

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.
П.Г. ДЕМИДОВА

На правах рукописи

Морякова Алена Романовна

**АНАЛИЗ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ
АРГУМЕНТОМ**

Специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление
(физико-математические науки)

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор
Кубышкин Евгений Павлович

Ярославль - 2017

Содержание

Введение	4
1 Исследование колебательных решений дифференциально-разностного уравнения второго порядка в одном критическом случае	24
1.1 Постановка задачи	25
1.2 Анализ устойчивости нулевого решения	25
1.3 Построение нормальной формы уравнения на центральном многообразии	29
1.4 Анализ нормальной формы уравнения	34
1.5 Выводы	37
2 Анализ бифуркаций периодических решений уравнения Мэкки - Гласса	39
2.1 Постановка задачи	39
2.2 Анализ устойчивости нулевого решения уравнения	41
2.3 Построение нормальной формы	44
2.4 Анализ нормальной формы	50
2.5 Алгоритм построения периодических решений уравнения	61
2.6 Численное исследование нормальной формы	65
2.7 Выводы	69
3 Анализ особенностей поведения периодических решений уравнения Икеды	72
3.1 Математическая постановка задачи, анализ состояний равновесия . . .	73
3.2 Бифуркационный анализ потери устойчивости состояния равновесия $x_*(\mu, c)$, $\lim_{\mu \rightarrow 0} x_*(\mu, c) = 0, 0 < c < 2\pi$	76

3.2.1	Математическая постановка задачи, анализ устойчивости состояния равновесия $x_*(\mu, c)$	76
3.3	Бифуркационный анализ потери устойчивости состояния равновесия $x_*(\mu, 0) \equiv 0$ в случае $c = 0$	80
3.3.1	Анализ устойчивости состояния равновесия $x_*(\mu, c) \equiv 0$	80
3.3.2	Построение нормальной формы	81
3.3.3	Анализ нормальной формы	82
3.3.4	Результаты численного анализа нормальной формы	86
3.4	Бифуркационный анализ поведения решений уравнения Икеды при рождении парных состояний равновесия $x_*^-(\mu, c)$ и $x_*^+(\mu, c)$	87
3.4.1	Анализ устойчивости состояний равновесия $x_*^-(\mu, c)$ и $x_*^+(\mu, c)$	87
3.4.2	Построение нормальной формы	98
3.4.3	Анализ нормальной формы	98
3.4.4	Результаты численного исследования периодических решений нормальной формы	102
3.5	Выводы	102
	Заключение	106
	Литература	107

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.

Диссертация посвящена исследованию установившихся колебательных решений некоторых дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом являются математическими моделями многих физических систем, приборов и механизмов, в которых присутствуют запаздывающие обратные связи. Регулярные и хаотические колебания могут оказывать как положительное, так и негативное воздействие на исследуемые системы и механизмы. Изучение колебательных процессов в силу своей прикладной значимости представляет собой весьма актуальную задачу.

Основными методами исследования являются метод интегральных (инвариантных) многообразий, метод нормальных форм дифференциальных уравнений, метод равномерной нормализации сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, теория нелинейных операторных уравнений и теория бифуркаций. Метод интегральных многообразий позволяет свести изучение поведения установившихся решений исходного уравнения или системы уравнений с бесконечномерным фазовым пространством к исследованию поведения решений на критическом инвариантном конечномерном многообразии, которое в свою очередь может быть описано некоторой системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод равномерной нормализации сводит задачу нахождения периодических решений исходного уравнения к анализу счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, из которой выделяются уравнения для “быстрых” и “медленных” переменных. Состояния равновесия уравнений “медленных” переменных определяют периодические решения исходного уравнения.

В диссертации изучаются три нелинейных дифференциальных уравнения с запаздывающим аргументом, возникающие в прикладных задачах. В первой части рассмотрено нелинейное дифференциально-разностное уравнение второго порядка, содержащее запаздывающие слагаемые от искомой функции и ее производной. Частным случаем это уравнение является известное уравнение Минорского [1–3], полученное им при рассмотрении задачи вертикальной стабилизации судов. Аналогичное уравнение исследовали Г.С. Горелик [4] и Э. Пинни [5]. Анализ колебаний, бифурци-

рующих из нулевого состояния равновесия в случае бифуркации Андронова-Хопфа, в уравнении Минорского был проведен Ю.С. Колесовым [6]. Уравнения такого типа возникают при моделировании работы электронных устройств с запаздывающей обратной связью. В диссертационной работе проведен детальный анализ возможных вариантов потери устойчивости нулевого решения указанного уравнения и возникающих при этом возможных критических случаев. Изучаются бифурцирующие из нулевого состояния равновесия колебательные решения в одном критическом случае внутреннего резонанса 1:3. Необходимо отметить, что указанный критический случай в уравнениях такого типа ранее не изучался.

Вторая часть диссертации посвящена исследованию двух сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены известные уравнения Мэкки - Гласса [7] и Икеды [8, 9]. Первое из них является математической моделью процесса образования нейтрофилов (белых кровяных телец). Уравнение Мэкки - Гласса исследовалось в ряде работ [10–16], где на основе численного интегрирования было отмечено существование различных периодических решений, а также сложной, в том числе хаотической, динамики. Уравнение Икеды описывает динамику пассивного оптического резонатора. Уравнения такого типа демонстрируют сложную динамику [17–21], в том числе в них можно наблюдать мультистабильность, хаотическую турбулентность, образование диссипативных структур. После записи в безразмерных переменных, эти уравнения переходят к широкому классу дифференциальных уравнений первого порядка с запаздыванием, содержащих малый параметр при старшей производной и нелинейную обратную связь, которая определена физикой процессов. Общие свойства поведения решений таких уравнений и их связь с решениями одномерных отображений изучались в монографии А.Н. Шарковского, Ю.Л. Майстренко, Е.Ю. Романенко [22]. Некоторые подходы к построению асимптотики решений указанного типа сингулярно возмущенных уравнений были предложены в работах С.А. Кащенко, И.С. Кащенко [23–25]. В диссертации изучаются бифуркации автоколебательных решений из состояний равновесия двух указанных уравнений с помощью метода равномерной нормализации, предложенного в работах [26, 27]. Этот метод позволяет свести задачу нахождения периодических решений исходного уравнения к анализу счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащей

уравнения для “быстрых” и “медленных” переменных, и доказать строгие теоремы о существовании периодических решений.

Отметим, что изучению уравнений Мэкки - Гласса и Икеды посвящено большое число исследований. Однако в большинстве работ анализ проводился на основании численного интегрирования. В диссертационной работе результаты получены с помощью качественной теории дифференциальных уравнений, что позволило получить строгие теоремы об условиях бифуркаций периодических решений и построить асимптотические формулы периодических решений.

Целью настоящей работы является исследование колебательных решений трех дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, бифурцирующих из состояний равновесия при изменении параметров уравнения.

В первой главе предполагалось проанализировать колебательные решения дифференциально - разностного уравнения второго порядка, содержащего запаздывающие слагаемые от неизвестной функции и от ее производной. С помощью анализа линейной части уравнения можно выделить критический случай, связанный с прохождением через мнимую ось двух пар чисто мнимых корней характеристического квазиполинома, находящихся в резонансном соотношении 1:3. Была поставлена цель изучить бифурцирующие автоколебательные решения и проанализировать возможность хаотических колебаний в этом критическом случае.

Во второй и третьей главах предполагалось провести анализ периодических решений уравнения Мэкки - Гласса и уравнения Икеды с помощью метода равномерной нормализации. Для этого планировалось построить нормальную форму уравнений, содержащую уравнения для “быстрых” и “медленных” переменных, и проанализировать состояния равновесия уравнений “медленных” переменных, что позволит построить периодические решения исходного уравнения и изучить их бифуркации в зависимости от параметров уравнения.

Научная новизна работы.

Все основные результаты данной работы являются новыми. Научная новизна проявляется в следующем:

Глава 1. В этой главе рассмотрено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка. Для этого уравнения проведен анализ устойчивости нулевого решения

и построена полная картина D -разбиений пространства параметров. Выделен критический случай внутреннего резонанса 1:3 при потере устойчивости нулевого решения. Для этого критического случая исследованы бифуркации периодических решений. Показана возможность перехода периодических решений через бифуркацию удвоения периода к хаосу.

Глава 2. Изучены периодические решения уравнения Мэкки - Гласса методом равномерной нормализации. Построена нормальная форма уравнения и получены строгие теоремы об условиях бифуркации периодических решений. Приведена асимптотическая формула периодических решений и алгоритм нахождения периодических решений уравнения Мэкки - Гласса, бифурцирующих из состояния равновесия при изменении параметра. С помощью этого алгоритма построены периодические решения уравнения. В результате численного моделирования показана возможность перехода к хаотическим колебаниям и хаотической мультистабильности.

Глава 3. Проведен анализ состояний равновесия уравнения Икеды в зависимости от параметров. С использованием метода равномерной нормализации изучены бифуркации периодических решений. Показана возможность явлений мультистабильности и хаотической мультистабильности.

Теоретическая и практическая значимость.

Диссертация носит в основном теоретический характер. Методы, применяемые в диссертационной работе, могут быть использованы при решении аналогичных задач. Во второй главе приведен алгоритм, позволяющий построить периодические решения других дифференциальных уравнений первого порядка содержащих малый параметр при старшей производной.

Часть результатов имеет практическую значимость. Регулярные и хаотические колебания привлекают к себе пристальное внимание исследователей, работающих в области механики, радиофизики, химии, биологии, что обусловлено как большим фундаментальным значением изучения этих колебаний, так и широким кругом практических приложений. Хаотические режимы, возникающие в различных практических задачах, могут оказывать как вредное, так и полезное воздействие. Изученное для уравнения Мэкки - Гласса и уравнения Икеды явление мультистабильности в системах дифференциальных уравнений с запаздыванием находит применение в

различных областях науки и техники.

Методика исследования.

В работе используются такие методы качественного анализа дифференциальных уравнений как метод интегральных(инвариантных) многообразий, метод нормальных форм дифференциальных уравнений и метод равномерной нормализации сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Численные эксперименты и визуализация полученных результатов проводились с помощью пакета программ для анализа динамических систем “Tracer” [28] и программ, написанных на языке Python.

На защиту диссертации выносятся следующие **основные положения и результаты:**

1. Для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом, содержащего нелинейные запаздывающие слагаемые от искомой функции и ее производной, построена картина D - разбиений пространства параметров квазиполинома линейной части уравнения. Исследованы возможные критические случаи потери устойчивости нулевого решения. Проведен анализ бифуркаций автоколебательных решений в критическом случае внутреннего резонанса 1:3. Показана возможность существования сложных, в том числе хаотических, колебательных решений.
2. Изучены периодические решения уравнения Мэкки - Гласса, бифурцирующие из единственного положительного состояния равновесия. Получены строгие теоремы об условиях бифуркации периодических решений, построены асимптотические формулы периодических решений. Численным моделированием показано, что при увеличении бифуркационного параметра эти решения становятся хаотическими.
3. Изучена динамика состояний равновесия уравнения Икеды в зависимости от параметров уравнения и исследована их устойчивость. Построены асимптотические формулы периодических решений. Изучены бифуркации периодических решений из различных состояний равновесия.
4. Показана возможность существования одновременно большого числа устойчи-

вых периодических решений, т.е. явления мультистабильности, для уравнения Мэкки - Гласса и уравнения Икеды.

5. Показано, что в уравнениях Мэкки - Гласса и Икеды может наблюдаться хаотическая мультистабильность, т.е. существования одновременно большого числа хаотических колебательных решений.

Достоверность полученных результатов обеспечивается строгой постановкой задач, использованием строгих математических методов, полными и строгими математическими доказательствами. Полученные результаты не противоречат известным теоретическим представлениям. Найденный в первой главе бифуркационный сценарий, приводящий к появлению хаотического аттрактора, подтверждается соответствующими вычислениями старших ляпуновских показателей решений исходного уравнения. Периодические решения уравнений Мэкки - Гласса и Икеды, полученные с помощью метода равномерной нормализации хорошо совпадают с решениями, полученными путем численного интегрирования с помощью апробированных численных схем.

Апробация работы.

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на Международной молодежной научно-практической конференции “Путь в науку”, Ярославль, 2012; Международной молодежной научно-практической конференции “Путь в науку”, Ярославль, 2013; Международной студенческой конференции «Science and Progress», Санкт-Петербург, 2013; Международной конференции “Нелинейная динамика и ее приложения”, посвященной 150- летию со дня рождения Поля Пенлеве, Ярославль, 2013; Международной конференция «Нелинейные явления в задачах современной математики и физики», посвященной 210-летию Демидовского университета, Ярославль, 2013; Международной молодежной научно-практической конференции “Путь в науку”, Ярославль, 2014; IV-ой Международной молодежной научно-практической конференции “Путь в науку”, Ярославль, 2015; Международной конференции «Нелинейные методы в физике и механике» посвященной 90-летию со дня рождения Мартина Крускала, Ярославль, 2015; International Workshop: Waves, Solitons and Turbulence in Optical Systems, Берлин, 2015; V-ой Международной конференции “Проблемы математической и теоретической физики и математическое моделирование”, Москва,

2016.

Представленные результаты неоднократно докладывались на семинаре “Нелинейная динамика и синергетика” кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Частично результаты диссертационной работы получены в процессе выполнения работ по госзаданию № 1.5722.2017/БЧ.

Публикации автора.

По теме работы опубликовано 13 печатных работ, в том числе 4 статьи в журналах из списка ВАК [29–32] и 9 работ в сборниках трудов и тезисов докладов международных конференций.

Объем и структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Работа изложена на 112 страницах машинописного текста, содержит 27 рисунков. Библиографический раздел включает 50 наименований.

Объект исследования и структура диссертации.

В первой главе рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + A\dot{x} + x + f(x(t-h)) + g(\dot{x}(t-h)) = 0, \quad (1)$$

в котором $A, h > 0$, $f(x) = f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + o(x^3)$, $g(x) = g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + o(x^3)$ гладкие при $|x| \leq x_0$ функции. Изучается характер потери устойчивости нулевого решения уравнения (1) и бифуркации автоколебательных решений в одном критическом случае потери устойчивости нулевого решения.

Характеристическое уравнение линейной части уравнения (1) имеет вид

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 + A\lambda + 1 + (f_1 + \lambda g_1) \exp(-\lambda h) = 0. \quad (2)$$

Анализ расположения корней уравнения (2) проводится с помощью метода D -разбиений. Построены картины D -разбиений для различных значений параметров. Показано, что возможны следующие механизмы потери устойчивости квазиполиномом (2): при прохождении корня уравнения (2) через точку $\lambda = 0$, при прохождении пары комплексно сопряженных корней характеристического уравнения (2) через точки $\pm i\omega$ ($\omega > 0$), при одновременном прохождении корней уравнения (2) через точки

$\lambda = 0$ и $\pm i\omega(\omega > 0)$, при одновременном прохождении двух пар комплексно сопряженных корней через точки $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2(0 < \omega_1 < \omega_2)$. В последнем случае возможна реализация соотношения $\omega_1/\omega_2 = 1/3$, т.е. имеет место критический случай внутреннего резонанса 1:3. Обозначим $A = A_0, f_1 = f_{10}, g_1 = g_{10}, h = h_0$ значения параметров, при которых уравнение (2) имеет корни $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2(0 < \omega_1 < \omega_2, \omega_1/\omega_2 = 1/3)$. Положим $A = A_0 + \varepsilon A_1, f_1 = f_{10} + \varepsilon f_{11}, g_1 = g_{10} + \varepsilon g_{11}, h = h_0 + \varepsilon h_1, 0 < \varepsilon \ll 1$. Изучим поведение решений уравнения (1) с начальными условиями из некоторого шара $S(r_0)$ радиуса r_0 фазового пространства $H = C[-h, 0] \oplus C^1[-h, 0]$ уравнения с центром в нуле. В окрестности нуля фазового пространства H уравнение (1) имеет локальное асимптотически устойчивое гладкое инвариантное четырехмерное центральное многообразие поведение решений на котором определяет поведение решений уравнения (1) из шара $S(r_0)$. В свою очередь поведение решений на интегральном многообразии определяется поведением решений следующей нормализованной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_1 = (i\omega_1 + \lambda_1^1 \varepsilon + d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1 + d_1 \bar{z}_1^2 z_2 + \dots = Z_1(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2; \varepsilon), \quad (3)$$

$$\dot{z}_2 = (i\omega_2 + \lambda_2^1 \varepsilon + d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2 + d_2 \bar{z}_1^3 + \dots = Z_2(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2; \varepsilon), \quad (4)$$

в которой $\lambda_j^1 = \tau_j^1 + i\omega_j^1$, комплексные постоянные $d_{jk} = a_{jk} + ic_{jk}, d_j(j, k = 1, 2)$ эффективно вычисляются с помощью предложенного в [33] алгоритма и точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по $\varepsilon z_j, \varepsilon \bar{z}_j, z_j \bar{z}_j$.

Положим в (3)-(4) $z_j = \varepsilon^{1/2} \rho_j \exp(i\tau_j), \rho_j \geq 0, -\infty < \tau_j < \infty(j = 1, 2), d_j = |d_j| \exp(i\gamma_j), 0 \leq \gamma_j < 2\pi$. Введем “медленные” переменные $\rho_1, \rho_2, \theta = 2\tau_1 - \tau_2$ и быструю переменную τ_1 и выполним нормировки $\rho_j = \rho_j/(-d_{jj})^{1/2}, j = 1, 2, t \rightarrow t/\varepsilon$. Выберем A_1, f_{11}, g_{11}, h_1 таким образом, чтобы $\tau_1^1 = \tau_2^1 = 1$. В результате “главная” часть системы уравнений “медленных” переменных примет вид

$$\dot{\rho}_1 = (1 - \rho_1^2 + a_1 \rho_2^2) \rho_1 + b_1 \cos(-\theta + \gamma_1) \rho_1^2 \rho_2, \quad (5)$$

$$\dot{\rho}_2 = (1 + a_2 \rho_1^2 - \rho_2^2) \rho_2 + b_2 \cos(\theta + \gamma_2) \rho_1^3, \quad (6)$$

$$\dot{\theta} = \omega + c_1 \rho_1^2 + c_2 \rho_2^2 - 3b_1 \sin(-\theta + \gamma_1) \rho_1 \rho_2 - b_2 \sin(\theta + \gamma_2) \rho_1^3 / \rho_2, \quad (7)$$

где $a_1 = d_{12}/(-d_{22})$, $a_2 = d_{21}/(-d_{11})$, $b_1 = |d_1|/(a_{11}a_{22})^{1/2}$, $b_2 = |d_2|/(-d_{11})^{3/2}(-d_{22})^{1/2}$, $c_1 = (3c_{11} - c_{21})/(-d_{11})$, $c_2 = (3c_{12} - c_{22})/(-d_{22})$, $\omega = 2\omega_1^1 - \omega_2^1$.

Отметим, что “грубым”, т.е. экспоненциально устойчивым (неустойчивым) состояниям равновесия системы уравнений (5)-(7) при малых ε в системе уравнений (3)-(4) [34] (уравнении (1)) соответствует периодическое решение периода близкого к $2\pi/\omega_1$, того же характера устойчивости. “Грубые” периодическим решениям системы уравнений при малых ε в системе уравнений (3)-(4) (уравнении (1)) соответствуют двумерные инвариантные торы.

Система (5)-(7) анализировалась численно. Отмечено существование устойчивых состояний равновесия, что соответствует устойчивым периодическим решениям системы уравнений (3)-(4) (уравнения (1)), от которых в результате бифуркации Андронова-Хопфа ветвятся устойчивые периодические решения, которые соответствуют устойчивым двумерным инвариантным торам системы уравнений (3)-(4) (уравнения (1)). Через серию бифуркаций удвоения периода периодические решения переходят в хаотический аттрактор. Для аттрактора вычислены ляпуновские показатели и ляпуновская размерность.

Вторая часть работы посвящена исследованию двух уравнений, принадлежащих широкому классу систем, описываемых дифференциальным уравнением первого порядка с запаздыванием

$$\varepsilon_1 \dot{x} + x(t) + f(x(t - \tau)) = 0, \quad (8)$$

где $f = f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + o(x^3)$ - нелинейная функция, ε_1 - малый параметр. С помощью метода равномерной нормализации проводится анализ периодических решений, бифурцирующих из различных состояний равновесия.

