возмущениях накрывающих отображений произведений метрических пространств и признаки накрывания оператора Немыцкого в пространствах существенно ограниченных вектор-функций.

Первые работы, посвященные накрывающим (метрически регулярным) отображениям, появились в середине 20 века. Фундаментальные результаты теории накрывающих отображений были получены в работах Е. Р. Авакова, А. В. Арутюнова, Б. Д. Гельмана, Л. М. Грейвса, А. В. Дмитрука, А. Д. Иоффе, А. А. Милютина, Б. С. Мордуховича, Н. П. Осмоловского, А. Удерзо и других авторов. Л. М. Грейвс в [43] получил условия локальной накрываемости для отображений банаховых пространств. Для отображений, действующих из метрического пространства в линейное метрическое пространство, А. А. Милютиным (см. [23], [13]) доказана теорема о липшицевых возмущениях накрывающих отображений, утверждающая, что сумма $\alpha$-накрывающего и $\beta$-липшицева отображений при $\alpha > \beta$ есть $(\alpha-\beta)$-накрывающее отображение. А.В. Арутюновым (см., [3]–[6]) получены теоремы о существовании, оценках и устойчивости точек совпадения накрывающего и липшицева отображений (как однозначных, так и многозначных) в метрических пространствах. Теоремы о точках совпадения обобщают принцип Банаха о сжимающем отображении, который следует из этих утверждений, если областью определения и множеством значений отображений является одно и то же метрическое пространство, а в роли накрывающего выступает тождественное отображение.

Последние годы отмечается новый всплеск интереса исследователей к накрывающим отображениям и их приложениям, чему во многом способствовали цитируемые выше работы А. В. Арутюнова о точках совпадения. Исследования точек совпадения и свойств накрывающих отображений метрических пространств продолжены в работах многих авторов. В публикациях кроме вопросов анализа накрывающих отображений все большее место занимают проблемы приложения накрывающих отображений в теории дифференциальных и интегральных уравнений и включений, в задачах управления и оптимизации. В работе Е.Р. Авакова, А.В. Арутюнова, Е.С. Жуковского [1] предложено понятие условного накрывания, доказаны теоремы об устойчивости условно накрывающих отображений метрических пространств, получен признак накрывания оператора Немыцкого в пространстве существенно ограниченных функций, исследованы вопросы существования и продолжаемости решений задачи Коши для неявного дифференциального уравнения. А.В. Арутюновым, Е.С. Жуковским, С.Е. Жуковским в [7], [40] предложены уточнения понятия условного накрывания, получены распространения теорем о возмущениях, доказаны утверждения о корректности уравнений с накрывающими отображениями и перечисленные результаты применены к исследованию разрешимости и корректной разрешимости задачи Коши для неявных дифференциальных уравнений, интегральных уравнений Вольтерра. Аналогичными методами в [17] рассмотрено дифференциальное уравнение с запаздыванием, в [8], [20], [42] рассмотрены задачи управления.

В работах Е.С. Жуковского, Е.А. Плужниковой [18], [19], [30], [27] методами накрывающих отображений исследованы задача Коши и краевые задачи для систем неявных дифференциальных уравнений вида

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n, \dot{x}_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Предполагалось, что при каждом $i = \overline{1, n}$ по последнему аргументу функция $f_i(t, x_1, \dots, x_n, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является $\alpha_i$-накрывающей, а по каждому аргументу $x_j$ $(j = \overline{1, n})$ удовлетворяет условию Липшица с константой $\beta_{ij}$. Авторами доказано, что если спектральный радиус матрицы $C = (\alpha_i^{-1}\beta_{ij})_{n\times n}$ меньше единицы, то в пространстве $L_\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ измеримых существенно ограниченных функций можно так определить метрику, что соответствующее краевой задаче операторное уравнение будет удовлетворять условиям теорем [1], [7], [40] о накрывающих отображениях.

В диссертации предлагается несколько иной подход к исследованию задачи Коши и краевых задач.

Так как задача Коши и краевые задачи сводятся к системе операторных уравнений (содержащей кроме дифференциальных уравнений еще начальные и краевые условия), то удобно не определять метрику в соответствующих пространствах векторных измеримых функций, а рассматривать эти пространства с векторнозначными метриками. Отметим, что теоремы о неподвижных точках сжимающего оператора в пространстве с векторнозначной метрикой получены А.И. Перовым [25], [26]. Е.С. Жуковским в [15], [16] предложено распространение понятия накрывания на отображения пространств с векторнозначной метрикой и получены результаты о точках совпадения и о липшицевых возмущениях накрывающих отображений в таких пространствах. Применение этих результатов позволило рассмотреть в диссертации системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

$$f_i(t, x_1(h_1(t)), \ldots, x_n(h_n(t)), \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) = 0, \quad i = \overline{1, n}$$

и, в частном случае при $h_i(t) = t$, системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_i(t, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n) = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

(более общего вида, чем в [18], [19], [30], [27]). В диссертации исследованы вопросы разрешимости и корректности задачи Коши и краевых задач для таких систем дифференциальных уравнений, получены оценки их решений.

Приведем краткое содержание диссертации.

**Глава 1** посвящена результатам о векторно накрывающих отображениях, на которых базируется исследование систем неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. В § 1.1 определены необходимые понятия, в § 1.2 сформулировано утверждение о липшицевых возмущениях векторно накрывающих отображений [15], [16]. Здесь также получено утверждение о непрерывной зависимости от параметров решений систем операторных уравнений с векторно накрывающими отображениями. В § 1.3 найдены условия векторного накрывания оператора Немыцкого.

Приведем основные определения § 1.1. Пусть заданы метрические пространства $X_i \doteq (X_i, \rho_{X_i})$, $Y_j \doteq (Y_j, \rho_{Y_j})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$. Определим произведения этих пространств

$$\overline{X} = \prod_{i=1}^{n} X_i, \quad \overline{Y} = \prod_{j=1}^{m} Y_j$$

и зададим в них векторные метрики

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}(x,u) = \big(\rho_{X_1}(x_1,u_1),\ldots,\rho_{X_n}(x_n,u_n)\big),$$
$$\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y,\omega) = \big(\rho_{Y_1}(y_1,\omega_1),\ldots,\rho_{Y_m}(y_m,\omega_m)\big),$$

где $x,u\in\overline{X}$ и $y,\omega\in\overline{Y}$. Обозначим замкнутый шар в пространстве $X_i$ с центром в точке $u_i\in X_i$ радиуса $d_i\geq 0$ символом

$$\mathrm{B}_{X_i}(u_i,d_i) \doteq \{x_i\in X_i : \rho_{X_i}(u_i,x_i)\leq d_i\}.$$

Определим для $d=(d_1,\ldots,d_n)\in\mathbb{R}^n_+$, $u=(u_1,\ldots,u_n)\in\overline{X}$ произведение этих шаров

$$\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u,d) \doteq \prod_{i=1}^{n}\mathrm{B}_{X_i}(u_i,d_i) = \{x\in\overline{X},\ \overline{\rho}_{\overline{X}}(x,u)\leq d\}.$$

Аналогично для векторов $r=(r_1,\ldots,r_m)\in\mathbb{R}^m_+$, $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_m)\in\overline{Y}$ определяем произведение $\overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\omega,r)\doteq\prod_{j=1}^{m}\mathrm{B}_{Y_j}(\omega_j,r_j)$ замкнутых шаров $\mathrm{B}_{Y_j}(\omega_j,r_j)\subset(Y_j,\rho_{Y_j})$.

Пусть заданы множества $W\subset\overline{Y}$, $\mathfrak{A}\subset\overline{X}\times\mathbb{R}^m_+$ и $n\times m$-матрица $A$ с неотрицательными компонентами $a_{ij}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$.

**О п р е д е л е н и е 0.0.1.** [15], [16]. Отображение $\Psi:\overline{X}\to\overline{Y}$ будем называть *векторно $A$-накрывающим множество $W$ на совокупности $\mathfrak{A}$*, если

$$\forall\,(u,r)\in\mathfrak{A}\quad \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u),r)\bigcap W\subset\Psi\big(\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u,Ar)\big);$$

и *векторно условно $A$-накрывающим множество $W$ на совокупности $\mathfrak{A}$*, если

$$\forall\,(u,r)\in\mathfrak{A}\quad \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u),r)\bigcap W\bigcap\Psi(\overline{X})\subset\Psi\big(\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u,Ar)\big).$$

В случае $n = m = 1$ определения векторно (условно) $A$-накрывающего отображения метрических пространств совпадают с определениями (условно) $\alpha$-накрывающего отображения, предложенными в [1], [3], где $A = (a_{11})$, $a_{11} = \alpha^{-1}$.

В полученных в диссертации утверждениях совокупность $\mathfrak{A}$ это одно из следующих множеств:

1. $\mathfrak{B}(u^0, R, u) = \{(u, r) \in \overline{X} \times \mathbb{R}^m_+ : Ar + \overline{\rho}_{\overline{X}}(u, u^0) \le R\}$, где $u^0 \in \overline{X}$, $R \in \mathbb{R}^n_+$ и $u \in \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u^0, R)$;

2. $\mathfrak{B}\big(u^0, R\big) = \{\big(u, r\big) \in \overline{X} \times \mathbb{R}^m_+ : Ar + \overline{\rho}_{\overline{X}}\big(u, u^0\big) \le R\}$, где $u^0 \in \overline{X}$ и $R \in \mathbb{R}^n_+$;

3. $\mathfrak{B}(u) = \{(u, r) \in \overline{X} \times \mathbb{R}^m_+ \quad \forall r \ge 0\}$, где $u \in \overline{X}$.

В § 1.2 приведена теорема из [16] о разрешимости и оценке решения системы уравнений — векторный аналог теорем о точке совпадения двух отображений [3] и о нелинейных возмущения накрывающих отображений [1, 40]. Сформулируем это утверждение.

Обозначим через $I_m$ единичную $m \times m$-матрицу.

Пусть задан вектор $y \in \overline{Y}$ и определено отображение $\Phi : \overline{X} \times \overline{X} \to \overline{Y}$, обладающее по первому аргументу свойством накрывания (в смысле определения 0.0.1). Относительно неизвестного $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{X}$ рассмотрим уравнение

$$\Phi(x, x) = y. \qquad (0.0.1)$$

Пусть заданы векторы $u^0 \in \overline{X}$, $R \in \mathbb{R}^n_+$, $d \in \mathbb{R}^m_+$ и вещественные матрицы $A, B$ размерностей $n \times m$ и $m \times n$, соответственно. Положим $U \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u^0, R)$. Для каждого $u \in U$ определим множество $W(u) \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0, u),\, d\big)$.

**Т е о р е м а 0.0.1.** [16] *Пусть метрические пространства $X_i$, $i = \overline{1, n}$, являются полными и выполнены следующие условия:*

- *при любом $u \in U$ отображение $\Phi(\cdot, u) : \overline{X} \to \overline{Y}$ является векторно условно $A$-накрывающим множество $W(u)$ на совокупности $\mathfrak{B}(u^0, R,\, u)$;*

- *для любых $v, u \in U$ выполнено неравенство*

$$\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(v, u),\, \Phi(v, v)\big) \le B\overline{\rho}_{\overline{X}}(u, v);$$

- *для произвольной последовательности $\{v^k\} \subset U$ и любого $u \in U$, если имеют место сходимости $\overline{\rho}_{\overline{X}}(v^k, u) \to 0$, $\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(v^k, v^k), y\big) \to 0$ (в пространствах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, соответственно), то выполнено соотношение $\Phi(u, u) = y$.*

- *для спектрального радиуса $\varrho$ $m \times m$-матрицы $BA$ выполнена оценка $\varrho(BA) < 1$;*

- *имеют место неравенства*

$$r(y) \doteq (I_m - BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0, u^0),\, y\big) \le d, \quad Ar(y) \le R;$$

- *при любых $u \in \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}\big(u^0,\, Ar(y)\big)$ выполнено включение $y \in \Phi(U, u)$.*

*Тогда существует решение $x = \xi \in \overline{X}$ уравнения (0.0.1), удовлетворяющее неравенству*

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}\big(\xi, u^0\big) \le Ar(y).$$

Отметим, что вследствие предположения $\varrho(BA) < 1$ матрица $I_m - BA$ обратима, и это позволяет использовать матрицу $(I_m - BA)^{-1}$ в неравенствах теоремы 0.0.1.

Далее в § 1.2 исследован вопрос о корректности системы (0.0.1) в следующей постановке. Пусть при любом натуральном $l = 1, 2, \ldots$ определено отображение $\Phi^l : \overline{X} \times \overline{X} \to \overline{Y}$ и задан вектор $y^l \in \overline{Y}$. Рассмотрим последовательность уравнений

$$\Phi^l(x, x) = y^l, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{0.0.2}$$

относительно неизвестного $x \in \overline{X}$.

Пусть, для некоторого элемента $u^0 = (u_1^0, \ldots, u_n^0) \in \overline{X}$ при $l \to \infty$ имеет место сходимость

$$\rho_{Y_i}\big(\Phi_i^l(u^0, u^0), y_i^l\big) \to 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{0.0.3}$$

Нас интересуют условия, обеспечивающие разрешимость при любом натуральном $l$ системы уравнений (0.0.2) и сходимость к $u^0$ последовательности решений (в произведении $\overline{X}$).

Пусть заданы $u^0 \in \overline{X}$, $R \in \mathbb{R}_+^n$, $d \in \mathbb{R}_+^m$ и матрицы $A_{n\times m}$, $B_{m\times n}$ с неотрицательными компонентами.

**Т е о р е м а 0.0.2.** *Пусть пространства $X_i$, $i = \overline{1, n}$, являются полными и при всех $l = 1, 2, \ldots$ выполнены следующие условия:*

- *для любого $u \in U \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u^0, R)$, отображение $\Phi^l(\cdot, u) : \overline{X} \to \overline{Y}$ является векторно условно $A$-накрывающим множество $W_l(u) = \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}\big(\Phi^l(u^0, u), d\big)$ на совокупности $\mathfrak{B}(u^0, R, u)$;*

- *для любых* $u, v \in U$ *выполнено неравенство*

$$\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi^l(v,u), \Phi^l(v,v)\big) \leq B\overline{\rho}_{\overline{X}}(u,v);$$

- *для любой последовательности* $\{v^k\} \subset U$ *из сходимости*

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}(v^k, v) \to 0, \quad \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi^l(v^k, v), y^l\big) \to 0, \quad \textit{при} \ \ k \to \infty,$$

  *следует* $\Phi^l(v,v) = y^l, \ \ l = 1, 2, \ldots$ ;

- *для спектрального радиуса* $\varrho$ *матрицы* $BA$ *выполнено неравенство* $\varrho(BA) < 1$;

- *для всех* $u \in \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}\big(u^0, Ar(y^l)\big)$ *имеет место включение* $y^l \in \Phi^l(U,u)$, *где* $r(y^l) \doteq (I_m - BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi^l(u^0, u^0), y^l\big)$.

*Тогда, если имеет место соотношение* (0.0.3), *то при каждом натуральном* $l$, *начиная с некоторого номера, существует такое решение* $\xi^l = (\xi^l_1, \ldots, \xi^l_n) \in \overline{X}$ *системы* (0.0.2), *что в* $\overline{X}$ *имеет место сходимость* $\xi^l \to u^0$.

Для исследования систем неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом кроме результатов о векторно накрывающих отображениях требуются еще условия накрывания оператора Немыцкого в лебеговых пространствах. В связи с этим в § 1.3 получено утверждение о накрывании оператора Немыцкого в пространствах существенно ограниченных функций. Сформулируем этот результат.

Определим в $\mathbb{R}^n$ векторную метрику

$$\overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}(x,u) = \big(|x_1 - u_1|, \ldots, |x_n - u_n|\big) \quad \forall x, u \in \mathbb{R}^n.$$

Обозначим $\mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$ — совокупность всех непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ — произведение пространств $L_\infty([a,b],\mathbb{R})$ измеримых существенно ограниченных функций с векторной метрикой

$$\overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)}(x,u) = \big(\operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[a,b]}|x_1(s)-u_1(s)|,\ldots,\operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[a,b]}|x_n(s)-u_n(s)|\big)$$
$$\forall\, x,u \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n).$$

Пусть определена удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $g:[a,b]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, для которой при любом $r\in\mathbb{R}^m_+$ существует такая функция $\eta_r\in L_\infty([a,b],\mathbb{R})$, что при п.в. $t\in[a,b]$ и любых $x\in\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(0,r)$ выполнено неравенство $|g(t,x)|\le\eta_r(t)$. Определим оператор Немыцкого

$$(N_g y)(t) \doteq g(t,y(t)). \tag{0.0.4}$$

Принятые предположения являются необходимыми и достаточными условиями действия оператора $N_g$ из $L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ в $L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ (см. [14, с. 375]), и при их выполнении оператор $N_g$ будет замкнутым и ограниченным.

Далее, пусть заданы $n\times m$-матрица $A$ с неотрицательными компонентами и измеримые отображения

$$W:[a,b]\to\mathrm{cl}(\mathbb{R}^m),\quad \mathfrak{A}:[a,b]\to\mathrm{cl}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+).$$

Будем предполагать, что при п.в. $t\in[a,b]$ функция $g(t,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ является векторно $A$-накрывающей множество $W(t)$ на совокупности $\mathfrak{A}(t)$. Определим накрывающие свойства оператора (0.0.4), то есть определим, с какой матрицей, какое множество и на какой совокупности оператор $N_g: L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)\to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ будет накрывающим.

Для произвольного $r \in \mathbb{R}^m_+$ определим многозначное отображение

$$t \in [a,b] \mapsto \mathfrak{A}_r(t) \doteq \mathfrak{A}(t) \cap (\mathbb{R}^n \times \{r\}). \qquad (0.0.5)$$

Являясь пересечением замкнутозначных измеримых отображений, заданное соотношением (0.0.5) отображение $\mathfrak{A}_r : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+)$ измеримо (см. [10, с. 71]). Определим отображение $\Pi_{\mathbb{R}^n} : \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \times \{r\}) \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$ равенством $\Pi_{\mathbb{R}^n}\{(x,r)\} = \{x\}$. Имеем $\mathfrak{A}_r(t) = \Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r(t) \times \{r\}$, и поэтому отображение

$$\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n), \quad \Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r(t) = \{x : (x,r) \in \mathfrak{A}(t)\},$$

измеримо. Определим следующее множество сечений этого отображения

$$\mathbb{S}_{L_\infty}[\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r] = \{u \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) :\ u(t) \in \Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r(t) \text{ при п.в. } t \in [a,b]\}.$$

Эффективное множество $\mathrm{dom}(\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r) \doteq \{t \in [a,b] : \Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r(t) \neq \varnothing\}$ измеримо при любом $r \in \mathbb{R}^m_+$; определим множество $\mathfrak{R}_0$ векторов $r \in \mathbb{R}^m_+$, для которых мера множества $\mathrm{dom}(\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r)$ максимальна, т.е. равна $b-a$. Теперь определим совокупность

$$\mathfrak{B} = \left\{(u,r) \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m_+ :\ r \in \mathfrak{R}_0,\ u \in \mathbb{S}_{L_\infty}[\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r]\right\}. \qquad (0.0.6)$$

Далее, определим множество

$$\mathbb{S}_{L_\infty}[W] = \{y \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m) :\ y(t) \in W(t) \text{ при п.в. } t \in [a,b]\}$$

измеримых существенно ограниченных сечений измеримого отображения $W : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^m)$.

**Теорема 0.0.3.** *Пусть при п.в. $t \in [a,b]$ отображение $g(t,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является (условно) векторно $A$-накрывающим множество $W(t)$ на совокупности $\mathfrak{A}(t)$. Тогда определенный равенством (0.0.4)* *оператор Немыцкого* $N_g : L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ *будет (условно) векторно* $A$*-накрывающим множество* $\mathbb{S}_{L_\infty}[W]$ *на определенной равенством (0.0.6) совокупности* $\mathfrak{B}$.

В § 1.3 также получены следствия из теоремы 0.0.3, представляющие условия векторного накрывания оператора Немыцкого в случаях, когда $\mathfrak{A}(t) = \mathfrak{B}\big(u^0(t), R\big)$, либо $\mathfrak{A}(t) = \mathfrak{B}\big(u^0(t), R, u(t)\big)$, где $u^0 \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $R \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathrm{B}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)}(u^0, R)$.

**Глава 2** посвящена исследованию задачи Коши и краевых задач для неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Используется метод, основанный на сведении дифференциальных уравнений, начальных и краевых условий к системе операторных уравнений относительно пары векторов $\big(\dot{x}, x(a)\big)$, компонентами первого являются производные искомых функций, второго — начальные значения. Полученные в § 1.3 результаты позволяют найти условия накрывания отображений по соответствующим переменным, а утверждения из § 1.1, § 1.2 — исследовать полученные системы операторных уравнений.

В § 2.1 получены условия существования, продолжаемости (§ 2.1.1) и непрерывной зависимости от параметров (§ 2.1.2) решений задачи Коши.

Обозначим через $\mathfrak{I}_m$ матрицу размерности $m \times m$, все компоненты которой равны 1. Пусть заданы: измеримая функция $h : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая при почти всех $t \in [a,b]$ неравенству $h(t) \le t$; измеримая существенно ограниченная функция $y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$; измеримая по Борелю ограниченная функция $\varphi : (-\infty, a) \to \mathbb{R}^n$; вектор $\gamma \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющая условиям Каратеодори (то есть измеримая по первому и непрерывная по совокупности остальных аргументов) функция

$f = (f_1, \ldots, f_m) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Пусть при любом $r \in \mathbb{R}^m_+$ существует такое неотрицательное число $\eta_r$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x, \omega \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(0,r)$ выполнено неравенство $|f(t,x,\omega)| \le \eta_r$.

Рассмотрим при $t \in [a,b]$ систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} &f_i\Big(t, x_1\big(h_1(t)\big), \ldots, x_n\big(h_n(t)\big), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t)\Big) = y_i(t), \quad i = \overline{1,m}, \\ &x_j(s) = \varphi_j(s), \quad \text{если } s \notin [a,b], \quad j = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{0.0.7}$$

с начальными условиями

$$x_j(a) = \gamma_j, \quad j = \overline{1,n}. \tag{0.0.8}$$

Уравнение (0.0.7) — это дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, его решение может быть определено не только на всем отрезке $[a,b]$, но и на $[a,c]$, для произвольного $c \in [a,b]$. Дадим определение такого решения.

Для любого $j = \overline{1,n}$ определим множества

$$E_j = h_j^{-1}[a,b] = \big\{t \in [a,b] : \, h_j(t) \in [a,b]\big\}, \quad E_j^c = E_j \cap [a,c],$$

являющиеся, очевидно, измеримыми. Теперь определим оператор внутренней суперпозиции

$$S_h^c : C([a,c], \mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,c], \mathbb{R}^n), \quad S_h^c x = (S_{h_1}^c x_1, \ldots, S_{h_n}^c x_n),$$

$$(S_{h_j}^c x_j)(t) = \begin{cases} x_j(h_j(t)), \ \text{если } t \in E_j^c, \\ \varphi_j(h_j(t)), \ \text{если } t \notin E_j^c, \end{cases} \quad j = \overline{1,n},$$

и оператор Немыцкого

$$N_f^c : L_\infty([a,c], \mathbb{R}^n) \times L_\infty([a,c], \mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,c], \mathbb{R}^m), \quad N_f^c = (N_{f_1}^c, \ldots, N_{f_m}^c)$$

$$\big(N_{f_i}^c(u,x)\big)(t) = f_i\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in [a,c], \quad i = \overline{1,m}.$$

Запишем систему (0.0.7) при $t \in [a,c]$ в следующем виде

$$N^c_{f_i}\Big(S^c_{h_1}x_1,\ldots,S^c_{h_n}x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n\Big) = y_i, \quad i=\overline{1,m}. \tag{0.0.9}$$

*Решением системы* (0.0.7), *определенным на отрезке* $[a,c]$, назовем функцию $x_c \in AC_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую системе (0.0.9).

Задача Коши (0.0.9), (0.0.8) равносильна системе

$$N^c_{f_i}\Big(S^c_{h_1}\big(\gamma_1+\int\limits_a^{(\cdot)}u_1(s)ds\big),\ldots,S^c_{h_n}\big(\gamma_n+\int\limits_a^{(\cdot)}u_n(s)ds\big),$$
$$u_1,\ldots,u_n\Big) = y_i, \quad i=\overline{1,m}. \tag{0.0.10}$$

относительно $u=\dot{x}\in L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)$, соответственно, решение исходной задачи Коши (0.0.9), (0.0.8) равно $x(\cdot)=\gamma+\int\limits_a^{(\cdot)}u(s)\,ds\in AC_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)$.

Пусть заданы $u^0\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $R\in\mathbb{R}^n_+$, $d\in\mathbb{R}^m_+$, $\sigma>0$ и $n\times m$-матрица $A$ с неотрицательными компонентами. При каждом $t\in[a,b]$ зададим совокупность $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R\big)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+$ равенством

$$\mathfrak{B}\big(u^0(t),R\big)\doteq\{\big(u,r\big)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+:\ Ar+\overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}\big(u,u^0(t)\big)\le R\}. \tag{0.0.11}$$

Определим абсолютно непрерывную функцию $x^0:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с компонентами $x^0_j(t)=\gamma_j+\int\limits_a^t u^0_j(s)\,ds$, $j=\overline{1,n}$, и положим

$$\widehat{D}(t)\doteq\prod_{j=1}^n\widehat{D}_j(t),\ \text{где}\,\widehat{D}_j(t)\doteq\begin{cases}[x^0_j(t)-\sigma,x^0_j(t)+\sigma],\ \text{если}\ t\in E_j,\\ \{\varphi_j(h_j(t))\},\quad\text{если}\quad t\notin E_j,\end{cases}\quad j=\overline{1,n}.$$

Далее, определим при почти всех $t\in[a,b]$ и любом $x\in\widehat{D}(t)$ множество

$$W(t,x)\doteq\overline{B}_{\mathbb{R}^m}\big(f(t,x,u^0(t)),d\big)=\prod_{i=1}^m W_i(t,x),$$

$$\text{где}\ \ W_i(t,x)\doteq\big[f_i(t,x,u^0(t))-d_i,\ f_i(t,x,u^0(t))+d_i\big],\quad i=\overline{1,m}.$$

Обозначим

$$y^0(t) \doteq f\big(t, (S^b_{h_1}x^0_1)(t), \dots, (S^b_{h_n}x^0_n)(t), u^0_1(t), \dots, u^0_n(t)\big).$$

**Т е о р е м а 0.0.4.** *Пусть выполнены следующие условия:*

- *при почти всех* $t \in [a,b]$ *и любом* $x \in \widehat{D}(t)$ *отображение* $f(t,x,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *является условно векторно* $A$*-накрывающим множество* $W(t,x)$ *на совокупности* $\mathfrak{B}\big(u^0(t), R\big)$;
- *для любых* $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ *существует такое* $\beta_{ij} \geq 0$, *что при почти всех* $t \in E_j$, *всех* $\omega \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t), R\big)$ *и любых* $x_k \in \widehat{D}_k(t)$, $k = \overline{1,n}$ *и* $k \neq j$ *отображение* $f_i(t, x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_n, w) : \widehat{D}_j(t) \to \mathbb{R}$ *является* $\beta_{ij}$*-липшицевым;*
- *для любых* $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ *при почти всех* $t \in [a,b]$ *и любых* $x_j \in \widehat{D}_j(t)$ *имеет место включение*

$$y_i(t) \in f_i\Big(t, x_1, \dots, x_n, \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t), R\big)\Big);$$

- *пусть существует такое* $\varepsilon > 0$, *что имеют место неравенства*

$$r_\varepsilon(y) \doteq (I_m + \varepsilon \mathfrak{I}_m)\overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}(y^0, y) \leq d, \quad A r_\varepsilon(y) \leq R.$$

*Тогда найдется такое* $c \in (a,b]$, *что существует определенное на* $[a,c]$ *решение* $x_c \in AC_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)$ *задачи Коши* (0.0.7), (0.0.8), *удовлетворяющее оценке*

$$\overline{\rho}_{L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)}(\dot{x}_c, u^0) \leq A(I_m + \varepsilon \mathfrak{I}_m)\overline{\rho}_{L_\infty([a,c],\mathbb{R}^m)}(y^0, y).$$

Здесь, для сокращения записи сужения на $[a,c]$ функций $u^0, y^0, y$ обозначены теми же символами, что и исходные определенные на всем $[a,b]$ функции.

В § 2.1.2 исследована непрерывная зависимость от параметров решений задачи Коши (0.0.7), (0.0.8).

Через $\overline{1}_m$ обозначим $m$-мерный вектор, компоненты которого равны 1.

Пусть при любом натуральном $l$ заданы: измеримая функция $h^l : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая при почти всех $t \in [a,b]$ неравенству $h^l(t) \le t$, измеримая существенно ограниченная функция $y^l : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, измеримая по Борелю ограниченная функция $\varphi^l : (-\infty, a) \to \mathbb{R}^n$, вектор $\gamma^l \in \mathbb{R}^n$. Далее, пусть при любом натуральном $l$ определена удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $f^l : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, относительно которой предполагаем, что при любом $r \in \mathbb{R}^m_+$ существует неотрицательное число $\eta^l_r$, для которого при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x, \omega \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(0,r)$ выполнено неравенство $|f^l(t,x,\omega)| \le \eta^l_r$. Рассмотрим при $t \in [a,b]$ последовательность систем дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned}
&f^l_i\Big(t, x_1\big(h^l_1(t)\big), \dots, x_n\big(h^l_n(t)\big), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)\Big) = y^l_i(t), \quad i = \overline{1,m},\\
&x_j(s) = \varphi^l_j(s), \quad \text{если } s \notin [a,b], \quad j = \overline{1,n},
\end{aligned} \tag{0.0.12}$$

с начальными условиями

$$x_j(a) = \gamma^l_j, \quad j = \overline{1,n}. \tag{0.0.13}$$

(здесь $l = 1, 2, \dots$). Пусть заданы $u^0 \in L_\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathbb{R}^n$. Обозначим

$$y_i^{0l}(t) = f_i^l\Big(t,\, S_{h_1^l}\big(\gamma_1^l + \int\limits_a^{(\cdot)} u_1^0(s)ds\big)(t),\, \dots\, ,$$

$$S_{h_n^l}\big(\gamma_n^l + \int\limits_a^{(\cdot)} u_n^0(s)ds\big)(t),\, u_1^0(t),\, \dots\, ,\, u_n^0(t)\Big);$$

$$(S_{h_j^l} x_j)(t) = \begin{cases} x_j(h_j^l(t)), & \text{если } h_j^l(t) \geq a, \\ \varphi_j^l(h_j^l(t)), & \text{если } h_j^l(t) < a. \end{cases} \qquad j = \overline{1,n}.$$

Предположим, что при $l \to \infty$ имеют место сходимости

$$\gamma_j^l \to \gamma_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{0.0.14}$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [a,b]} \big| y_i^{0l}(t) - y_i^l(t) \big| \to 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{0.0.15}$$

Для каждого натурального $l$ определим абсолютно непрерывную функцию $x^l : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, компоненты которой заданы равенством

$$x_j^l(t) = \gamma_j^l + \int\limits_a^t u_j^0(s)\, ds, \quad j = \overline{1,n}.$$

Для некоторого $\sigma > 0$ положим

$$\widehat{D}^l(t) = \prod_{j=1}^n \widehat{D}_j^l(t), \text{ где } \widehat{D}_j^l(t) = \begin{cases} [x_j^l(t) - \sigma,\, x_j^l(t) + \sigma], & \text{если } t \in E_j^l, \\ \{\varphi_j^l(h_j^l(t))\}, & \text{если } t \notin E_j^l, \end{cases} \quad j = \overline{1,n}.$$

Пусть $\epsilon > 0$, $d \doteq \epsilon \overline{1}_m \in \mathbb{R}_+^m$. Определим при почти всех $t \in [a,b]$ и любом $x \in \widehat{D}^l(t)$ множество

$$W^l(t,x) \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^m}\big(f^l(t,x,u^0(t)), d\big) = \prod_{i=1}^m W_i^l(t,x),$$

$$\text{где } W_i^l(t,x) \doteq \big[f_i^l(t,x,u^0(t)) - \epsilon,\, f_i^l(t,x,u^0(t)) + \epsilon\big], \quad i = \overline{1,m}.$$

Пусть, далее, задана $n \times m$-матрица $A$ с неотрицательными компонентами. Определим при почти всех $t \in [a,b]$ совокупность $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R\big) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$ равенством (0.0.11), где $R \doteq \epsilon \overline{1}_n \in \mathbb{R}^n_+$.

**Т е о р е м а 0.0.5.** *Пусть при $l = 1,2,\ldots$ выполнены следующие условия:*

- *при почти всех $t \in [a,b]$ и любом $x \in \widehat{D}(t)$ отображение $f^l(t,x,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является условно векторно $A$-накрывающим множество $W^l(t,x)$ на совокупности $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R\big)$;*

- *для любых $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ существует такое $\beta_{ij} \geq 0$, что при почти всех $t \in E^l_j \doteq (h^l_j)^{-1}[a,b] = \{t \in [a,b] : h^l_j(t) \in [a,b]\}$, всех $\omega \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t),R\big)$ и любых $x_k \in \widehat{D}_k(t)$, $k = \overline{1,n}$ и $k \neq j$ отображение $f^l_i(t,x_1,\ldots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\ldots,x_n,w) : \widehat{D}_j(t) \to \mathbb{R}$ является $\beta_{ij}$-липшицевым;*

- *для любых $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x_j \in \widehat{D}^l_j(t)$ имеет место включение*

$$y^l_i(t) \in f^l_i\Big(t,x_1,\ldots,x_n,\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t),R\big)\Big).$$

*Тогда, если имеют место соотношения* (0.0.14), (0.0.15)*, то при каждом натуральном $l$, начиная с некоторого номера, существует определенное на всем $[a,b]$ решение $\xi^l = (\xi^l_1,\ldots,\xi^l_n) \in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ задачи Коши* (0.0.12), (0.0.13) *такое, что имеет место сходимость $\xi^l \to x^0$, т.е.*

$$\xi^l_j(a) \to x^0_j(a), \quad \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}\big|\dot{\xi}^l_j(t) - \dot{x}^0_j(t)\big| \to 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

В $\S\,2.2$ представлены результаты о существовании ($\S\,2.2.1$) и непрерывной зависимости ($\S\,2.2.2$) решений краевой задачи для системы (0.0.7) неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (в отличие от $\S\,2.1$ здесь не требуется, чтобы аргумент "запаздывал", то есть, не предполагается неравенство $h(t) \leq t$).

Пусть заданы вектор $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_k) \in \mathbb{R}^k$, непрерывная функция $g = (g_1, \ldots, g_k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, измеримая функция $h : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, измеримая существенно ограниченная функция $y : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, измеримая по Борелю ограниченная функция $\varphi : (-\infty, a) \bigcup (b, \infty) \to \mathbb{R}^n$, и определена удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $f = (f_1, \ldots, f_m) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Относительно функции $f$ предполагаем, что для любого $r \in \mathbb{R}^m_+$ существует такое неотрицательное число $\eta_r$, что при почти всех $t \in [a, b]$ и любых $x, \omega \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(0, r)$ выполнено неравенство $|f(t, x, \omega)| \leq \eta_r$.

Рассмотрим при $t \in [a, b]$ систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} &f_i\Big(t, x_1\big(h_1(t)\big), \ldots, x_n\big(h_n(t)\big), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t)\Big) = y_i(t), \quad i = \overline{1, m}, \\ &x_j(s) = \varphi_j(s), \quad \text{если } s \notin [a, b], \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{0.0.16}$$

с краевыми условиями

$$g_i\big(x_1(a), \ldots, x_n(a), x_1(b), \ldots, x_n(b)\big) = \Delta_i, \quad i = \overline{1, k}. \tag{0.0.17}$$

Определим множество $E_j = h_j^{-1}[a, b] = \{t \in [a, b] : h_j(t) \in [a, b]\}$, которое является измеримым, и число $H_j = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in E_j}(h_j(t) - a)$, $j = \overline{1, n}$. Будем полагать $H_j = 0$, если $E_j = \varnothing$. Далее, определим оператор внутренней суперпозиции $S_h : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\quad S_h x = (S_{h_1}x_1,\ldots,S_{h_n}x_n)$,

$$(S_{h_j}x_j)(t) = \begin{cases} x_j(h_j(t)), \text{ если } t \in E_j, \\ \varphi_j(h_j(t)), \text{ если } t \notin E_j, \end{cases} \quad j = \overline{1,n},$$

и оператор Немыцкого $N_f : L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \times L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$, $N_f = (N_{f_1},\ldots,N_{f_m})$,

$$\big(N_{f_i}(u,x)\big)(t) = f_i\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in [a,b], \quad i = \overline{1,m}.$$

Запишем систему (0.0.16) в виде системы операторных уравнений

$$N_{f_i}\Big(S_{h_1}x_1,\ldots,S_{h_n}x_n,\dot{x}_1,\ldots,\dot{x}_n\Big) = y_i, \quad i = \overline{1,m}. \qquad (0.0.18)$$

*Решением системы* (0.0.16) называем функцию $x \in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, которая удовлетворяет системе (0.0.18).

Краевая задача (0.0.18), (0.0.17) равносильна системе

$$\begin{cases} N_{f_i}\Big(S_{h_1}\big(\gamma_1 + \int\limits_a^{(\cdot)} u_1(s)ds\big),\ldots,S_{h_n}\big(\gamma_n + \int\limits_a^{(\cdot)} u_n(s)ds\big), \\ \qquad\qquad\qquad u_1,\ldots,u_n\Big) = y_i, \quad i = \overline{1,m}, \\ g_i\big(\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\gamma_1 + \int\limits_a^b u_1(s)ds,\ldots,\gamma_n + \int\limits_a^b u_n(s)ds\big) = \\ \qquad\qquad\qquad = \Delta_i, \quad i = \overline{1,k}, \end{cases} \qquad (0.0.19)$$

относительно пары $(u,\gamma) = (\dot{x}, x(a)) \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$.

Пусть заданы $u^0 \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\gamma^0 \in \mathbb{R}^n$, $R^1, R^2 \in \mathbb{R}^n_+$, $d^1 \in \mathbb{R}^m_+$ и $n \times m$-матрица $A_1$ с неотрицательными компонентами. Зададим при каждом $t \in [a,b]$ совокупность $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R^1\big) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$ равенством (0.0.11), где $A = A_1$, т.е.

$$\mathfrak{B}\big(u^0(t),R^1\big) \doteq \{\big(u,r\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ : A_1 r + \overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}\big(u,u^0(t)\big) \le R^1\}. \qquad (0.0.20)$$

Определим абсолютно непрерывную функцию $x^0:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с компонентами $x_j^0(t)=\gamma_j^0+\int\limits_a^t u_j^0(s)\,ds,\ \ j=\overline{1,n},$ и положим

$$\widehat{D}(t)\doteq\prod_{j=1}^{n}\widehat{D}_j(t),$$

$$\text{где}\ \ \widehat{D}_j(t)\doteq\begin{cases}\mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x_j^0(t),R_j^2+R_j^1(t-a)\big),\ \text{если}\ \ t\in E_j,\\ \{\varphi_j(h_j(t))\},\ \text{если}\ \ t\notin E_j,\end{cases}\qquad j=\overline{1,n}.$$

Далее, определим при почти всех $t\in[a,b]$ и любом векторе $x\in\widehat{D}(t)$ множество

$$W^1(t,x)\doteq\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^m}\big(f(t,x,u^0(t)),d^1\big)=\prod_{i=1}^{m}W_i^1(t,x),$$

$$\text{где}\ \ W_i^1(t,x)\doteq\big[f_i(t,x,u^0(t))-d_i^1,\ f_i(t,x,u^0(t))+d_i^1\big],\quad i=\overline{1,m}.$$

Пусть определены $n\times k$-матрица $A_2$ с неотрицательными компонентами и вектор $d^2\in\mathbb{R}_+^k$. Зададим совокупность $\mathfrak{B}\big(\gamma^0,R^2\big)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+^k$ равенством

$$\mathfrak{B}\big(\gamma^0,R^2\big)\doteq\{\big(\gamma,r\big)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+^k:\ A_2r+\overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}\big(\gamma,\gamma^0\big)\le R^2\}.\qquad(0.0.21)$$

Далее, при любом векторе $x\in\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(x^0(b),R^2+R^1(b-a)\big)$ определим множество

$$W^2(x)\doteq\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^k}\big(g(\gamma^0,x),d^2\big)=\prod_{i=1}^{k}W_i^2(x),$$

$$\text{где}\ \ W_i^2(x)\doteq\big[g_i(\gamma^0,x)-d_i^2,\ g_i(\gamma^0,x)+d_i^2\big],\quad i=\overline{1,k}.$$

Обозначим

$$y^0(t)\doteq f\big(t,(S_{h_1}x_1^0)(t),\ldots,(S_{h_n}x_n^0)(t),u_1^0(t),\ldots,u_n^0(t)\big),$$

$$\Delta^0 \doteq g^0\big(\gamma_1^0,\ldots,\gamma_n^0,\gamma_1^0+\int\limits_a^b u_1^0(s)ds,\ldots,\gamma_n^0+\int\limits_a^b u_n^0(s)ds\big).$$

**Т е о р е м а 0.0.6.** *Пусть выполнены следующие условия:*

- *при почти всех* $t\in[a,b]$ *и любом векторе* $x\in\widehat{D}(t)$ *отображение* $f(t,x,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *является векторно условно* $A_1$*-накрывающим множество* $W^1(t,x)$ *на совокупности* $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R^1\big)$*; при любом* $x\in\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(x^0(b),R^2+R^1(b-a)\big)$ *отображение* $g(\cdot,x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ *является векторно условно* $A_2$*-накрывающим множество* $W^2(x)$ *на совокупности* $\mathfrak{B}\big(\gamma^0,R^2\big)$*;*

- *для любых* $i=\overline{1,m}$*,* $j=\overline{1,n}$ *существует такое* $\beta_{ij}^1\geq 0$*, что при почти всех* $t\in E_j$*, всех* $\omega\in\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t),R^1\big)$ *и любых* $x_p\in\widehat{D}_p(t)$*,* $p=\overline{1,n}$ *и* $p\neq j$*, отображение* $f_i(t,x_1,\ldots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\ldots,x_n,w):\widehat{D}_j(t)\to\mathbb{R}$ *является* $\beta_{ij}^1$*-липшицевым; для любых* $i=\overline{1,k}$*,* $j=\overline{1,n}$ *существует такое* $\beta_{ij}^2\geq 0$*, что при всех* $\gamma\in\mathfrak{B}\big(\gamma^0,R^2\big)$ *и любых* $x_p\in\mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x_p^0(b),R_p^2+R_p^1(b-a)\big)$*,* $p=\overline{1,n}$ *и* $p\neq j$*, отображение* $g_i(\gamma,x_1,\ldots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\ldots,x_n):\mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x_j^0(b),R_j^2+R_j^1(b-a)\big)\to\mathbb{R}$ *является* $\beta_{ij}^2$*-липшицевым;*

- *для любых* $i=\overline{1,m}$*,* $j=\overline{1,n}$*, при почти всех* $t\in[a,b]$ *и любых* $x_j\in\widehat{D}_j(t)$ *имеет место включение*

$$y_i(t)\in f_i\Big(t,x_1,\ldots,x_n,\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t),R^1\big)\Big);$$

*для любых* $i=\overline{1,k}$*,* $j=\overline{1,n}$*, любых* $x_j\in\mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x_j^0(b),R_j^2+R_j^1(b-a)\big)$ *имеет место включение*

$$\Delta_i\in g_i\Big(\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(\gamma^0,R^2\big),x_1,\ldots,x_n\Big).$$

- *для спектрального радиуса $\varrho$ произведения $BA$ матриц*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

*где* $B_{11} = (H_j\beta^1_{ij})_{m\times n}$, $B_{12} = (\beta^1_{ij})_{m\times n}$, $B_{21} = \big((b-a)\beta^2_{ij}\big)_{k\times n}$, $B_{22} = (\beta^2_{ij})_{k\times n}$, *выполнено неравенство* $\varrho(BA) < 1$;

- *имеют место неравенства*

$$r(y,\Delta) \doteq (I_{m+k} - BA)^{-1} \begin{pmatrix} \overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}(y, y^0) \\ \overline{\rho}_{\mathbb{R}^k}(\Delta, \Delta^0) \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \end{pmatrix},$$

$$Ar(y,\Delta) \le \begin{pmatrix} R^1 \\ R^2 \end{pmatrix}.$$

*Тогда существует решение* $x \in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ *краевой задачи* (0.0.16), (0.0.17), *удовлетворяющее неравенству*

$$\begin{pmatrix} \overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)}(\dot{x}, u^0) \\ \overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}(x(a), \gamma^0) \end{pmatrix} \le A(I_{m+k} - BA)^{-1} \begin{pmatrix} \overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}(y, y^0) \\ \overline{\rho}_{\mathbb{R}^k}(\Delta, \Delta^0) \end{pmatrix}.$$

В § 2.2.2 исследована проблема непрерывной зависимости от параметров решений краевой задачи (0.0.16), (0.0.17).

Пусть при любом натуральном $l$ заданы: вектор $\Delta^l \in \mathbb{R}^k$, непрерывная функция $g^l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, измеримая функция $h^l : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, измеримая существенно ограниченная функция $y^l : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, измеримая по Борелю ограниченная функция $\varphi^l : (-\infty, a) \bigcup (b, \infty) \to \mathbb{R}^n$, и определена удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $f^l : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Относительно функции $f^l$ предполагаем, что для любого $r \in \mathbb{R}^m_+$ существует такое $\eta^l_r \ge 0$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x, \omega \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(0, r)$ выполнено неравенство $|f^l(t,x,\omega)| \le \eta^l_r$.