Объектом исследования **главы 2** является известное уравнение Мэкки-Гласса

$$\dot{x} = -\gamma x + \beta x_\tau \theta^n (\theta^n + x_\tau^n)^{-1}, \quad x_\tau = x(t - \tau), \quad (9)$$

где $x(t)$ - плотность циркулирующих нейтрофилов, γ - скорость случайного распада нейтрофилов, τ, θ - некоторые положительные параметры, n - натуральное число, параметры β, γ, θ по физике задачи принимают значение порядка единицы. Параметр τ по своим значениям значительно превосходит остальные параметры, входящие в (9). Перейдем в уравнении (9) к безразмерным переменным, нормировав $x \rightarrow \theta x$, $t \rightarrow$

τt , $\beta \rightarrow \beta/\gamma$. В окрестности состояния равновесия $x_* = (\beta - 1)^{1/n}$ уравнение (9) примет вид

$$\varepsilon_1 \dot{y} + y(t) + b_1 y(t-1) + f(y(t-1)) = 0, \quad (10)$$

где $\varepsilon_1 = (\tau)^{-1}$, $f(y) = b_2 y^2 + b_3 y^3 + o(y^3)$ аналитическая в окрестности $y = 0$ функция,

$$b_1 = n - 1 - n/\beta, -1 \leq b_1, \quad b_2 = n(1 + (1 - n)(\beta - 1))(\beta - 1)^{(n-1)/n}/(2\beta), \\ b_3 = (6n^2 - (5n^2 + 1)\beta)(\beta - 1)^{(n-2)/n}/(6\beta^2). \quad (11)$$

В работе изучаются периодические решения уравнения (10), бифурцирующие из состояния равновесия x_* при изменении параметров уравнения.

Бифуркации периодических решений связаны с потерей устойчивости нулевого решения, что определяется расположением корней характеристического уравнения линейной части уравнения (10)

$$P(\lambda; \varepsilon_1) = \varepsilon_1 \lambda + 1 + b_1 \exp(-\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (12)$$

При $-1 < b_1 < 1$ и $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, где ε_0 мало, все корни уравнения (12) лежат в левой комплексной полуплоскости, при $b_1 > 1$ - имеются корни, лежащие в правой комплексной полуплоскости. В соответствии с этим, нулевое решение уравнения (10) в первом случае будет асимптотически устойчиво, во втором - неустойчиво. Пограничной является точка $b_1 = 1$. Это определяет согласно (11) последовательность критических значений $\beta_n = n/(n - 2)$.

Положим

$$\beta = \beta_n(1 + \varepsilon_2/(n - 2 - \varepsilon_2)), \quad |\varepsilon_2| \ll 1 \quad (13)$$

имеем $b_1 = 1 + \varepsilon_2$, $b_2 = b_2(\varepsilon_2)$, $b_3 = b_3(\varepsilon_2)$.

Теорема 1. *Существует $\varepsilon_0 > 0$, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ ($\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $|\varepsilon| = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{1/2}$) все множество корней уравнения (12) определяется формулой*

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\pi k + \ln(1 + \varepsilon_2) + \lambda^1(i\pi k + \ln(1 + \varepsilon_2); \varepsilon_1), \\ \lambda_{-k}(\varepsilon) = \bar{\lambda}_k(\varepsilon), \quad k = 1, 3, 5, \dots, \quad (14)$$

где $\lambda^1(w; \varepsilon) \equiv -\ln(1 - \varepsilon_1(w - \ln(1 + \varepsilon_1(w - \ln(1 + \varepsilon_1(w - \dots))))))$ ($\ln w = \ln|w| + i \operatorname{arg} w$, $-\pi < \operatorname{arg} w < \pi$)- непрерывная по совокупности переменных, аналитическая

по ε_1 при каждом фиксированном $w \in \{w : -x_0 < Re < x_0, Imw \geq \pi, x_0\text{-малое фиксированное число}\}$ и аналитическая по w при каждом $0 < \varepsilon < \varepsilon_0, |Rew| < \delta_0$ функция.

При этом равномерно относительно k

$$\lambda_k(\varepsilon) = \gamma_k(\varepsilon) + i(\pi k + \sigma_k(\varepsilon)), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \gamma_k(\varepsilon) &= \ln(1 + \varepsilon_2) - \ln((1 + \varepsilon_1 \ln(1 + \varepsilon_2))^2 + \varepsilon_1^2 \pi^2 k^2)/2 + O(|\varepsilon|^2), \\ \sigma_k(\varepsilon) &= -\arccos((1 + \varepsilon_1 \ln(1 + \varepsilon_2))/((1 + \varepsilon_1 \ln(1 + \varepsilon_2))^2 + \varepsilon_1^2 \pi^2 k^2)^{1/2}) + O(|\varepsilon|^2). \end{aligned} \quad (16)$$

Откуда следует, что при малых ε и $\varepsilon_2 > \varepsilon_1^2(\pi k)^2/2$ n -ый корень характеристического уравнения имеет положительную вещественную часть и нулевое решение уравнения (10) неустойчиво.

Фазовым пространством уравнения (10) является пространство непрерывных вещественных функций $C[-1; 0]$. Перейдем от уравнения (10) к эквивалентной начально - краевой задаче в полосе $-1 \leq s \leq 0, t \geq 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad (17)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{s=0} = -u(0, t) - (1 + \varepsilon_2)u(1, t) - f(u(1, t)), u(s, 0) = y_0(s) \quad (18)$$

положив $u(s, t) = y(t + s)$

Производящим оператором полугруппы линейных вполне непрерывных операторов $T(t; \varepsilon)$ ($T(t_1 + t_2; \varepsilon) = T(t_1; \varepsilon)T(t_2; \varepsilon) = T(t_2; \varepsilon)T(t_1; \varepsilon)$, $T(0; \varepsilon) = I$ - единичный оператор), действующих в пространстве $C[-1, 0]$ и определяющих решение линейной части задачи (17)-(18), будет оператор

$$A(\varepsilon)v = \begin{cases} dv/ds, -1 \leq s < 0, \\ -\varepsilon_1^{-1}(v(0) + (1 + \varepsilon_2)v(-1)), s = 0 \end{cases} \quad (19)$$

с областью определения $D(A) = \{v(s) \in C^1[-1, 0], \varepsilon v'(0) + v(0) + (1 + \varepsilon_2)v(-1) = 0\}$.

Собственными значениями оператора $A(\varepsilon)$ являются величины $\lambda_k = \lambda_k(\varepsilon)$, а соответствующими собственными функциями будут функции $e_k(s; \varepsilon) = e^{\lambda_k(\varepsilon)s}/P'(\lambda_k(\varepsilon); \varepsilon) = e^{\lambda_k(\varepsilon)s}/(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \lambda_k(\varepsilon))$, $k = \pm 1, \pm 3, \dots$ $\|e_k(s; \varepsilon)\|_C \sim 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Наряду с (19) введем в рассмотрение оператор

$$A^*(\varepsilon)h = \begin{cases} dh/ds, 0 \leq s < 1, \\ -\varepsilon_1^{-1}(h(0) + (1 + \varepsilon_2)h(1)), s = 0 \end{cases} \quad (20)$$

действующий в пространстве $C[0, 1]$, с областью определения $D(A^*) = \{h(s) \in C^1[0, 1], -\varepsilon h'(0) + h(0) + (1 + \varepsilon_2)v(1) = 0\}$. Оператор (20) является сопряженным с (19) в смысле скалярного произведения С.Н. Шиманова [35], которое для краевой задачи (17)-(18) принимает вид

$$\langle v(s), h(s) \rangle = \varepsilon_1 v(0) \bar{h}(0) - (1 + \varepsilon_2) \int_{-1}^0 \bar{h}(\xi + 1) v(\xi) d\xi.$$

Собственными значениями оператора $A^*(\varepsilon)$ являются величины $-\bar{\lambda}_k(\varepsilon)$, а соответствующими собственными функциями будут функции $h_k = h_k(s; \varepsilon) = e^{-\bar{\lambda}_k(\varepsilon)s}$. Между функциями $e_k(s; \varepsilon)$ и $h_k(s; \varepsilon)$ выполнены следующие условия ортогональности

$$\langle e_{k_1}(s; \varepsilon), h_{k_2}(s; \varepsilon) \rangle = \delta_{k_1 k_2}, \quad (21)$$

где $\delta_{k_1 k_2}$ - символ Кронекера.

Пусть l_2 комплексное пространство последовательностей вида

$z = (z_1, z_{-1}, z_3, z_{-3}, \dots)$, $z_k \in C$, $z_{-k} = \bar{z}_k$, $\|z\|_{l_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 < \infty$, l_2^1 - комплексное подпространство l_2 последовательностей $z = (z_1, z_{-1}, z_3, z_{-3}, \dots)$, для которых $\|z\|_{l_2^1}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k(\varepsilon)|^2 |z_k|^2 < \infty$ и $\|\sum_{k=1}^{\infty} z_k \lambda_k(\varepsilon) e_k(s; \varepsilon)\|_C < \infty$.

Вводится в рассмотрение функция-оператор

$$u(s, z; \varepsilon) = \sum_{k=\pm 1, \pm 3, \dots} z_k e_k(s; \varepsilon) + \sum_{(k_1, k_2) \in \Omega_2} z_{k_1} z_{k_2} u_{k_1 k_2}(s; \varepsilon) + \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \Omega_3} z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} u_{k_1 k_2 k_3}(s; \varepsilon), \quad (22)$$

где $\Omega_2 = \{(k_1, k_2) : k_1, k_2 = \pm 1, \pm 3, \dots, k_1 \leq k_2\}$, $\Omega_3 = \{(k_1, k_2, k_3) : k_1, k_2, k_3 = \pm 1, \pm 3, \dots, k_1 \leq k_2 \leq k_3\}$, действующая из $s^1(r_0) \otimes \{|\varepsilon| < \varepsilon_0\}$ в $C[-1, 0]$ и гладко зависящая от своих переменных, и система дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_k = \lambda_k(\varepsilon) z_k + \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \Omega_k^3} d_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon) z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} \quad (23)$$

в пространстве l_2 с областью определения правой части $s^1(r_0)$, гладко зависящей от ε .

Функции $u_{k_1 k_2}(s; \varepsilon)$, $u_{k_1 k_2 k_3}(s; \varepsilon)$, $d_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon)$ эффективно и однозначно определяются из условий принадлежности траекторий системы (23) в силу (22) краевой задачи (17)-(18) и имеют вид [31]:

$$u_{k_1 k_2}(s; \varepsilon) = -p_{k_1 k_2} b_2(\varepsilon_2) e^{(\lambda_{k_1}(\varepsilon) + \lambda_{k_2}(\varepsilon))s} / P(\lambda_{k_1}(\varepsilon) + \lambda_{k_2}(\varepsilon); \varepsilon), \quad (24)$$

$$u_{k_1 k_2 k_3}(s; \varepsilon) = e^{\lambda_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon)s} (c + d_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon)(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \lambda_k(\varepsilon))(1 - e^{(\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon))s}) * \\ * (\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon))^{-1}), \quad (25)$$

$$d_{k_1 k_2 k_3}(s; \varepsilon)(s; \varepsilon) = (\varepsilon_1 + (1 + \varepsilon_2)(e^{-\lambda_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon)} - e^{-\lambda_k(\varepsilon)} / (\lambda_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon)))^{-1} * \\ * (1 + \varepsilon_1 + \lambda_k(\varepsilon)) f_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon), \quad (26)$$

где $p_{k_1 k_2} = 1$ при $k_1 = k_2$ и $p_{k_1 k_2} = 2$ при $k_1 \neq k_2$, $p_{k_1 k_2 k_3} = 1$, если $k_1 = k_2 = k_3$, $p_{k_1 k_2 k_3} = 3$, если $k_1 = k_2 \neq k_3$, либо $k_1 = k_3 \neq k_2$, либо $k_2 = k_3 \neq k_1$, $p_{k_1 k_2 k_3} = 6$, если $k_1 \neq k_2 \neq k_3$, $\lambda_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon) = \lambda_{k_1}(\varepsilon) + \lambda_{k_2}(\varepsilon) + \lambda_{k_3}(\varepsilon)$, c – произвольная постоянная.

Пусть $\rho = (\rho_1, \rho_3, \dots)$, $\rho_j \geq 0$, $j = 1, 3, \dots$, $\sum_{j=1}^{\infty} k^2 \rho_j^2 < \infty$ и $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$, $0 \leq \theta_j < 2\pi$, $j = 1, 3, \dots$ – вещественные последовательности. Введем в области $\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \varepsilon_1 > 0, |\varepsilon| < \varepsilon_0\}$ переменные $\zeta \geq 0$ и $\pi/2 < \psi < \pi/2$, положив

$$\zeta = (\varepsilon_1^2 + |\varepsilon_2|)^{1/2}, \varepsilon_1 = \zeta \cos \psi, \varepsilon_2 = \zeta^2 \sin \psi^2 \text{sign} \psi. \quad (27)$$

Структура системы уравнений (23) позволяет ввести взамен z_k ($k = \pm 1, \dots$) одну “быструю” переменную и счетное число “медленных” переменных вида ρ и θ . Нормируем $\rho_k \rightarrow \zeta \rho_k$, $t \rightarrow t/\zeta^2$ и усредняя затем полученную систему уравнений по “быстрой” переменной, получим систему уравнений, главная часть которой (при $\zeta \rightarrow 0$) будет иметь вид

$$\dot{\rho}_k = \gamma_k(\psi, \xi) \rho_k + R_k(\rho, \theta) (\gamma_k = \sin^2 \psi \text{sign} \psi - 2 \cos^2 \psi (\pi k)^2), \quad (28)$$

$$\dot{\theta}_k = \Theta_k(\rho, \theta), \quad k = 1, 3, \dots, \quad (29)$$

в которой функционалы $R_k(\cdot)$, $\Theta_k(\cdot)$ – 2π периодические по θ_j , $R_k(\cdot)$ является однородной формой порядка 3 по ρ_j .

Пусть $(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)) \in l_2^1 \otimes C_0$ решение системы уравнений

$$R_k(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)) = 0, k = 1, 3, \dots, \quad (30)$$

$$\Theta_k(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)) = 0, k = 1, 3, \dots \quad (31)$$

Введем в рассмотрение бесконечную матрицу

$$B(\psi) = \begin{pmatrix} \gamma_k(\psi)\delta_{kj} + \partial R_k/\partial \rho_j & \partial R_k/\partial \theta_j \\ \partial \theta_k/\partial \rho_j & \partial R_k/\partial \theta_j \end{pmatrix} (k, j = 1, 3, \dots), \quad (32)$$

вычисленную в точке $\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)$, где δ_{kj} символ Кронекеры. Матрица определяет линейный оператор

$$B(\psi)v (v = (\rho, \theta)) : E^1 = l_2^1 \otimes C \rightarrow E = l_2 \otimes C, \quad (33)$$

$$\|v\|_E = \|\rho\|_{l_2} + \|\theta\|_C, \quad \|v\|_{E^1} = \|\rho\|_{l_2^1} + \|\theta\|_C.$$

Пусть

$$\begin{aligned} z_1^*(t; \psi, \zeta) &= \rho_1^*(\psi, \zeta)e^{i\tau}, z_3^*(t; \psi, \zeta) = \rho_3^*(\psi, \zeta)e^{i3\tau + \theta_1^*(\psi)}, \\ z_5^*(t; \psi, \zeta) &= \rho_5^*(\psi, \zeta)e^{i5\tau + \theta_1^*(\psi) + \theta_3^*(\psi)}, z_{-k}^*(t; \psi, \zeta) = \bar{z}_k^*(t; \psi, \zeta) \quad k = 1, 3, \dots \end{aligned} \quad (34)$$

Доказана следующая теорема

Теорема 2. Пусть при некотором ψ система уравнений (28)-(29) имеет решение $(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)) \in E_0^1$, а построенная по этому решению матрица (32) определяет оператор (33), который не имеет собственных значений лежащих на мнимой комплексной плоскости. Тогда существует такое $\zeta_0 > 0$, что при $0 < \zeta < \zeta_0$ краевая задача (17)-(18), в которой ε_1 и ε_2 определены согласно (27) имеет периодическое решение $u^*(s, \tau; \psi, \zeta)$, допускающее представление

$$\begin{aligned} u^*(s, \tau; \psi, \zeta) &= u_0^*(s, \tau; \psi, \zeta) + O(\zeta^4) = \\ &= \zeta \sum_{k=\pm 1, \pm 3} e_k(s; \psi, \zeta) z_k^*(\tau; \psi, \zeta) + \zeta^2 \sum_{(k_1, k_2) \in \Omega_2} u_{k_1 k_2}(s; \psi, \zeta) z_{k_1}^*(\tau; \psi, \zeta) z_{k_2}^*(\tau; \psi, \zeta) + \\ &\quad + \zeta^3 \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \Omega_3} u_{k_1 k_2 k_3}(s; \psi, \zeta) z_{k_1}^*(\tau; \psi, \zeta) z_{k_2}^*(\tau; \psi, \zeta) z_{k_3}^*(\tau; \psi, \zeta) + O(\zeta^4), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tau} &= \pi + \sigma_1(\psi, \zeta) + \zeta^2 T_1(\rho^*(\psi, \zeta), \theta^*(\psi, \zeta); \psi, \zeta) = \\ &= \pi + \sigma_1(\psi, \zeta) + \zeta^2 \Delta_2(\psi, \zeta) = \pi + \sigma(\psi, \zeta), \quad (\sigma(\psi, \zeta) \equiv 0), \end{aligned} \quad (36)$$

в котором Ω_2, Ω_3 определены в (22), функции $e_k(\cdot), u_{k_1 k_2}(\cdot), u_{k_1 k_2 k_3}(\cdot)$ определены выше с учетом замены (27), функции $z_k^*(\cdot)$ определены в (34).

Алгоритм нахождения периодических решений краевой задачи (17)-(18)(уравнения (10)) позволяет строить решения в виде ряда

$$u^*(s, \tau; \psi, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta^j u_j(s, \tau, \rho, \theta, \Delta; \psi, \zeta), \quad (37)$$

в котором $u_j(\cdot)$ гладко зависящие от своих переменных функционалы $\rho \in l_2^1, \theta \in c_0, 2\pi$ - периодические по τ при $-1 \leq s \leq 0, \Delta \in R, -\pi/2 < \psi < \pi/2, 0 < \zeta \leq \zeta_0$.

При этом

$$\begin{aligned} \rho &= \rho^* + \zeta^2 \rho_2^* + \zeta^4 \rho_4^* + \dots = (\rho_1, \rho_2, \dots), \rho_j > 0, \rho_j = \rho_j(\psi, \zeta) = \\ &= \rho_j^*(\psi, \zeta) + \zeta^2 \rho_{j2}^*(\psi, \zeta) + \zeta^4 \rho_{j4}^*(\psi, \zeta) + \dots, \theta = \theta^* + \zeta^2 \theta_2^* + \zeta^4 \theta_4^* + \dots = (\theta_1, \theta_2, \dots), \\ \theta_j &= \theta_j(\psi, \zeta) = \theta_j^*(\psi, \zeta) + \zeta^2 \theta_{j2}^*(\psi, \zeta) + \zeta^4 \theta_{j4}^*(\psi, \zeta) + \dots, \\ \Delta &= \Delta(\psi; \zeta) = \zeta^2 \Delta_2(\psi; \zeta) + \zeta^4 \Delta_4(\psi; \zeta) + \dots, \end{aligned} \quad (38)$$

$\rho^*(\psi; \zeta), \theta^*(\psi; \zeta), \Delta_*(\psi; \zeta)$ гладкие по ψ и ζ функции,

$$\begin{aligned} u_1(\cdot) \equiv u_1(s, \tau, \rho, \theta; \psi, \zeta) &= \sum_{k=1,3,\dots} \rho_k(\psi, \zeta) [e_k(s; \psi, \zeta) e^{i(\tau + \theta_k^*(\psi; \zeta))} + \\ &e_{-n}(s; \psi, \zeta) e^{-i(\tau + \theta_k^*(\psi; \zeta))}], \theta_k^*(\psi, \zeta) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\psi, \zeta), \theta_0(\psi, \zeta) \equiv 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Подставляя ряд (37) в краевую задачу (17)-(18) с учетом (27) и приравнивая в полученных равенствах слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях ζ , определим функции, входящие в (37)-(39).

Теорема 3. В условиях теоремы 2, существует такое $\zeta_0 > 0$, при котором ряд

$$u^*(s, \tau; \psi, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta^j u_j^*(s, \tau; \psi, \zeta). \quad (40)$$

сходится равномерно относительно $0 \leq \zeta \leq \zeta_0$ и $(s, \tau) \in \{(s, \tau) : -1 \leq s \leq 0, -\infty < \tau < \infty\}$ и определяет периодическое решение краевой задачи (17)-(18), устойчивость которого определяется условиями теоремы 2. Переменная τ определяется в соответствии со следующим уравнением

$$\dot{\tau} = \pi + \sigma_1(\psi, \zeta) + \zeta^2 \Delta_2(\psi, \zeta) \quad (41)$$

Теорема позволяет определять периодические решения уравнения (10) для различных значений параметров. Ниже приведены некоторые результаты численных экспериментов. При $\psi = 1.51, \zeta = 0.1$ было найдено пять устойчивых периодических решений. При увеличении параметра ψ до 1.55 к уже найденным периодическим решениям добавляются еще два. Изучался вопрос возможности перехода периодических решений в хаотические колебания при фиксированном ψ и увеличении значения параметра ζ , а также вопрос возможности сосуществования нескольких хаотических аттракторов для одинаковых значений параметров.

В **третьей главе** рассматривается известное уравнение Икеды

$$\dot{x} = \mu \sin(x(t - \tau) - c) - x, \quad (42)$$

описывающее динамику пассивного оптического резонатора. Здесь переменная $x(t)$ определяет сдвиг фазы электрического поля в нелинейной среде кольцевого резонатора, τ – время распространения света в кольцевом резонаторе, $0 \leq c < 2\pi$ – постоянный фазовый сдвиг, $\mu > 0$ – безразмерный коэффициент, характеризующий интенсивность лазерного излучения.

Перейдем в уравнении (42) к безразмерному времени $t' = t/\tau$ (штрих в дальнейшем опустим). Положив $\varepsilon_1 = \tau^{-1} \ll 1$, имеем уравнение в безразмерных переменных

$$\varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t) = \mu \sin(x(t - 1) - c). \quad (43)$$

Состояния равновесия $x_*(c, \mu)$ уравнения (43) определяются корнями уравнения

$$x = \mu \sin(x - c) \quad (44)$$

в зависимости от c и μ . Устойчивость $x_*(c, \mu)$ определяется расположением корней характеристического уравнения

$$P(\lambda; \varepsilon_1) = \varepsilon_1 \lambda + 1 - \mu \cos(x_*(\mu, c) - c) \exp(-\lambda) = 0. \quad (45)$$

При $|\mu \cos(x_*(\mu, c) - c)| < 1$ все корни уравнения (45) лежат в левой открытой комплексной полуплоскости. Состояние равновесия $x_*(c, \mu)$ асимптотически устойчиво. При $|\mu \cos(x_*(\mu, c) - c)| > 1$ уравнение (45) имеет корни, принадлежащие правой открытой комплексной полуплоскости, т.е. состояние равновесия $x_*(c, \mu)$ неустойчиво. Пограничным является случай $|\mu \cos(x_*(\mu, c) - c)| = 1$. Это равенство определяет

в плоскости c, μ множество точек бифуркации периодических решений из состояния равновесия $x_*(c, \mu)$.

Уравнение (44) имеет единственное решение вида $x_*(\mu, c)$, $\lim_{\mu \rightarrow 0} x_*(\mu, c) = 0$ при $0 < c < 2\pi$. При этом $-\pi < x_*(\mu, c) < 0$, если $0 < c < \pi$, $x_*(\mu, \pi) \equiv 0$, $0 < x_*(\mu, c) < \pi$, если $\pi < c < 2\pi$. При $c = 0$ уравнение (44) имеет решение $x_*(\mu, c) \equiv 0$, а также при $\mu > 1$ два решения $\pm x_*(\mu, c)$, $x_*(\mu, c) > 0$, $\lim_{\mu \rightarrow 1} x_*(\mu, c) = 0$.

Кроме того, при каждом c существует последовательность значений $0 < \mu_1(c) \leq \mu_2(c) \leq \dots$, при которых в уравнении (44) появляются кратные корни $x_*^-(\mu_k(c), c) = x_*^+(\mu_k(c), c)$, $\mu_k(c) \cos(x_*^\pm(\mu_k(c), c) -) = 1$, которым при $\mu > \mu_k(c)$ отвечают парные (устойчивое и неустойчивое) состояния равновесия $x_*^-(\mu, c)$ и $x_*^+(\mu, c)$ уравнения (43). При дальнейшем увеличении параметра μ состояние равновесия $x_*^-(\mu, c)$ теряет устойчивость при некотором μ_* и при этом $\mu_* \cos(x_*^-(\mu_*, c) -) = -1$.

В параграфе 3.2 показано, что бифуркационный анализ потери устойчивости состояния равновесия $x_*(\mu, c)$, $\lim_{\mu \rightarrow 0} x_*(\mu, c) = 0$, $0 < c < 2\pi$ проводится аналогично уравнению (10).

В параграфе 3.3. проводится бифуркационный анализ потери устойчивости состояния равновесия $x_*(\mu, 0) \equiv 0$ в случае $c = 0$. Потеря устойчивости состоянием равновесия $x_*(\mu, 0) \equiv 0$ происходит в точке $\mu_* = 1$. Пусть $\mu = 1 + \varepsilon_2$, $|\varepsilon_2| \ll 1$. Уравнение (43) в окрестности $x_*(\mu, 0) \equiv 0$ примет вид

$$\varepsilon_1 \dot{y}(t) + y(t) - (1 + \varepsilon_2)y(t-1) + f(y(t-1); \varepsilon) = 0, \quad (46)$$

где $f(y) = (1 + \varepsilon_2)/6y^3 + o(y^3)$ аналитическая функция.

Характеристическое уравнение линейной части уравнения (46) имеет вид

$$P(\lambda; \varepsilon_1) = \varepsilon_1 \lambda + 1 - (1 + \varepsilon_2) \exp(-\lambda) = 0, \quad \lambda = \gamma + i\sigma. \quad (47)$$

Теорема 4. *Существует $\varepsilon_0 > 0$, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ ($\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $|\varepsilon| = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{1/2}$) все множество корней уравнения (47) определяется формулой (14), в которой $k = 0, 2, 4, \dots$*

Отметим, что $\lambda_0(\varepsilon)(\lambda_0(0) = 0)$ - вещественный корень уравнения (47).

Обозначим через l_2 - пространство комплексных последовательностей вида $z = (z_0, z_2, z_{-2}, z_4, z_{-4}, \dots)$, $z_0 \in R, z_k \in C, k = 2, 4, \dots, z_{-n} = \bar{z}_k, \|z\|_{l_2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |z_k|^2 <$

∞ . Через l_2^1 обозначим подпространство l_2 комплексных последовательностей $z = (z_0, z_2, z_{-2}, z_4, z_{-4}, \dots)$ для которых $\|z\|_{l_2^1}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k(\varepsilon)|^2 |z_k|^2 < \infty$ и $\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k \lambda_k(\varepsilon) * e_k(s; \varepsilon)\|_C < \infty$.

В рассматриваемом случае нормальной формой уравнения (46) будет система вида (23) в пространстве l_2 с областью определения правой части $s^1(r_0)$, гладко зависящая от ε , в которой $\Omega_k^3 = \{(k_1, k_2, k_3), k_1, k_2, k_3 = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, k_1 \leq k_2 \leq k_3, k_1 + k_2 + k_3 = n\}$,

$$d_{k_1 k_2 k_3}(s; \varepsilon)(s; \varepsilon) = (\varepsilon_1 - (1 + \varepsilon_2)(e^{-\lambda_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon)} - e^{-\lambda_n(\varepsilon)})/(\lambda_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon) - \lambda_n(\varepsilon)))^{-1} * \\ * (1 + \varepsilon_1 + \lambda_k(\varepsilon)) f_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon).$$

$f_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon) = -p_{k_1 k_2 k_3}(1 + \varepsilon_2)e_{k_1}(-1; \varepsilon)e_{k_2}(-1; \varepsilon)e_{k_3}(-1; \varepsilon)/6$, $e_n(s; \varepsilon) = e^{\lambda_k(\varepsilon)}/(1 + \varepsilon_1 + \lambda_k(\varepsilon))$, $p_{k_1 k_2 k_3} = 1$, если $k_1 = k_2 = k_3$; $p_{k_1 k_2 k_3} = 3$, если $k_1 = k_2 \neq k_3$, либо $k_1 = k_3 \neq k_2$, либо $k_2 = k_3 \neq k_1$; $p_{k_1 k_2 k_3} = 6$, если $k_1 \neq k_2 \neq k_3$. Схема ее построения аналогична схеме построения системы уравнений (23)

Введем в области $\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \varepsilon_1 > 0, |\varepsilon| < \varepsilon_0\}$ переменные $\zeta \geq 0$ и $\pi/2 < \psi < \pi/2$ согласно (27).

Введем взамен переменных z_k ($k = 0, \pm 2, \dots$) одну “быструю” переменную и счетное число “медленных” переменных вида $\rho = (\rho_0, \rho_2, \dots)$ и $\theta = (\theta_2, \theta_4, \dots)$. Усредним полученную систему уравнений по “быстрой” переменной, рассмотрим “главную” часть полученной системы (при $\zeta \rightarrow 0$) и получим систему, аналогичную (28)-(29)

$$\dot{\rho}_k = \gamma_k^*(\psi)\rho_k + R_k(\rho, \theta), k = 0, 2, \dots \quad (48)$$

$$\dot{\theta}_k = \Theta_k(\rho, \theta), k = 2, 4, \dots, \quad (49)$$

где $\gamma_k^*(\psi) = \sin^2 \psi \operatorname{sign} \psi - \pi^2 k^2 \cos^2 \psi / 2$.

Теорема 5. Пусть при некотором ψ система уравнений (48)-(49) имеет экспоненциально устойчивое или неустойчивое состояние равновесия $(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)) \in E_0^1$. В последнем случае t характеристических показателей (с учетом кратностей) линеаризованной на $(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi))$ системы уравнений положительны. Тогда существует такое $\zeta_0 > 0$, что при $0 < \zeta < \zeta_0$ уравнение (46) с учетом выражений (27) имеет периодическое решение того же характера устойчивости. При этом размерность

неустойчивого многообразия периодического решения равна t . Для периодического решения справедлива следующая формула

$$y^*(\tau; \psi, \zeta) = \zeta(\rho_0^*(\psi)) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{2k}^*(\psi) \cos(k\tau + \sum_{j=1}^{2k-2} \theta_{2j}^*(\psi)) + O(\zeta^3), \quad (50)$$

$$\dot{\tau} = 2\pi - \zeta \cos \psi + \zeta^2 \cos \psi^2 + O(\zeta^3). \quad (51)$$

В заключительной части параграфа для некоторых значений параметров ψ и ζ проведен сравнительный анализ периодических решений, полученных согласно (50) и непосредственного численного интегрирования уравнения (43). Показана возможность бифуркации одновременно нескольких периодических решений, которые при дальнейшем увеличении параметра ζ переходят в хаотические колебания.

В параграфе 3.4 анализируются бифуркации периодических решений уравнения (43) при рождении парных состояний равновесия $x_*^-(\mu, c)$ и $x_*^+(\mu, c)$. Для определенности рассмотрим случай $c = \pi/3$, $\mu_* \approx 2.4$, $x_* \approx 2.2$.

Уравнение (43) в окрестности рассматриваемых состояний равновесия примет вид

$$\varepsilon_1 \dot{y}(t) + y(t) - (1 + \varepsilon_2)y(t-1) + f(y(t-1)), \quad (52)$$

где $f(y) = 1/2x_*y^2 + 1/6(1 + \varepsilon_2)y^3 + o(y^4)$

Корни характеристического уравнения линейной части уравнения (52) определяются формулой (14), в которой $k = 0, 2, 4, \dots$

Система дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_k = \lambda_k(\varepsilon)z_k + \sum_{(k_1 k_2) \in \Omega_k^2} d_{k_1 k_2(\varepsilon)} z_{k_1} z_{k_2}, \quad (53)$$

в которой $\Omega_k^2 = \{(k_1, k_2) : k_j = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, k = k_1 + k_2\}$, называется нормальной формой уравнения (52).

Функции $d_{k_1 k_2}(s; \varepsilon)$ имеют следующий вид

$$d_{k_1 k_2}(s; \varepsilon) = (\varepsilon_1 - (1 + \varepsilon_2)(e^{-\lambda_{k_1 k_2}(\varepsilon)} - e^{-\lambda_n(\varepsilon)}) / (-\lambda_{k_1 k_2}(\varepsilon) + \lambda_n(\varepsilon)))^{-1} (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon \lambda_k(\varepsilon)) * * (-\frac{1}{2})p, \quad p = 1, 2, \quad (54)$$

$$\lambda_{k_1 k_2}(\varepsilon) = \lambda_{k_1}(\varepsilon) + \lambda_{k_2}(\varepsilon).$$

Структура системы уравнений (53) позволяет ввести взамен z_k ($k = 0, \pm 2, \dots$) одну “быструю” переменную и счетное число “медленных” переменных вида ρ и θ . Усредняя затем полученную систему уравнений по “быстрой” переменной, получим систему уравнений, “главная” часть которой (при $\zeta \rightarrow 0$) будет иметь вид (48)-(49)

Верна следующая теорема.

Теорема 6. Пусть при некотором ψ система уравнений (48)-(49) имеет экспоненциально устойчивое или неустойчивое состояние равновесия $(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)) \in E_0^1$. В последнем случае t характеристических показателей (с учетом кратностей) линеаризованной на $(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi))$ системы уравнений положительны. Тогда существует такое $\zeta_0 > 0$, что при $0 < \zeta < \zeta_0$ уравнение (52) с учетом выражений (27) имеет периодическое решение того же характера устойчивости. При этом размерность неустойчивого многообразия периодического решения равна t . Для периодического решения справедлива следующая формула

$$y^*(\tau; \psi, \zeta) = \zeta^2(\rho_0^*(\psi)) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{2k}^*(\psi) \cos(k\tau + \sum_{j=1}^{2k-2} \theta_{2j}^*(\psi)) + O(\zeta^3), \quad (55)$$

$$\dot{\tau} = 2\pi - \zeta \cos \psi + \zeta^2 \cos \psi^2 + O(\zeta^3). \quad (56)$$

Для значений параметров $\psi = 1.51, \zeta = 0.1$ выполнен сравнительный анализ периодических решений, полученных согласно (55) и непосредственного численного интегрирования уравнения (43). Показана возможность бифуркации одновременно нескольких периодических решений.

Глава 1

Исследование колебательных решений дифференциально- разностного уравнения второго порядка в одном критическом случае

В данной главе рассматривается дифференциально-разностное уравнение второго порядка, содержащее запаздывание от неизвестной функции и от ее производной, возникающее при моделировании работы ряда электронных устройств. С помощью анализа линейной части исходного уравнения, показана возможность потери устойчивости нулевого решения, связанная с прохождением через мнимую ось двух пар чисто мнимых корней характеристического квазиполинома, находящихся в резонансном соотношении 1:3. Изучаются бифурцирующие при этом автоколебательные решения. Отмечено существование сложных, в том числе хаотических, колебательных решений. Найдены значения параметров, вблизи которых может быть найден хаотического аттрактор. Для него вычислены ляпуновские показатели и ляпуновская размерность. В качестве методов исследования используется теория интегральных многообразий и метод нормальных форм нелинейных дифференциальных уравнений.

1.1 Постановка задачи

Рассматривается дифференциально-разностное уравнение

$$\ddot{x} + A\dot{x} + x + f(x(t-h)) + g(\dot{x}(t-h)) = 0, \quad (1)$$

в котором $A, h > 0$, $f(x) = f_1x + f_2x^2 + f_3x^3 + \dots$, $g(x) = g_1x + g_2x^2 + g_3x^3 + \dots$ гладкие при $|x| \leq x_0$ функции.

Это уравнение может быть использовано для описания динамики ряда электронных устройств с запаздывающей обратной связью [6, 36, 37].

С помощью метода интегральных многообразий и метода нормальных форм дифференциальных уравнений с запаздыванием изучается характер потери устойчивости нулевого решения уравнения (1) и бифуркации автоколебательных решений в одном критическом случае потери устойчивости.

1.2 Анализ устойчивости нулевого решения

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + A\dot{x} + x + f_1x(t-h) + g_1\dot{x}(t-h) = 0, \quad (2)$$

полученное из (1) в результате линеаризации в окрестности решения $x(t) \equiv 0$.

Характеристическое уравнение уравнения (2) имеет вид и изучим расположение корней ее характеристического уравнения

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 + A\lambda + 1 + (f_1 + \lambda g_1) \exp(-\lambda h) = 0. \quad (3)$$

Изучим расположение корней характеристического уравнения (3) с помощью метода D -разбиений [38]. Этот метод позволяет исследовать движение корней уравнения (3) при изменении параметров и построить в пространстве параметров области устойчивости и неустойчивости решений уравнения (2). Анализ проводится на основании метода, изложенного в [29]. Положим в характеристическом уравнении $\lambda = i\omega$, $\omega > 0$, $i = \sqrt{-1}$ и выделим вещественную и мнимую части. В результате получим систему уравнений

$$-\omega^2 + 1 + f_1 \cos(\omega h) + \omega g_1 \sin(\omega h) = 0,$$

$$A\omega - f_1 \sin(\omega h) + \omega g_1 \cos(\omega h) = 0.$$

Преобразуя эту систему, находим

$$f_1 = \pm \sqrt{A\omega^2 + (1 - \omega^2)^2 - \omega^2 g_1^2}, \quad (4)$$

$$h_n(\omega) = \begin{cases} \omega^{-1}(\arctg((\omega(\omega - 1)g_1 + Af_1)/((\omega^2 - 1)f_1 - \omega^2 Ag_1)) + \pi n), & 0 < \omega < \omega_1, \\ \omega^{-1}(\arctg((\omega(\omega - 1)g_1 + Af_1)/((\omega^2 - 1)f_1 - \omega^2 Ag_1)) - \pi + \pi n), & \\ \omega_1 < \omega < \infty, & \end{cases} \quad (5)$$

где ω_1 является решением уравнения

$$\omega^8 + (A - 4 - g_1^2)\omega^6 + \omega^4(6 - 2A + 2g_1^2 - Ag_1^2) + \omega^2(A - 4 - g_1^2) + 1 = 0,$$

$$h_n(\omega_1) = \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} (\omega^{-1}(\arctg((\omega(\omega - 1)g_1 + Af_1)/((\omega^2 - 1)f_1 - \omega^2 Ag_1)) + \pi n)), n = 0, 1, 2, \dots$$

Рассматривая теперь (4), (5) как функции параметра ω , построим в плоскости $(f_1; h)$ кривые, на которых уравнение (3) имеет корни, лежащие на мнимой оси (границы областей D -разбиений). Уравнение (3) также имеет корень $\lambda = 0$ при $f_1 = -1$. На рис. 1.1 приведены указанные кривые для различных значений параметра A .

Проведем исследование движения нулей квазиполинома $P(\lambda)$ через мнимую ось комплексной полуплоскости. Зафиксируем значение $A = A_0$ и точку (f_{10}, h_0) , принадлежащую одной из кривых, приведенных на рис. 1.1. Пусть эта точка соответствует значению $\omega = \omega_0$. Положим в (3) $f_1 = f_{10}(1 + \varepsilon)$, $0 < \varepsilon \ll 1$ и рассмотрим характеристическое уравнение

$$P_1(\lambda; \varepsilon) \equiv \lambda^2 + A\lambda + 1 + (f_1(1 + \varepsilon) + \lambda g_1) \exp(-\lambda h) = 0. \quad (6)$$

Обозначим через $\lambda(\varepsilon) = i\omega_0 + \varepsilon\lambda_1$ аналитически зависящий от малого параметра ε корень характеристического уравнения (6), обращающийся в $i\omega_0$ при $\varepsilon = 0$.