Рассмотрим при $t \in [a,b]$ последовательность систем дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} & f_i^l\Big(t, x_1\big(h_1^l(t)\big), \dots, x_n\big(h_n^l(t)\big), \dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)\Big) = y_i^l(t),\ i = \overline{1,m}, \\ & x_j(s) = \varphi_j^l(s), \quad \text{если } s \notin [a,b],\ j = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{0.0.22}$$

с краевыми условиями

$$g_i^l\big(x_1(a), \dots, x_n(a), x_1(b), \dots, x_n(b)\big) = \Delta_i^l, \quad i = \overline{1,k}, \tag{0.0.23}$$

здесь $l = 1, 2, \dots$.

Для любого $l = 1, 2, \dots$ определим множество

$$E_j^l = (h_j^l)^{-1}[a,b] = \{t \in [a,b] : h_j^l(t) \in [a,b]\}, \quad j = \overline{1,n},$$

которое является измеримым, и число $H_j^l = \operatorname{vrai}\sup\limits_{t \in E_j^l}(h_j^l(t) - a)$. Будем полагать $H_j^l = 0$, если $E_j^l = \varnothing$. Определим $H_j = \sup\limits_{l=1,2,\dots} H_j^l$. Далее, при каждом $l = 1, 2, \dots$ определим оператор внутренней суперпозиции

$$S_{h^l} : C([a,b], \mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,b], \mathbb{R}^n), \quad S_{h^l}x = (S_{h_1^l}x_1, \dots, S_{h_n^l}x_n),$$

$$(S_{h_j^l}x_j)(t) = \begin{cases} x_j(h_j^l(t)), \ \text{если } t \in E_j^l, \\ \varphi_j^l(h_j^l(t)), \ \text{если } \ t \notin E_j^l, \end{cases} \quad j = \overline{1,n},$$

оператор Немыцкого

$$N_{f^l} : L_\infty([a,b], \mathbb{R}^n) \times L_\infty([a,b], \mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,b], \mathbb{R}^m), \quad N_{f^l} = (N_{f_1^l}, \dots, N_{f_m^l})$$
$$\big(N_{f_i^l}(u,x)\big)(t) = f_i^l\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in [a,b], \quad i = \overline{1,m}$$

и запишем краевую задачу (0.0.22), (0.0.23) в виде

$$\begin{cases} N_{f_i^l}\Big(S_{h_1^l}\big(\gamma_1+\int\limits_a^{(\cdot)} u_1(s)ds\big),\ldots,S_{h_n^l}\big(\gamma_n+\int\limits_a^{(\cdot)} u_n(s)ds\big), \\ \qquad\qquad u_1,\ldots,u_n\Big)=y_i^l,\quad i=\overline{1,m}, \\ g_i^l\big(\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\gamma_1+\int\limits_a^b u_1(s)ds,\ldots,\gamma_n+\int\limits_a^b u_n(s)ds\big)= \\ \qquad\qquad =\Delta_i^l,\quad i=\overline{1,k}. \end{cases} \tag{0.0.24}$$

относительно неизвестной пары $(u,\gamma)\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$, где $u=\dot{x}$, $\gamma=x(a)$.

Пусть заданы $x^0\in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ и $n\times m$-матрица $A_1$ с неотрицательными компонентами. Пусть $\epsilon^1>0$, $\epsilon^2>0$, $R^1\doteq\epsilon^1\overline{1}_n$, $R^2\doteq\epsilon^2\overline{1}_n\in\mathbb{R}^n_+$, $d^1\doteq\epsilon^1\overline{1}_m\in\mathbb{R}^m_+$. Определим $u^0=\dot{x}^0\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\gamma^0=x^0(a)\in\mathbb{R}^n$. Зададим при каждом $t\in[a,b]$ совокупность $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R^1\big)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+$ равенством (0.0.20).

Положим при каждом натуральном $l=1,2,\ldots$

$$\widehat{D}^l(t)\doteq\prod_{j=1}^n\widehat{D}^l_j(t),$$

$$\text{где}\quad \widehat{D}^l_j(t)\doteq\begin{cases}\mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x_j^0(t),R_j^2+R_j^1(t-a)\big), & \text{если}\ t\in E_j^l,\\ \{\varphi_j^l(h_j^l(t))\}, & \text{если}\ t\notin E_j^l,\end{cases}\qquad j=\overline{1,n}.$$

Далее, определим при почти всех $t\in[a,b]$ и любом векторе $x\in\widehat{D}^l(t)$ множество

$$W^{1l}(t,x)\doteq\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^m}\big(f^l(t,x,u^0(t)),d^1\big)=\prod_{i=1}^m W_i^{1l}(t,x).$$

Пусть определена $n\times k$-матрица $A_2$ с неотрицательными компонентами. Пусть $\epsilon^2>0$, вектор $d^2\doteq\epsilon^2\overline{1}_k\in\mathbb{R}^k_+$. Зададим совокупность

$\mathfrak{B}(\gamma^0, R^2) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k_+$ равенством (2.2.6). Далее, при любом векторе $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(x^0(b), R^2 + R^1(b-a)\big)$ определим множество

$$W^{2l}(x) \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^k}\big(g^l(\gamma^0, x), d^2\big) = \prod_{i=1}^{k} W_i^{2l}(x).$$

Вычислим

$$y^{0l}(t) \doteq f^l\big(t, (S_{h_1^l} x_1^0)(t), \ldots, (S_{h_n^l} x_n^0)(t), u_1^0(t), \ldots, u_n^0(t)\big),$$

$$\Delta^{0l} \doteq g^{0l}\Big(\gamma_1^0, \ldots, \gamma_n^0, \gamma_1^0 + \int\limits_a^b u_1^0(s)ds, \ldots, \gamma_n^0 + \int\limits_a^b u_n^0(s)ds\Big).$$

Пусть при $l \to \infty$ имеют место сходимости

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]} |y^{0l} - y^l| \to 0, \quad |\Delta^{0l} - \Delta^l| \to 0, \tag{0.0.25}$$

**Т е о р е м а 0.0.7.** *Пусть при каждом натуральном $l = 1, 2, \ldots$ выполнены следующие условия:*

- *при почти всех $t \in [a,b]$ и любом векторе $x \in \widehat{D}^l(t)$ отображение $f^l(t, x, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является векторно условно $A_1$-накрывающим множество $W^{1l}(t,x)$ на совокупности $\mathfrak{B}\big(u^0(t), R^1\big)$; при любом $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(x^0(b), R^2 + R^1(b-a)\big)$ отображение $g^l(\cdot, x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ является векторно условно $A_2$-накрывающим множество $W^{2l}(x)$ на совокупности $\mathfrak{B}\big(\gamma^0, R^2\big)$;*

- *для любых $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ существует такое $\beta^1_{ij} \geq 0$, что при почти всех $t \in E^l_j$, всех $\omega \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t), R^1\big)$ и любых $x_p \in \widehat{D}^l_p(t)$, $p = \overline{1,n}$ и $p \neq j$, отображение $f^l_i(t, x_1, \ldots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \ldots, x_n, w) : \widehat{D}^l_j(t) \to \mathbb{R}$ является $\beta^1_{ij}$-липшицевым; для любых $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,n}$*

*существует такое* $\beta^2_{ij} \geq 0$, *что при всех* $\gamma \in \mathfrak{B}\big(\gamma^0, R^2\big)$ *и любых* $x_p \in \mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x^0_p(b), R^2_p + R^1_p(b-a)\big)$, $p = \overline{1,n}$ *и* $p \neq j$, *отображение* $g^l_i(\gamma, x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_n) : \mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x^0_j(b), R^2_j + R^1_j(b-a)\big) \to \mathbb{R}$ *является* $\beta^2_{ij}$*-липшицевым;*

- *для любых* $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, *при почти всех* $t \in [a,b]$ *и любых* $x_j \in \widehat{D}^l_j(t)$ *имеет место включение*

$$y^l_i(t) \in f^l_i\Big(t, x_1, \dots, x_n, \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t), R^1\big)\Big);$$

*для любых* $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,n}$, *любых* $x_j \in \mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x^0_j(b), R^2_j + R^1_j(b-a)\big)$ *имеет место включение*

$$\Delta^l_i \in g^l_i\Big(\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(\gamma^0, R^2\big), x_1, \dots, x_n\Big).$$

*Пусть, далее, для спектрального радиуса* $\varrho$ *произведения* $BA$ *матриц*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

*где* $B_{11} = (H_j\beta^1_{ij})_{m\times n}$, $B_{12} = (\beta^1_{ij})_{m\times n}$, $B_{21} = \big((b-a)\beta^2_{ij}\big)_{k\times n}$, $B_{22} = (\beta^2_{ij})_{k\times n}$, *выполнено* $\varrho(BA) < 1$.

*Тогда, если имеют место соотношения* (0.0.25), *то при каждом* $l$, *начиная с некоторого номера, существует определенное на* $[a,b]$ *решение* $\xi^l \in AC_\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$ *краевой задачи* (0.0.22), (0.0.23) *такое, что имеет место сходимость* $\xi^l \to x^0$.

Таким образом в диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Условия непрерывной зависимости от параметров решений систем операторных уравнений с векторно накрывающими отображениями в произведениях метрических пространств;

2. Условия векторного накрывания оператора Немыцкого в пространствах измеримых существенно ограниченных функций с векторнозначной метрикой;

3. Условия существования и оценки компонент решений задачи Коши для систем неявных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом;

4. Условия непрерывной зависимости от параметров решений задачи Коши для систем неявных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом;

5. Условия существования и оценки компонент решений краевых задач для систем неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом;

6. Условия непрерывной зависимости от параметров решений краевых задач для систем неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Материалы диссертации докладывались на международной конференции "Колмогоровские чтения V. Общие проблемы управления и их приложения" (Тамбов – 2013); международной конференции "Колмогоровские чтения VI. Общие проблемы управления и их приложения", посвященной памяти А.И. Булгакова (Тамбов 2015); IX международной конференции

"Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий" (Воронеж – 2016); школе для студентов, аспирантов и молодых ученых "Математическое и компьютерное моделирование, информационные технологии управления" (Воронеж – 2016); II – IV Международном семинаре "Функционально-дифференциальные уравнения и включения и их приложения в математическом моделировании" с элементами школы молодых ученых (Тамбов – 2013, 2014, 2016), на совместном семинаре кафедры нелинейного анализа и оптимизации и кафедры математического анализа и теории функции Российского университета дружбы народов, руководители А.В. Арутюнов, В.И. Буренков (Москва – 2017).

Результаты диссертации опубликованы в статьях [2], [24], [31] – [38] и монографии [21]. Работы [2], [24], [31] – [36] опубликованы в журналах из перечня ВАК.

Исследования выполнялись при поддержке грантов РФФИ (проекты № 11-01-00626-а, № 14-01-00877, № 14-01-97504); ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 г. (соглашение № 14.132.21.1348); гранта президента РФ для обучения за рубежом 2014/2015 г. (№ 16-ИН-503,504).

# Глава 1. ВЕКТОРНО НАКРЫВАЮЩИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В главе 1 рассматривается система операторных уравнений относительно неизвестных — элементов метрических пространств. Предлагаемое исследование разрешимости и корректности основано на результатах о липшицевых возмущениях векторно накрывающих отображений.

В первом параграфе вводятся необходимые обозначения, приведены определения [15], [16] свойств векторного накрывания и условного векторного накрывания отображений, действующих в произведении метрических пространств. Рассмотрены примеры таких отображений.

Во втором параграфе приведена теорема из [16] о разрешимости и оценке решения системы — векторный аналог классических теорем о точке совпадения двух отображений [3] и о нелинейных возмущениях накрывающих отображений [1], [40]. Также во втором параграфе получены условия корректности рассматриваемой системы.

Заключает главу 1 параграф 3, в котором устанавливается связь между свойствами векторного накрывания оператора Немыцкого (оператора суперпозиции) в пространстве измеримых существенно ограниченных функций и порождаемой этот оператор функции. Полученные здесь результаты открывают возможность приложений утверждений о векторно накрывающих отображениях к дифференциальным и интегральным уравнениям. В частности, далее в диссертации эти результаты применяются для исследования разрешимости и корректности задачи Коши и краевых задач для систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, не разрешенных относительно производной искомой функции.

## § 1.1. Основные обозначения и определения

Стандартно обозначаем $\mathbb{R}^m$ — $m$-мерное вещественное пространство, $\mathbb{R}^m_+$ — конус векторов с неотрицательными компонентами пространства $\mathbb{R}^m$, $I_m$ — единичную $m \times m$ матрицу. Для произвольных векторов $r^1, r^2 \in \mathbb{R}^m$ полагаем $r^1 \geq r^2$, если $r^1 - r^2 \in \mathbb{R}^m_+$; обозначаем $\min\{r^1, r^2\}$ вектор $r = (r_1, \ldots, r_m)$, компоненты которого определяются формулой $r_j = \min\{r^1_j, r^2_j\}$, $j = \overline{1, m}$. Напомним, что норму $|\cdot|_{\mathbb{R}^m}$ в $\mathbb{R}^m$ называют монотонной, если для $r^1, r^2 \in \mathbb{R}^m_+$, удовлетворяющих неравенству $r^1 \geq r^2$, выполнено $|r^1|_{\mathbb{R}^m} \geq |r^2|_{\mathbb{R}^m}$.

Пусть заданы метрические пространства $(X, \rho_X)$, $(Y, \rho_Y)$. Обозначим через $\mathrm{B}_X(u, r)$ замкнутый шар $\{x \in X : \rho_X(x, u) \leq r\}$ с центром в точке $u \in X$ радиуса $r \geq 0$ в пространстве $X$.

**Определение 1.1.1.** Пусть задано число $\alpha > 0$. Отображение $\Psi : X \to Y$ называется *$\alpha$-накрывающим* [3], если для любых $r \geq 0$, $u \in X$ имеет место вложение

$$\mathrm{B}_Y(\Psi(u), \alpha r) \subset \Psi(\mathrm{B}_X(u, r));$$

и *условно $\alpha$-накрывающим* [1], если

$$\mathrm{B}_Y(\Psi(u), \alpha r) \bigcap \Psi(X) \subset \Psi(\mathrm{B}_X(u, r)).$$

Здесь число $\alpha$ называют *коэффициентом накрывания.* Говорят, что отображение $\Psi$ *накрывающее* (*условно накрывающее*), если существует такое $\alpha > 0$, что это отображение $\alpha$-накрывающее (условно $\alpha$-накрывающее).

Свойство $\alpha$-накрывания равносильно соотношению:

$$\forall\, u \in X \quad \forall\, y \in Y \quad \exists\, x \in X$$
$$\Psi(x) = y \ \text{ и } \ \rho_X(x,u) \le \alpha^{-1}\rho_Y(y,\Psi(u)); \qquad (1.1.1)$$

а свойство условного $\alpha$-накрывания — соотношению:

$$\forall\, u \in X \quad \forall\, y \in \Psi(X) \quad \exists\, x \in X$$
$$\Psi(x) = y \ \text{ и } \ \rho_X(x,u) \le \alpha^{-1}\rho_Y(y,\Psi(u)). \qquad (1.1.2)$$

Сформулируем векторный аналог определения 1.

Пусть заданы метрические пространства $X_i, Y_j$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. Определим

$$\overline{X} = \prod_{i=1}^{n} X_i, \quad \overline{Y} = \prod_{j=1}^{m} Y_j.$$

Для векторов $r = (r_1, \ldots, r_m) \in \mathbb{R}_+^m$, $w = (w_1, \ldots, w_m) \in \overline{Y}$ положим

$$\overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(w,r) \doteq \{y \in \overline{Y} :\ \overline{\rho}_{\overline{Y}}(y,w) \le r\} = \prod_{j=1}^{m} \mathrm{B}_{Y_j}(w_j, r_j).$$

Аналогично, для $d = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \overline{X}$ обозначим

$$\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u,d) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{B}_{X_i}(u_i, d_i).$$

На произведение метрических пространств естественным образом распространяется понятие сходимости:

$$\{x^l\} \subset \overline{X} \quad \{x^l\} \to x^0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^l, x^0) \to 0 \ \text{ в } \ \mathbb{R}^n \ \text{ при } \ l \to \infty$$
$$\Leftrightarrow \ \rho_{X_i}(x_i^l, x_i^0) \to 0 \ \text{ при } \ l \to \infty \ \text{ для } \ \forall\, i = \overline{1,n}.$$

**О п р е д е л е н и е 1.1.2.** [16] Пусть задана $n \times m$ матрица $A$ с неотрицательными компонентами $a_{ij}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. Отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ будем называть *векторно $A$-накрывающим*, если

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^m \ \ \forall u \in \overline{X} \quad \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u), r) \subset \Psi(\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u, Ar)); \tag{1.1.3}$$

и *векторно условно $A$-накрывающим*, если

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^m \ \ \forall u \in \overline{X} \quad \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u), r) \bigcap \Psi(\overline{X}) \subset \Psi(\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u, Ar)). \tag{1.1.4}$$

Здесь $A$ будем называть *матрицей накрывания*. Отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ будем называть *векторно накрывающим* (*векторно условно накрывающим*), если существует матрица $A$ с неотрицательными компонентами, для которой справедливо соотношение (1.1.3) (соответственно, (1.1.4)).

Очевидно, что в случае $n = m = 1$ определения 1.1.1, 1.1.2 равносильны: всякое векторно (условно) $A$-накрывающее отображение является (условно) $\alpha$-накрывающим, и любое (условно) $\alpha$-накрывающее отображение является векторно (условно) $A$-накрывающим, где $A = (a_{11})$, $a_{11} = \alpha^{-1}$.

Приведем пример нахождения матрицы накрывания.

**П р и м е р 1.1.1.** Определим отображение $\Psi \doteq (\Psi_1, \Psi_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ соотношениями

$$\Psi_1(x_1, x_2) = \frac{{x_1}^2 - {x_2}^2}{({x_1}^2 + {x_2}^2)^{1/2}}, \quad \Psi_2(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{({x_1}^2 + {x_2}^2)^{1/2}}. \tag{1.1.5}$$

В [9] показано, что $\Psi$ является 1-накрывающим (то есть отвечает определению 1.1.1) относительно евклидовой метрики $\mathbb{R}^2$, и в то же время компоненты этого отображения по каждой своей переменной не являются накрывающими функциями, то есть при любых $x_1, x_2$ функции $\Psi_i(x_1, \cdot)$, $\Psi_i(\cdot, x_2)$, $i = 1, 2,$ не удовлетворяют определению 1.1.1.

В силу 1-накрывания отображения $\Psi$ для любых $u \in X$, $y \in Y$ существует такой $x \in X$, что $\Psi(x) = y$ и

$$\sqrt{(x_1 - u_1)^2 + (x_2 - u_2)^2} \leq \sqrt{(\Psi_1(x) - \Psi_1(u))^2 + (\Psi_1(x) - \Psi_1(u))^2}.$$

Следовательно, при $i = 1, 2$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |x_i - u_i| \leq \sqrt{(x_1 - u_1)^2 + (x_2 - u_2)^2} \leq \\ \leq \sqrt{(\Psi_1(x) - \Psi_1(u))^2 + (\Psi_1(x) - \Psi_1(u))^2} \\ \leq |\Psi_1(x) - \Psi_1(u)| + |\Psi_1(x) - \Psi_1(u)|. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что матрица накрывания отображения (1.1.5) равна

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что для линейных отображений конечномерных пространств условия векторного накрывания и способ нахождения матрицы накрывания приведены в [16]. Эти результаты можно применить, в том числе, к исследованию свойства векторного накрывания нелинейных дифференцируемых отображений, действующих из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

Требование накрывания во многих задачах оказывается излишне жестким, например, результаты о разрешимости уравнений, о непрерывной зависимости решений от параметров, оценки решений удается получить при менее ограничительных условиях локального накрывания [41], или локального условного накрывания [1], [40].

Определим векторный аналог этих понятий.

Пусть заданы множества $W \subset \overline{Y}$, $\mathfrak{A} \subset \overline{X} \times \mathbb{R}_{+}^{m}$ и $n \times m$ матрица $A$ с неотрицательными компонентами $a_{ij}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

**О п р е д е л е н и е 1.1.3.** Отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ будем называть *векторно $A$-накрывающим множество $W$ на совокупности $\mathfrak{A}$*, если

$$\forall\,(u,r) \in \mathfrak{A} \quad \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u), r) \bigcap W \subset \Psi\big(\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u, Ar)\big);$$

и *векторно условно $A$-накрывающим множество $W$ на совокупности $\mathfrak{A}$*, если

$$\forall\,(u,r) \in \mathfrak{A} \quad \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u), r) \bigcap W \bigcap \Psi(\overline{X}) \subset \Psi\big(\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u, Ar)\big).$$

В скалярном случае, т. е. при $n = m = 1$, $A = (a_{11})$, определение 1.1.3 равносильно предложенному в [7] определению отображения $\Psi : X \to Y$, (условно) $\alpha$-накрывающего множество $W \subset Y$ на совокупности $\mathfrak{G} \subset X \times \mathbb{R}_{+}$, где $\mathfrak{G} = \{(x,r) : (x, \alpha^{-1}r) \in \mathfrak{A}\}$, $\alpha = {a_{11}}^{-1}$. В связи с этим отметим, что при соответствующем выборе множеств $W, \mathfrak{G}$ цитируемому определению [7] удовлетворяют различные трактовки понятия накрывания, рассматривавшиеся в литературе.

Рассмотрим некоторые конкретные множества $\mathfrak{A}$, которые будут использоваться ниже. Пусть заданы $u^0 \in \overline{X}$, $R \in \mathbb{R}_{+}^{n}$ и $u \in \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u^0, R)$. Определим множество

$$\mathfrak{B}(u^0, R, u) = \{(u,r) \in \overline{X} \times \mathbb{R}_{+}^{m} :\ Ar + \overline{\rho}_{\overline{X}}(u, u^0) \le R\}. \tag{1.1.6}$$

Определение 1.1.3 означает при $\mathfrak{A} \doteq \mathfrak{B}(u^0, R, u)$, что *отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ является векторно условно $A$-накрывающим множество $W$ на совокупности $\mathfrak{B}(u^0, R, u)$ в том и только том случае, когда при любом*

$y \in W \bigcap \Psi(\overline{X})$ *выполнено*

$$A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u)) + \overline{\rho}_{\overline{X}}(u, u^0) \le R \implies$$
$$\exists\, x \in \overline{X} \quad \Psi(x) = y \ \text{ и } \ \overline{\rho}_{\overline{X}}(x, u) \le A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u)). \qquad (1.1.7)$$

Нам также потребуется множество $\mathfrak{B}(u^0, R, u)$ при "предельном значении" вектора $R$, все компоненты которого $R_j = \infty$, $j = \overline{1, n}$, т. е. это множество определенное по заданному элементу $u \in \overline{X}$ равенством

$$\widehat{\mathfrak{B}}(u) = \{(u, r) \in \overline{X} \times \mathbb{R}^m_+ \quad \forall r \ge 0\}.$$

Очевидно, *отображение* $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ *является векторно условно* $A$*-накрывающим множество* $W$ *на совокупности* $\widehat{\mathfrak{B}}(u)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall\, y \in W \bigcap \Psi(\overline{X}) \quad \exists\, x \in \overline{X} \quad \Psi(x) = y \ \text{ и } \ \overline{\rho}_{\overline{X}}(x, u) \le A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y, \Psi(u)).$$

Теперь пусть заданы $u^0 \in \overline{X}$ и $R \in \mathbb{R}^n_+$. Положим

$$\mathfrak{B}\big(u^0, R\big) = \{\big(u, r\big) \in \overline{X} \times \mathbb{R}^m_+ : \ Ar + \overline{\rho}_{\overline{X}}\big(u, u^0\big) \le R\}. \qquad (1.1.8)$$

*Если* $\mathfrak{A} \doteq \mathfrak{B}\big(u^0, R\big)$, *то отображение* $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ *будет векторно условно* $A$*-накрывающим множество* $W$ *на совокупности* $\mathfrak{B}(u^0, R)$ *тогда и только тогда, когда для любых* $y \in W \cap \Psi(\overline{X})$, $u \in \overline{X}$ *справедливо (1.1.7).*

В заключение заметим, что при $R_j = \infty$, $j = \overline{1, n}$, множество $\mathfrak{B}\big(u^0, R\big) = \overline{X} \times \mathbb{R}^m_+$.