Из тождества $P_1(\lambda(\varepsilon); \varepsilon) \equiv 0$ с необходимостью имеем

$$\lambda_1 = -\frac{P_{1\varepsilon}(i\omega_0, 0)}{P_{1\lambda}(i\omega_0, 0)} = \frac{f_{10}e^{-i\omega_0 h_0}}{2i\omega_0 + g_1 e^{-i\omega_0 h_0} - h_0(f_{10} - i\omega_0 g_1)e^{-i\omega_0 h_0}}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_1 &= \frac{\omega_0^2 + i\omega_0 A_0 - 1 + i\omega_0 g_1 e^{-i\omega_0 h_0}}{2} = \\ &= \frac{A_0 + h_0 + A_0 \omega_0^2 - 2h_0 \omega_0^2 + A_0^2 h_0 \omega_0^2 + h_0 \omega_0^4 + g_1(1 + (1 + Ah_0)\omega_0^2) \cos(h_0 \omega_0) -}{A_0^2 + g_1^2 + 2A_0 h_0 + h_0^2 + 4\omega_0^2 + 2A_0 h_0 \omega_0^2 - 2h_0^2 \omega_0^2 + A_0^2 h_0^2 \omega_0^2 + h_0^2 \omega_0^4 +} \\ &\quad \frac{-g_1 h_0 \omega_0 (-1 + \omega_0^2) \sin(h_0 \omega_0)}{+2g_1(A_0 + h_0 - h_0 \omega_0^2) \cos(h_0 \omega_0) - 2g_1(2 + A_0 h_0) \omega_0 \sin(h_0 \omega_0)}. \end{aligned}$$

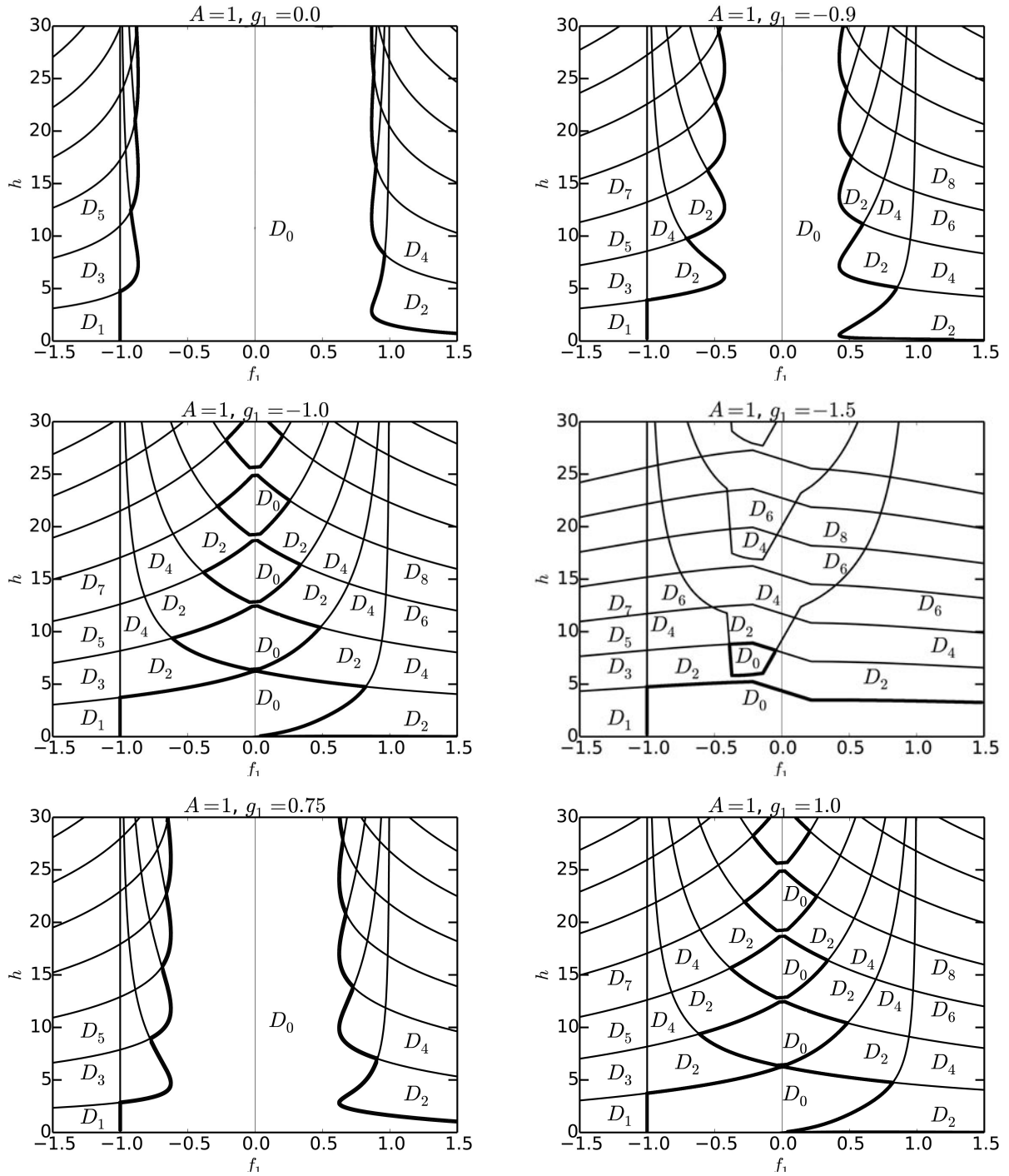


Рис. 1.1: D -разбиения для квазиполинома (3)

Учитывая, что $A_0 > 0$, $h_0 > 0$ получаем $Re\lambda_1 > 0$. Таким образом нули квазиполинома (3) при увеличении $|f_1|$ переходят из левой комплексной полуплоскости в правую.

В соответствии с этим построена картина D -разбиений плоскости (f_1, h) на обла-

сти, соответствующие различному количеству нулей характеристического уравнения (3), принадлежащих правой комплексной полуплоскости. Картины D -разбиений при $A = 1$ для различных значений параметра g_1 приведены рис. 1.1. Область D_j соответствует наличию j корней уравнения (3) в правой комплексной полуплоскости. В области D_0 все корни уравнения (3) находятся в левой комплексной полуплоскости, а значит нулевое решение уравнения (2) устойчиво. Области устойчивости отмечены жирной линией.

При прохождении корней характеристического уравнения (3) из области D_0 в область D_j , $j > 0$, происходит движение нулей через мнимую ось и потеря устойчивости нулевого решения. Возможны следующие механизмы потери устойчивости нулевого решения уравнения (2), связанные с прохождением корней характеристического уравнения (3) из левой комплексной полуплоскости в правую:

- 1) прохождение пары комплексно сопряженных корней (из области D_0 в область D_2),
- 2) прохождение одновременно двух пар комплексно сопряженных корней (из области D_0 в область D_4),
- 3) прохождение одного нулевого корня(из области D_0 в область D_1),
- 4) прохождение одновременно нулевого корня и пары комплексно сопряженных корней (из области D_0 в область D_3).

Эти механизмы потери устойчивости изображены на рис. 1.2.

Проведенный численный анализ показал, что во втором случае при прохождении двух пар комплексно сопряженных корней $\pm i\omega_1$, $\pm i\omega_2$, ($\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$) возможен внутренний резонанс 1:3 ($\omega_1/\omega_2 = 1/3$, $\omega_1 \approx 0.432$, $\omega_2 \approx 1.29$), при этом остальные корни характеристического уравнения находятся в левой комплексной полуплоскости. Соответствующие значения параметров равны $A = A_0 \approx 0.768$, $f_1 = f_{10} \approx 0.827$, $g_1 = g_{10} \approx -0.8$, $h = h_0 \approx 4.996$. Картина D -разбиений для этого случая качественно похожа на картину при значениях параметров $A = 1$, $g_1 = -0.9$. Этот критический случай представляет значительный интерес с точки зрения теории бифуркаций и изучается в дальнейшем.

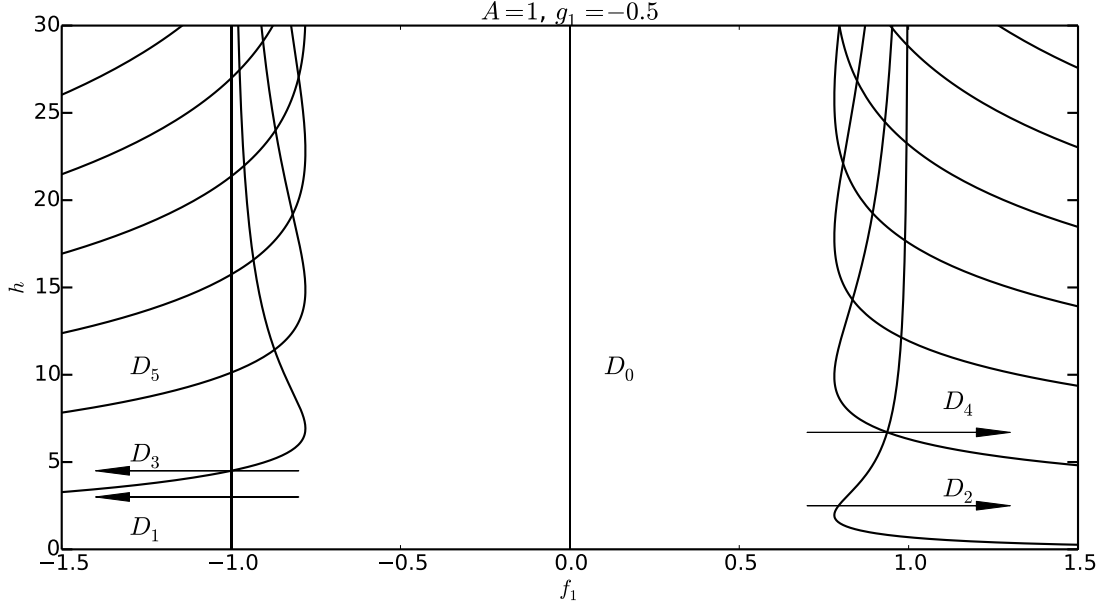


Рис. 1.2: Механизмы потери устойчивости нулевого решения уравнения (2)

1.3 Построение нормальной формы уравнения на центральном многообразии

Положим в (3) $A = A_0 + \varepsilon A_1$, $f_1 = f_{10} + \varepsilon f_{11}$, $g_1 = g_{10} + \varepsilon g_{11}$, $h = h_0 + \varepsilon h_1$, $0 < \varepsilon \ll 1$, тогда уравнение (3) примет вид

$$P(\lambda; \varepsilon) \equiv \lambda^2 + (A_0 + \varepsilon A_1)\lambda + 1 + (f_{10} + \varepsilon f_{11} + \lambda(g_{10} + \varepsilon g_{11})) \exp(-\lambda(h_0 + \varepsilon h_1)) = 0. \quad (7)$$

Считая $\lambda_j(\varepsilon) = i\omega_j + \varepsilon\lambda_{j1} + \varepsilon^2\lambda_{j2} + \dots$, $j = 1, 2$, из равенства $P(\lambda(\varepsilon); \varepsilon) = 0$ с необходимостью имеем

$$\lambda_{j1} = -\frac{P'_\varepsilon(i\omega_j; 0)}{P'_\lambda(i\omega_j; 0)} = -\frac{A_1 i\omega_j - \exp(-i\omega_j)(f_{11} + i\omega_j g_{11} + f_{10} + i\omega_j g_{10})}{2i\omega_j + A_0 - h_0(f_{10} + i\omega_j g_{10}) \exp(-i\omega_j) + g_{10} \exp(-i\omega_j)}. \quad (8)$$

Отметим, что $\text{Re}\lambda_{j1}$ может быть величиной любого знака за счет выбора A_1, f_{11}, g_{11}, h_1 . Изучим поведение решений исходного уравнения с начальными условиями из некоторого шара $S(r_0)$ радиуса r_0 фазового пространства $H = C[-h, 0] \oplus C^1[-h, 0]$ уравнения (1) с центром в нуле.

Перейдем от уравнения (1) к эквивалентной краевой задаче

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial s} \quad (9)$$

$$\frac{\partial U}{\partial s} \Big|_{s=0} = l(u(t, s); \varepsilon). \quad (10)$$

Здесь $u(t, s) = \text{col}(u_1(t, s), u_2(t, s)) = \text{col}(x(t, s), \dot{x}(t, s))$, $l(u(s); \varepsilon) : H \rightarrow R^2$ - гладкий нелинейный функционал, имеющий вид:

$$l(u(s); \varepsilon) = l_1(u(s); \varepsilon) + l_2(u(s); \varepsilon) + l_3(u(s); \varepsilon) + \dots \quad (11)$$

В правой части (11) выделены соответственно линейная, квадратичная и кубическая составляющая функционала $l(u(s); \varepsilon)$, точками обозначены слагаемые, имеющие по $u(s)$ более высокий порядок малости.

$$l_1(u(s); \varepsilon) = \text{col}(u_2(0), -(A_0 + \varepsilon A_1)u_2(0) - u_1(0) - (f_{10} + \varepsilon f_{11})u_1(t, -(h_0 + \varepsilon h_1)) - (g_{10} + \varepsilon g_{11})u_2(t, -(h_0 + \varepsilon h_1))) \quad (12)$$

$$l_2(u(s); \varepsilon) = \text{col}(0, -f_2 u_1^2(-(h_0 + \varepsilon h_1)) - g_2 u_2^2(-(h_0 + \varepsilon h_1))) \quad (13)$$

$$l_3(u(s); \varepsilon) = \text{col}(0, -f_3 u_1^3(-(h_0 + \varepsilon h_1)) - g_3 u_2^3(-(h_0 + \varepsilon h_1))). \quad (14)$$

В окрестности нуля фазового пространства H краевая задача (9)-(10) имеет [39, 40] локальное асимптотически устойчивое гладкое инвариантное четырехмерное центральное многообразие $\Phi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, s; \varepsilon)$, $z_1, z_2 \in C$, $-h \leq s \leq 0$, которое может быть представлено в виде разложения

$$\begin{aligned} \Phi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, s; \varepsilon) = & (u_{10}(s) + \varepsilon u_{10}^1(s) + \dots)z_1 + (u_{01}(s) + \\ & \varepsilon u_{01}^1(s) + \dots)z_2 + (u_{-10}(s) + \varepsilon u_{-10}^1(s) + \dots)\bar{z}_1 + (u_{0-1}(s) + \varepsilon u_{0-1}^1(s) + \dots)\bar{z}_2 + \\ & (u_{20}(s) + \varepsilon u_{20}^1(s) + \dots)z_1^2 + (u_{11}(s) + \dots)z_1 z_2 + \dots, \quad (15) \end{aligned}$$

где $u_{10} = \text{col}(1, i\omega_1) \exp(i\omega_1 s)$, $u_{02} = \text{col}(1, i\omega_2) \exp(i\omega_2 s)$, $u_*(s) = \text{col}(u_{*1}(s), u_{*2}(s))$ - гладкие вектор-функции.

Поведение решений на многообразии $\Phi(*)$ определяет поведение решений краевой задачи (9)-(10) с начальными условиями из некоторого фиксированного шара $S(R_0)$ с центром в нуле фазового пространства H . В свою очередь поведение траекторий на интегральном многообразии $\Phi(*)$ описывается следующей гладко зависящей от своих

переменных и параметров системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_1 = (i\omega_1 + \lambda_1^1 \varepsilon + d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1 + d_1 \bar{z}_1^2 z_2 + \dots = Z_1(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2; \varepsilon) \quad (16)$$

$$\dot{z}_2 = (i\omega_2 + \lambda_2^1 \varepsilon + d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2 + d_2 \bar{z}_1^3 + \dots = Z_2(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2; \varepsilon), \quad (17)$$

в которой $\lambda_j^1 = \tau_j^1 + i\omega_j^1$ определено согласно (8), комплексные постоянные $d_{jk} = a_{jk} + ic_{jk}$, d_j ($j, k = 1, 2$) подлежат определению и точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по εz_j , $\varepsilon \bar{z}_j$, $z_j \bar{z}_j$. Эту систему будем называть нормальной формой уравнения (1).

Изложим методику построения нормальной формы. Подставим выражение (15), определяющее интегральное многообразие, с учетом (16)-(17) в краевую задачу (9)-(10). В результате получим тождества

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_1} Z_1(\cdot) + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_1} \bar{Z}_1(\cdot) + \frac{\partial \Phi}{\partial z_2} Z_2(\cdot) + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_2} \bar{Z}_2(\cdot) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} \Big|_{s=0} \equiv l(\Phi(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, s; \varepsilon); \varepsilon) \quad (19)$$

для определения функций $u_*(s)$ и коэффициентов уравнений (16)-(17). Приравнивая в (18)-(19) последовательно коэффициенты при одинаковых степенях εz_1 , $\varepsilon \bar{z}_1$, εz_2 , $\varepsilon \bar{z}_2$, $z_1 z_2$, \dots получим рекуррентную последовательность краевых задач вида

$$u_{10}(s)d_1^* + u_{01}d_2^* + u_{1*}d_* + (p_1 i\omega_1 + p_2 i\omega_2)u_* = \frac{du_*}{ds} \quad (20)$$

$$\frac{du_*}{ds} \Big|_{s=0} = l_1(u_*(s)) + f_*, \quad (21)$$

где p_1, p_2 - целые числа, d_1^*, d_2^* - коэффициенты, входящие в (16)-(17), f_* - постоянный вектор. Краевая задача (20)-(21) либо однозначно разрешима, либо в общем случае разрешима в зависимости от значений p_1, p_2 . В первом случае $d_* = 0$. Во втором случае условия разрешимости этих краевых задач позволяют эффективно и однозначно вычислить коэффициенты системы уравнений (16)-(17) и функции разложения (15).

Рассмотрим сначала определение коэффициентов уравнений (16)-(17), стоящих при нелинейных слагаемых. Последовательно приравнивая коэффициенты при квадратичных и кубических степенях $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2$, будем получать краевые задачи (20)-(21) для нахождения неизвестных функций $u_*(s)$ и коэффициентов уравнений (16)-(17).

Приравнивая коэффициенты при z_1^2 получим следующую краевую задачу

$$2i\omega_1 u_{20} = \frac{du_{20}}{ds}$$

$$\frac{du_{20}}{ds}\Big|_{s=0} = l_1(u_{20}(s)) + l_2(u_{10}(s)),$$

для нахождения неизвестной функции $u_{20}(s)$. Определяя $u_{20}(s) = \text{col}(c_1, c_2)e^{2i\omega_1 s}$, с необходимостью получаем $c_1 = G_{20}, c_2 = 2i\omega_1 G_{20}$, где $G_{20} = \frac{(-f_2 + \omega_1^2 g_2) \exp(-2i\omega_1 h_0)}{P(2i\omega_1; 0)}$.

При z_2^2 краевая задача (20)-(21) для нахождения неизвестной функции $u_{02}(s)$ примет вид

$$2i\omega_2 u_{02} = \frac{du_{02}}{ds}$$

$$\frac{du_{02}}{ds}\Big|_{s=0} = l_1(u_{02}(s)) + l_2(u_{01}(s)).$$

Представим $u_{02}(s)$ в виде $u_{02}(s) = \text{col}(c_1, c_2)e^{2i\omega_2 s}$ и с необходимостью получим $c_1 = G_{02}, c_2 = 2i\omega_2 G_{-2}$, где $G_{02} = \frac{(-f_2 + \omega_2^2 g_2) \exp(-2i\omega_2 h_0)}{P(2i\omega_2; 0)}$.

Приравнивая коэффициенты при \bar{z}_1^2 получим следующую краевую задачу

$$-2i\omega_1 u_{-20} = \frac{du_{-20}}{ds}$$

$$\frac{du_{-20}}{ds}\Big|_{s=0} = l_1(u_{-20}(s)) + l_2(u_{10}(s)),$$

для нахождения неизвестной функции $u_{-20}(s)$. Определяя $u_{-20}(s) = \text{col}(c_1, c_2)e^{-2i\omega_1 s}$, с необходимостью получаем $c_1 = G_{-20}, c_2 = -2i\omega_1 G_{-20}$, где $G_{-20} = \frac{(-f_2 + \omega_1^2 g_2) \exp(2i\omega_1 h_0)}{P(-2i\omega_1; 0)}$.

При $z_1 \bar{z}_1$ для нахождения неизвестной функции $u_{1-1}(s)$ имеем следующую краевую задачу

$$0 = \frac{du_{1-1}}{ds}$$

$$\frac{du_{1-1}}{ds}\Big|_{s=0} = l_1(u_{1-1}(s)) + l_2(u_{10}(s) + u_{-10}(s)).$$

Записывая $u_{1-1}(s)$ в виде $u_{1-1}(s) = \text{col}(c_1, c_2)$ с необходимостью получим $c_1 = G_{1-1}, c_2 = 0$, где $G_{1-1} = \frac{(-2f_2 - 2\omega_1^2 g_2)}{1 + f_{10}}$.

При $z_2 \bar{z}_2$ краевая задача (20)-(21) для нахождения неизвестной функции $u_{2-2}(s)$ примет вид

$$0 = \frac{du_{2-2}}{ds}$$

$$\frac{du_{2-2}}{ds}\Big|_{s=0} = l_1(u_{2-2}(s)) + l_2(u_{20}(s) + u_{-20}(s)).$$

Представим $u_{2-2}(s)$ в виде $u_{2-2}(s) = \text{col}(c_1, c_2)$ с необходимостью получим $c_1 = G_{2-2}, c_2 = 0$, где $G_{1-1} = \frac{(-2f_2 - 2\omega_2^2 g_2)}{1 + f_{10}}$.

Приравнявая коэффициенты при $z_1 z_2$ получим следующую краевую задачу

$$(i\omega_1 + i\omega_2)u_{11} = \frac{du_{11}}{ds}$$

$$\frac{du_{11}}{ds}\Big|_{s=0} = l_1(u_{11}(s)) + l_2(u_{10}(s) + u_{01}(s)),$$

для нахождения неизвестной функции $u_{11}(s)$. Определяя $u_{11}(s) = \text{col}(c_1, c_2)e^{i(\omega_1 + i\omega_2)s}$, с необходимостью получаем $c_1 = G_{12}, c_2 = i(\omega_1 + i\omega_2)G_{12}$, где $G_{12} = \frac{(-2f_2 + 2\omega_1\omega_2 g_2) \exp(-i(\omega_1 + i\omega_2)s)}{P(i(\omega_1 + i\omega_2); 0)}$.

При $z_1 \bar{z}_2$ краевая задача (20)-(21) для нахождения неизвестной функции $u_{1-1}(s)$ примет вид

$$(i\omega_1 - i\omega_2)u_{1-2} = \frac{du_{1-2}}{ds}$$

$$\frac{du_{1-2}}{ds}\Big|_{s=0} = l_1(u_{1-2}(s)) + l_2(u_{10}(s) + u_{0-1}(s)).$$

Представим $u_{1-2}(s)$ в виде $u_{1-2}(s) = \text{col}(c_1, c_2)e^{i(\omega_1 - i\omega_2)s}$ с необходимостью получим $c_1 = G_{1-2}, c_2 = i(\omega_1 - i\omega_2)G_{1-2}$, где $G_{1-2} = \frac{-(2f_2 + 2\omega_1\omega_2 g_2)e^{-i(\omega_1 - i\omega_2)s}}{P(i(\omega_1 - i\omega_2); 0)}$.

Приравняв коэффициенты при $z_1^2 \bar{z}_1$, запишем краевую задачу (20)-(21) в следующем виде

$$i\omega_1 u_{2-1} + d_{11} u_{10} = \frac{du_{2-1}}{ds}$$

$$\frac{du_{2-1}}{ds}\Big|_{s=0} = l_1(u_{1-2}(s)) + l_2(u_{20}(s) + u_{-10}(s)).$$

Из условий разрешимости этой краевой задачи найдем значение коэффициента d_{11} . Приравняв коэффициенты при $\bar{z}_1 z_2, z_1^3, z_1 z_2 \bar{z}_2, z_1 z_2 \bar{z}_1, z_2^2 \bar{z}_2$, из условий разрешимости эффективно и однозначно вычислим коэффициенты системы уравнений (16)-(17)

и функции разложения (15). С необходимостью имеем

$$\begin{aligned}
d_{11} &= i\omega_1 \exp(-i\omega_1 h_0)(G_{11}(-2f_2 - 4g_2\omega^2) - 2G_{1-1}f_2 - 3(f_3 + ig_3\omega_1^3))/P'_\lambda(i\omega_1; 0), \\
d_{12} &= -\exp(-i\omega_1 h_0)((-G_{12}(f_2 + g_2\omega_2(\omega_1 + \omega_2)) - 2G_{1-2}(f_2 + (\omega_2 - \omega_1)\omega_2g_2)) + \\
&\quad + (f_2G_{2-2} + 3(f_3 + ig_3\omega_1\omega_2^2))/P'_\lambda(i\omega_1; 0)), \\
d_{21} &= -i\omega_2 \exp(-i\omega_2 h_0)((-2G_{1-2}(f_2 - (\omega_2 - \omega_1)\omega_1g_2)) - \\
&\quad - (2G_{12}(f_2 + g_2\omega_1(\omega_1 + \omega_2))2f_2G_{1-1} + 3(f_3 + ig_3\omega_1^2\omega_2)))/P'_\lambda(i\omega_2; 0), \\
d_{22} &= -i\omega_2 \exp(-i\omega_2 h_0)(-2G_{02}(f_2 + 2g_2\omega_2^2) - 2G_{2-2}f_2 - 3(f_3 + ig_3\omega_2^3))/P'_\lambda(i\omega_2; 0), \\
d_1 &= i(2\omega_1 - \omega_2) \exp(i(2\omega_1 - \omega_2)h_0)((-(2f_2 - 4g_2\omega_1(\omega_2 - \omega_1))G_{-12}) + \\
&\quad + ((-f_2 - 4g_2\omega_1\omega_2)G_{-20} - 3f_3 + 3g_3i\omega_1^2\omega_2))/P'_\lambda(i\omega_2; 0), \\
d_2 &= -3i\omega_1 \exp(3i\omega_1 h_0)((-2f_2 + 4g_2\omega_1^2)G_{-20} - 3f_3 \exp(3i\omega_1 h_0) - 3g_3i\omega_1^3)/P'_\lambda(i\omega_2; 0),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
G_{11} &= (-f_2 + \omega_1^2g_2) \exp(-2i\omega_1 h_0)/P(2i\omega_1; 0); \quad G_{1-1} = (-2f_2 + 2\omega_1^2g_2)(1 + f_{10}), \\
G_{12} &= -2(f_2 + \omega_1\omega_2g_2) \exp(-i(\omega_1 + \omega_2)h_0)/P(i(\omega_1 + \omega_2); 0); \quad G_{2-2} = (-2f_2 - 2\omega_2^2g_2)/(1 + f_{10}), \\
G_{1-2} &= -2(f_2 + \omega_1\omega_2g_2) \exp(-i(\omega_2 - \omega_1)h_0)/P(i(\omega_1 - \omega_2); 0), \\
G_{-20} &= (-f_2 + \omega_1^2g_2) \exp(2i\omega_1 h_0)/P(-2i\omega_1; 0).
\end{aligned}$$

Зависимость коэффициентов d_{jk} и d_j , $j, k = 1, 2$ от параметров f_2 , g_2 , f_3 , g_3 весьма сложная. Выберем эти параметры таким образом, чтобы a_{11} , $a_{22} < 0$. Это в частности будет выполнено при

$$f_2 = -0.6, \quad f_3 = -0.9, \quad g_2 = 0.6, \quad g_3 = 0.2. \quad (22)$$

1.4 Анализ нормальной формы уравнения

Рассмотрим “главную” часть системы уравнений (16)-(17) и выполним в ней замену $z_j = \varepsilon^{1/2}\rho_j \exp(i\tau_j)$, $\rho_j \geq 0$, $-\infty < \tau_j < \infty$ ($j = 1, 2$). Вводя теперь “медленные” переменные ρ_1 , ρ_2 , $\theta = 2\tau_1 - \tau_2$ и быструю переменную τ_1 , предварительно положив $d_j = |d_j| \exp(i\gamma_j)$, $0 \leq \gamma_j < 2\pi$ и выполнив нормировки $\rho_j = \rho_j/(-d_{jj})^{1/2}$, $j = 1, 2$, $t \rightarrow$

t/ε , а также выбрав A_1, f_{11}, g_{11}, h_1 таким образом, чтобы $\tau_1^1 = \tau_2^1 = 1$, получим следующую систему уравнений “медленных” переменных

$$\dot{\rho}_1 = (1 - \rho_1^2 + a_1 \rho_2^2) \rho_1 + b_1 \cos(-\theta + \gamma_1) \rho_1^2 \rho_2, \quad (23)$$

$$\dot{\rho}_2 = (1 + a_2 \rho_1^2 - \rho_2^2) \rho_2 + b_2 \cos(\theta + \gamma_2) \rho_1^3, \quad (24)$$

$$\dot{\theta} = \omega + c_1 \rho_1^2 + c_2 \rho_2^2 - 3b_1 \sin(-\theta + \gamma_1) \xi_1 \xi_2 - b_2 \sin(\theta + \gamma_2) \rho_1^3 / \rho_2, \quad (25)$$

где $a_1 = d_{12}/(-d_{22}), a_2 = d_{21}/(-d_{11}), b_1 = |d_1|/(a_{11}a_{22})^{1/2}, b_2 = |d_2|/(-d_{11})^{3/2}(-d_{22})^{1/2}, c_1 = (3c_{11} - c_{21})/(-d_{11}), c_2 = (3c_{12} - c_{22})/(-d_{22}), \omega = 2\omega_1^1 - \omega_2^1$.

Как известно, “грубым”, т.е. экспоненциально устойчивым (неустойчивым) состояниям равновесия системы уравнений (23)-(25) при малых ε в системе уравнений (16)-(17) и соответственно в краевой задаче (9)-(10) соответствует периодическое решение периода близкого к $2\pi/\omega_1$, того же характера устойчивости. “Грубые” периодическим решениям системы уравнений при малых ε в системе уравнений (16)-(17) и краевой задаче (9)-(10) соответствуют двумерные инвариантные торы.

Изучим характер фазовых перестроек системы (23) - (25). Считая $a_1 < 0, a_2 < 0$, зафиксируем значения параметров $f_2, f_3 = 0.2, g_2 = 0.3$ согласно (22) и возьмем в качестве бифуркационного параметра параметр g_3 . Было отмечено существование следующего бифуркационного сценария:

1. При $g_3 < \kappa_0, \kappa_0 \approx 0.2$ существует устойчивый цикл.
2. На промежутке $\kappa_0 < g_3 < \kappa_1, \kappa_1 \approx 0.3$ происходит каскад бифуркаций удвоения периода устойчивого цикла.
3. Каскад бифуркаций удвоения периода приводит к появлению хаотического аттрактора при $g \approx \kappa_1$.
4. Полученный хаотический аттрактор существует для значений параметра g_3 из промежутка $\kappa_0 < g_3 < \kappa_2, \kappa_2 \approx 0.9$.
5. При $g_3 \approx \kappa_2$ хаотический аттрактор исчезает и возникает устойчивое состояние равновесия.

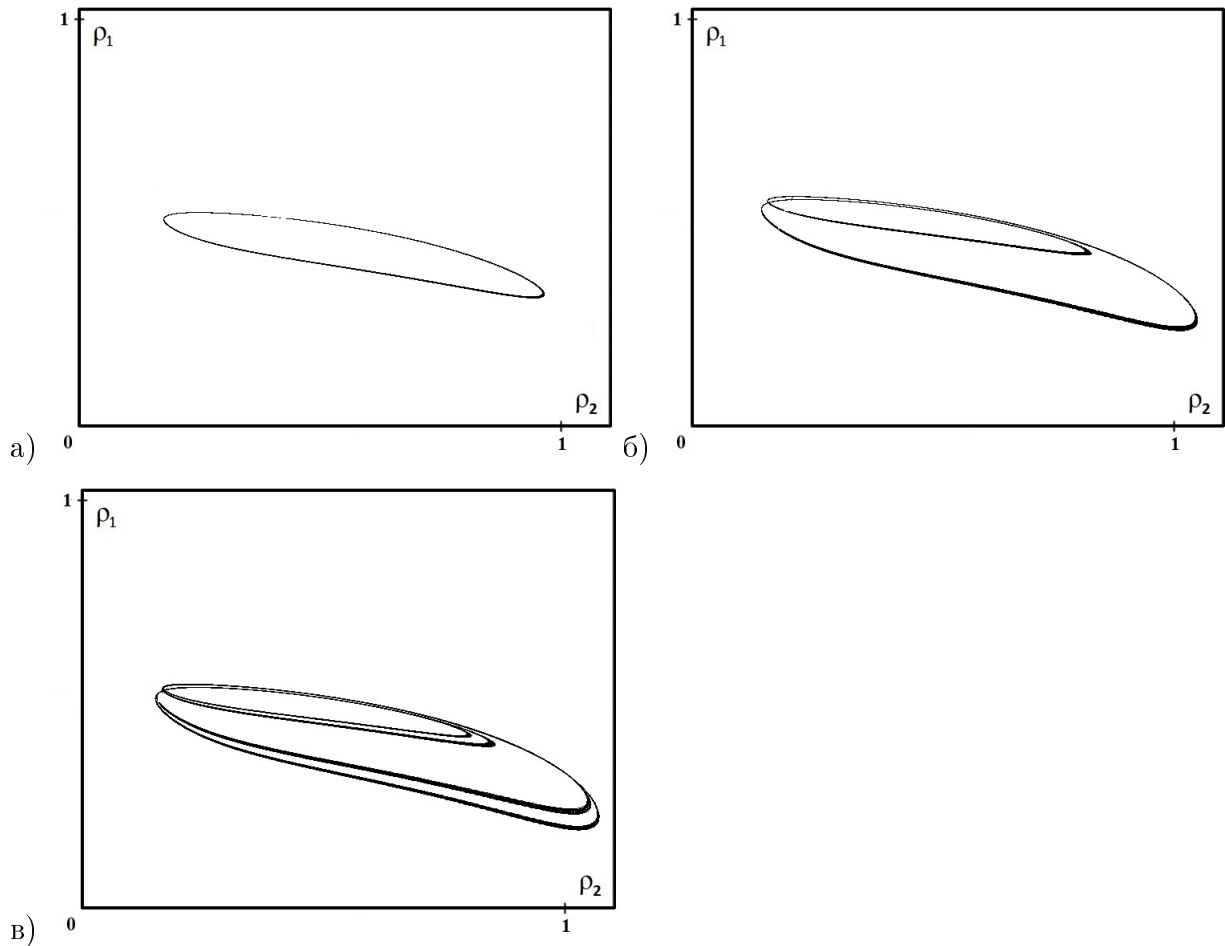


Рис. 1.3: а) Проекция устойчивого цикла на плоскость $(\rho_1; \rho_2)$; б) проекция цикла удвоенного периода на плоскость $(\rho_1; \rho_2)$, возникающего после первой бифуркации удвоенного периода; в) проекция цикла периода 4 на плоскость $(\rho_1; \rho_2)$, возникающего после второй бифуркации удвоенного периода

На рис. 1.3 а) представлен устойчивый цикл, который существует при $g_3 < \kappa_0$. При увеличении бифуркационного параметра происходят две бифуркации удвоения периода. Циклы удвоенного периода и периода 4 представлены на рис. 1.3 б) - в).

На рис. 1.4 а) - в) приведены проекции аттрактора динамической системы (23)-(25) на плоскость ρ_1, ρ_2 . На рис. 1.4 а) значение бифуркационного параметра g_3 выбрано вблизи момента рождения хаотического аттрактора и поэтому траектории системы долгое время остаются в окрестности потерявшего устойчивость цикла. Для этого случая старший ляпуновский показатель близок к 0. На рис. 1.4 б) колебания уже более не упорядочены, а на рис. 1.4 в) можно наблюдать развитой хаос. При

дальнейшем увеличении бифуркационного параметра g_3 хаотический аттрактор переходит в цикл, который затем стягивается в состояние равновесия.

Для изучения характера хаотических колебаний было проведено численное исследование старшего ляпуновского показателя в зависимости от параметра g_3 на основании метода динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора [41]. Результаты этого исследования приведены на рис. 1.4 г) в виде графика. Вычисления выполнены с шагом $1/100$ по параметру. Видно, что в моменты происхождения каскада удвоения периода и исчезновения хаотического аттрактора старшие ляпуновские показатели равны 0, а в зоне хаотических колебаний они положительны. Максимальное значение достигают при значении бифуркационного параметра $g_3 \approx 0.42$. В этом случае можно наблюдать развитой хаос, значения ляпуновских показателей для которого равны $\lambda_1 \approx 0.68$, $\lambda_2 \approx 0$, $\lambda_3 \approx -2.58$, $d_L \approx 2.63$. Проекция данного аттрактора приведена на рис. 1.4 г).

1.5 Выводы

В данной главе исследованы колебательные решения одного нелинейного дифференциально - разностного уравнения второго порядка, содержащего запаздывание от неизвестной функции и от ее производной. Проведен анализ линейной части уравнения с помощью метода D-разбиений, построены картины D-разбиений и выделен критический случай внутреннего резонанса 1:3. Построена нормальная форма исходного уравнения для данного случая. Показана возможность существования сложных, в том числе хаотических, колебательных решений и найдены значения параметров при которых реализуется бифуркационный сценарий, приводящий к рождению хаотического аттрактора в случае резонанса 1:3. Для хаотического аттрактора посчитаны значения ляпуновских показателей и ляпуновской размерности.

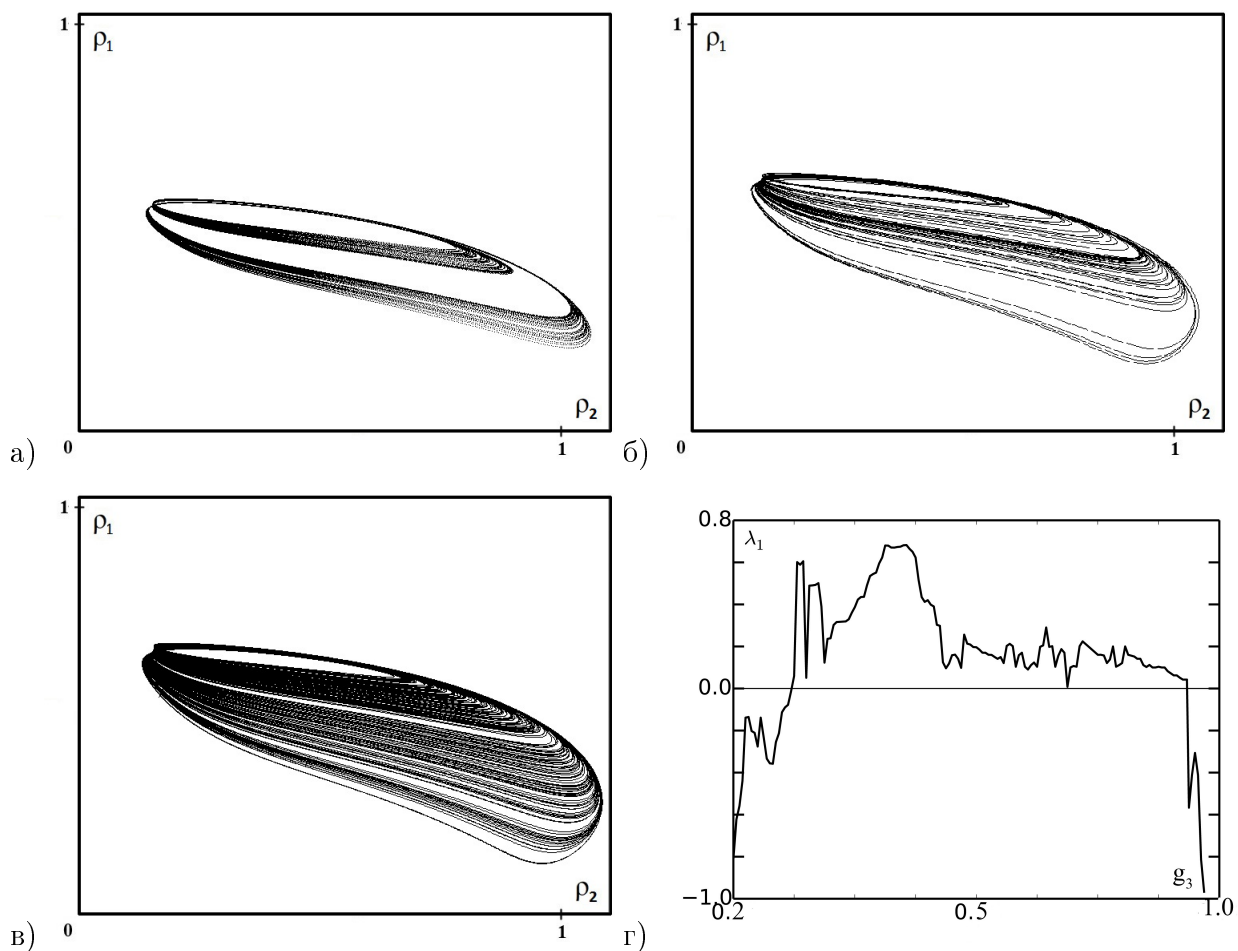


Рис. 1.4: а) Проекция хаотического аттрактора на плоскость $(\rho_1; \rho_2)$ вблизи момента рождения хаотических колебаний; б) проекции хаотического аттрактора на плоскость $(\rho_1; \rho_2)$; в) проекция хаотического аттрактора на плоскость $(\rho_1; \rho_2)$ при $g_3 \approx 0.42$; г) график зависимости старшего ляпуновского показателя от бифуркационного параметра g_3

Глава 2

Анализ бифуркаций периодических решений уравнения Мэкки - Гласса

В этой главе будет рассмотрено дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, описывающее математическую модель процессов кроветворения. Уравнение, записанное в безразмерных переменных, содержит малый параметр при производной, а значит является сингулярным. В качестве метода исследования используется метод равномерной нормализации. Метод сводит задачу нахождения периодических решений исходного уравнения к анализу счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащей уравнения для "быстрых" и "медленных" переменных. Анализ состояний равновесия уравнений "медленных" переменных позволяет построить периодические решения исходного уравнения и изучить их бифуркации в зависимости от параметров уравнения и их устойчивость. Показана возможность одновременной бифуркации большого числа устойчивых периодических решений - явления мультистабильности.