## § 1.2. Возмущения векторно накрывающих отображений

Пусть задан вектор $y \in \overline{Y}$ и определено отображение $\Phi : \overline{X} \times \overline{X} \to \overline{Y}$, обладающее по первому аргументу свойством накрывания (в смысле одного из приведенных выше определений). Нас будет интересовать условия существования и оценки решения $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{X}$ уравнения

$$\Phi(x, x) = y. \tag{1.2.1}$$

Это уравнение — векторная запись системы

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n) = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_m(x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n) = y_m. \end{cases}$$

Пусть заданы векторы $u^0 \in \overline{X}$, $R \in \mathbb{R}^n_+$, $d \in \mathbb{R}^m_+$ и вещественные матрицы $A, B$ размерностей $n \times m$ и $m \times n$, соответственно. Положим $U \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u^0, R)$. Для каждого $u \in U$ определим множество $W(u) \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0, u),\, d\big)$.

**Теорема 1.2.1.** [16] *Пусть метрические пространства $X_i$, $i = \overline{1, n}$, являются полными и выполнены следующие условия:*

(a) *при любом $u \in U$ отображение $\Phi(\cdot, u) : \overline{X} \to \overline{Y}$ является векторно условно $A$-накрывающим множество $W(u)$ на совокупности $\mathfrak{B}(u^0, R,\, u)$;*

(b) *для любых $v, u \in U$ выполнено неравенство*

$$\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(v, u),\, \Phi(v, v)\big) \leq B\overline{\rho}_{\overline{X}}(u, v);$$

(c) *для произвольной последовательности $\{v^k\} \subset U$ и любого $u \in U$, если имеют место сходимости $\overline{\rho}_{\overline{X}}(v^k, u) \to 0$, $\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(v^k, v^k), y\big) \to 0$ (в* *пространствах* $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$, *соответственно), то выполнено соотношение* $\Phi(u,u) = y$.

(d) *для спектрального радиуса* $\varrho$ *квадратной матрицы* $BA$ *выполнено* $\varrho(BA) < 1$;

(e) *имеют место неравенства*[1]

$$r(y) \doteq (I_m - BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,u^0),\, y\big) \le d, \quad Ar(y) \le R;$$

(f) *при любых* $u \in \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}\big(u^0,\, Ar(y)\big)$ *выполнено включение* $y \in \Phi(U,u)$.
*Тогда существует решение* $x = \xi \in \overline{X}$ *уравнения (1.2.1), удовлетворяющее неравенству*

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}\big(\xi, u^0\big) \le Ar(y). \tag{1.2.2}$$

**Доказательство.** Вначале приведем необходимую нам оценку матрицы $(I_m - BA)^{-1}$. Эта матрица является сумой ряда $I_m + BA + (BA)^2 + \ldots$ (см., например, [39, с. 116]). Из неотрицательности элементов матриц $A, B$ следует, что при любом номере $k = 0, 1, 2, \ldots$ выполнено

$$(I_m - BA)^{-1} \ge I_m + BA + \ldots + (BA)^k \tag{1.2.3}$$

(неравенство для матриц понимается, естественно, как неравенство для всех соответствующих элементов).

Покажем, что существует последовательность элементов $x^k \in \overline{X}$, отвечающая следующим требованиям:

$$x^0 = u^0, \quad \Phi(x^k, x^{k-1}) = y, \quad \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^k, x^{k-1}) \le$$
$$\le A(BA)^{k-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,u^0),\, y\big) \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{1.2.4}$$

[1] Так как $\varrho(BA) < 1$, то $m \times m$ матрица $I_m - BA$ обратима, что позволяет использовать матрицу $(I_m - BA)^{-1}$ в этих неравенствах.

Проверим (1.2.4) при $k=1$. Покажем, что при $u=x^0$, $W=W(x^0)$ для отображения $\Phi(\cdot,x^0):\overline{X}\to\overline{Y}$ выполнено условие импликации (1.1.7). Прежде всего, в силу неравенства (1.2.3) имеем

$$\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,u^0),\,y\big)\le (I_m-BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,u^0),\,y\big),$$

т. е., согласно предположению (e), выполнено $\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,u^0),\,y\big)\le d,\ y\in W$. Кроме того, из предположений теоремы следует, что $y\in\Phi(U,x^0)$. Наконец, имеет место оценка

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}(u^0,u)+A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Phi(u,x^0),y)=A\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,u^0),\,y\big)\le$$
$$\le A(I_m-BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,u^0),\,y\big)\le R.$$

В силу предположения (a) векторного накрывания отображением $\Phi(\cdot,x^0)$ множества $W(x^0)$ на совокупности $\widehat{\mathfrak{A}}(u^0,R,\,x^0)$, согласно (1.1.7), существует $x^1\in\overline{X}$ удовлетворяющий соотношениям

$$\Phi(x^1,x^0)=y,\quad \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^1,x^0)\le A\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(x^0,x^0),\,y\big)=A\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,u^0),\,y\big).$$

Предполагая, что соотношения (1.2.4) имеют место при всех $k\le k_0$, докажем их справедливость при $k=k_0+1$. Проверим условие импликации (1.1.7) для отображения $\Phi(\cdot,x^{k_0}):\overline{X}\to\overline{Y}$ при значениях $u=x^{k_0}$, $W=W(x^{k_0})$. Во-первых, из (1.2.4) получаем

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}(u^0,\,x^{k_0})\le\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^0,\,x^1)+\ldots+\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k_0-1},\,x^{k_0})\le$$
$$\le A\big(I_m+BA+\ldots+(BA)^{k-1}\big)\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,u^0),\,y\big)\le$$
$$\le A(I_m-BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,u^0),\,y\big)=Ar(y).$$

Таким образом $u=x^{k_0}\in\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}\big(u^0,\,Ar(y)\big)$, поэтому $y\in\Phi(U,x^{k_0})$. Во-вторых, имеем

$$\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,\, x^{k_0}), y\big) \le \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,\, u^0), y\big) + \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,\, x^0), \Phi(u^0,\, x^{k_0})\big) \le$$
$$\le \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,\, u^0), y\big) + B\overline{\rho}_{\overline{X}}\big(u^0,\, x^{k_0}\big) \le$$
$$\le \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,\, u^0), y\big) + B\big(\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^0, x^1) + \ldots + \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k_0-1}, x^{k_0})\big) \le$$
$$\le \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,\, u^0), y\big) + B\big(A + A(BA) + \ldots + A(BA)^{k_0-1}\big)\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,\, u^0), y\big) =$$
$$= \big(I_m + BA + \ldots + (BA)^{k_0}\big)\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,\, u^0), y\big) \le$$
$$\le (I_m - BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,\, u^0), y\big) \le d,$$

т. е. $y \in W(x^{k_0})$. И, наконец, справедливы соотношения

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}(u^0, u) + A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Phi(u, x^{k_0}), y) \le \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^0, x^1) + \ldots + \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k_0-1}, x^{k_0}) +$$
$$+ A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Phi(u, x^{k_0}), y) = \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^0, x^1) + \ldots + \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k_0-1}, x^{k_0}) +$$
$$+ A\overline{\rho}_{\overline{Y}}(\Phi(x^{k_0}, x^{k_0}), \Phi(x^{k_0}, x^{k_0-1})) \le \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^0, x^1) + \ldots + \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k_0-1}, x^{k_0}) +$$
$$+ AB\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k_0-1}, x^{k_0}) \le A(I_m + \ldots + (BA)^{k_0-1} + (BA)^{k_0})\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,\, u^0), y\big) \le$$
$$\le A(I_m - BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,\, u^0), y\big) \le R.$$

Вследствие векторного накрывания отображением $\Phi(\cdot, x^{k_0})$ множества $W(x^{k_0})$ на совокупности $\mathfrak{B}(u^0, R,\, x^{k_0})$, существует $x^{k_0+1} \in \overline{X}$ удовлетворяющий равенству

$$\Phi(x^{k_0+1}, x^{k_0}) = y$$

и оценкам

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k_0+1}, x^{k_0}) \le A\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(x^{k_0}, x^{k_0}),\, y)\big) = A\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(x^{k_0}, x^{k_0}),\, \Phi(x^{k_0}, x^{k_0-1}))\big) \le$$
$$\le AB\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k_0}, x^{k_0-1}) \le A(BA)^{k_0}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,\, u^0), y\big).$$

Итак, установлено существование последовательности $\{x^k\} \subset \overline{X}$, удовлетворяющей соотношениям (1.2.4). Компоненты этих векторов $x_i^k$

при каждом $i = \overline{1,n}$ образуют в $X_i$ фундаментальную последовательность. Действительно, из оценки $\varrho(BA) < 1$ следует сходимость $\|(BA)^k\|_{\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m} \to 0$ при $k \to \infty$; таким образом

$$\begin{aligned}\forall\, l = 1,2,\ldots \quad \overline{\rho}_{\overline{X}}(x^{k+l}, x^k) \leq A(BA)^k\big(I_m + \ldots + (BA)^{l-1}\big)\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,\, u^0), y\big) \leq \\ \leq A(BA)^k(I_m - BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,\, u^0), y\big) \to 0, \quad \text{при } k \to \infty.\end{aligned}$$

Вследствие полноты пространств $X_i$ последовательность $\{x^k\}$ сходится, пусть $\xi \in \overline{X}$ — ее предел. Покажем, что $\xi$ есть искомое решение системы (1.2.1).

Из соотношений

$$\begin{aligned}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(x^k,\, x^k),\, y\big) \leq \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(x^k,\, x^k),\, \Phi(x^k,\, x^{k-1})\big) + \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(x^k,\, x^{k-1}),\, y\big) = \\ = \overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(x^k,\, x^k),\, \Phi(x^k,\, x^{k-1})\big) \leq B\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^k,\, x^{k-1})\end{aligned}$$

следует сходимость $\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(x^k,\, x^k),\, y\big) \to 0$ при $k \to \infty$. Таким образом, $\Phi(\xi, \xi) = y$. Для доказательства теоремы остается заметить, что неравенство (1.2.2) следует из оценки

$$\begin{aligned}\overline{\rho}_{\overline{X}}(x^k, x_0) \leq A\big(I_m + \ldots + (BA)^{k-1}\big)\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,\, u^0), y\big) \leq \\ \leq A(I_m - BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0,\, u^0), y\big).\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Обсудим условия теоремы 1.2.1. Во-первых, предположение $(b)$ этой теоремы связано с классическим понятием липшицевости отображения $\Phi$ по второму аргументу. Точнее, имеет место

**Замечание 1.2.1.** Пусть $B = (\beta_{ij})$ — $m \times n$ матрица с неотрицательными компонентами $\beta_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Пусть компоненты отображения $\Phi(v,\cdot):\overline{X}\to\overline{Y}$ обладает следующим свойством: для всех $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},$ для любых $x_p\in X_p$ при всех $p\neq j,$ отображение

$$\Phi_i(v,x_1,\ldots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\ldots,x_n):X_j\to Y_i$$

является $\beta_{ij}$-липшицевым. Тогда условие $(b)$ теоремы 1.2.1 выполнено.

Во-вторых, в случае "безусловного" накрывания имеет место

**З а м е ч а н и е 1.2.2.** Если при любом $u\in U$ отображение $\Phi(\cdot,u):\overline{X}\to\overline{Y}$ является векторно $A$-накрывающим множество $W$ на совокупности $\mathfrak{B}(u^0,R,u),$ то включение $y\in\Phi(u,u),$ очевидно, выполнено и может быть исключено из предположений теоремы 1.2.1.

Доказанное утверждение в случае $n=m=1$ совпадает с теоремой, полученной в [1].

Теперь исследуем вопрос о корректности системы (1.2.1). Пусть при любом натуральном $l=1,2,\ldots$ определено отображение $\Phi^l:\overline{X}\times\overline{X}\to\overline{Y}$ и задан вектор $y^l\in\overline{Y}.$ Рассмотрим последовательность уравнений

$$\Phi^l(x,x)=y^l,\quad l=1,2,\ldots \tag{1.2.5}$$

относительно неизвестного $x\in\overline{X},$ или в более подробной записи

$$\begin{cases}\Phi_1^l(x_1,\ldots,x_n,x_1,\ldots,x_n)=y_1^l,\\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, & \qquad l=1,2,\ldots,\\ \Phi_m^l(x_1,\ldots,x_n,x_1,\ldots,x_n)=y_m^l,\end{cases}$$

Пусть, далее, для некоторого элемента $u^0=(u_1^0,\ldots,u_n^0)\in\overline{X}$ при $l\to\infty$ имеет место сходимость

$$\rho_{Y_i}\big(\Phi_i^l(u^0,u^0),y_i^l\big)\to 0\ \ i=\overline{1,m}. \tag{1.2.6}$$

Нас интересуют условия, обеспечивающие разрешимость при любом натуральном $l$ системы уравнений (1.2.5) и сходимость к $u^0$ последовательности решений (в произведении $\overline{X}$).

Пусть заданы $u^0 \in \overline{X}$, $R \in \mathbb{R}^n_+$, $d \in \mathbb{R}^m_+$, такие матрицы $A_{n\times m}$ и $B_{m\times n}$ с неотрицательными компонентами, что спектральный радиус их произведения $\varrho(BA) < 1$. Определим при всех $l = 1, 2, \ldots$

$$r(y^l) = (I_m - BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi^l(u^0, u^0), y^l\big).$$

Как показано при доказательстве теоремы 1.2.1 матрица $(I_m - BA)^{-1}$ имеет неотрицательные компоненты.

Отметим, что вследствие (1.2.6) выполнено $r(y^l) \to 0$ при $l \to \infty$.

Имеет место следующая теорема.

**Т е о р е м а 1.2.2.** *Пусть пространства $X_i$, $i = \overline{1, n}$, являются полными и при всех $l = 1, 2, \ldots$ выполнены следующие условия: для любого $u \in U = \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u^0, R)$, отображение $\Phi^l(\cdot, u) : \overline{X} \to \overline{Y}$ является векторно условно $A$-накрывающим множество $W_l(u) = \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}\big(\Phi^l(u^0, u), d\big)$ на совокупности $\mathfrak{B}(u^0, R, u)$; для любых $u, v \in U$ выполнено неравенство*

$$\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi^l(v, u), \Phi^l(v, v)\big) \le B\overline{\rho}_{\overline{X}}(u, v);$$

*для любой последовательности $\{v^k\} \in U$ из сходимости (при $k \to \infty$) $\overline{\rho}_{\overline{X}}(v^k, v) \to 0$, $\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi^l(v^k, v), y^l\big) \to 0$ следует $\Phi^l(v, v) = y^l$, $l = 1, 2, \ldots$ ; для спектрального радиуса $\varrho$ матрицы $BA$ выполнено неравенство $\varrho(BA) < 1$; для любого $u \in \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}\big(u^0, Ar(y^l)\big)$ выполнено включение $y^l \in \Phi^l(U, u)$.*

*Тогда, если имеет место соотношение (1.2.6), то при каждом натуральном $l$, начиная с некоторого номера, существует такое решение*

$\xi^l = (\xi^l_1, \ldots, \xi^l_n) \in \overline{X}$ *системы (1.2.5), что в* $\overline{X}$ *имеет место сходимость* $\xi^l \to u^0$.

**Доказательство.** Очевидно из условий теоремы 1.2.2 следует справедливость условий $(a), (b), (c), (d), (f)$ теоремы 1.2.1 для отображения $\Phi^l$ при всех $l$. Условие $(e)$ выполнено для всех $l$, начиная с некоторого номера.

Итак, из теоремы 1.2.1 следует разрешимость системы (1.2.5) и существование решения при всех $l \geq l_0$, удовлетворяющего неравенству (1.2.2). Заметим, что в условиях доказываемой теоремы матрица $BA$ не зависит от параметра $l$. Тогда, для любого натурального $l$ существует решение $\xi^l \in \overline{X}$ системы (1.2.5) удовлетворяющее неравенству

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}(\xi^l, u^0) \leq Ar(y^l)$$

Вследствие этой оценки и соотношения (1.2.6) получаем $\xi^l \to u^0$. Теорема доказана.

## § 1.3. Векторно накрывающие отображения в пространстве измеримых существенно ограниченных функций

Для применения приведенных в § 1.2 утверждений о векторно накрывающих отображениях к исследованию неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом нам потребуются условия векторного накрывания оператора Немыцкого.

Пусть $\mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$ — совокупность всех непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$; $L_\infty([a,b],\mathbb{R})$ — пространство измеримых существенно ограниченных функций с метрикой

$$\rho_{L_\infty([a,b],\mathbb{R})}(y_1, y_2) = \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in [a,\, b]} |y_1(s) - y_2(s)|. \tag{1.3.1}$$

В работах [1], [7], [40] доказан признак условного накрывания оператора Немыцкого, определенного на подпространстве $L_\infty([a,b],\Omega)$ метрического пространства $L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, содержащем функции со значениями в заданном множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и действующего в $L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$. В работах [18]–[20] эти результаты распространены на оператор Немыцкого $L_\infty([a,b],\Omega(\cdot)) \to L_\infty([a,b],\Theta(\cdot))$. Элементами данных пространств являются такие измеримые сечения $x, y$ заданных измеримых многозначных отображений $\Omega : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, $\Theta : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$, что для фиксированных измеримых сечений этих отображений $u_0(t) \in \Omega(t)$, $w_0(t) \in \Theta(t)$ выполнено $x - u_0 \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $y - w_0 \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$, а метрика определена равенствами (1.3.1).

Здесь будет получен признак условного и "безусловного" накрывания (в смысле определения 1.1.2) оператора Немыцкого. В скалярном случае $n = m = 1$ из предлагаемых ниже утверждений следуют соответствующие результаты работ [1], [7], [40]; в векторном — соответствующие результаты [18]–[20].

Далее будем рассматривать пространства $\mathbb{R}^n$, $L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ как произведения соответствующих метрических пространств, т.е. определим в этих пространствах векторные метрики равенствами

$$\overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}(x,u) = \big(|x_1 - u_1|, \ldots, |x_n - u_n|\big) \quad \forall x, u \in \mathbb{R}^n,$$

$$\overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)}(x,u) = \big(\operatorname*{vrai\,sup}_{s \in [a,b]} |x_1(s) - u_1(s)|, \ldots, \operatorname*{vrai\,sup}_{s \in [a,b]} |x_n(s) - u_n(s)|\big)$$
$$\forall\, x, u \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n).$$

Пусть определена удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $g : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Пусть при любом $r \in \mathbb{R}^m_+$ существует такая функция

$\eta_r \in L_\infty([a,b],\mathbb{R})$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(0,r)$ выполнено неравенство $|g(t,x)| \leq \eta_r(t)$. Определим оператор Немыцкого

$$(N_g y)(t) \doteq g(t, y(t)). \tag{1.3.2}$$

Принятые предположения являются необходимыми и достаточными условиями действия оператора $N_g$ из $L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ в $L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ (см. [14, с. 375]), и при их выполнении оператор $N_g$ будет замкнутым и ограниченным.

Далее, пусть заданы $n \times m$-матрица $A$ с неотрицательными компонентами и измеримые отображения $W : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^m)$, $\mathfrak{A} : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+)$. Будем предполагать, что при п.в. $t \in [a,b]$ функция $g(t,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является векторно $A$-накрывающей множество $W(t)$ на совокупности $\mathfrak{A}(t)$. Нашей целью является определить накрывающие свойства оператора (1.3.2), то есть определить, с какой матрицей, какое множество и на какой совокупности оператор $N_g : L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ будет накрывающим.

Для произвольного $r \in \mathbb{R}^m_+$ определим многозначное отображение

$$t \in [a,b] \mapsto \mathfrak{A}_r(t) \doteq \mathfrak{A}(t) \cap (\mathbb{R}^n \times \{r\}). \tag{1.3.3}$$

Являясь пересечением замкнутозначных измеримых отображений, заданное соотношением (1.3.3) отображение $\mathfrak{A}_r : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+)$ измеримо (см. [10, с. 71]). Определим отображение $\Pi_{\mathbb{R}^n} : \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \times \{r\}) \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$ равенством $\Pi_{\mathbb{R}^n}\{(x,r)\} = \{x\}$. Имеем $\mathfrak{A}_r(t) = \Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r(t) \times \{r\}$, и поэтому отображение

$$\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n), \quad \Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r(t) = \{x : (x,r) \in \mathfrak{A}(t)\}, \tag{1.3.4}$$

измеримо. Определим следующее множество сечений этого отображения

$$\mathbb{S}_{L_\infty}[\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r] = \\ = \{u \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) : \ u(t) \in \Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r(t) \text{ при п.в. } t \in [a,b]\}. \quad (1.3.5)$$

Эффективное множество $\mathrm{dom}(\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r) \doteq \{t \in [a,b] : \Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r(t) \neq \varnothing\}$ измеримо при любом $r \in \mathbb{R}^m_+$; определим множество $\mathfrak{R}_0$ таких $r \in \mathbb{R}^m_+$, для которых мера множества $\mathrm{dom}(\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r)$ максимальна, т. е. равна $b-a$. Теперь определим совокупность

$$\mathfrak{B} = \{(u,r) \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m_+ : \ r \in \mathfrak{R}_0, \ u \in \mathbb{S}_{L_\infty}[\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r]\}. \quad (1.3.6)$$

Для формулировки основного результата нам потребуется еще следующее множество измеримых сечений отображения $W : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^m)$:

$$\mathbb{S}_{L_\infty}[W] = \{y \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m) : y(t) \in W(t) \text{ при п.в. } t \in [a,b]\}. \quad (1.3.7)$$

**Т е о р е м а 1.3.1.** *Пусть при п.в.* $t \in [a,b]$ *отображение* $g(t,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *является условно векторно* $A$*-накрывающим множество* $W(t)$ *на совокупности* $\mathfrak{A}(t)$. *Тогда определенный равенством (1.3.2) оператор Немыцкого* $N_g : L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ *будет условно векторно* $A$*-накрывающим множество* $\mathbb{S}_{L_\infty}[W]$ *на определенной равенством (1.3.6) совокупности* $\mathfrak{B}$.

**Доказательство.** Пусть $(u,r) \in \mathfrak{B}$, тогда $\big(u(t),r\big) \in \mathfrak{A}(t)$ при п.в. $t \in [a,b]$. Выберем произвольный элемент $y \in \overline{\mathrm{B}}_{L_\infty}\big(N_g(u),r\big) \cap \mathbb{S}_{L_\infty}[W] \cap N_g(L_\infty)$. Имеем $A\big|y(t) - g\big(t,u(t)\big)\big| \leq r$ и $y(t) \in W(t)$ при п.в. $t \in [a,b]$. Таким образом, $y(t) \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^m}\left(g\big(t,u(t)\big),r\right) \cap W(t) \cap g(t,\mathbb{R}^n)$. В силу предположения накрывания функцией $g(t,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ множества $W(t)$ на совокупности $\mathfrak{A}(t)$ справедливо включение

$$y(t) \in g\big(t, \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(u(t), Ar)\big).$$

Заметим, что многозначное отображение $t \in [a,b] \mapsto \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(u(t), Ar) \in \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$ измеримо. Поэтому согласно теореме Филиппова [11, с.179], существует такая измеримая функция $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, что $x(t) \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(u(t), Ar)$ и $y(t) = g\big(t, x(t)\big)$. Это означает, что $x \in \overline{\mathrm{B}}_{L_\infty}(u, Ar)$, $y = N_g(x)$.

Таким образом, установлена справедливость вложения

$$\overline{\mathrm{B}}_{L_\infty}(N_g(u), r) \cap \mathbb{S}_{L_\infty}[W] \cap N_g(L_\infty) \subset N_g\big(\overline{\mathrm{B}}_{L_\infty}(u, Ar)\big).$$

Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е 1.3.1.** Если отображение $g(t,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является векторно $A$-накрывающим множество $W(t)$ на совокупности $\mathfrak{A}(t)$ при п.в. $t \in [a,b]$, тогда определенный равенством (1.3.2) оператор Немыцкого $N_g : L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ будет векторно $A$-накрывающим множество $\mathbb{S}_{L_\infty}[W]$ на совокупности $\mathfrak{B}$.

Доказательство полностью повторяет приведенные в теореме 1.3.1 рассуждения, только $y$ нужно выбрать из множества $\overline{\mathrm{B}}_{L_\infty}\big(N_g(u), r\big) \cap \mathbb{S}_{L_\infty}[W]$.

Пусть заданы $u^0 \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $R \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathrm{B}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)}(u^0, R)$. Применим теорему 1.3.1 в случае, когда совокупность $\mathfrak{A}(t)$, при каждом $t \in [a,b]$, определяется равенством (1.1.6), где $\overline{X} = \mathbb{R}^n$, т.е.

$$\mathfrak{A}(t) = \mathfrak{B}\big(u^0(t), R, u(t)\big) \doteq$$
$$\doteq \big\{\big(u(t), r(t)\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ :\ Ar(t) + \overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}\big(u(t), u^0(t)\big) \le R\big\}. \quad (1.3.8)$$

Докажем, что определенное равенством (1.3.8) отображение $\mathfrak{A} : [a,b] \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$ является замкнутозначным и измеримым.

Отображение $\mathfrak{A}$ представляет собой декартово произведение двух отображений: однозначного отображения $t \mapsto u(t)$, которое является измеримым так как $u \in \mathrm{B}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)}(u^0, R)$, и многозначного отображения $t \mapsto \mathfrak{R}(t) \doteq \{r : Ar \le g(t)\}$, где функция $g : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ определена равенством $g(t) = R - \overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}\big(u(t), u^0(t)\big)$, следовательно, измерима. Вначале покажем, что отображение $\mathfrak{R} : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^m_+$ замкнутозначно и измеримо (тогда, согласно (см. [10, с. 68]) отображение $\mathfrak{A} : [a,b] \rightrightarrows \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$ также будет замкнутозначным и измеримым).

Докажем замкнутость множества $\mathfrak{R}(t)$, при каждом $t \in [a,b]$. Для произвольной последовательности векторов $r^i \in \mathfrak{R}(t)$ выполнено неравенство

$$Ar^i \le g(t), \quad i = 1, 2, \dots .$$

Если $r^i \to r$, то в силу непрерывности линейного отображения, действующего из $\mathbb{R}^m_+$ в $\mathbb{R}^n$, определяемого матрицей $A$, получаем

$$Ar \le g(t), \tag{1.3.9}$$

т.е. $r \in \mathfrak{R}(t)$. А это значит, что множество $\mathfrak{R}(t)$, действительно, замкнуто.

Теперь покажем измеримость отображения $\mathfrak{R}$. Для этого выберем произвольное открытое множество $\Theta \subset \mathbb{R}^m_+$. Согласно (см. [12, с. 114]) множество $\Theta$ представимо как не более чем счетное объединение дизъюнктных ячеек $P^l = \prod_{k=1}^m [\underline{r}^l_k, \overline{r}^l_k)$, $l = 1, 2, \dots$. Следовательно, полный прообраз $\Theta$ есть множество

$$\mathfrak{R}^{-1}_-(\Theta) \doteq \{t : \mathfrak{R}(t) \cap \Theta \ne \varnothing\} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \{t : \mathfrak{R}(t) \cap P^l \ne \varnothing\}.$$

Для доказательства достаточно проверить измеримость полного прообраза $\mathfrak{R}^{-1}_-(P^l)$ каждой ячейки. Множество $\mathfrak{R}^{-1}_-(P^l)$ содержит такие $t \in [a,b]$, для которых существует хотя бы одно решение $r^l$ неравенства 1.3.9, компоненты которого удовлетворяют оценке $\underline{r}_i^l \le r_i < \overline{r}_i^l,\ k = \overline{1,m}$. Вследствие неотрицательности элементов матрицы $A$ для существования такого решения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$A\underline{r}^l \le g(t).$$

Таким образом, $\mathfrak{R}_-^{-1}(P^l) = \{t : g(t) \ge A\underline{r}^l\}$, а это множество измеримо вследствие измеримости функции $g(\cdot)$.

Итак, доказано что многозначное отображение $\mathfrak{A}$ измеримо.

Пользуясь соотношением (1.3.3), для произвольного $r \in \mathbb{R}_+^m$ определим многозначное отображение $\mathfrak{A}_r : [a,b] \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, которое здесь будет равно

$$\mathfrak{A}_r(t) = \begin{cases} \big\{(u(t), r)\big\}, \text{ если } & Ar \le g(t), \\ \quad \varnothing \quad, \text{ если } & Ar \not\le g(t); \end{cases}$$

далее, формулой (1.3.4) зададим многозначное отображение $\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, равное

$$\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r(t) = \begin{cases} \big\{u(t)\big\}, \text{ если } & Ar \le g(t), \\ \quad \varnothing \quad, \text{ если } & Ar \not\le g(t), \end{cases}$$

(оба отображения могут считаться однозначными).

Для $r \in \mathbb{R}_+^m$, удовлетворяющих неравенству $Ar \le g(t)$ при почти всех $t \in [a,b]$, множество (1.3.5) будет равно $\mathbb{S}_{L_\infty}[\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r] = \{u(\cdot)\}$. Если же на некотором подмножестве отрезка $[a,b]$ положительной меры $\mu$ окажется что $Ar \not\le g(t)$, то $\mathbb{S}_{L_\infty}[\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r] = \varnothing$.

Таким образом, множество $\mathfrak{R}_0$ векторов $r \in \mathbb{R}_+^m$, для которых $\mu\big(\mathrm{dom}(\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r)\big) = b - a$, определяется соотношением

$$\mathfrak{R}_0 = \{r : Ar \le g(t),\ \forall\, t \in [a,b]\}.$$

Отметим, что так как $u \in \mathrm{B}_{L_\infty}(u_0, R)$, то множество $\mathfrak{R}_0$ не пусто (например, $0 \in \mathfrak{R}_0$).

Теперь определим совокупность

$$\mathfrak{B}(u^0, R, u) = \Big\{(u, r) \in L_\infty([a,b], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m_+ : \\ Ar + \overline{\rho}_{L_\infty}\big(u(t), u^0(t)\big) \leq R \text{ при п.в. } t \in [a,b]\Big\}.$$

Таким образом, из теоремы 1.3.1 и замечания 1.3.1 получаем

**С л е д с т в и е 1.3.1.** *Пусть при почти всех $t \in [a,b]$ отображение $g(t,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является условно векторно $A$-накрывающим (векторно $A$-накрывающим) множество $W(t)$ на совокупности $\mathfrak{A}(t) = \mathfrak{B}\big(u^0(t), R, u(t)\big)$, тогда определенный равенством (1.3.2) оператор Немыцкого $N_g : L_\infty([a,b], \mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,b], \mathbb{R}^m)$ будет условно векторно $A$-накрывающим (векторно $A$-накрывающим) множество $\mathbb{S}_{L_\infty}[W]$ на совокупности $\mathfrak{B}(u^0, R, u)$.*

Теперь сформулируем теорему 1.3.1 в случае, когда совокупность $\mathfrak{A}(t) = \mathfrak{B}\big(u^0(t), R\big)$, где $u^0 \in L_\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$, $R \in \mathbb{R}^n_+$.

Отметим, что отображение $t \in [a,b] \mapsto \mathfrak{B}\big(u^0(t), R\big) \in \mathrm{cl}\big(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+\big)$ измеримо. Доказательство этого факта аналогично приведенному выше доказательству измеримости отображения $t \in [a,b] \mapsto \mathfrak{B}\big(u^0(t), R, u(t)\big) \in \mathrm{cl}\big(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+\big)$.

По совокупности $\mathfrak{B}(u^0(t), R)$, определяемой согласно (1.1.8) равенством

$$\mathfrak{B}\big(u^0(t), R\big) \doteq \{\big(u, r\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ : \, Ar + \overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}\big(u, u^0(t)\big) \leq R\},$$

построим совокупность

$$\mathfrak{B}\big(u^0,R\big)\doteq\big\{\big(u,r\big)\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^m_+ :\\ Ar+\overline{\rho}_{L_\infty}\big(u(t),u^0(t)\big)\le R \text{ при п.в. } t\in[a,b]\big\}.$$

**С л е д с т в и е 1.3.2.** *Пусть при п.в.* $t\in[a,b]$ *отображение* $g(t,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *является условно векторно* $A$*-накрывающим (векторно* $A$*-накрывающим) множество* $W(t)$ *на совокупности* $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R\big)$, *тогда определенный равенством (1.3.2) оператор Немыцкого* $N_g : L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)\to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ *будет условно векторно* $A$*-накрывающим (векторно* $A$*-накрывающим) множество* $\mathbb{S}_{L_\infty}[W]$ *на совокупности* $\mathfrak{B}(u^0,R)$.

В заключение этого параграфа рассмотрим ситуацию, когда

$$\mathfrak{A}(t)=\mathfrak{B}\big(u(t)\big)\doteq\big\{\big(u(t),r\big)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+\quad\forall r\ge 0\big\},$$

где $u\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$. Отображение $t\in[a,b]\mapsto\mathfrak{B}\big(u(t)\big)\in\operatorname{cl}\big(\mathbb{R}^n\big)$ измеримо.

**С л е д с т в и е 1.3.3.** *Пусть при п.в.* $t\in[a,b]$ *отображение* $g(t,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *является условно векторно* $A$*-накрывающим (векторно* $A$*-накрывающим) множество* $W(t)$ *на совокупности* $\mathfrak{B}\big(u(t)\big)$, *тогда определенный равенством (1.3.2) оператор Немыцкого* $N_g : L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)\to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ *будет условно векторно* $A$*-накрывающим (векторно* $A$*-накрывающим) множество* $\mathbb{S}_{L_\infty}[W]$ *на совокупности*

$$\mathfrak{B}(u)\doteq\big\{\big(u,r\big)\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^m_+\ \ \forall r\ge 0\big\}.$$

# Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ, НЕ РАЗРЕШЕННЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ

В главе 2 представлены результаты исследования неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Рассматриваются задача Коши, краевые задачи. Получены теоремы о существовании решений и их непрерывной зависимости от параметров. Исследование основано на полученных в главе 1 утверждениях о векторно накрывающих отображениях и признаке векторного накрывания оператора Немыцкого в пространствах измеримых существенно ограниченных функций.

## § 2.1. Задача Коши

Применим результаты главы 1 к исследованию разрешимости и корректной разрешимости задачи Коши для системы неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

### 2.1.1. Существование и продолжаемость решений

Обозначим через $\mathfrak{I}_m$ матрицу размерности $m \times m$, все компоненты которой равны 1, $I_m$ — единичную $m \times m$ матрицу. Пусть заданы: измеримая функция $h : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая при почти всех $t \in [a,b]$ неравенству $h(t) \le t$; измеримая существенно ограниченная функция $y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$; измеримая по Борелю ограниченная функция $\varphi : (-\infty, a) \to \mathbb{R}^n$; вектор $\gamma \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющая условиям Каратеодори (то есть измеримая по первому и непрерывная по совокупности остальных аргументов) функция $f = (f_1, \ldots, f_m) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Пусть при любом $r \in \mathbb{R}^m_+$ существует такое $\eta_r > 0$, что при почти всех $t \in [a, b]$ и любых $x, \omega \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(0, r)$ выполнено неравенство $|f(t, x, \omega)| \le \eta_r$.

Рассмотрим при $t \in [a, b]$ систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} & f_i\Big(t, x_1\big(h_1(t)\big), \ldots, x_n\big(h_n(t)\big), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t)\Big) = y_i(t), \quad i = \overline{1, m}, \\ & x_j(s) = \varphi_j(s), \quad \text{если } s \notin [a, b], \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

с начальными условиями

$$x_j(a) = \gamma_j, \quad j = \overline{1, n}. \tag{2.1.2}$$

Уравнение (2.1.1) — это дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, его решение может быть определено не только на всем отрезке $[a, b]$, но и на $[a, c]$, $a < c \le b$. Дадим определение такого решения.

Для любого $j = \overline{1, n}$ определим множества

$$E_j = h_j^{-1}[a, b] = \{t \in [a, b] : h_j(t) \in [a, b]\}, \quad E_j^c = E_j \cap [a, c].$$

являющиеся, очевидно, измеримыми. Теперь определим оператор внутренней суперпозиции

$$S_h^c : C([a, c], \mathbb{R}^n) \to L_\infty([a, c], \mathbb{R}^n), \quad S_h^c x = (S_{h_1}^c x_1, \ldots, S_{h_n}^c x_n),$$

$$(S_{h_j}^c x_j)(t) = \begin{cases} x_j(h_j(t)), \text{ если } t \in E_j^c, \\ \varphi_j(h_j(t)), \text{ если } t \notin E_j^c, \end{cases} \quad j = \overline{1, n},$$

и оператор Немыцкого

$$N_f^c : L_\infty([a, c], \mathbb{R}^n) \times L_\infty([a, c], \mathbb{R}^n) \to L_\infty([a, c], \mathbb{R}^m), \quad N_f^c = (N_{f_1}^c, \ldots, N_{f_m}^c)$$

$$\big(N_{f_i}^c(u, x)\big)(t) = f_i\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in [a, c], \quad i = \overline{1, m}.$$

Запишем систему (2.1.1) при $t \in [a,c]$ в следующем виде

$$N_{f_i}^c\Big(S_{h_1}^c x_1, \ldots, S_{h_n}^c x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n\Big) = y_i, \quad i = \overline{1,m}. \tag{2.1.3}$$

*Решением системы* (2.1.1), *определенным на отрезке* $[a,c]$, назовем функцию $x_c \in AC_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую системе (2.1.3) при почти всех $t \in [a,c]$.

Сформулируем утверждение о существовании определенного на некотором отрезке решения задачи Коши (2.1.1), (2.1.2).

Задача Коши (2.1.3), (2.1.2) равносильна системе

$$N_{f_i}^c\Big(S_{h_1}^c\big(\gamma_1 + \int\limits_a^{(\cdot)} u_1(s)ds\big), \ldots, S_{h_n}^c\big(\gamma_n + \int\limits_a^{(\cdot)} u_n(s)ds\big), u_1, \ldots, u_n\Big) = y_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2.1.4}$$

в том смысле, что если $x \in AC_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)$ — решение задачи (2.1.3), (2.1.2), то $u = \dot{x} \in L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)$, будет удовлетворять при почти всех $t \in [a,c]$ уравнению (2.1.4), и обратно, если $u \in L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)$ — решение уравнения (2.1.4), то функция $x(\cdot) = \gamma + \int\limits_a^{(\cdot)} u(s)\,ds \in AC_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)$ будет решением задачи (2.1.3), (2.1.2).

Пусть заданы $u^0 \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $R \in \mathbb{R}^n_+$, $d \in \mathbb{R}^m_+$, $\sigma > 0$ и $n \times m$-матрица $A$ с неотрицательными компонентами. При всех $t \in [a,b]$ зададим совокупность $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R\big) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$ равенством (1.1.8), где $\overline{X} = \mathbb{R}^n$, т.е.

$$\mathfrak{B}\big(u^0(t),R\big) \doteq \big\{\big(u,r\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ : \; Ar + \overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}\big(u,u^0(t)\big) \le R\big\}. \tag{2.1.5}$$

Определим абсолютно непрерывную функцию $x^0 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с компонентами $x_j^0(t)=\gamma_j+\int\limits_a^t u_j^0(s)\,ds,\ \ j=\overline{1,n},$ и положим

$$\widehat{D}(t)\doteq\prod_{j=1}^{n}\widehat{D}_j(t),\ \text{где}\,\widehat{D}_j(t)\doteq\begin{cases}[x_j^0(t)-\sigma,x_j^0(t)+\sigma],\ \text{если}\ t\in E_j,\\ \{\varphi_j(h_j(t))\},\ \ \text{если}\ \ t\notin E_j,\end{cases}\quad j=\overline{1,n}.$$

Далее, определим при почти всех $t\in[a,b]$ и любом $x\in\widehat{D}(t)$ множество

$$W(t,x)\doteq\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^m}\big(f(t,x,u^0(t)),d\big)=\prod_{i=1}^{m}W_i(t,x),$$

$$\text{где}\ \ W_i(t,x)\doteq\big[f_i(t,x,u^0(t))-d_i,\ f_i(t,x,u^0(t))+d_i\big],\ \ \ i=\overline{1,m}.$$

Обозначим

$$y^0(t)\doteq f\big(t,(S_{h_1}^b x_1^0)(t),\ldots,(S_{h_n}^b x_n^0)(t),u_1^0(t),\ldots,u_n^0(t)\big).$$

**Т е о р е м а 2.1.1.** *Пусть выполнены следующие условия:*

- *при почти всех* $t\in[a,b]$ *и любом* $x\in\widehat{D}(t)$ *отображение* $f(t,x,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ *является условно векторно* $A$*-накрывающим множество* $W(t,x)$ *на совокупности* $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R\big)$;

- *для любых* $i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}$ *существует такое* $\beta_{ij}\geq 0,$ *что при почти всех* $t\in E_j,$ *всех* $\omega\in\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t),R\big)$ *и любых* $x_k\in\widehat{D}_k(t),$ $k=\overline{1,n}$ *и* $k\neq j$ *отображение* $f_i(t,x_1,\ldots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\ldots,x_n,w):\widehat{D}_j(t)\to\mathbb{R}$ *является* $\beta_{ij}$*-липшицевым;*

- *для любых* $i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}$ *при почти всех* $t\in[a,b]$ *и любых* $x_j\in\widehat{D}_j(t)$ *имеет место включение*

$$y_i(t)\in f_i\Big(t,x_1,\ldots,x_n,\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t),R\big)\Big);\tag{2.1.6}$$

• *пусть существует такое* $\varepsilon > 0$, *что имеют место неравенства*

$$r_\varepsilon(y) \doteq (I_m + \varepsilon\mathfrak{I}_m)\overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}(y^0, y) \le d, \quad Ar_\varepsilon(y) \le R; \qquad (2.1.7)$$

*Тогда найдется такое* $c \in (a,b]$, *что существует определенное на* $[a,c]$ *решение* $x_c \in AC_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)$ *задачи Коши* (2.1.1), (2.1.2), *удовлетворяющее оценке* [2]

$$\overline{\rho}_{L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)}(\dot{x}_c, u^0) \le A(I_m + \varepsilon\mathfrak{I}_m)\overline{\rho}_{L_\infty([a,c],\mathbb{R}^m)}(y^0, y). \qquad (2.1.8)$$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное $c \in (a,b]$. Определим отображение $\Phi_i^c : L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n) \times L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,c],\mathbb{R})$, $i = \overline{1,m}$, формулой

$$\big(\Phi_i^c(\omega_1,\ldots,\omega_n,v_1,\ldots,v_n)\big)(t) = N_{f_i}^c\Big(S_{h_1}^c\big(\gamma_1 + \int_a^{(\cdot)} v_1(s)ds\big)(t),\ldots$$
$$\ldots, S_{h_n}^c\big(\gamma_n + \int_a^{(\cdot)} v_n(s)ds\big)(t), \omega_1(t),\ldots,\omega_n(t)\Big), \quad t \in [a,c],$$

и перепишем систему (2.1.4) в виде

$$\Phi_i^c(u_1,\ldots,u_n,u_1,\ldots,u_n) = y_i, \quad i = \overline{1,m}. \qquad (2.1.9)$$

Для доказательства разрешимости системы (2.1.9) проверим предположения теоремы 1.2.1 для отображения $\Phi^c = (\Phi_1^c,\ldots,\Phi_m^c)$.

Согласно следствию из теоремы 1.3.1, отображение $\Phi^c(\cdot, v_1,\ldots,v_n)$ : $L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,c],\mathbb{R}^m)$ является векторно условно накрывающим множество $\mathrm{S}_{L_\infty}[W]$ на совокупности $\mathfrak{B}(u^0,R)$ с матрицей $A$. Далее, для

[2] В этом неравенстве для сокращения записи сужения на $[a,c]$ функций $u^0, y^0, y$ обозначены теми же символами, что и исходные определенные на всем $[a,b]$ функции.

всех $\omega \in L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)$, произвольных $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ и любых $v_j,\tilde v_j \in L_\infty([a,c],\mathbb{R})$ выполнено

$$\rho_{L_\infty}\big(\Phi_i^c(\omega,v_1,\dots,v_j,\dots,v_n),\Phi_i^c(\omega,v_1,\dots,\tilde v_j,\dots,v_n)\big)\le$$

$$\le \beta_{ij}\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in E_j^c}\Big(S^c_{h_j}\big(\int\limits_a^{(\cdot)}\big|v_j(s)-\tilde v_j(s)\big|\,ds\Big)(t)\le \beta_{ij}(c-a)\rho_{L_\infty}(v_j,\tilde v_j).$$

Таким образом, отображение $\Phi^c(\omega,\cdot): L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)\to L_\infty([a,c],\mathbb{R}^m)$ удовлетворяет условию Липшица с матрицей $B=\big((c-a)\beta_{ij}\big)_{m\times n}$.