2.1 Постановка задачи

Рассматривается дифференциально-разностное уравнение вида

$$\dot{x} = -\gamma x + v(x_\tau), x_\tau = x(t - \tau), x(t) > 0, \quad (1)$$

в котором x - плотность циркулирующих нейтрофилов, γ - скорость случайного распада нейтрофилов, приток новых клеток в кровь v может быть представлен в виде

$$v(x_\tau) = \beta x_\tau \theta^k (\theta^k + x_\tau)^{-1}, \quad (2)$$

где τ, θ, β - некоторые положительные параметры, $n \geq 3$ - натуральное число. Параметр τ по своим значениям значительно превосходит остальные параметры, параметр β принимает значение порядка единицы. Это уравнение предложено Мэки и Глассом в монографии [7] в качестве математической модели процесса образования нейтрофилов (белых кровяных телец). Все параметры, входящие в уравнение (1), имеют четкий биологический смысл. В [7] проведено численное интегрирование уравнения и показана возможность существования различных периодических решений, из чего сделан вывод о периодическом изменении плотности белых кровяных телец в организме человека.

Уравнение (1) демонстрирует при численном анализе богатую динамику. В работах [16], [42–48] с помощью численного интегрирования показано существование различных периодических решений, а также сложных, в том числе хаотических колебаний. В [45] рассмотрены некоторые обобщения уравнения (1). В работе [47] приведены результаты моделирования динамики уравнения (1) посредством электронного устройства. Отмечено существование хаотических колебаний, изучаются их спектральные свойства.

В настоящей работе изучаются периодические решения уравнения (1), бифурцирующие из его единственного положительного состояния равновесия при изменении параметров уравнения, исследуется их устойчивость. Получены строгие теоремы об условиях бифуркаций периодических решений, а также построены асимптотические формулы периодических решений. Показана возможность бифуркации одновременно большого числа устойчивых периодических решений - бифуркации мультистабильности. В качестве метода исследования используется метод равномерной нормализации, предложенный в [26].

Подставляя (2) в (1) имеем

$$\dot{x} = -\gamma x + \beta x_\tau \theta^k (\theta^k + x_\tau)^{-1}. \quad (3)$$

Перейдем в уравнении (3) к безразмерным переменным и параметрам, положив $x'(t) = x(t)/\theta, t' = t/\tau, \varepsilon_1 = (\gamma\tau)^{-1}, \beta' = \beta/\gamma$. В результате, опустив штрих, получим уравнение

$$\varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t) - \beta x(t-1)(1 + x^k(t-1))^{-1} = 0, x(t) > 0, \quad (4)$$

в котором по физике задачи параметр β принимает значение порядка единицы, а $0 < \varepsilon_1 \ll 1$.

Уравнение имеет единственное положительное состояние равновесия

$$x_* = (\beta - 1)^{1/n}, \quad (5)$$

устойчивость которого определяется значениями параметров β и n . Ниже изучаются периодические решения уравнения (4), бифурцирующие из состояния равновесия (5) при изменении параметров ε_1 и β , исследуется их устойчивость.

Выполним замену переменных $x(t) = x_* + y(t)$, представим нелинейную часть уравнения (4) в виде ряда Тейлора и сгруппируем слагаемые по степеням y . В результате поведение решений уравнения (4) в окрестности состояния равновесия (5) будет определяться следующим уравнением

$$\varepsilon_1 \dot{y}(t) + y(t) + b_1 y(t-1) + f(y(t-1)) = 0, \quad (6)$$

в котором $f(y) = b_2 y^2 + b_3 y^3 + o(y^3)$ аналитическая в окрестности $y = 0$ функция,

$$b_1 = n - 1 - n/\beta, -1 \leq b_1 \quad b_2 = n(1 + (1 - n)(\beta - 1))(\beta - 1)^{(n-1)/n}/(2\beta), \\ b_3 = (6n^2 - (5n^2 + 1)\beta)(\beta - 1)^{(n-2)/n}/(6\beta^2). \quad (7)$$

2.2 Анализ устойчивости нулевого решения уравнения

Устойчивость нулевого решения (6) определяется поведением решений его линейной части

$$\varepsilon_1 \dot{y}(t) + y(t) + b_1 y(t-1) = 0, \quad (8)$$

которое, в свою очередь, определяется расположением корней характеристического уравнения

$$P(\lambda; \varepsilon_1) = \varepsilon_1 \lambda + 1 + b_1 \exp(-\lambda) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (9)$$

уравнения (8).

При $-1 \leq b_1 < 1$ и $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ все корни уравнения (9) лежат в левой комплексной полуплоскости [49], а значит нулевое решение (6) будет асимптотически устойчиво. При $b_1 > 1$ имеются корни, лежащие в правой комплексной полуплоскости. В этом случае нулевое решение (6) будет неустойчиво. Случай $b_1 = 1$ является пограничным. Это определяет согласно (7) последовательность критических значений $\beta_n = n/(n - 2)$.

При

$$\beta = \beta_n(1 + \varepsilon_2/(n - 2 - \varepsilon_2)), \quad |\varepsilon_2| \ll 1$$

имеем $b_1 = 1 + \varepsilon_2, b_2 = b_2(\varepsilon_2), b_3 = b_3(\varepsilon_2)$.

Изучим расположение корней характеристического уравнения $P(\lambda; \varepsilon_1) = 0$ и структуру решений уравнения (8) при $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$ ($\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $|\varepsilon| = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{1/2}$). В рассматриваемом случае характеристическое уравнение (9) не имеет корней, лежащих на вещественной оси, поэтому достаточно рассмотреть область $Im \lambda > 0$.

Перепишем уравнение (9) в следующем виде

$$e^\lambda(\varepsilon_1 \lambda + 1) = -(1 + \varepsilon_2).$$

Это уравнение эквивалентно следующей последовательности

$$e^{\lambda + \ln(\varepsilon_1 \lambda + 1)} = e^{\ln(1 + \varepsilon_2) + i\pi n}, \quad k = 1, 3, 5, \dots, \quad (10)$$

где $\ln(z) = \ln(|z|) + i \arg(z)$ ($-\pi < \arg(z) < \pi$), $i = \sqrt{-1}$.

Для определения корней уравнения (9) достаточно рассмотреть последовательность уравнений

$$\lambda + \ln(\varepsilon_1 \lambda + 1) = \ln(1 + \varepsilon_2) + i\pi n, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (11)$$

Отметим, так как левая часть уравнения (9) является аналитической функцией комплексного переменного λ , то в любой ограниченной области уравнение (9) может иметь лишь конечное число корней конечной кратности. При этом цепочка корней

вида $\lambda_p(\varepsilon) = \gamma_p(\varepsilon) + i\sigma_p(\varepsilon)$ ($\sigma_p(\varepsilon) > 0$), $|\lambda_p(\varepsilon)| \rightarrow \infty$ ($p = 1, 3, \dots$) может существовать в уравнении (9) лишь при условии $\lim_{p \rightarrow \infty} \gamma_p(\varepsilon) = -\infty$, $\lim_{p \rightarrow \infty} |\sigma_p(\varepsilon)/\gamma_p(\varepsilon)| = \infty$ (см, например, [49]). В связи с этим, существует такое $\varphi_0 > c$, позволяющее определить область существования корней уравнения

$$\Lambda_{\varphi_0} = \{\lambda : 0 < \arg \lambda < \pi - \varphi_0\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$F(\lambda; \varepsilon_1) \equiv \lambda + \ln(1 + \varepsilon_1 \lambda) = w, \quad (12)$$

считая $\lambda \in \Lambda_{\varphi_0}$, $w \in W_{x_0} = \{w : -x_0 < \operatorname{Re} w < x_0, \operatorname{Im} w \geq \pi, x_0 > 0$ — некоторое малое фиксированное число $\}$. Так как $\varepsilon_1/|1 + \varepsilon_1 \lambda| \leq q < 1$ при $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0 < \sin \varphi_0$ и $\lambda \in \Lambda_{\varphi_0}$, то равномерно относительно ε_1 и λ выполняется $m_0 < |F_\lambda(\lambda; \varepsilon_1)| < m_\infty$, где m_0, m_∞ - фиксированные положительные постоянные. Отсюда следует, что уравнение (12) при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ имеет единственное решение $\lambda(w; \varepsilon)$, которое может быть получено посредством итерационного процесса

$$\lambda_p + \ln(1 + \varepsilon_1 \lambda_{p-1}) = w, \quad p = 1, 3, \dots, \lambda_0 = w. \quad (13)$$

Итерационный процесс сходится равномерно относительно $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и w из любой ограниченной подобласти W_{x_0} . Предельная функция

$$\begin{aligned} \lambda(w; \varepsilon_1) &= w + \lambda^1(w; \varepsilon_1), \\ \lambda^1(w; \varepsilon_1) &= -\ln(1 + \varepsilon_1(w - \ln(1 + \varepsilon_1(w - \ln(1 + \varepsilon_1(w - \dots)))))) \end{aligned} \quad (14)$$

будет непрерывной по совокупности переменных, аналитической по w при каждом $0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0$ и аналитической по ε_1 при каждом фиксированном $w \in W_{x_0}$.

Отметим следующее

$$\lambda(w; \varepsilon) - \lambda_1(w; \varepsilon) = -\ln(1 + \varepsilon_1 w^*) + \ln(1 + \varepsilon_1 w) = \varepsilon_1^2 (1 + \varepsilon_1 \lambda^*)^{-1} \ln(1 + \varepsilon_1 w^*), \quad (15)$$

где согласно (13)-(14) $\lambda(w; \varepsilon) = w - \ln(1 + \varepsilon_1 w)$, $w^* = w - \ln(1 + \varepsilon_1(w - \ln(1 + \varepsilon_1(w - \dots))))$, точка λ^* находится на прямой, соединяющей точки w и w^* . С учетом того, что выражение $|(1 + \varepsilon_1 \lambda^*)^{-1} \ln(1 + \varepsilon_1 w^*)|$ ограничено равномерно относительно $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, $w \in W_x$, имеем оценку

$$|\lambda(w; \varepsilon) - \lambda_1(w; \varepsilon)| < K \varepsilon_1^2 \quad (K > 0). \quad (16)$$

Отсюда справедливо

Теорема 7. Существует $\varepsilon_0 > 0$, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ ($\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $|\varepsilon| = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{1/2}$) все множество корней уравнения (9) определяется формулой

$$\begin{aligned}\lambda_k(\varepsilon) &= i\pi k + \ln(1 + \varepsilon_2) + \lambda^1(i\pi k + \ln(1 + \varepsilon_2); \varepsilon_1), \\ \lambda_{-k}(\varepsilon) &= \bar{\lambda}_k(\varepsilon), k = 1, 3, 5, \dots,\end{aligned}\tag{17}$$

где $\lambda^1(w; \varepsilon) \equiv -\ln(1 - \varepsilon_1(w - \ln(1 + \varepsilon_1(w - \ln(1 + \varepsilon_1(w - \dots))))))$

($\ln w = \ln|w| + i\arg w$, $-\pi < \arg w < \pi$)- аналитическая по ε и w при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $|Re w| < \delta_0$ функция.

При этом на основании (16) равномерно относительно k

$$\begin{aligned}\lambda_k(\varepsilon) &= \gamma_k(\varepsilon) + i(\pi k + \sigma_k(\varepsilon)) = i\pi k + \ln(1 + \varepsilon_2) - \ln(1 + \varepsilon_1(i\pi k + \ln(1 + \varepsilon_2))) + O(|\varepsilon|^2), \\ \gamma_k(\varepsilon) &= \ln(1 + \varepsilon_2) - \ln((1 + \varepsilon_1 \ln(1 + \varepsilon_2))^2 + \varepsilon_1^2 \pi^2 k^2)/2 + O(|\varepsilon|^2), \\ \sigma_k(\varepsilon) &= -\arccos((1 + \varepsilon_1 \ln(1 + \varepsilon_2))/((1 + \varepsilon_1 \ln(1 + \varepsilon_2))^2 + \varepsilon_1^2 \pi^2 k^2)^{1/2}) + O(|\varepsilon|^2).\end{aligned}\tag{18}$$

Таким образом, вопрос устойчивости решений уравнения (8) сводится к анализу поведения функций

$$\gamma_k(\varepsilon) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1^2(\pi k)^2/2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2^2/2 + o(|\varepsilon|^3), k = 1, 3, 5, \dots,\tag{19}$$

являющихся аналитическими в точке $\varepsilon = 0$ и имеющих радиус сходимости соответствующих рядов $r_k = O(n^{-1})$.

Из (19) следует, что при малых ε и выполнении неравенства $\varepsilon_2 > \varepsilon_1^2(\pi k)^2/2$ n -ый корень характеристического уравнения (9) имеет положительную вещественную часть.

2.3 Построение нормальной формы

Опишем теперь структуру решений уравнения (8). Фазовым пространством уравнения (8) является пространство непрерывных вещественных функций $C[-1; 0]$, норму в котором определяем стандартным способом и обозначим $\|\cdot\|_C$. Под решением уравнения (8)(уравнения (6)), определенном при $t \geq 0$, с начальным условием $y_0(s) \in C[-1; 0]$ будем понимать функцию $y(t + s; \varepsilon)$ ($-1 \leq s \leq 0$), которая обращает уравнение (8)(уравнение (6)) в тождество и удовлетворяет начальному условию $y(s; \varepsilon) \equiv y_0(s)$.

Перейдем от уравнения (8) к эквивалентной начально - краевой задаче в полосе $-1 \leq s \leq 0, t \geq 0$, положив $u(s, t) = y(t + s)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad (20)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{s=0} = -u(0, t) - (1 + \varepsilon_2)u(-1, t), u(s, 0) = y_0(s). \quad (21)$$

Производящим оператором полугруппы линейных операторов $T(t; \varepsilon)$ ($T(t_1 + t_2; \varepsilon) = T(t_1; \varepsilon)T(t_2; \varepsilon) = T(t_2; \varepsilon)T(t_1; \varepsilon), T(0; \varepsilon) = I$ - единичный оператор), действующих в пространстве $C[-1, 0]$ и определяющих решение краевой задачи (20)-(21), будет оператор

$$A(\varepsilon)v = \begin{cases} dv/ds, -1 \leq s < 0, \\ -\varepsilon_1^{-1}(v(0) + (1 + \varepsilon_2)v(-1)), s = 0 \end{cases} \quad (22)$$

с областью определения $D(A) = \{v(s) \in C^1[-1, 0], \varepsilon v'(0) + v(0) + (1 + \varepsilon_2)v(-1) = 0\}$.

Собственными значениями оператора $A(\varepsilon)$ будут величины $\lambda_k = \lambda_k(\varepsilon)$, а соответствующими собственными функциями будут функции $e_k(s; \varepsilon) = e^{\lambda_k(\varepsilon)s}/P'(\lambda_k(\varepsilon); \varepsilon) = e^{\lambda_k(\varepsilon)s}/(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1\lambda_k(\varepsilon))^{1/2}$, $k = \pm 1, \pm 3, \dots$, $\|e_k(s; \varepsilon)\|_C \sim 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Наряду с (22) введем в рассмотрение оператор

$$A^*(\varepsilon)h = \begin{cases} dh/ds, 0 \leq s < 1, \\ -\varepsilon_1^{-1}(h(0) + (1 + \varepsilon_2)h(1)), s = 0 \end{cases} \quad (23)$$

действующий в пространстве $C[0, 1]$, с областью определения $D(A^*) = \{h(s) \in C^1[0, 1], -\varepsilon h'(0) + h(0) + (1 + \varepsilon_2)h(1) = 0\}$. Оператор (23) является сопряженным с (22) в смысле скалярного произведения Шиманова [35], которое для краевой задачи (20)-(21) принимает вид

$$\langle v(s), h(s) \rangle = \varepsilon_1 v(0)\bar{h}(0) - (1 + \varepsilon_2) \int_{-1}^0 \bar{h}(\xi + 1)v(\xi)d\xi.$$

Заметим, что собственными значениями оператора $A^*(\varepsilon)$ являются величины $-\bar{\lambda}_k(\varepsilon)$, а соответствующими собственными функциями будут функции $h_k = h_k(s; \varepsilon) = e^{-\bar{\lambda}_k(\varepsilon)s}$. Между функциями $e_k(s; \varepsilon)$ и $h_k(s; \varepsilon)$ выполнены следующие условия ортогональности

$$\langle e_{k_1}(s; \varepsilon), h_{k_2}(s; \varepsilon) \rangle = \delta_{k_1 k_2}, \quad (24)$$

где $\delta_{k_1 k_2}$ - символ Кронекера. Отметим, что выражения

$$p_k(v; \varepsilon) = \langle v(s), h_k(s, \varepsilon) \rangle = \int_{-1}^0 v(s) dr_k(s, \varepsilon), \quad p_{-k}(v; \varepsilon) = \bar{p}_k(v; \varepsilon),$$

$$r_k(s; \varepsilon) = \begin{cases} \lambda_k^{-1}(\varepsilon), & s = 0, \\ -(\varepsilon_1^{-1} + \lambda_k^{-1}(\varepsilon))e^{-\lambda_k(\varepsilon)s}, & -1 \leq s < 0, \quad k = \pm 1, \pm 3, \dots, \end{cases}$$

определяют последовательность линейных непрерывных комплекснозначных функционалов в пространстве $C[-1; 0]$, нормы которых

$$\|p_k(v; \varepsilon)\| = \sup_{\|v(s)\|_{C=1}} \leq \int_{-1}^0 |r_k(s; \varepsilon)| = O(1), \quad k \rightarrow \infty \quad (25)$$

Теорема 8. Система функций $e_k(s, \varepsilon)$ полна в $C[-1, 0]$ в следующем смысле: не существует функции $q(s) \in C[-1, 0]$, $q(s) \not\equiv 0$, для которой $\langle q(s), h_k(s) \rangle = 0$, $k = \pm 1, \pm 3, \dots$

Доказательство. Оператор $A^{-1}(\varepsilon)$, действующий в $C[-1, 0]$, имеет следующий вид

$$A^{-1}(\varepsilon)f(s) = \int_{-1}^0 f(s_1) d_{s_1} R(s, s_1; \varepsilon), \quad (26)$$

где

$$R(s, s_1; \varepsilon) = \frac{1}{2 + \varepsilon_2} \begin{cases} (1 + \varepsilon_2)(s + 1), & -1 \leq s_1 < s, \\ 1 + \varepsilon_2 - s_1, & s \leq s_1 < 0, \\ 1 - \varepsilon_1 + \varepsilon + 2, & s_1 = 0, \end{cases}$$

является вполне непрерывным оператором, который имеет однократные собственные значения $\lambda_k^{-1}(\varepsilon)$, $k = \pm 1, \pm 3, \dots$, $|\lambda_1^{-1}(0)| > |\lambda_2^{-1}(0)| > \dots$, которым отвечают собственные функции $e_k(s)$, $k = \pm 1, \pm 3, \dots$. Из вида $A^{-1}(\varepsilon)$ следует, что $A^{-1}(\varepsilon)f(s) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $f(s) \equiv 0$. Для оператора (26) в $C[-1, 0]$ существует эквивалентная норма $\|\cdot\|_C^*$, для которой $\|A^{-1}(\varepsilon)\|_C^* = \sup_{\|f\|_C^*=1} \|A^{-1}(\varepsilon)f(s)\|_C^* = \max_n |\lambda_k^{-1}(\varepsilon)| = |\lambda_1^{-1}(\varepsilon)|$ (см, например, [35] стр. 15-16).