Определим произведение $BA$. Для элементов этой матрицы выполнено соотношение $(c-a)\sum\limits_{l=1}^{n}\beta_{il}a_{lj}\to 0$ при $c\to a$. Поэтому можно выбрать $c>0$ так, что $||BA||<1$ (и, следовательно, $\varrho(BA)<1$). Оценим матрицу $(I_m-BA)^{-1}$ при значениях $c$ достаточно близких к $a$. Так как $\varrho(BA)<1$, имеем

$$(I_m-BA)^{-1}=I_m+BA+(BA)^2+\dots.$$

Для геометрической прогрессии $C=BA+(BA)^2+\dots$ имеем

$$||C||\le\frac{||BA||}{1-||BA||}.$$

Учитывая, что все нормы конечномерного пространства эквивалентны, без ограничения общности будем считать $|y|_{\mathbb{R}^m}=\sum\limits_{i=1}^{m}|y_i|$. Тогда согласованная норма $m\times m$ матрицы $C$ удовлетворяет соотношению

$$||C||=\max_j\sum_{i=1}^{m}|c_{ij}|\ge\max_{ij}|c_{ij}|. \tag{2.1.10}$$

Выберем любое положительное $\varepsilon<\frac12$ и $c>a$ так, чтобы $||BA||<\varepsilon/2$. Тогда

$$||C||\le\frac{\varepsilon/2}{1-\varepsilon/2}<\varepsilon$$

и, вследствие соотношения (2.1.10) для всех $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ получаем $|c_{ij}| < \varepsilon$ При выбранном значении $c$ справедливо неравенство

$$I_m \leq (I_m - BA)^{-1} \leq I_m + \varepsilon \mathfrak{I}_m.$$

А это значит, что из предположения (2.1.7) вытекает условие *(e)* теоремы 1.2.1 и $r(y) \leq r_\varepsilon(y)$.

Теперь, применив теорему 1.2.1, получим требуемое утверждение. Теорема доказана.

Исследованиям неявных дифференциальных уравнений методами, основанными на утверждениях о липшицевых возмущениях накрывающих отображений, положила начало работа [1], в которой получены условия разрешимости и непрерывной зависимости от параметров решения задачи Коши. Для исследования систем неявных дифференциальных уравнений в [19] рассмотрены векторные отображения. Теорема 2.1.1 является развитием и продолжением результатов [19], которые относились к ситуации, когда отсутствует запаздывание (т.е. $h(t) \equiv t$ ) и матрица $A$ является диагональной. Отметим также, что в [19] получена оценка отклонения решения от заданной функции в некоторой метрике, существование которой доказывается, но явный вид не представлен. В теореме 2.1.1 аналогичная оценка решения представлена явно, в виде оценок по каждой компоненте. Это преимущество создает использование векторных метрик.

Обсудим условия теоремы 2.1.1.

**З а м е ч а н и е 2.1.1.** Если в теореме 2.1.1 отображение $f(t,x,\cdot)$ является "безусловно" векторно $A$-накрывающим множество $W(t,x)$ на совокупности $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R\big)$, то включение (2.1.6) выполнено (прямо следует из определения накрывания) и тогда должно быть исключено из предположений теоремы.

**З а м е ч а н и е 2.1.2.** В случае, когда $W(t,x) \equiv \mathbb{R}^m$ (т.е. компонентами вектора $d$ являются $d_j = \infty$, $j = \overline{1,m}$), второе из неравенств (2.1.7) становится тривиальным и должно быть исключено из предположений теоремы. Если же $\mathfrak{B}\big(u^0(t), R\big) \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$ (т.е. компонентами вектора $R$ являются $R_i = \infty$, $i = \overline{1,n}$), то среди неравенств (2.1.7) первое становится излишним, так как будет всегда выполненным. При выполнении двух равенств $W(t,x) \equiv \mathbb{R}^m$, $\mathfrak{B}\big(u^0(t), R\big) \equiv \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$, соответственно, предположение (2.1.7) должно быть исключено. В этом случае оценка (2.1.8) имеет место для любого положительного $\varepsilon$.

Для рассматриваемого здесь дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом важной является ситуация "строго положительного" запаздывания. Сформулируем теорему 2.1.1 в этой ситуации.

**З а м е ч а н и е 2.1.3.** *Пусть существует такое* $\tau > 0$, *что* $h(t) \le t - \tau$ *при п.в.* $t \in [a,b]$. В этом случае, если рассматривать уравнение (2.1.1) на отрезке $[a,c]$ при $c = a+\tau$, то множество $E^c_j$, $j = \overline{1,n}$, будет пустым, и второе предположение теоремы 2.1.1 о липшицевости отображения $f_i(t, x_1, \ldots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \ldots, x_n, w) \, : \, \widehat{D}_j(t) \to \mathbb{R}$ становится лишним. При этом определенное при доказательстве данной теоремы отображение $\Phi^c(\omega, \cdot) \, : \, L_\infty([a,c], \mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,c], \mathbb{R}^m)$ удовлетворяет условию Липшица с нулевой матрицей $B = (0)_{m\times n}$. Следовательно, $I_m - BA = I_m$ и $(I_m - BA)^{-1} = I_m$. Соответственно, в условии (2.1.7) следует положить

$$r_\varepsilon(y) \doteq \overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}(y^0, y),$$

а оценка (2.1.8) принимает вид

$$\overline{\rho}_{L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)}(\dot{x}_c, u^0) \le A\overline{\rho}_{L_\infty([a,c],\mathbb{R}^m)}(y^0, y).$$

Теорема 2.1.1 представляет условия локальной разрешимости задачи Коши (2.1.1), (2.1.2). Приведем условия продолжаемости решений.

Определенное на отрезке $[a, c_2]$ решение $x_{c_2} \in AC_\infty([a, c_2], \mathbb{R}^n)$ системы (2.1.1) называют *продолжением решения* $x_{c_1}$, если $a < c_1 < c_2$ и $x_{c_2}(t) = x_{c_1}(t)$ при всех $t \in [a, c_1]$.

**С л е д с т в и е 2.1.1.** *Пусть выполнены условия теоремы 1, и пусть задано определенное на некотором отрезке* $[a, c]$ *решение* $x_c \in AC_\infty([a, c], \mathbb{R}^n)$, *удовлетворяющее при всех* $t \in [a, c]$ *неравенству* $\overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}\big(x_c(t), x^0(t)\big) < \sigma$. *Тогда существует такое* $\tau > 0$, *что на* $[a, c+\tau]$ *определено некоторое продолжение* $x_{c+\tau} \in AC_\infty([a, c+\tau], \mathbb{R}^n)$ *решения* $x_c$ *и для этой функции справедлива оценка*

$$\overline{\rho}_{L_\infty([c,\, c+\tau],\mathbb{R}^n)}(\dot{x}_{c+\tau}, u^0) \le A(I_m + \varepsilon\mathfrak{I}_m)\overline{\rho}_{L_\infty([c,\, c+\tau],\mathbb{R}^m)}(y^0, y).$$

*(здесь сужения на* $[c, c+\tau]$ *всех функций обозначены теми же символами, что и исходные функции).*

**Доказательство.** Определим уравнение на $[c, b]$, решение которого позволит продолжить заданное решение $x_c$. Нам удобно будет обозначать заданное решение через $\xi(t)$, $t \in [a, c]$, т.е. полагаем $x_c = \xi$.

Определим оператор

$$S_h^{c,b} : C([c, b], \mathbb{R}^n) \to L_\infty([c, b], \mathbb{R}^m), \quad S_h^{c,b}x = (S_{h_1}^{c,b}x_1, \ldots, S_{h_n}^{c,b}x_n),$$

$$(S_{h_j}^{c,b}x_j)(t) = \begin{cases} x_j(h_j(t)), \text{ если } h_j(t) \ge c, \\ \varphi_j(h_j(t)), \text{ если } h_j(t) < a, \\ \xi_j(h_j(t)), \text{ если } h_j(t) \in [a, c], \end{cases} \qquad j = \overline{1, n}.$$

Далее, определим абсолютно непрерывную функцию $x^{0,c} : [c,b] \to \mathbb{R}^n$ с компонентами $x_j^{0,c}(t) = \xi_j(c) + \int\limits_c^t u_j^0(s)\,ds, \ j = \overline{1,n},$ и положим

$$\sigma^c = \sigma - \max_{s\in[a,c]} \overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}\big(\xi(s), x^0(s)\big), \quad \widehat{D}^c(t) = \prod_{j=1}^n \widehat{D}_j^c(t), \quad t \in [c,b],$$

$$\text{где } \widehat{D}_j^c(t) = \begin{cases} [x_j^{0,c}(t) - \sigma^c,\, x_j^{0,c}(t) + \sigma^c], & \text{если} \quad h_j(t) \geq c, \\ \varphi_j(h_j(t)), & \text{если} \quad h_j(t) < a, \\ \xi_j(h_j(t)), & \text{если} \quad h_j(t) \in [a,c], \end{cases} \qquad j = \overline{1,n}.$$

Для наших рассуждений важно, что при почти всех $t \in [c,b]$ справедливо включение $\widehat{D}_j^c(t) \subset \widehat{D}_j(t)$. Это позволяет пользоваться соответствующими предположениями теоремы 2.1.1 при $x_j \in \widehat{D}_j^c(t)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$f_i\big(t,\, (S_h^{c,b}x)(t),\, \dot{x}(t)\big) = y_i(t), \quad i = \overline{1,m}, \quad t \in [c,b];$$

$$x_j(c) = \xi_j(c), \quad j = \overline{1,n}.$$

Для этой задачи выполнены условия теоремы 2.1.1, в которых следует положить $\sigma := \sigma^c$, $\widehat{D}(t) := \widehat{D}^c(t)$.

### 2.1.2. Непрерывная зависимость решений от параметров

Теперь сформулируем условия, обеспечивающие непрерывную зависимость от параметров решений задачи Коши (2.1.1), (2.1.2).

Ниже через $\overline{1}_m$ обозначен $m-$мерный вектор, компоненты которого равны 1.

Пусть при любом натуральном $l$ заданы: измеримая функция $h^l : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая при почти всех $t \in [a,b]$ неравенству

$h^l(t) \le t,$ измеримая существенно ограниченная функция $y^l : [a,b] \to \mathbb{R}^m,$ измеримая по Борелю ограниченная функция $\varphi^l : (-\infty, a) \to \mathbb{R}^n,$ вектор $\gamma^l \in \mathbb{R}^n.$ Далее, пусть при любом натуральном $l$ определена удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $f^l : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$ относительно которой предполагаем, что при любом $r \in \mathbb{R}^m_+$ существует $\eta^l_r > 0,$ для которого при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x, \omega \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(0,r)$ выполнено неравенство $|f^l(t,x,\omega)| \le \eta^l_r.$ Рассмотрим при $t \in [a,b]$ последовательность систем дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} &f^l_i\Big(t, x_1\big(h^l_1(t)\big), \ldots, x_n\big(h^l_n(t)\big), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t)\Big) = y^l_i(t), \quad i = \overline{1,m}, \\ &x_j(s) = \varphi^l_j(s), \quad \text{если } s \notin [a,b], \quad j = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

с начальными условиями

$$x_j(a) = \gamma^l_j, \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.1.12}$$

Для любого $j = \overline{1,n},$ $l = 1, 2, \ldots$ определим множества

$$E^l_j = (h^l_j)^{-1}[a,b] = \{t \in [a,b] : h^l_j(t) \in [a,b]\}.$$

Множества $E^l_j$ являются измеримыми.

Пусть заданы $u^0 \in L_\infty([a,b], \mathbb{R}^n),$ $\gamma \in \mathbb{R}^n.$ Обозначим

$$y^{0l}_i(t) = f^l_i\Big(t, S_{h^l_1}\big(\gamma^l_1 + \int\limits_a^{(\cdot)} u^0_1(s)ds\big)(t), \ldots,$$

$$S_{h^l_n}\big(\gamma^l_n + \int\limits_a^{(\cdot)} u^0_n(s)ds\big)(t), u^0_1(t), \ldots, u^0_n(t)\Big);$$

$$(S_{h^l_j} x_j)(t) = \begin{cases} x_j(h^l_j(t)), & \text{если } h^l_j(t) \ge a, \\ \varphi^l_j(h^l_j(t)), & \text{если } h^l_j(t) < a. \end{cases} \quad j = \overline{1,n}.$$

Предположим, что при $l \to \infty$ имеют место сходимости

$$\gamma_j^l \to \gamma_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2.1.13}$$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [a,b]} \bigl| y_i^{0l}(t) - y_i^l(t) \bigr| \to 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{2.1.14}$$

Для каждого натурального $l$ определим абсолютно непрерывную функцию $x^l : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, компоненты которой заданы равенством

$$x_j^l(t) = \gamma_j^l + \int\limits_a^t u_j^0(s)\,ds, \quad j = \overline{1,n}.$$

Для некоторого $\sigma > 0$ положим

$$\widehat{D}^l(t) = \prod_{j=1}^n \widehat{D}_j^l(t), \text{ где } \widehat{D}_j^l(t) = \begin{cases} [x_j^l(t) - \sigma,\, x_j^l(t) + \sigma], & \text{если } t \in E_j^l, \\ \{\varphi_j^l(h_j^l(t))\}, & \text{если } t \notin E_j^l, \end{cases} \quad j = \overline{1,n}.$$

Пусть $\epsilon > 0$, $d \doteq \epsilon \overline{1}_m \in \mathbb{R}_+^m$. Определим при почти всех $t \in [a,b]$ и любом $x \in \widehat{D}^l(t)$ множество

$$W^l(t,x) \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^m}\bigl(f^l(t,x,u^0(t)), d\bigr) = \prod_{i=1}^m W_i^l(t,x),$$

$$\text{где } W_i^l(t,x) \doteq \bigl[f_i^l(t,x,u^0(t)) - \epsilon,\, f_i^l(t,x,u^0(t)) + \epsilon\bigr], \quad i = \overline{1,m}.$$

Наконец, пусть задана $n \times m$ матрица $A$ с неотрицательными компонентами. Определим при почти всех $t \in [a,b]$ совокупность $\mathfrak{B}\bigl(u^0(t), R\bigr) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ равенством (2.1.5), где $R \doteq \epsilon \overline{1}_n \in \mathbb{R}_+^n$.

Следующая теорема предоставляет условия, обеспечивающие разрешимость при достаточно больших номерах $l$ задачи Коши (2.1.11), (2.1.12) на всем $[a,b]$ и сходимость последовательности решений к функции $x^0 \in AC_\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$, компоненты которой равны

$$x_j^0(t) = \gamma_j^0 + \int\limits_a^t u_j^0(s)\,ds, \quad j = \overline{1,n}.$$

**Т е о р е м а  2.1.2.** *Пусть при* $l = 1, 2, \ldots$ *выполнены следующие условия:*

- *при почти всех* $t \in [a, b]$ *и любом* $x \in \widehat{D}(t)$ *отображение* $f^l(t, x, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *является условно векторно* $A$*-накрывающим множество* $W^l(t, x)$ *на совокупности* $\mathfrak{B}\big(u^0(t), R\big)$;

- *для любых* $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ *существует такое* $\beta_{ij} \geq 0$, *что при почти всех* $t \in E^l_j$, *всех* $\omega \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t), R\big)$ *и любых* $x_k \in \widehat{D}_k(t)$, $k = \overline{1, n}$ *и* $k \neq j$ *отображение* $f^l_i(t, x_1, \ldots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \ldots, x_n, w) : \widehat{D}_j(t) \to \mathbb{R}$ *является* $\beta_{ij}$*-липшицевым;*

- *для любых* $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, *при почти всех* $t \in [a, b]$ *и любых* $x_j \in \widehat{D}^l_j(t)$ *имеет место включение*

$$y^l_i(t) \in f^l_i\Big(t, x_1, \ldots, x_n, \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t), R\big)\Big).$$

*Тогда, если имеют место соотношения* (2.1.13), (2.1.14), *то при каждом натуральном* $l$, *начиная с некоторого номера, существует определенное на всем* $[a, b]$ *решение* $\xi^l = (\xi^l_1, \ldots, \xi^l_n) \in AC_\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$ *задачи Коши* (2.1.11), (2.1.12) *такое, что имеет место сходимость* $\xi^l \to x^0$, *т.е.*

$$\xi^l_j(a) \to x^0_j(a), \quad \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in [a,b]} \big|\dot{\xi}^l_j(t) - \dot{x}^0_j(t)\big| \to 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

**Доказательство.** Для любого $c \in (a, b]$ и всех $j = \overline{1, n}$, $l = 1, 2, \ldots$ определим множества

$$E^l_j = (h^l_j)^{-1}[a, b] = \{t \in [a, b] : h^l_j(t) \in [a, b]\}, \quad E^{c,l}_j = E^l_j \cap [a, c],$$

являющиеся, очевидно, измеримыми. При каждом $l = 1, 2, \dots$ определим оператор внутренней суперпозиции

$$S^c_{h^l} : C([a,c], \mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,c], \mathbb{R}^m), \quad S^c_{h^l} x = (S^c_{h^l_1} x_1, \dots, S^c_{h^l_n} x_n),$$

$$(S^c_{h^l_j} x_j)(t) = \begin{cases} x_j(h^l_j(t)), \text{ если } t \in E^{c,l}_j, \\ \varphi^l_j(h^l_j(t)), \text{ если } t \notin E^{c,l}_j, \end{cases} \quad j = \overline{1,n},$$

и оператор Немыцкого

$$N^c_{f^l} : L_\infty([a,c], \mathbb{R}^n) \times L_\infty([a,c], \mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,c], \mathbb{R}^m), \quad N^c_{f^l} = (N^c_{f^l_1}, \dots, N^c_{f^l_m})$$

$$\big(N^c_{f^l_i}(u,x)\big)(t) = f^l_i\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in [a,c], \quad i = \overline{1,m}.$$

Запишем задачу Коши (2.1.11), (2.1.12) при $t \in [a,c]$ в следующем виде

$$N^c_{f^l_i}\Big(S^c_{h^l_1}\big(\gamma^l_1 + \int\limits_a^{(\cdot)} \dot{x}_1(s)ds\big), \dots, S^c_{h^l_n}\big(\gamma^l_n + \int\limits_a^{(\cdot)} \dot{x}_n(s)ds\big), \\ \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n\Big) = y^l_i, \quad i = \overline{1,m}. \quad (2.1.15)$$

Определим при каждом $l = 1, 2, \dots$ функцию

$$\Pi^l : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \Pi^l(t,x) = \big(\Pi^l_1(t,x_1), \dots, \Pi^l_n(t,x_n)\big),$$

$$\Pi^l_j(t,x_j) = \begin{cases} x_j, & \text{если } x_j \in \widehat{D}^l_j(t), \\ x^l_j(t) - \sigma, & \text{если } x_j < x^l_j(t) - \sigma, \\ x^l_j(t) + \sigma, & \text{если } x_j > x^l_j(t) + \sigma, \end{cases} \quad j = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим "исправленное" функционально-дифференциальное уравнение

$$N^c_{f^l_i}\Big(\big(S_{h^l_1}\Pi^l_1(\cdot, x_1(\cdot))\big), \dots, \big(S_{h^l_n}\Pi^l_n(\cdot, x_n(\cdot))\big), \\ \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n\Big) = y^l_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad t \in [a,c]. \quad (2.1.16)$$

с прежними начальными условиями (2.1.12). Заметим, что любое решение $x_c^l \in AC_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)$ "исправленной" задачи (2.1.16), (2.1.12), удовлетворяющее при всех $t \in [a,c]$ включению $x_c^l(t) \in \widehat{D}^l(t)$, является также и решением исходной задачи Коши (2.1.11), (2.1.12). Обратно, любое решение $x_c^l$ задачи (2.1.11), (2.1.12), если удовлетворяет условию $x_c^l(t) \in \widehat{D}^l(t)$, то является и решением задачи (2.1.11), (2.1.12).

Далее, определим при $l = 1, 2, \ldots$ отображение $\Phi_i^l : L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n) \times L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,c],\mathbb{R})$, соотношением

$$\big(\Phi_i^l(\omega_1,\ldots,\omega_n,v_1,\ldots,v_n)\big)(t) = N^c_{f_i^l}\Big(\big(S_{h_1^l}\Pi_1^l(\cdot,\gamma_1 + \int\limits_a^{(\cdot)} v_1(s)ds)\big)(t),\ldots$$

$$\ldots,\big(S_{h_n^l}\Pi_n^l(\cdot,\gamma_n + \int\limits_a^{(\cdot)} v_n(s)ds)\big)(t), w_1(t),\ldots,w_n(t)\Big), \quad i=\overline{1,m},$$

и отображение

$$\Phi^l : L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n) \times L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,c],\mathbb{R}^m), \quad \Phi^l = (\Phi_1^l,\ldots,\Phi_m^l).$$

Перепишем систему (2.1.16) в виде

$$\Phi_i^l(v_1,\ldots,v_n,v_1,\ldots,v_n) = y_i^l, \quad i=\overline{1,m}, \tag{2.1.17}$$

относительно неизвестного $v = \dot{x} \in L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)$.

Отображение $\Phi^l(\cdot,v) : L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,c],\mathbb{R}^m)$ является условно векторно $A$-накрывающим множество $W^l(t,x)$ на совокупности $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R\big)$, а отображение $\Phi^l(w,\cdot) : L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,c],\mathbb{R}^m)$ удовлетворяет условию Липшица с матрицей $B = \big((c-a)\beta_{ij}\big)_{m\times n}$, при любом $l = 1, 2, \ldots$.

Как показано при доказательстве теоремы 2.1.1, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $c > a$, что $I_m \le (I_m - BA)^{-1} \le I_m + \varepsilon\mathfrak{I}_m$. Зафиксируем такое значение $c$. Найдем $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$(I_m + \varepsilon \mathfrak{I}_m)\varepsilon_0 \overline{1}_m \leq \epsilon \overline{1}_m = d, \quad A(I_m + \varepsilon \mathfrak{I}_m)\varepsilon_0 \overline{1}_m \leq \epsilon \overline{1}_n = R.$$

Для проверки предположений теоремы 1.2.1 остается заметить, что в силу сходимости (2.1.14) существует такое $l_0$, что для любого $l > l_0$ выполнено

$$\overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}(y^{0l}, y^l) \leq \delta_0 \overline{1}_m.$$

Итак, в силу теоремы 1.2.1 при определенном выше значении $c$ задача (2.1.16), (2.1.12) имеет решение $\xi^{c,l}$, удовлетворяющее неравенству

$$\overline{\rho}_{L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)}(\dot{\xi}^{c,l}, \dot{x}^0) \leq A(I_m + \frac{1}{2}\mathfrak{I}_m)\overline{\rho}_{L_\infty([a,c],\mathbb{R}^m)}(y^{0l}, y^l).$$

(здесь сужения на $[a, c]$ функций обозначены теми же символами, что и исходные функции)

Определим $\tau \doteq c - a$; имеем $\tau > 0$.