Предположим, что нашлась $q(s) \in C[-1, 0]$, $q(s) \not\equiv 0$, $\langle q(s), h_k(s) \rangle = 0$ $k = \pm 1, \pm 3, \dots$. Нормируем $q(s) \rightarrow q(s)/\|q(s)\|_C^*$, т.е. $\|q(s)\|_C^* = 1$. Обозначим $\|A^{-1}(\varepsilon)q(s)\|_C^* = \delta(\varepsilon) > 0$. Рассмотрим все собственные значения $\lambda_k^{-1}(\varepsilon)$ для которых $|\lambda_k^{-1}(\varepsilon)| \geq \delta(\varepsilon)/2$, $|\lambda_{n+1}^{-1}(\varepsilon)| < \delta(\varepsilon)/2$, а их может быть конечное число $k = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm l$. Обозначим через $C_{l+1}[-1, 0]$ подпространство функций $C[-1, 0]$, для которых $\langle v(s), h_k(s, \varepsilon) \rangle = 0$, $k = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm l$. При этом

$\sup_{\|f(s)\|_C^*=1, f(s) \in C_{l+1}[-1,0]} \|A^{-1}(\varepsilon)f(s)\|_C^* = |\lambda_{l+1}^{-1}(\varepsilon)| < \delta(\varepsilon)/2$, но $q(s) \in C_{l+1}[-1,0]$ и $\|A^{-1}(\varepsilon)q(s)\|_C^* = \delta(\varepsilon)$. Получили противоречие. Теорема доказана. ■

Обозначим через l_2 комплексное пространство последовательностей вида $z = (z_1, z_{-1}, z_3, z_{-3}, \dots)$, $z_k \in C$, $z_{-n} = z_k$, $\|z\|_{l_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 < \infty$. Через l_2^1 обозначим комплексное подпространство l_2 последовательностей $z = (z_1, z_{-1}, z_3, z_{-3}, \dots)$ для которых $\|z\|_{l_2^1}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k(\varepsilon)|^2 |z_k|^2 < \infty$ и $\|\sum_{k=1}^{\infty} z_k \lambda_k(\varepsilon) e_k(s; \varepsilon)\|_C < \infty$. Подпространство $C[-1,0]$ функций указанного вида обозначим $D_*(A)$.

В дальнейшем $s(r_0) = \{z \in l_2, \|z\|_{l_2} \leq r_0\}$, $s^1(r_0) = \{z \in l_2^1, \|z\|_{l_2^1} \leq r_0\}$.

Теорема 9. *Решение $u(s, t; \varepsilon)$ краевой задачи (20)-(21) с начальным условием $u(s, 0; \varepsilon) = y_0(s) \in C[-h, 0]$ при $t \geq t_0$ ($t_0 \geq 3$) может быть представлено в виде*

$$u(s, t; \varepsilon) = \sum_{k=\pm 1, \pm 3, \dots} z_k(t; \varepsilon) e_k(s; \varepsilon), \quad z(t; \varepsilon) = (z_1(t; \varepsilon), z_{-1}(t; \varepsilon), \dots) \in l_2^1, \quad (27)$$

где $z(t; \varepsilon)$ решение уравнения

$$\dot{z} = \Lambda(\varepsilon)z, \quad \Lambda(\varepsilon)z = (\lambda_1(\varepsilon)z_1, \lambda_{-1}(\varepsilon)z_{-1}, \dots), \quad (28)$$

в пространстве l_2 с начальным условием $z(t_0; \varepsilon) = (z_1(t_0; \varepsilon), z_{-1}(t_0; \varepsilon), \dots)$,

$z_k(t_0; \varepsilon) = \langle u(s, t_0; \varepsilon), h_k(s; \varepsilon) \rangle$, $k = \pm 1, \pm 3, \dots$.

Обратно, если $z(t; \varepsilon)$ при $t \geq t_0$ решение уравнения (28) с начальным условием $z(t_0; \varepsilon) \in l_2^1$, то выражение (27) определяет при $t \geq t_0$ решение начально - краевой задачи (20)-(21) с начальным условием $u(s, t_0; \varepsilon)$, определяемым (27).

Доказательство. При $t_0 \geq 3$ решение начально - краевой задачи (20)-(21)(уравнения (8)) $u(s, t_0; \varepsilon) = y(t_0 + s; \varepsilon) \in C^3[-1, 0]$ и $\varepsilon_1 y'''(t_0) + y''(t_0) + (1 + \varepsilon_2) y'(t_0) = 0$. С учетом этого и равенств (17), (25) имеем

$$z_k(t_0; \varepsilon) = \langle y'''(t_0 + s; \varepsilon), h_k(s; \varepsilon) \rangle \lambda_k(\varepsilon)^{-3}, \quad |z_k(t_0; \varepsilon)| = O(n^{-3}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, $z(t_0; \varepsilon) \in l_2^1$ и $z_k(t, \varepsilon) = e^{\lambda_k(\varepsilon)(t-t_0)} z_k(t_0; \varepsilon)$, $k = \pm 1, \pm 3, \dots$. Подставив $z_k(t; \varepsilon)$ в (27) замечаем, что ряд и его производная по t при $t \geq 0$ равномерно относительно $-1 \leq s \leq 0$ сходится и удовлетворяют начально - краевой задаче (20)-(21) при $t \geq t_0$ на основании теоремы 1. Обратно, если $z(t; \varepsilon)$ является решением (28) с начальным условием $z_k(t_0; \varepsilon) \in l_2^1$, то определяемая рядом (27) функция $y(t_0 + s) \in D_*(A)$,

и при $t > t_0$ удовлетворяет начально - краевой задаче (20)-(21), в чем легко убедится непосредственной подстановкой. Теорема доказана. ■

Отметим следующее свойство функций $\lambda_k(\varepsilon)$.

Теорема 10. *Существуют такие $\varepsilon_0 > 0, c_0 > 0$, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ равномерно относительно $n_j = \pm 1, \pm 3, \dots$ ($j = 1, \dots$) выполнены равенства*

$$|\lambda_{k_1}(\varepsilon) + \lambda_{k_2}(\varepsilon) + \lambda_{k_3}(\varepsilon)|, |\lambda_{k_1}(\varepsilon) + \lambda_{k_2}(\varepsilon) + \lambda_{k_3}(\varepsilon) + \lambda_{k_4}(\varepsilon)| \geq c_0, \quad (29)$$

вторые при условии $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \neq 0$.

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из формул (17), (18). Рассмотрим сначала первое неравенство (29). Согласно (18) $|\lambda_{k_1}(0) + \lambda_{k_2}(0) + \lambda_{k_3}(0)| \geq \pi$. Рассмотрим случай равенства, и пусть для определения $k_1, k_2 > 0$, а $k_3 = -k_1 - n_2 + 1$. При $\varepsilon \neq 0$ согласно (18) $\pi n_j - \pi/2 < \text{Im} \lambda_j(\varepsilon) < \pi n_j$ и $\text{Im} \lambda_{n_j} \rightarrow \pi n_j - \pi/2$ при $n_j \rightarrow \infty$ ($j = 1, 2$). Но тогда $\inf_{k_1, k_2, |\varepsilon| \leq \varepsilon_0} (\text{Im}(\lambda_{k_1}(\varepsilon) + \lambda_{k_2}(\varepsilon) + \lambda_{k_3}(\varepsilon)))^2 > 0$. Тем самым существует $c_0 > 0$ с указанными в (29) свойствами. Строгое неравенство и другие комбинации k_1, k_2, k_3 рассматриваются аналогично. Для второго неравенства (29) при $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 \neq 0$ $|\lambda_{k_1}(0) + \lambda_{k_2}(0) + \lambda_{k_3}(0) + \lambda_{k_4}(0)| \geq 2\pi$. С учетом этого и согласно (18) имеем $\inf_{k_1, k_2, k_3, k_4, |\varepsilon| < \varepsilon_0} (\text{Im}(\lambda_{k_1}(\varepsilon) + \lambda_{k_2}(\varepsilon) + \lambda_{k_3}(\varepsilon) + \lambda_{k_4}(\varepsilon)))^2 \geq \pi^2$. Теорема доказана. ■

Перейдем от уравнения (6) к эквивалентной начально - краевой задаче в полосе $-1 \leq s \leq 0, t \geq 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s}, \quad (30)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial s} \Big|_{s=0} = -u(0, t) - (1 + \varepsilon_2)u(1, t) - f(u(1, t)), u(s, 0) = y_0(s) \quad (31)$$

положив $u(s, t) = y(t + s)$.

Введем в рассмотрение функцию оператор

$$u(s, z; \varepsilon) = \sum_{k=\pm 1, \pm 3, \dots} z_k e_n(s; \varepsilon) + \sum_{(n_1, k_2) \in \Omega_2} z_{k_1} z_{k_2} u_{k_1 k_2}(s; \varepsilon) + \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \Omega_3} z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} u_{k_1 k_2 k_3}(s; \varepsilon), \quad (32)$$

где $\Omega_2 = \{(k_1, k_2) : k_1, k_2 = \pm 1, \pm 3, \dots, k_1 \leq k_2\}$, $\Omega_3 = \{(k_1, k_2, k_3) : k_1, k_2, k_3 = \pm 1, \pm 3, \dots, k_1 \leq k_2 \leq k_3\}$, действующую из $s^1(r_0) \otimes \{|\varepsilon| < \varepsilon_0\}$ в $C[-1, 0]$ и гладко зависящую от своих переменных, и систему дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_k = \lambda_k(\varepsilon) z_k + \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \Omega_k^3} d_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon) z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} \quad (33)$$

в пространстве l_2 с областью определения правой части $s^1(r_0)$, гладко зависящей от ε . Функции $u_{k_1 k_2}(s; \varepsilon)$, $u_{k_1 k_2 k_3}(s; \varepsilon)$, $d_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon)$ подлежат определению.

Условие принадлежности траекторий (33) краевой задачи (30)-(31) в силу выражения (32) имеет вид:

$$\sum_{k=\pm 1, \pm 3, \dots} \frac{\partial u(s, z; \varepsilon)}{\partial z_k} (\lambda_k(\varepsilon) z_k + \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \Omega_k^3} d_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon) z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3}) = \frac{\partial u(s, z; \varepsilon)}{\partial s}, \quad (34)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u(s, z; \varepsilon)}{\partial s} \Big|_{s=0} = -u(0, z; \varepsilon) - (1 + \varepsilon_2)u(-1, z; \varepsilon) - f(u(-1, z; \varepsilon)). \quad (35)$$

Соотношения (34)-(35) определяют тождества, которые должны равномерно по $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ выполняться с точностью до величины $o(|z|_{l_2}^3)$. При первых степенях z_k они выполняются в силу определения функций $e_k(s; \varepsilon)$ и $\lambda_k(\varepsilon)$. Соотношения (34)-(35) позволяют последовательно определять функции $u_k(s; \varepsilon)$ и $d_k(\varepsilon)$, приравнявая коэффициенты справа и слева при одинаковых степенях z_k .

Приравняем коэффициенты в (34)-(35) при $z_{k_1} z_{k_2}$. В результате получим краевую задачу

$$(\lambda_{k_1}(\varepsilon) + \lambda_{k_2}(\varepsilon))u_{k_1 k_2}(s; \varepsilon) = \frac{du_{k_1 k_2}(s; \varepsilon)}{ds}, \quad (36)$$

$$\varepsilon_1 \frac{du_{k_1 k_2}(s; \varepsilon)}{ds} \Big|_{s=0} = -u_{k_1 k_2}(0; \varepsilon) - (1 + \varepsilon_2)u_{k_1 k_2}(-1; \varepsilon) - p_{k_1 k_2} b_2(\varepsilon_2) e_{k_1}(-1; \varepsilon) e_{k_2}(-1; \varepsilon) \quad (37)$$

для определения $u_{k_1 k_2}(s; \varepsilon)$. В (37) $p_{k_1 k_2} = 1$ при $k_1 = k_2$ и $p_{k_1 k_2} = 2$ при $k_1 \neq k_2$. Решение (36)-(37) определяется однозначно

$$u_{k_1 k_2}(s; \varepsilon) = -p_{k_1 k_2} b_2(\varepsilon_2) e^{(\lambda_{k_1}(\varepsilon) + \lambda_{k_2}(\varepsilon))s} / P(\lambda_{k_1}(\varepsilon) + \lambda_{k_2}(\varepsilon); \varepsilon). \quad (38)$$

Приравняем в (34)-(35) коэффициенты при $z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3}$. В результате получим краевую задачу

$$e_k(s; \varepsilon) d_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon) (\lambda_{k_1}(\varepsilon) + \lambda_{k_2}(\varepsilon) + \lambda_{k_3}(\varepsilon)) u_{k_1 k_2 k_3}(s; \varepsilon) = \frac{du_{k_1 k_2 k_3}(s; \varepsilon)}{ds}, \quad k = k_1 + k_2 + k_3 \quad (39)$$

$$\varepsilon_1 \frac{du_{k_1 k_2 k_3}(s; \varepsilon)}{ds} \Big|_{s=0} = -u_{k_1 k_2 k_3}(0; \varepsilon) - (1 + \varepsilon_2)u_{k_1 k_2 k_3}(-1; \varepsilon) - f_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon), \quad (40)$$

в которой

$$f_{k_1 k_2 k_3} = -p_{k_1 k_2 k_3} b_3(\varepsilon_2) e_{k_1}(-1; \varepsilon) e_{k_2}(-1; \varepsilon) e_{k_3}(-1; \varepsilon) - 2b_2(\varepsilon_2) * \begin{cases} e_{k_1}(-1; \varepsilon) u_{k_2 k_3}(-1; \varepsilon), \text{ если } k_1 = k_2 = k_3 \\ e_{n_j}(-1; \varepsilon) u_{n_m n_p}(-1; \varepsilon) + e_{n_m}(-1; \varepsilon) u_{n_j n_p}(-1; \varepsilon), \text{ если } n_j \neq n_m = n_p, j, m, p = 1, 2, 3, \\ e_{k_1}(-1; \varepsilon) u_{k_2 k_3}(-1; \varepsilon) + e_{k_2}(-1; \varepsilon) u_{k_1 k_2}(-1; \varepsilon) + e_{k_3}(-1; \varepsilon) u_{k_1 k_2}(-1; \varepsilon), k_1 \neq k_2 \neq k_3, \end{cases}$$

где $p_{k_1 k_2 k_3} = 1$, если $k_1 = k_2 = k_3$, $p_{k_1 k_2 k_3} = 3$, если $k_1 = k_2 \neq k_3$, либо $k_1 = k_3 \neq k_2$, либо $k_2 = k_3 \neq k_1$, $p_{k_1 k_2 k_3} = 6$, если $k_1 \neq k_2 \neq k_3$.

Общее решение уравнения (39) имеет вид

$$u_{k_1 k_2 k_3}(s; \varepsilon)(s; \varepsilon) = e^{\lambda_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon)s} (c + d_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon)(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \lambda_k(\varepsilon))(1 - e^{(\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon))s}) * (\lambda_k(\varepsilon) - \lambda_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon))^{-1}), \quad (41)$$

где использовано обозначение $\lambda_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon) = \lambda_{k_1}(\varepsilon) + \lambda_{k_2}(\varepsilon) + \lambda_{k_3}(\varepsilon)$, c — произвольная постоянная. Подставляя (41) в краевое условие (40) имеем

$$d_{k_1 k_2 k_3}(s; \varepsilon)(s; \varepsilon) = (\varepsilon_1 + (1 + \varepsilon_2)(e^{-\lambda_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon)} - e^{-\lambda_k(\varepsilon)} / (\lambda_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon)))^{-1} (1 + \varepsilon_1 + \lambda_k(\varepsilon)) * f_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon). \quad (42)$$

Условие непрерывности функции $u_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon)$ по ε при $0 \leq |\varepsilon| < |\varepsilon_0|$ дает $c = 0$, что однозначно ее определяет равенством (41).

Ниже будет показано, что "грубым", т.е. экспоненциально устойчивым (неустойчивым) периодическим решениям нормальной формы (33) в краевой задаче соответствуют периодические решения того же характера устойчивости с близким периодом. Эти решения связаны посредством оператора (32).

2.4 Анализ нормальной формы

Перейдем в в системе уравнений (33) к полярным координатам, положив $z_k = \rho_k e^{i\tau_k}$ ($\rho_k \geq 0$, $-\infty < \tau_k < \infty$). В результате получим систему уравнений вида

$$\dot{\rho}_k = \gamma_k(\varepsilon) \rho_k + R_k(\rho, \tau; \varepsilon), \quad (43)$$

$$\dot{\tau}_k = \pi_k + \sigma_k(\varepsilon) + T_k(\rho, \tau; \varepsilon), \quad k = 1, 3, \dots, \quad (44)$$

в которой $\gamma_k(\varepsilon)$ и $\sigma_k(\varepsilon)$ определены в (18), $\rho = (\rho_1, \rho_3, \dots)$, $\rho_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} n^2 \rho_k^2 < \infty$, $\tau = (\tau_1, \tau_3, \dots)$, функционалы $R_k(\cdot), T_k(\cdot)$ гладко зависящие от входящих переменных и параметров, 2π -периодические по τ_j .

Структура системы (43)-(44) позволяет ввести одну "быструю" переменную и счетное число "медленных" переменных. Как это сделать, покажем сначала на примере "усеченной" системы. Рассмотрим нормальную форму (33), в которой положим $z_k = 0$, $k = \pm 5, \pm 7, \dots$. В результате имеем систему уравнений

$$\dot{z}_1 = \lambda_1(\varepsilon)z_1 + d_{-111}(\varepsilon)z_{-1}z_1^2 + d_{-313}(\varepsilon)z_{-3}z_1z_3 + d_{-1-13}(\varepsilon)z_{-1}^2z_3, \quad (45)$$

$$\dot{z}_3 = \lambda_3(\varepsilon)z_3 + d_{-113}(\varepsilon)z_{-1}z_1z_3 + d_{-333}(\varepsilon)z_{-3}z_3^2 + d_{111}(\varepsilon)z_1^3. \quad (46)$$

Уравнения для z_{-1}, z_{-3} получаются сопряжением (45)-(46) с учетом равенств $\bar{\lambda}_k(\varepsilon) = \lambda_{-n}(\varepsilon)$, $\bar{z}_k(\varepsilon) = z_{-n}(\varepsilon)$. Обозначив $d_*(\varepsilon) = a_*(\varepsilon) + ib_*(\varepsilon)$, $A_*(\varepsilon) = |d_*(\varepsilon)|$, $\beta_*(\varepsilon) = \arg d_*(\varepsilon)$, перейдем к полярным переменным $\rho_1, \rho_3, \tau_1, \tau_3$. В результате получим систему уравнений

$$\dot{\rho}_1 = (\gamma_1(\varepsilon) + a_{-111}(\varepsilon)\rho_1^2 + a_{-313}(\varepsilon)\rho_3^2)\rho_1 + A_{-1-13}(\varepsilon) \cos(-3\tau_1 + \tau_3 + \beta_{-1-13}(\varepsilon))\rho_1^2\rho_3, \quad (47)$$

$$\dot{\rho}_3 = (\gamma_3(\varepsilon) + a_{-1-13}(\varepsilon)\rho_1^2 + a_{-333}(\varepsilon)\rho_3^2)\rho_3 + A_{111}(\varepsilon) \cos(3\tau_1 - \tau_3 + \beta_{111}(\varepsilon))\rho_1^3, \quad (48)$$

$$\dot{\tau}_1 = \pi + \sigma_1(\varepsilon) + b_{-111}(\varepsilon)\rho_1^2 + b_{-313}(\varepsilon)\rho_3^2 + A_{-1-13}(\varepsilon) \sin(-3\tau_1 + \tau_3 + \beta_{-1-13}(\varepsilon))\rho_1\rho_3, \quad (49)$$

$$\dot{\tau}_3 = 3\pi + \sigma_3(\varepsilon) + b_{-1-13}(\varepsilon)\rho_1^2 + b_{-333}(\varepsilon)\rho_3^2 + A_{111}(\varepsilon) \sin(3\tau_1 - \tau_3 + \beta_{111}(\varepsilon))\rho_1^3/\rho_3. \quad (50)$$

Перейдем в (47)-(50) к переменным $\rho_1, \rho_3, \theta_1 = -3\tau_1 + \tau_3$ и $\tau = \tau_1$. В результате получим систему уравнений

$$\dot{\rho}_1 = (\gamma_1(\varepsilon) + a_{-111}(\varepsilon)\rho_1^2 + a_{-313}(\varepsilon)\rho_3^2)\rho_1 + A_{-1-13}(\varepsilon) \cos(-3\tau_1 + \tau_3 + \beta_{-1-13}(\varepsilon))\rho_1^2\rho_3, \quad (51)$$

$$\dot{\rho}_3 = (\gamma_3(\varepsilon) + a_{-1-13}(\varepsilon)\rho_1^2 + a_{-333}(\varepsilon)\rho_3^2)\rho_3 + A_{111}(\varepsilon) \cos(3\tau_1 - \tau_3 + \beta_{111}(\varepsilon))\rho_1^3, \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 = & \delta_1(\varepsilon) + (-3b_{-111}(\varepsilon) + b_{-1-13}(\varepsilon))\rho_1^2 + (-3b_{-313}(\varepsilon) + b_{-333}(\varepsilon))\rho_3^2 - \\ & - 3A_{-1-13}(\varepsilon) \sin(\theta_1 + \beta_{-1-13}(\varepsilon))\rho_1\rho_3 + A_{111}(\varepsilon) \sin(-\theta_1 + \beta_{111}(\varepsilon))\rho_1^3/\rho_3, \end{aligned} \quad (53)$$

"медленных" переменных, где $\delta_1(\varepsilon) = -3\sigma_1(\varepsilon) + \sigma_3(\varepsilon)$, и уравнение "быстрой" переменной

$$\dot{\tau}_1 = \pi + \sigma_1(\varepsilon) + b_{-111}(\varepsilon)\rho_1^2 + b_{-313}(\varepsilon)\rho_3^2 + A_{-1-13}(\varepsilon) \sin(\theta_1 + \beta_{-1-13}(\varepsilon))\rho_1\rho_3. \quad (54)$$

Заметим, что правая часть (51)-(53) не зависит от τ .