Далее, покажем существование решения при $t \in [c, c+\tau]$. Для этого определим операторы

$$S_{h^l}^{c,c+\tau} : C([c, c+\tau], \mathbb{R}^n) \to L_\infty([c, c+\tau], \mathbb{R}^m), \quad S_{h^l}^{c,c+\tau} x = (S_{h_1^l}^{c,b} x_1, \ldots, S_{h_n^l}^{c,b} x_n),$$

$$(S_{h_j^l}^{c,c+\tau} x_j)(t) = \begin{cases} x_j(h_j^l(t)), & \text{если } h_j^l(t) \geq c, \\ \varphi_j^l(h_j^l(t)), & \text{если } h_j^l(t) < a, \\ \xi_j^l(h_j^l(t)), & \text{если } h_j^l(t) \in [a, c], \end{cases} \qquad t \in [c, c+\tau];$$

$$N_{f^l}^{c,c+\tau} : L_\infty([c, c+\tau], \mathbb{R}^n) \times L_\infty([c, c+\tau], \mathbb{R}^n) \to L_\infty([c, c+\tau], \mathbb{R}^m),$$
$$N_{f^l}^{c,c+\tau} = (N_{f_1^l}^{c,c+\tau}, \ldots, N_{f_m^l}^{c,c+\tau}),$$
$$\big(N_{f_i^l}^{c,c+\tau}(u, x)\big)(t) = f_i^l\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in [c, c+\tau];$$

и рассмотрим задачу

$$N_{f_i^l}^{c,c+\tau}\Big(\big(S_{h^l}^c\Pi^l(\cdot,x(\cdot))\big),\,\dot{x}\Big)(t)=y_i^l(t),\quad i=\overline{1,m},\quad l=1,2,\ldots,\quad t\in[c,c+\tau];$$

$$x_j(c)=\xi_j^l(c),\quad j=\overline{1,n}.$$

Здесь начальное условие обеспечивает непрерывность решения в точке $c$. Существование решения $\xi^{c,c+\tau,l}(t)$ этой задачи, удовлетворяющего оценке

$$\overline{\rho}_{L_\infty([c,c+\tau],\mathbb{R}^n)}(\dot{\xi}^{c,c+\tau,l},\dot{x}^0)\leq A(I_m+\frac{1}{2}\mathfrak{I}_m)\overline{\rho}_{L_\infty([c,c+\tau],\mathbb{R}^m)}(y^{0l},y^l),$$

доказывается аналогично.

Итак, за конечное количество шагов мы найдем решение $\xi^l(t)$ задачи (2.1.16), (2.1.12), определенное на всем отрезке $[a,b]$. В силу сходимости (2.1.13), (2.1.14) существует такое $l_1$, что для любого $l>l_1$ выполнено

$$\max_{t\in[a,b]}|\xi^l(t)-x^0(t)|<\sigma.$$

Поэтому при всех $l>l_0$ решение $\xi^l\in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ задачи (2.1.16), (2.1.12), удовлетворяющее включению $\xi^l\in\widehat{D}^l(t)$, будет решением исходной задачи Коши (2.1.11), (2.1.12), и будет выполнена оценка

$$\overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)}(\dot{\xi}^l,\dot{x}^0)\leq A(I_m+\frac{1}{2}\mathfrak{I}_m)\overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}(y^{0l},y^l).$$

Согласно этой оценке и соотношениям (2.1.13), (2.1.14) получаем $\xi^l\to x^0$.

Теорема доказана.

## § 2.2. Краевая задача

Здесь предлагаются условия, обеспечивающие существование и непрерывную зависимость от параметров решений краевых задач для неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Метод исследования основан утверждениях о векторно накрывающих отображениях и сведении краевой задачи к системе операторных уравнений относительно пары векторов $(\dot{x}, x(a))$.

### 2.2.1. Существование решения

Пусть заданы вектор $\Delta = (\Delta_1, \ldots, \Delta_k) \in \mathbb{R}^k$, непрерывная функция $g = (g_1, \ldots, g_k) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, измеримая функция $h : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, измеримая существенно ограниченная функция $y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, измеримая по Борелю ограниченная функция $\varphi : (-\infty, a) \bigcup (b, \infty) \to \mathbb{R}^n$, и определена удовлетворяющая условиям Каратеодори (то есть измеримая по первому и непрерывная по совокупности остальных аргументов) функция $f = (f_1, \ldots, f_m) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Относительно функции $f$ предполагаем, что для любого $r \in \mathbb{R}^m_+$ существует такое $\eta_r \geq 0$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x, \omega \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(0,r)$ выполнено неравенство $|f(t,x,\omega)| \leq \eta_r$.

Рассмотрим при $t \in [a,b]$ систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} & f_i\Big(t, x_1\big(h_1(t)\big), \ldots, x_n\big(h_n(t)\big), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t)\Big) = y_i(t), \quad i = \overline{1,m}, \\ & x_j(s) = \varphi_j(s), \quad \text{если } s \notin [a,b], \quad j = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

с краевыми условиями

$$g_i\big(x_1(a), \ldots, x_n(a), x_1(b), \ldots, x_n(b)\big) = \Delta_i, \quad i = \overline{1,k}. \tag{2.2.2}$$

Для любого $j = \overline{1, n}$ определим множество

$$E_j = h_j^{-1}[a, b] = \{t \in [a, b] : h_j(t) \in [a, b]\},$$

которое является измеримым, и число $H_j = \operatorname{vrai}\sup\limits_{t \in E_j}(h_j(t) - a)$. Будем полагать $H_j = 0$, если $E_j = \varnothing$. Далее, определим оператор внутренней суперпозиции

$$S_h : C([a, b], \mathbb{R}^n) \to L_\infty([a, b], \mathbb{R}^n), \quad S_h x = (S_{h_1} x_1, \ldots, S_{h_n} x_n),$$

$$(S_{h_j} x_j)(t) = \begin{cases} x_j(h_j(t)), \text{ если } t \in E_j, \\ \varphi_j(h_j(t)), \text{ если } t \notin E_j, \end{cases} \quad j = \overline{1, n},$$

и оператор Немыцкого

$$N_f : L_\infty([a, b], \mathbb{R}^n) \times L_\infty([a, b], \mathbb{R}^n) \to L_\infty([a, b], \mathbb{R}^m), \quad N_f = (N_{f_1}, \ldots, N_{f_m})$$
$$\big(N_{f_i}(u, x)\big)(t) = f_i\big(t, x(t), u(t)\big), \quad t \in [a, b], \quad i = \overline{1, m}.$$

(согласно [14, с. 375] приведенные выше предположения на функции $f$, $h$, $\varphi$ обеспечивают действия описанных здесь отображений в соответствующих пространствах).

Запишем систему (2.2.1) при $t \in [a, b]$ в виде системы операторных уравнений

$$N_{f_i}\Big(S_{h_1} x_1, \ldots, S_{h_n} x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n\Big) = y_i, \quad i = \overline{1, m}. \qquad (2.2.3)$$

*Решением системы* (2.2.1) назовем функцию $x \in AC_\infty([a, b], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую системе (2.2.3).

Сформулируем утверждение о существовании решения краевой задачи (2.2.1), (2.2.2).

Краевая задача (2.2.3), (2.2.2) равносильна системе

$$\begin{cases} N_{f_i}\Big(S_{h_1}\big(\gamma_1+\int\limits_a^{(\cdot)} u_1(s)ds\big),\dots,S_{h_n}\big(\gamma_n+\int\limits_a^{(\cdot)} u_n(s)ds\big), \\ \qquad\qquad\qquad u_1,\dots,u_n\Big)=y_i, \quad i=\overline{1,m}, \\ g_i\big(\gamma_1,\dots,\gamma_n,\gamma_1+\int\limits_a^b u_1(s)ds,\dots,\gamma_n+\int\limits_a^b u_n(s)ds\big)= \\ \qquad\qquad\qquad =\Delta_i, \quad i=\overline{1,k}, \end{cases} \tag{2.2.4}$$

то есть, если $x\in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ — решение задачи (2.2.3), (2.2.2), то пара $(u,\gamma)=(\dot{x},x(a))\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$ будет удовлетворять системе (2.2.4), и обратно, если пара $(u,\gamma)\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$ — решение системы (2.2.4), то функция $x(\cdot)=\gamma+\int\limits_a^{(\cdot)} u(s)\,ds\in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ будет решением задачи (2.2.3), (2.2.2). Итак, исходная краевая задача сведена к системе (2.2.4), содержащей $m+k$ уравнений с $2n$ неизвестным $u_j\in L_\infty([a;b],\mathbb{R})$, $\gamma_j\in\mathbb{R}$, $j=\overline{1,n}$.

Пусть заданы $u^0\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\gamma^0\in\mathbb{R}^n$, $R^1,R^2\in\mathbb{R}^n_+$, $d^1\in\mathbb{R}^m_+$ и $n\times m$-матрица $A_1$ с неотрицательными компонентами. Зададим при каждом $t\in[a,b]$ совокупность $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R^1\big)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+$ равенством (2.1.5), где $A=A_1$, т.е.

$$\mathfrak{B}\big(u^0(t),R^1\big)\doteq\{\big(u,r\big)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+:\ A_1r+\overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}\big(u,u^0(t)\big)\le R^1\}. \tag{2.2.5}$$

Определим абсолютно непрерывную функцию $x^0:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с компонентами $x_j^0(t)=\gamma_j^0+\int\limits_a^t u_j^0(s)\,ds$, $j=\overline{1,n}$, и положим

$$\widehat{D}(t)\doteq\prod_{j=1}^n\widehat{D}_j(t),$$

$$\text{где}\quad \widehat{D}_j(t)\doteq\begin{cases}\mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x_j^0(t),R_j^2+R_j^1(t-a)\big), & \text{если}\ t\in E_j,\\ \{\varphi_j(h_j(t))\}, & \text{если}\ t\notin E_j,\end{cases}\qquad j=\overline{1,n}.$$

Далее, определим при почти всех $t \in [a,b]$ и любом векторе $x \in \widehat{D}(t)$ множество

$$W^1(t,x) \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^m}\big(f(t,x,u^0(t)),d^1\big) = \prod_{i=1}^{m} W_i^1(t,x),$$

$$\text{где } \; W_i^1(t,x) \doteq \big[f_i(t,x,u^0(t)) - d_i^1,\; f_i(t,x,u^0(t)) + d_i^1\big], \quad i = \overline{1,m}.$$

Пусть определены $n \times k$-матрица $A_2$ с неотрицательными компонентами и вектор $d^2 \in \mathbb{R}_+^k$. Зададим совокупность $\mathfrak{B}\big(\gamma^0, R^2\big) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^k$ равенством

$$\mathfrak{B}\big(\gamma^0, R^2\big) \doteq \{\big(\gamma, r\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^k : \; A_2 r + \overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}\big(\gamma, \gamma^0\big) \le R^2\}. \tag{2.2.6}$$

Далее, при любом векторе $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(x^0(b), R^2 + R^1(b-a)\big)$ определим множество

$$W^2(x) \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^k}\big(g(\gamma^0,x),d^2\big) = \prod_{i=1}^{k} W_i^2(x),$$

$$\text{где } \; W_i^2(x) \doteq \big[g_i(\gamma^0,x) - d_i^2,\; g_i(\gamma^0,x) + d_i^2\big], \quad i = \overline{1,k}.$$

Обозначим

$$y^0(t) \doteq f\big(t, (S_{h_1}x_1^0)(t), \ldots, (S_{h_n}x_n^0)(t), u_1^0(t), \ldots, u_n^0(t)\big),$$

$$\Delta^0 \doteq g^0\Big(\gamma_1^0, \ldots, \gamma_n^0, \gamma_1^0 + \int_a^b u_1^0(s)ds, \ldots, \gamma_n^0 + \int_a^b u_n^0(s)ds\Big).$$

**Т е о р е м а 2.2.1.** *Пусть выполнены следующие условия:*

- *при почти всех $t \in [a,b]$ и любом векторе $x \in \widehat{D}(t)$ отображение $f(t,x,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является векторно условно $A_1$-накрывающим множество $W^1(t,x)$ на совокупности $\mathfrak{B}\big(u^0(t), R^1\big)$; при любом $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(x^0(b), R^2 + R^1(b-a)\big)$ отображение $g(\cdot, x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$*

*является векторно условно* $A_2$*-накрывающим множество* $W^2(x)$ *на совокупности* $\mathfrak{B}\bigl(\gamma^0, R^2\bigr)$;

- *для любых* $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ *существует такое* $\beta^1_{ij}\geq 0$, *что при почти всех* $t\in E_j$, *всех* $\omega\in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\bigl(u^0(t),R^1\bigr)$ *и любых* $x_p\in \widehat{D}_p(t)$, $p=\overline{1,n}$ *и* $p\neq j$, *отображение* $f_i(t,x_1,\ldots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\ldots,x_n,w):\widehat{D}_j(t)\to\mathbb{R}$ *является* $\beta^1_{ij}$*-липшицевым; для любых* $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,n}$ *существует такое* $\beta^2_{ij}\geq 0$, *что при всех* $\gamma\in\mathfrak{B}\bigl(\gamma^0,R^2\bigr)$ *и любых* $x_p\in \mathrm{B}_{\mathbb{R}}\bigl(x^0_p(b),R^2_p+R^1_p(b-a)\bigr)$, $p=\overline{1,n}$ *и* $p\neq j$, *отображение* $g_i(\gamma,x_1,\ldots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\ldots,x_n):\mathrm{B}_{\mathbb{R}}\bigl(x^0_j(b),R^2_j+R^1_j(b-a)\bigr)\to\mathbb{R}$ *является* $\beta^2_{ij}$*-липшицевым;*

- *для любых* $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, *при почти всех* $t\in[a,b]$ *и любых* $x_j\in\widehat{D}_j(t)$ *имеет место включение*

$$y_i(t)\in f_i\Bigl(t,x_1,\ldots,x_n,\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\bigl(u^0(t),R^1\bigr)\Bigr);$$

  *для любых* $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,n}$, *любых* $x_j\in \mathrm{B}_{\mathbb{R}}\bigl(x^0_j(b),R^2_j+R^1_j(b-a)\bigr)$ *имеет место включение*

$$\Delta_i\in g_i\Bigl(\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\bigl(\gamma^0,R^2\bigr),x_1,\ldots,x_n\Bigr).$$

- *для спектрального радиуса* $\varrho$ *произведения* $BA$ *матриц*

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix},$$

  *где* $B_{11}=(H_j\beta^1_{ij})_{m\times n}$, $B_{12}=(\beta^1_{ij})_{m\times n}$, $B_{21}=\bigl((b-a)\beta^2_{ij}\bigr)_{k\times n}$, $B_{22}=(\beta^2_{ij})_{k\times n}$, *выполнено неравенство* $\varrho(BA)<1$;

- *имеют место неравенства*

$$r(y,\Delta) \doteq (I_{m+k} - BA)^{-1} \begin{pmatrix} \overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}(y,y^0) \\ \overline{\rho}_{\mathbb{R}^k}(\Delta,\Delta^0) \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \end{pmatrix},$$

$$Ar(y,\Delta) \le \begin{pmatrix} R^1 \\ R^2 \end{pmatrix}.$$

*Тогда существует решение* $x \in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ *краевой задачи* (2.2.1), (2.2.2), *удовлетворяющее неравенству*

$$\begin{pmatrix} \overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)}(\dot{x},u^0) \\ \overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}(x(a),\gamma^0) \end{pmatrix} \le A(I_{m+k} - BA)^{-1} \begin{pmatrix} \overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}(y,y^0) \\ \overline{\rho}_{\mathbb{R}^k}(\Delta,\Delta^0) \end{pmatrix}. \qquad (2.2.7)$$

**Доказательство.** Определим отображения

$$\Phi_i : L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \times L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \to L_\infty([a,b],\mathbb{R}),$$

$$\psi_i : \mathbb{R}^n \times L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

следующими соотношениями: для $\omega^I \doteq (\omega_1,\dots,\omega_n)$, $v^I \doteq (v_1,\dots,v_n) \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ и векторов $\omega^{II} \doteq (\omega_{n+1},\dots,\omega_{2n})$, $v^{II} \doteq (v_{n+1},\dots,v_{2n}) \in \mathbb{R}^n$ полагаем

$$\Phi_i(\omega^I, v^I, v^{II}) =$$

$$= N_{f_i}\Big(S_{h_1}\big(v_{n+1}+\int_a^{(\cdot)} v_1(s)ds\big),\dots,S_{h_n}\big(v_{2n}+\int_a^{(\cdot)} v_n(s)ds\big),\omega_1,\dots,\omega_n\Big),\ i=\overline{1,m};$$

$$\psi_i(\omega^{II}, v^I, v^{II}) =$$

$$= g_i\big(\omega_{n+1},\dots,\omega_{2n}, v_{n+1} + \int_a^b v_1(s)ds,\dots,v_{2n} + \int_a^b v_n(s)ds\big),\quad i=\overline{1,k}.$$

Перепишем краевую задачу (2.2.4) в виде системы операторных уравнений

$$\begin{cases} \Phi_i\big(u_1,\dots,u_n,u_1,\dots,u_n,\gamma_1,\dots,\gamma_n\big) = y_i, \\ \psi_i\big(\gamma_1,\dots,\gamma_n,u_1,\dots,u_n,\gamma_1,\dots,\gamma_n\big) = \Delta_i. \end{cases} \tag{2.2.8}$$

Согласно следствию из теоремы 1.3.1, для любых $v^I \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $v^{II} \in \mathbb{R}^n$ отображение $\Phi(\cdot,v^I,v^{II}) : L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ является векторно условно накрывающим множество $\mathbb{S}_{L_\infty}[W^1]$, определенное равенством (1.3.7), на совокупности $\mathfrak{B}\big(u^0,R^1\big)$, определенной равенством (2.2.5), с матрицей $A_1$. Далее, для всех $\omega^I \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $v^{II} \in \mathbb{R}^n$ произвольных $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ и любых $v_j,\tilde v_j \in L_\infty([a,b],\mathbb{R})$ выполнено

$$\rho_{L_\infty}\big(\Phi_i(\omega^I,v_1,\dots,v_j,\dots,v_n,v^{II}),\Phi_i(\omega^I,v_1,\dots,\tilde v_j,\dots,v_n,v^{II})\big) \le$$
$$\le \beta^1_{ij}\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in E_j}\Big(S_{h_j}\big(\int\limits_a^{(\cdot)}\big|v_j(s)-\tilde v_j(s)\big|\,ds\big)\Big)(t) \le \beta^1_{ij}H_j\rho_{L_\infty}(v_j,\tilde v_j).$$

Таким образом, отображение $\Phi(\omega^I,\cdot,v^{II}) : L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ удовлетворяет "векторному" условию Липшица с матрицей $B_{11} = \big(H_j\beta^1_{ij}\big)_{m\times n}$.

Аналогично доказывается, что при любых $\omega^I \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $v^I \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ отображение $\Phi(\omega^I,v^I,\cdot) : \mathbb{R}^n \to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ удовлетворяет векторному аналогу условия Липшица с матрицей $B_{12} = \big(\beta^1_{ij}\big)_{m\times n}$.

Также легко проверяются следующие свойства функционала $\psi_i$, $i=\overline{1,k}$: для любых $v^I \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $v^{II} \in \mathbb{R}^n$ отображение $\psi_i(\cdot,v^I,v^{II}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является векторно условно $A_2-$накрывающим множество $W^2$ на совокупности $\mathfrak{B}\big(\gamma^0,R^2\big)$; при любых $\omega^{II} \in \mathbb{R}^n$, $v^{II} \in \mathbb{R}^n$ отображение $\psi_i(\omega^{II},\cdot,v^{II}) : L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ будет "векторно" $B_{21}-$липшицевым, где $B_{21} = \big((b-a)\beta^2_{ij}\big)_{k\times n}$; для любых $\omega^{II} \in \mathbb{R}^n$, $v^I \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, отображение $\psi_i(\omega^{II}, v^I, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет векторному аналогу условия Липшица с матрицей $B_{22} = \big(\beta^2_{ij}\big)_{k\times n}$.

Условия доказываемой теоремы, очевидно, обеспечивают выполнение всех предположений теоремы 1.2.1 для отображения

$$\Upsilon : \big(L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n\big)^2 \to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^k,$$

которое аргументам $\omega = (\omega^I, \omega^{II})$, $v = (v^I, v^{II}) \in (L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n)$ сопоставляет $y \doteq \Phi(\omega^I, v^I, v^{II}) \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$, $\Delta \doteq \psi(\omega^{II}, v^I, v^{II}) \in \mathbb{R}^k$, то есть

$$\Upsilon(\omega, v) \doteq \begin{pmatrix} \Phi(\omega^I, v^I, v^{II}) \\ \psi(\omega^{II}, v^I, v^{II}) \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

Проиллюстрируем ее применение к исследованию следующей краевой задачи.

**П р и м е р 2.2.1.** Рассмотрим систему неявных уравнений

$$\begin{cases} \Psi_1\big(\dot{x}_1(t),\, \dot{x}_2(t)\big) - x_1(t/2) = y_1(t), \\ \Psi_2\big(\dot{x}_1(t),\, \dot{x}_2(t)\big) - x_2(t/2) = y_2(t), \end{cases} \quad t \in [0,T], \tag{2.2.9}$$

с краевыми условиями

$$x_1(0) = \Delta_1, \quad x_2(0) + \mu x_2(T) = \Delta_2. \tag{2.2.10}$$

Здесь функции $\Psi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, определены в примере 1.1.1 соотношениями (1.1.5), $T > 0$, $\mu, \Delta_1, \Delta_2 \in \mathbb{R}$, $y_1, y_2 \in L_\infty([0,T],\mathbb{R})$. Покажем, что если параметры $\mu, T$ удовлетворяют неравенству

$$\mu + T + \mu T < 1, \tag{2.2.11}$$

то при любых правых частях $\Delta_i$, $y_i$, $i = 1,2$, краевая задача (2.2.9), (2.2.10) имеет решение $(x_1, x_2) \in AC_\infty([0,T],\mathbb{R}^2)$.

Для данного дифференциального уравнения имеем $h_1(t) = h_2(t) = t/2$,

$$f_1(t,x,w) = -x_1 + \Psi_1(w_1,w_2), \quad f_2(t,x,w) = -x_2 + \Psi_2(w_1,w_2).$$

Как показано в примере 1.1.1, отображение $f(t,x,\cdot) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ является "безусловно" векторно накрывающим с матрицей $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Отображение $f_i(t,\cdot,w) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ липшицево по каждому аргументу $x_1$, $x_2$ с коэффициентами

$$\beta^1_{11} = 1, \ \ \beta^1_{12} = 0, \ \ \beta^1_{21} = 0, \ \ \beta^1_{22} = 1.$$

Краевые условия определяются функцией $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$,

$$g_1(\gamma_1,\gamma_2,x_1,x_2) = \gamma_1, \quad g_2(\gamma_1,\gamma_2,x_1,x_2) = \gamma_2 + \mu x_2.$$

Функция $g(\cdot,x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ обладает свойством векторного накрывания, ее матрица накрывания равна $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Далее, очевидно,

$$H_1 = H_2 = T/2, \ \ \beta^2_{11} = 0, \ \ \beta^2_{12} = 0, \ \ \beta^1_{21} = 0, \ \ \beta^2_{22} = |\mu|,$$

и таким образом, матрицы, участвующие в формулировке теоремы 2.2.1, для данной краевой задачи равны

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} T/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & T/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |\mu| T & 0 & |\mu| \end{pmatrix}.$$

Найдем спектральный радиус их произведения

$$BA = \begin{pmatrix} T/2 & T/2 & 1 & 0 \\ T/2 & T/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ |\mu|T & |\mu|T & 0 & |\mu| \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\det(\lambda I_4 - BA) = \begin{vmatrix} \lambda - T/2 & -T/2 & -1 & 0 \\ -T/2 & \lambda - T/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ -|\mu|T & -|\mu|T & 0 & \lambda - |\mu| \end{vmatrix} = \lambda^4 - (|\mu| + T)\lambda^3 - |\mu|T\lambda^2.$$

Таким образом, матрица $BA$ имеет собственное число $\lambda = 0$ кратности 2 и еще два действительных собственных числа — решения $\lambda_1$, $\lambda_2$ уравнения

$$P(\lambda) \doteq \lambda^2 - (|\mu| + T)\lambda - |\mu|T = 0.$$

Очевидно, эти числа разных знаков: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 > |\lambda_2|$. Поэтому для того, чтобы все собственные числа по модулю были меньше единицы необходимо и достаточно выполнения неравенства $P(1) > 0$, равносильного оценке (2.2.11). В этом случае все предположения теоремы 2.2.1 выполнены, краевая задача (2.2.9), (2.2.10) разрешима.

Из теоремы 2.2.1 также можно получить оценку решений рассматриваемой задачи.

### 2.2.2. Непрерывная зависимость решений от параметров

Исследуем вопрос непрерывной зависимости от параметров решений краевых задач.

Пусть при любом натуральном $l$ заданы: вектор $\Delta^l \in \mathbb{R}^k$, непрерывная функция $g^l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, измеримая функция $h^l : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, измеримая существенно ограниченная функция $y^l : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, измеримая по Борелю ограниченная функция $\varphi^l : (-\infty, a) \bigcup (b, \infty) \to \mathbb{R}^n$, и определена удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $f^l : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Относительно функции $f^l$ предполагаем, что для любого $r \in \mathbb{R}^m_+$ существует такое $\eta^l_r \geq 0$, что при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x, \omega \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(0,r)$ выполнено неравенство $|f^l(t,x,\omega)| \leq \eta^l_r$.

Рассмотрим при $t \in [a,b]$ последовательность систем дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} &f^l_i\Big(t, x_1\big(h^l_1(t)\big), \ldots, x_n\big(h^l_n(t)\big), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t)\Big) = y^l_i(t), \;\; i = \overline{1,m}, \\ &x_j(s) = \varphi^l_j(s), \;\; \text{если } s \notin [a,b], \;\; j = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

с краевыми условиями

$$g^l_i\big(x_1(a), \ldots, x_n(a), x_1(b), \ldots, x_n(b)\big) = \Delta^l_i, \;\; i = \overline{1,k}, \tag{2.2.13}$$

здесь $l = 1, 2, \ldots$.

Для любого $l = 1, 2, \ldots$ определим множество

$$E^l_j = (h^l_j)^{-1}[a,b] = \{t \in [a,b] : h^l_j(t) \in [a,b]\}, \;\; j = \overline{1,n},$$

которое является измеримым, и число $H^l_j = \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in E^l_j}(h^l_j(t) - a)$. Будем полагать $H^l_j = 0$, если $E^l_j = \varnothing$. Определим $H_j = \sup\limits_{l=1,2,\ldots} H^l_j$. Далее, при каждом $l=1,2,\ldots$ определим оператор внутренней суперпозиции

$$S_{h^l}: C([a,b],\mathbb{R}^n)\to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n),\quad S_{h^l}x=(S_{h^l_1}x_1,\ldots,S_{h^l_n}x_n),$$

$$(S_{h^l_j}x_j)(t)=\begin{cases} x_j(h^l_j(t)), \text{ если } t\in E^l_j,\\ \varphi^l_j(h^l_j(t)), \text{ если } t\notin E^l_j,\end{cases}\quad j=\overline{1,n},$$

и оператор Немыцкого

$$N_{f^l}: L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)\times L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)\to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m),\quad N_{f^l}=(N_{f^l_1},\ldots,N_{f^l_m})$$

$$\big(N_{f^l_i}(u,x)\big)(t)=f^l_i\big(t,x(t),u(t)\big),\quad t\in[a,b],\quad i=\overline{1,m}.$$

Запишем краевую задачу (2.2.12), (2.2.13) в виде

$$\begin{cases} N_{f^l_i}\Big(S_{h^l_1}\big(\gamma_1+\int\limits_a^{(\cdot)}u_1(s)ds\big),\ldots,S_{h^l_n}\big(\gamma_n+\int\limits_a^{(\cdot)}u_n(s)ds\big),\\ \qquad\qquad u_1,\ldots,u_n\Big)=y^l_i,\quad i=\overline{1,m},\\ g^l_i\big(\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\gamma_1+\int\limits_a^b u_1(s)ds,\ldots,\gamma_n+\int\limits_a^b u_n(s)ds\big)=\\ \qquad\qquad =\Delta^l_i,\quad i=\overline{1,k}.\end{cases}\qquad(2.2.14)$$

относительно неизвестной $(u,\gamma)\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$, $u=\dot{x}$, $\gamma=x(a)$.

Пусть заданы $x^0\in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ и $n\times m$-матрица $A_1$ с неотрицательными компонентами. Пусть $\epsilon^1>0$, $\epsilon^2>0$, $R^1\doteq\epsilon^1\overline{1}_n$, $R^2\doteq\epsilon^2\overline{1}_n\in\mathbb{R}^n_+$, $d^1\doteq\epsilon^1\overline{1}_m\in\mathbb{R}^m_+$. Определим $u^0=\dot{x}^0\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\gamma^0=x^0(a)\in\mathbb{R}^n$. Зададим при каждом $t\in[a,b]$ совокупность $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R^1\big)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+$ равенством (2.2.5).

Положим при каждом натуральном $l=1,2,\ldots$

$$\widehat{D}^l(t)\doteq\prod_{j=1}^n\widehat{D}^l_j(t),$$

$$\text{где }\ \widehat{D}^l_j(t)\doteq\begin{cases}\mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x^0_j(t),R^2_j+R^1_j(t-a)\big), \text{ если } t\in E^l_j,\\ \{\varphi^l_j(h^l_j(t))\}, \text{ если } t\notin E^l_j,\end{cases}\quad j=\overline{1,n}.$$

Далее, определим при почти всех $t \in [a,b]$ и любом векторе $x \in \widehat{D}^l(t)$ множество

$$W^{1l}(t,x) \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^m}\big(f^l(t,x,u^0(t)),d^1\big) = \prod_{i=1}^{m} W_i^{1l}(t,x).$$

Пусть определена $n \times k$-матрица $A_2$ с неотрицательными компонентами. Пусть $\epsilon^2 > 0$, вектор $d^2 \doteq \epsilon^2 \overline{1}_k \in \mathbb{R}^k_+$. Зададим совокупность $\mathfrak{B}\big(\gamma^0,R^2\big) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k_+$ равенством (2.2.6). Далее, при любом векторе $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(x^0(b),R^2+R^1(b-a)\big)$ определим множество

$$W^{2l}(x) \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^k}\big(g^l(\gamma^0,x),d^2\big) = \prod_{i=1}^{k} W_i^{2l}(x).$$

Для заданной выше абсолютно непрерывной функции $x^0 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ вычислим

$$y^{0l}(t) \doteq f^l\big(t,(S_{h_1^l}x_1^0)(t),\ldots,(S_{h_n^l}x_n^0)(t),u_1^0(t),\ldots,u_n^0(t)\big),$$

$$\Delta^{0l} \doteq g^{0l}\big(\gamma_1^0,\ldots,\gamma_n^0,\gamma_1^0+\int\limits_a^b u_1^0(s)ds,\ldots,\gamma_n^0+\int\limits_a^b u_n^0(s)ds\big).$$

Пусть при $l \to \infty$ имеют место сходимости

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}|y^{0l}-y^l| \to 0, \quad |\Delta^{0l}-\Delta^l| \to 0, \tag{2.2.15}$$

**Т е о р е м а 2.2.2.** *Пусть при каждом натуральном $l = 1,2,\ldots$ выполнены следующие условия:*

- *при почти всех $t \in [a,b]$ и любом векторе $x \in \widehat{D}^l(t)$ отображение $f^l(t,x,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является векторно условно $A_1$-накрывающим множество $W^{1l}(t,x)$ на совокупности $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R^1\big)$; при любом $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(x^0(b),R^2+R^1(b-a)\big)$ отображение $g^l(\cdot,x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$*

*является векторно условно* $A_2$*-накрывающим множество* $W^{2l}(x)$ *на совокупности* $\mathfrak{B}\big(\gamma^0, R^2\big)$;

- *для любых* $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ *существует такое* $\beta^1_{ij}\geq 0$, *что при почти всех* $t\in E^l_j$, *всех* $\omega\in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t),R^1\big)$ *и любых* $x_p\in \widehat{D}^l_p(t)$, $p=\overline{1,n}$ *и* $p\neq j$, *отображение* $f^l_i(t,x_1,\ldots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\ldots,x_n,w):\widehat{D}^l_j(t)\to\mathbb{R}$ *является* $\beta^1_{ij}$*-липшицевым; для любых* $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,n}$ *существует такое* $\beta^2_{ij}\geq 0$, *что при всех* $\gamma\in\mathfrak{B}\big(\gamma^0,R^2\big)$ *и любых* $x_p\in \mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x^0_p(b),R^2_p+R^1_p(b-a)\big)$, $p=\overline{1,n}$ *и* $p\neq j$, *отображение* $g^l_i(\gamma,x_1,\ldots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\ldots,x_n):\mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x^0_j(b),R^2_j+R^1_j(b-a)\big)\to\mathbb{R}$ *является* $\beta^2_{ij}$*-липшицевым;*

- *для любых* $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, *при почти всех* $t\in[a,b]$ *и любых* $x_j\in\widehat{D}^l_j(t)$ *имеет место включение*

$$y^l_i(t)\in f^l_i\Big(t,x_1,\ldots,x_n,\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t),R^1\big)\Big);$$

  *для любых* $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,n}$, *любых* $x_j\in \mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x^0_j(b),R^2_j+R^1_j(b-a)\big)$ *имеет место включение*

$$\Delta^l_i\in g^l_i\Big(\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(\gamma^0,R^2\big),x_1,\ldots,x_n\Big).$$

*Пусть, далее, для спектрального радиуса* $\varrho$ *произведения* $BA$ *матриц*

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix},$$

*где* $B_{11}=(H_j\beta^1_{ij})_{m\times n}$, $B_{12}=(\beta^1_{ij})_{m\times n}$, $B_{21}=\big((b-a)\beta^2_{ij}\big)_{k\times n}$, $B_{22}=(\beta^2_{ij})_{k\times n}$, *выполнено* $\varrho(BA)<1$.

*Тогда, если имеют место соотношения* (2.2.15), *то при каждом* $l$, *начиная с некоторого номера, существует определенное на* $[a,b]$ *решение*

$\xi^l = (\xi_1^l, \ldots, \xi_n^l) \in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ *краевой задачи* (2.2.12), (2.2.13) *такое, что имеет место сходимость* $\xi^l \to x^0$.

**Доказательство.** При каждом $l = 1, 2, \ldots$ определим отображение

$$\Upsilon^l : \big(L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n\big)^2 \to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}^k$$

следующими соотношениями: для функций $\omega^I \doteq (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $v^I \doteq (v_1, \ldots, v_n) \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ и векторов $\omega^{II} \doteq (\omega_{n+1}, \ldots, \omega_{2n})$, $v^{II} \doteq (v_{n+1}, \ldots, v_{2n}) \in \mathbb{R}^n$ полагаем

$$\Upsilon^l(\omega, v) \doteq \begin{pmatrix} \Phi^l(\omega^I, v^I, v^{II}) \\ \psi^l(\omega^{II}, v^I, v^{II}) \end{pmatrix},$$

где

$$\Phi_i^l(\omega^I, v^I, v^{II}) =$$
$$= N_{f_i^l}\Big(S_{h_1^l}\big(v_{n+1} + \int_a^{(\cdot)} v_1(s)ds\big), \ldots, S_{h_n^l}\big(v_{2n} + \int_a^{(\cdot)} v_n(s)ds\big), \omega_1, \ldots, \omega_n\Big), \; i = \overline{1,m};$$

$$\psi_i^l(\omega^{II}, v^I, v^{II}) =$$
$$= g_i^l\big(\omega_{n+1}, \ldots, \omega_{2n}, v_{n+1} + \int_a^b v_1(s)ds, \ldots, v_{2n} + \int_a^b v_n(s)ds\big), \quad i = \overline{1,k}.$$

При всех $l$ из условий доказываемой теоремы следует выполнение условий теоремы 2.2.1 для отображения $\Upsilon^l$ (векторно условно $A-$накрывающего по первому аргументу и "векторно" $B-$липшицего по второму). Вследствие сходимости (2.2.15), для любых $\epsilon^1 > 0, \epsilon^2 > 0$ и при любом натуральном $l$, начиная с некоторого номера, справедливы неравенства

$$r(y^l, \Delta^l) \doteq (I_{m+k} - BA)^{-1} \begin{pmatrix} \overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}(y^l, y^{0l}) \\ \overline{\rho}_{\mathbb{R}^k}(\Delta^l, \Delta^{0l}) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \end{pmatrix},$$

$$Ar(y^l, \Delta^l) \leq \begin{pmatrix} R^1 \\ R^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом выполнены все условия теоремы 2.2.1. Тогда, для любого натурального $l$ существует решение $\xi^l \in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ краевой задачи (2.2.12), (2.2.13) удовлетворяющее неравенству

$$\begin{pmatrix} \overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)}(\dot{\xi}^l, \dot{x}^0) \\ \overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}(\xi^l(a), \gamma^0) \end{pmatrix} \leq A(I_{m+k} - BA)^{-1} \begin{pmatrix} \overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}(y^l, y^{0l}) \\ \overline{\rho}_{\mathbb{R}^k}(\Delta^l, \Delta^{0l}) \end{pmatrix}.$$

Вследствие этой оценки и соотношений (2.2.15) получаем $\xi^l \to x^0$. Теорема доказана.

# ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathfrak{I}_n$ — матрица размерности $n \times n$, все компоненты которой равны $1$;

$I_m$ — единичная $n \times n$ матрица;

$\overline{1}_n$ — $n-$мерный вектор, компоненты которого равны 1;

$\mathbb{R}^n$ — $n$-мерное вещественное пространство;

$\mathbb{R}^n_+$ — конус векторов с неотрицательными компонентами пространства $\mathbb{R}^n$;

$\mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$ — совокупность всех непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$;

$(\overline{X}, \overline{\rho}_{\overline{X}})$ — произведение метрических пространств $X_i$, $i = \overline{1, n}$, то есть $\overline{X} = \prod_{i=1}^n X_i$, с векторнозначной метрикой $\overline{\rho}_{\overline{X}}(x, u) = \big(\rho_{X_1}(x_1, u_1), \ldots, \rho_{X_n}(x_n, u_n)\big)$, $x = (x_1, \ldots, x_n), u = (u_1, \ldots, u_n) \in \overline{X}$;

$\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u, r)$ — замкнутый шар с центром в точке $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \overline{X}$ радиуса $r = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n_+$ в произведении $\overline{X}$ метрических пространств $X_i$, т.е. $\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u, r) \doteq \prod_{i=1}^n \mathrm{B}_{X_i}(u_i, r_i) = \{x \in \overline{X} : \overline{\rho}_{\overline{X}}(x, u) \leq r\}$;

$L_\infty([a, b], \mathbb{R})$ — банахово пространство измеримых существенно ограниченных функций $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ с нормой $||x||_{L_\infty([a,b],\mathbb{R})} = \mathrm{vrai}\ \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|$;

$AC_\infty([a, b], \mathbb{R})$ — банахово пространство абсолютно непрерывных функций, имеющих почти всюду производную $\dot{x} \in L_\infty([a, b], \mathbb{R})$, с нормой $||x||_{AC_\infty([a,b],\mathbb{R})} = ||\dot{x}||_{L_\infty([a,b],\mathbb{R})} + |x(a)|$;

$L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ — произведение соответствующих пространств скалярных измеримых существенно ограниченных функций с векторнозначной метрикой

$$\overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)}(y,w) \doteq \big(||y_1 - w_1||_{L_\infty([a,b],\mathbb{R})}, \ldots, ||y_n - w_n||_{L_\infty([a,b],\mathbb{R})}\big)$$
$$\forall\ y, w \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n);$$

$AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ — произведение соответствующих пространств скалярных абсолютно непрерывных функций с векторнозначной метрикой

$$\overline{\rho}_{AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)}(x,v) \doteq \big(||x_1 - v_1||_{AC_\infty([a,b],\mathbb{R})}, \ldots, ||x_n - v_n||_{AC_\infty([a,b],\mathbb{R})}\big)$$
$$\forall\ x, v \in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n).$$

# ЛИТЕРАТУРА

1. *Аваков Е.Р., Арутюнов А.В., Жуковский Е.С.* Накрывающие отображения и их приложения к дифференциальным уравнениям, не разрешенным относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 613–634.

2. *Алвеш М.Ж., Плужникова Е.А., Трещёв В.С.* Условия накрывания опертора Немыцкого а пространстве существенно ограниченных функций // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. № 5. С. 992–995.

3. *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.

4. *Арутюнов А.В.* Устойчивость точек совпадения и многозначные накрывающие отображения в метрических пространствах // Доклады Академии наук. 2009. Т. 427. № 5. С. 583–585.

5. *Арутюнов А.В.* Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений // Математические заметки. 2009. Т. 86. № 2. С. 163–169.

6. *Арутюнов А.В.* Точки совпадения двух отображений. // Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48. № 1. С. 89–93.

7. *Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е.* О корректности дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 11. С. 1523–1537.

8. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Локальная разрешимость управляемых систем со смешанными ограничениями // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46. № 11. С. 1561–1570.

9. *Арутюнов А.В., Жуковский С.Е.* Существование обратных отображений и их свойства // Труды МИАН. 2010. Т. 271. С. 9–19.

10. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Изд. 2-е испр. и доп. М.: Книжный дом "Либроком", 2011. 224 с.

11. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977. 624 с.

12. *Вулих Б.З.* Краткий курс теореии функций вещественной переменной. М., 1973. 352 с.

13. *Дмитрук А. В., Милютин А. А., Осмоловский Н. П.* Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35. № 6(216). С. 11–46.

14. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я.* Интегральные уравнения. СМБ. М.: Наука,1968. 448 с.

15. *Жуковский Е.С.* О возмущениях накрывающих отображений в пространствах с векторнозначной метрикой // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2016. Т. 21. № 2. С. 373–377.

16. *Жуковский Е.С.* О возмущениях векторно накрывающих отображений и системах уравнений в метрических пространствах // Сибирский математический журнал. 2016. Т. 57. № 2 (236). С. 297–311.

17. *Жуковский Е.С., Жуковская Т.В.* О разрешимости дифференциального уравнения с запаздыванием, не разрешенного относительно производной // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2011. Т. 16. Вып. 1. С. 67–69.

18. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в проблеме корректности краевых задач для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2011. Т. 16. № 4. С. 1082-1085.

19. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Накрывающие отображения в произведении метрических пространств и краевые задачи для дифференциальных уравнений, не

разрешенных относительно производной // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 4. С. 439–455.

20. *Жуковский Е.С., Плужникова Е.А.* Об управлении объектами, движение которых описывается неявными нелинейными дифференциальными уравнениями // Автоматика и телемеханика. 2015. № 1. С. 31–56.

21. *Жуковский Е.С., Трещёв В.С.* Накрывающие отображения в теории неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Монография. Тамбов: Издательский дом ТГУ им. Г.Р. Державина, 2016. 88 с.

22. *Жуковский С.Е.* Сравнение различных определений накрывающих отображений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2014. Т. 19. № 2. С. 376–379.

23. *Левитин Е. С., Милютин А. А., Осмоловский Н. П..* Условия высших порядков локального минимума в задачах с ограничениями // УМН. 1978. Т. 33. № 6(204). С. 85–148.

24. *Пасечников И.И., Трещев В.С.* Существование периодических решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2014. Т. 19. № 2. С. 408-411.

25. *Перов А.И.* Многомерная версия принципа обобщенного сжатия М.А. Красносельского // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44. № 1. С. 83–87.

26. *Перов А.И.* Обобщённый принцип сжимающих отображений // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2005. № 1. С. 196–207.

27. *Плужникова Е.А.* О локальной разрешимости задачи Коши функционально-дифференциального уравнения нейтрального типа // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. 2012. Т. 17. Вып. 1. С. 59–62.

28. *Плужникова Е.А.* О накрывании оператора Немыцкого в пространстве суммируемых функций // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2010. Т. 15. Вып. 6. С. 1686–1687.

29. *Плужникова Е.А.* О непрерывной зависимости от параметров решений операторных уравнений в метрических пространствах // Тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции «Современные проблемы математики». Екатеринбург, 2011. С. 96–98.

30. *Плужникова Е.А.* Один метод исследования краевых задач для не разрешенных относительно производной дифференциальных уравнений // Тезисы докладов Международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной 110-й годовщине И.Г. Петровского. М., 2011. С. 305–306.

31. *Трещёв В.С.* Разрешимость краевых задач для дифференциальных уравнений с запаздыванием // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2708-2710.

32. *Трещёв В.С.* Разрешимость краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2014. Т. 19. № 2. С. 440-443.

33. *Трещёв В.С.* Непрерывная зависимость от параметров решений краевых задач дифференциальных урвнений с отклоняющимся аргументом // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. № 1. С. 62-66.

34. *Трещёв В.С.* Корректная разрешимость систем операторных уравненей с векторными накрывающими отображениями // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. № 5. С. 1487–1489.

35. *Трещёв В.С.* О задаче Коши для систем неявных дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2016. Т. 21. № 2. С. 430–434.

36. *Трещёв В.С.* Непрерывная зависимость от параметров решения краевой задачи для системы неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2017. Т. 22. № 3. С. 579–584.

37. *Трещёв В.С.* Об условиях накрывания оператора Немыцкого в пространстве измеримых существенно ограниченных функций // Математическое и компьютерное моделирование, информационные технологии управления: сб.тр. Школы для студентов, аспирантов и молодых ученых «МКМИТУ-2016». Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2016. С. 229 - 232.

38. *Трещёв В.С.* О нелинейной краевой задаче для систем неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. IX междунар. конф. «ПМТУКТ-2016». Воронеж: Издво «Научная книга», 2016. С. 356 - 360.

39. Функциональный анализ. Под общей редакцией С.Г. Крейна. СМБ. М., 1972. 544 с.

40. *Arutyunov A.V., Zhukovskii E.S, Zhukovskii S.E.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear Volterra equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 2012. V. 75. P. 1026–1044.

41. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'man B., Dmitruk A., Obukhovskii V.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points / / J. Fixed Points Theory and Applications. 2009. V. 5. № 1. C. 105–127.

42. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E.* Existence of local solutions in constrained dynamic systems // Applicable Analysis. V. 90. Iss. 9. P. 889–898.

43. *L. M. Graves.* Some mapping theorems // Duke Math. J.. 1950. V. 17. P. 111–114.

44. *Zhukovskiy S.E.* On Covering Properties in Variational Analysis and Optimization // Set-Valued and Variational Analysis, 2015, DOI: 10.1007/s11228-014-0314-3

45. *Mordukhovich B.S.* Variational Analysis and Generalized Differentiation. Springer, 2005 V. 1.

46. *Mordukhovich B.S., Wang B.* Restrictive metric regularity and generalized differential calculus in Banach spaces // Maths. Math. Science, 2004. 50. P. 2650–2683.