Пусть теперь в (33) все $z_k(t) \neq 0$. Ввести переменные θ_k можно не единственным способом, однако они все связаны между собой линейными соотношениями. В качестве одного из возможных способов введение θ_k может быть предложен следующий. В качестве "быстрой" переменной берем τ_1 и рассматриваем "усеченные" конечномерные системы, последовательно полагая в (33) $z_k = 0, k = \pm 5, \pm 7, \dots$, затем $k = \pm 7, \pm 9, \dots$ и т.д. Первый случай рассмотрен выше. Во втором случае к системе (51)-(53) добавляются два новых уравнения для переменных z_5 и z_{-5} . При этом в правой части уравнения для z_1 появляется резонансный моном $z_5 z_{-3} z_{-1}$ (в уравнении для z_{-1} появляется резонансный моном $-z_5 z_{-3} z_{-1}$). При переходе к полярным координатам это приводит к появлению слагаемых, зависящих от выражения $\tau_5 - \tau_3 - 2\tau_1 = \theta_3$, которое берем в качестве новой "медленной" переменной. В результате имеем две дополнительные "медленные" переменные ρ_5, θ_3 . Система уравнений для $\rho_1, \rho_3, \rho_5, \theta_1, \theta_3$ будет иметь вид, аналогичный (51)-(53), правая часть которой также не будет зависеть от τ . В правой части уравнения (54) для τ появятся новые слагаемые. При рассмотрении следующей "усеченной" системы в правой части уравнения для z_1 появится резонансный моном $z_7 z_{-5} z_{-1}$, а при переходе к полярным координатам слагаемое, зависящее от выражения $\tau_7 - \tau_5 - 2\tau_1 = \theta_5$. Имеем две новые "медленные" переменные ρ_7, θ_5 . В общем случае на очередном шаге, добавив уравнения для z_{n_0} и z_{-n_0} , получим в уравнениях для z_1 и z_{-1} появление новых мономов $z_{n_0} z_{-n_0+2} z_{-1}$ и $z_{-n_0} z_{n_0-2} z_1$ соответственно, а при переходе к полярным координатам появятся слагаемые, зависящие от $\tau_{n_0} - \tau_{n_0-2} - 2\tau_1 = \theta_{n_0-2}$. Имеем две новые "медленные" переменные $\rho_{n_0}, \theta_{n_0-2}$. Продолжая этот процесс осуществим переход к "медленным" переменным $\rho = (\rho_1, \rho_3, \dots), \theta = (\theta_1, \theta_3, \dots)$ и "быстрой" τ , а соответствующая система дифференциальных уравнений для их определения будет иметь вид

$$\dot{\rho}_n = \gamma_k(\varepsilon)\rho_k + R_k(\rho, \theta; \varepsilon), \quad (55)$$

$$\dot{\theta}_n = \delta_k(\varepsilon) + \Theta_k(\rho, \theta; \varepsilon), \quad k = 1, 3, \dots, \quad (56)$$

$$\dot{\tau} = \pi + \sigma_1(\varepsilon) + T(\rho, \theta; \varepsilon), \quad (57)$$

в которой функционалы $R_k(\cdot), \Theta_k(\cdot), T(\cdot) - 2\pi$ -периодические по θ_k , остальные их свойства и функции $\delta_k(\varepsilon) (\delta_k(0) = 0)$ определяются свойствами функций и функ-

ционалов, входящих в (43)-(44). Особо отметим, что правая часть (57) не зависит от переменной τ .

Фазовым пространством системы уравнений (55)-(57) будет произведение пространств $l_2 \otimes c \times R$, здесь $l_2 = \{\rho = (\rho_1, \rho_3, \dots), \rho_k \geq 0, \|\rho\|_{l_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k^2 < \infty\}$, $c = \{\theta = (\theta_1, \theta_3, \dots), \|\theta\|_c = \sup_n |\theta_k| < \infty\}$. Областью определения правой части (55)-(57) является произведение пространств $l_2^1 \otimes c_0 \times R$, здесь $l_2^1 = \{\rho \in l_2, \|\rho\|_{l_2^1}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} n^2 \rho_k^2 < \infty\}$, $c_0 = \{\theta = (\theta_1, \theta_3, \dots) \in c, 0 \leq \theta_k < 2\pi\}$.

Введем в области $\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \varepsilon_1 > 0, |\varepsilon| < \varepsilon_0\}$ переменные $\zeta \geq 0$ и $\pi/2 < \psi < \pi/2$, положив

$$\zeta = (\varepsilon_1^2 + |\varepsilon_2|)^{1/2}, \varepsilon_1 = \zeta \cos \psi, \varepsilon_2 = \zeta^2 \sin \psi^2 \operatorname{sign} \psi \quad (58)$$

Подставим (58) в (55)-(57), нормировав также $\rho_k \rightarrow \zeta \rho_k$. В результате получим систему уравнений

$$\dot{\rho}_n = \gamma_k(\psi, \zeta) \rho_k + \zeta^2 R_k(\rho, \theta; \psi, \zeta); \quad (59)$$

$$\dot{\theta}_n = \delta_k(\psi, \zeta) + \zeta^2 \Theta_k(\rho, \theta; \psi, \zeta), \quad k = 1, 3, \dots, \quad (60)$$

$$\dot{\tau} = \pi + \sigma_1(\psi; \zeta) + \zeta^2 T(\rho, \theta; \psi, \zeta), \quad (61)$$

в которой свойства функций и функционалов определяются свойствами функций и функционалов системы (55)-(57).

Отметим, что в виду того, что согласно (18), (59) равномерно относительно n $\gamma(\psi, \zeta) = O(\zeta^2)$, $\delta_k(\psi, \zeta) = O(\zeta^3)$, уравнения (59), (60) оправдывают название уравнений "медленных" переменных, а (61) - уравнения "быстрой" переменной.

Рассмотрим главную часть системы уравнений "медленных" переменных (59)-(60), предварительно нормировав время $t \rightarrow t/\zeta^2$. В результате имеем

$$\dot{\rho}_n = \gamma_k^*(\psi, \zeta) \rho_k + R_k(\rho, \theta; \psi, \zeta); \quad (62)$$

$$\dot{\theta}_n = \delta_k^*(\psi, \zeta) + \Theta_k(\rho, \theta; \psi, \zeta), \quad k = 1, 3, \dots, \quad (63)$$

где $\gamma_k^*(\psi, \zeta) = \gamma_k(\psi, \zeta)/\zeta^2$, $\delta_k^*(\psi, \zeta) = \delta_k(\psi, \zeta)/\zeta^2$ согласно (17)-(18) непрерывные функции $\pi/2 \leq \psi \leq -\pi/2, 0 \leq \zeta \leq \zeta_0$. При этом

$$\gamma_k^*(\psi; 0) = \gamma_k(\psi) = \sin^2 \psi \operatorname{sign} \psi - \pi^2 n^2 \cos^2 \psi / 2, \quad \delta_k^*(\psi; 0) = 0. \quad (64)$$

Рассмотрим в $l_2 \otimes c$ систему нелинейных уравнений

$$\gamma_k^*(\psi) \rho_k + R_k(\rho, \theta) = 0 \quad (R_k(\rho, \theta) \equiv R_k(\rho, \theta; \psi, 0) = 0), \quad (65)$$

$$\Theta_k(\rho, \theta) = 0 \quad (\Theta_k(\rho, \theta) \equiv \Theta_k(\rho, \theta; \psi, 0) = 0), \quad k = 1, \dots, 3, \quad (66)$$

считая $(\rho, \theta) \in E_0^1 = l_2^1 \otimes c_0$. В (65) оператор $\gamma(\psi)\rho = (\gamma_1(\psi)\rho_1, \gamma_3(\psi)\rho_3, \dots)$ рассматривается на основании (64) симметрично расширенным на l_2^1 .

Пусть $(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)) \in l_2^1 \otimes_0$ решение системы уравнений (65)-(66).

Введем в рассмотрение бесконечную матрицу

$$B(\psi) = \begin{pmatrix} \gamma_k(\psi)\delta_{nj} + \partial R_k / \partial \rho_j & \partial R_k / \partial \theta_j \\ \partial \Theta_k / \partial \rho_j & \partial \Theta_k / \partial \theta_j \end{pmatrix} \quad (n, j = 1, 3, \dots), \quad (67)$$

вычисленную в точке $\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)$, где δ_{nj} символ Кронекера. Матрица определяет линейный оператор

$$B(\psi)v \quad (v = (\rho, \theta)) : E^1 = l_2^1 \otimes c \rightarrow E = l_2 \otimes c, \quad (68)$$

$$\|v\|_E = \|\rho\|_{l_2} + \|\theta\|_c, \quad \|v\|_{E^1} = \|\rho\|_{l_2^1} + \|\theta\|_c.$$

Пусть $\mu_k(\psi)$ ($B(\psi)v_k(\psi) = \mu_k(\psi)v_k(\psi)$) собственное значение оператора (68). Покажем, что оператор (68) имеет счетное число собственных значений $\mu_k(\psi)$, которые могут быть пронумерованы в порядке возрастания их модулей, и любой ограниченной области комплексной плоскости может принадлежать лишь конечное число собственных значений конечной кратности. Предельной может быть лишь точка бесконечность, при этом $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Re} \mu_k(\psi) = -\infty$.

Действительно, заметим, что функции

$$\begin{aligned} z_1(t; \psi, \zeta) &= \zeta z_1^*(\tau; \psi) = \zeta \rho_1^*(\psi) e^{i\tau}, \quad z_3(t; \psi, \zeta) = \zeta z_3^*(\tau; \psi) = \zeta \rho_3^*(\psi) e^{i(3\tau + \theta_1^*(\psi))}, \\ z_5(t; \psi, \zeta) &= \zeta z_5^*(\tau; \psi) = \zeta \rho_5^*(\psi) e^{i(5\tau + \theta_1^*(\psi) + \theta_3^*(\psi))}, \dots, \quad z_{-n}(t; \psi, \zeta) = \bar{z}_n(t; \psi, \zeta), \quad k = 1, 3, \dots, \\ &\quad \dot{\tau} = \pi(1 - \zeta \cos \psi) \quad (69) \end{aligned}$$

определяют периодические решения следующей системы дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_k = (i\pi n(1 - \zeta \cos \psi) + \zeta^2 \gamma_k(\psi)) z_k - p_{k_1 k_2 k_3} \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \Omega_3^k} z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3}, \quad k = \pm 1, \pm 3, \dots, \quad (70)$$

в чем легко убедиться непосредственной подстановкой (69) в (70), с учетом выполненных для $\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)$ замен и равенств (65), (66). Система уравнений (70) является

абстрактно параболической в комплексном пространстве l_2 с областью определения l_2^1 . Для таких уравнений оператор монодромии, построенный для периодического решения (69), является вполне непрерывным оператором, содержащим счетное число собственных значений (мультипликаторов) $\nu_j(\psi)$, $\lim_{j \rightarrow \infty} |\nu_j(\psi)| = 0$, $\nu_j(\psi) = e^{\mu_j(\psi)}$. Оператор (68) определяет характеристические показатели периодического решения (69). Отсюда следует все перечисленное.

Рассмотрим теперь систему уравнений (59)-(60), которую запишем в операторной форме

$$\frac{d\rho}{dt} = \zeta^2(\gamma(\psi, \zeta)\rho + R(\rho, \theta; \psi, \zeta)), \quad (71)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \zeta^2(\delta(\psi, \zeta)\rho + \Theta(\rho, \theta; \psi, \zeta)) \quad (72)$$

в пространстве E , где функция $\delta(\psi, \zeta) = (\delta_1^*(\psi, \zeta), \delta_{-1}^*(\psi, \zeta))$, операторы $\gamma(\psi, \zeta)\rho = (\gamma_1^*(\psi, \zeta)\rho_1, \gamma_{-1}^*(\psi, \zeta)\rho_{-1}, \dots)$, $R(\rho, \theta; \psi, \zeta) = (R_1(\rho, \theta; \psi, \zeta), R_{-1}(\rho, \theta; \psi, \zeta), \dots)$, $\Theta(\rho, \theta; \psi, \zeta) = (\Theta_1(\rho, \theta; \psi, \zeta), \Theta_{-1}(\rho, \theta; \psi, \zeta), \dots)$. Областью определения правой части (71)-(72) является пространство $E_0^1 = l_2^1 \otimes c_0$.

Рассмотрим в E систему нелинейных операторных уравнений

$$\gamma(\psi, \zeta)\rho + R(\rho, \theta; \psi, \zeta) = 0, \quad (73)$$

$$\delta(\psi, \zeta)\rho + \Theta(\rho, \theta; \psi, \zeta) = 0 \quad (74)$$

с областью определения E_0^1 . При $\zeta = 0$ (73)-(74) имеет решение $\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)$. Предположим, что построенная по этому решению матрица (67) определяет оператор (68), который не имеет собственных значений, лежащих на мнимой оси комплексной плоскости, т.е. выполнено условие $\|Re\mu_k(\psi)\| > \mu_0 > 0$. Следовательно, по теореме о неявной функции для операторных уравнений в банаховых пространствах (см, например, [35]) существует такое $\zeta_0 > 0$, что при $0 \leq \zeta < \zeta_0$ система уравнений (73)-(74) имеет решение $\rho^*(\psi, \zeta), \theta^*(\psi, \zeta)$ ($\rho^*(\psi, 0) = \rho^*(\psi), \theta^*(\psi, 0) = \theta^*(\psi)$), гладко зависящее от параметра ζ .

Линеаризуем (73)-(74) на решении $\rho^*(\psi, \zeta), \theta^*(\psi, \zeta)$. В результате получим бесконечную матрицу аналогичную матрице (67) и обращающуюся в нее при $\zeta = 0$, которая определяет линейный оператор

$$B(\psi, \zeta)v \ (v = (\rho, \theta), B(\psi, 0) = B(\psi)) : E^1 \rightarrow E. \quad (75)$$

Отметим, что собственные значения $\mu_j(\psi, \zeta)$ ($\mu_j(\psi, 0) = \mu_j(\psi)$) оператора (75) при $0 \leq \zeta \leq \zeta_0$ удовлетворяют условию $|\operatorname{Re} \mu_j| > \mu_0 > 0$.

Подставим $\rho^*(\psi, \zeta), \theta^*(\psi, \zeta)$ в правую часть уравнения (61). В результате имеем

$$\dot{\tau} = \pi + \sigma_1(\psi, \zeta) + \zeta^2 T_1(\rho^*(\psi, \zeta), \theta^*(\psi, \zeta); \psi, \zeta) = \pi + \sigma_1(\psi, \zeta) + \zeta^2 \Delta_2(\psi, \zeta) = \pi + \sigma(\psi, \zeta),$$

$$(\sigma(\psi, \zeta) \equiv 0). \quad (76)$$

Положим

$$z_1^*(t; \psi, \zeta) = \rho_1^*(\psi, \zeta) e^{i\tau}, z_3^*(t; \psi, \zeta) = \rho_3^*(\psi, \zeta) e^{i(3\tau + \theta_1^*(\psi))}, z_5^*(t; \psi, \zeta) = \rho_5^*(\psi, \zeta) * e^{i(5\tau + \theta_1^*(\psi) + \theta_3^*(\psi))}, z_{-n}^*(t; \psi, \zeta) = \bar{z}_k^*(t; \psi, \zeta), k = 1, 3, \dots, \quad (77)$$

Теорема 11. Пусть при некотором ψ система уравнений (62)-(63) имеет решение $(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)) \in E_0^1$, а построенная по этому решению матрица (67) определяет оператор (68), который не имеет собственных значений лежащих на мнимой комплексной плоскости. Тогда существует такое $\zeta_0 > 0$, что при $0 < \zeta \leq \zeta_0$ краевая задача (30)-(31), в которой ε_1 и ε_2 определены согласно (58) имеет периодическое решение $u^*(s, \tau; \psi, \zeta)$, допускающее представление

$$u^*(s, \tau; \psi, \zeta) = u_0^*(s, \tau; \psi, \zeta) + O(\zeta^4) =$$

$$= \zeta \sum_{k=\pm 1, \pm 3} e_k(s; \psi, \zeta) z_k^*(\tau; \psi, \zeta) + \zeta^2 \sum_{(k_1, k_2) \in \Omega_2} u_{k_1 k_2}(s; \psi, \zeta) z_{k_1}^*(\tau; \psi, \zeta) z_{k_2}^*(\tau; \psi, \zeta) +$$

$$+ \zeta^3 \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \Omega_3} u_{k_1 k_2 k_3}(s; \psi, \zeta) z_{k_1}^*(\tau; \psi, \zeta) z_{k_2}^*(\tau; \psi, \zeta) z_{k_3}^*(\tau; \psi, \zeta) + O(\zeta^4), \quad (78)$$

в котором Ω_2, Ω_3 определены в (32), функции $e_k(\cdot), u_{k_1 k_2}(\cdot), u_{k_1 k_2 k_3}(\cdot)$ определены согласно (22), (36), (41) с учетом замены (58), переменная τ определяется в соответствии с (76), функции $z_k^*(\cdot)$ определены в (77).

Доказательство. Решение системы уравнений (33) в силу (17)-(18) обладают свойствами нарастающей гладкости. В связи с этим функции (77) с учетом (76), являясь периодическими решениями системы уравнений (33), будут бесконечно дифференцируемыми по τ . Отсюда следует, что функция $u_0^*(s, \tau; \psi, \zeta)$ будет также бесконечно дифференцируемой по τ , непрерывно дифференцируемой по s и достаточно гладко зависящей от ψ и ζ . Обозначим $\bar{\Omega} = \{(s, \tau) : -1 \leq s \leq 0, -\infty < \tau < \infty\}$. Введем

в рассмотрение пространство $C^{1\infty}(\bar{\Omega})$ вещественных функций $g(s, \tau) \equiv g(s, \tau + 2\pi)$, определенных в $\bar{\Omega}$, непрерывно дифференцируемых по s и бесконечно дифференцируемых по τ . Норму в $C^{1\infty}(\bar{\Omega})$ определим

$$\|g(s, \tau)\|_{C^{1\infty}} = \sup_{(s, \tau) \in \bar{\Omega}, k=0,1,\dots} \left\| \frac{\partial^k g(s, \tau)}{\partial^k \tau} \right\| + \sup_{(s, \tau) \in \bar{\Omega}, k=1,2,\dots} \left\| \frac{\partial^k g(s, \tau)}{\partial s \partial^{k-1} \tau} \right\|$$

Введем в рассмотрение также пространство $C^\infty(R)$ вещественных бесконечно дифференцируемых функций $q(\tau) \equiv q(\tau + 2\pi)$ ($-\infty < \tau < \infty$), определив норму $\|q(\tau)\|_{C^\infty(R)} = \sup_{\tau, k=0,1,\dots} |\partial^k q(\tau)/\partial \tau^k|$. Пространства $C^{1\infty}(\bar{\Omega}), C^\infty(R)$ являются банаховыми пространствами.

Рассмотрим в области $\bar{\Omega}$ краевую задачу

$$g(s, \tau) + i(\pi + \sigma(\psi; \zeta))u_\tau = u_s \quad (79)$$

$$u(0, \tau) + u(-1, \tau) = q(s) \quad (80)$$

в которой $g(s, \tau) \in C^{1\infty}(\bar{\Omega}), q(\tau) \in C^\infty(R)$, и выявим условия существования 2π -периодического решения $u_*(s, \tau; \psi, \zeta)$, непрерывно зависящего от $0 \leq \zeta \leq \zeta_0$.

Представим в виде равномерно сходящихся рядов

$$g(s, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(s) e^{in\tau}, \quad g_n(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(s, \tau_1) e^{in\tau_1} d\tau_1,$$

$$q(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n e^{in\tau}, \quad q_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\tau_1) e^{in\tau_1} d\tau_1.$$

Определяя 2π -периодическое решение (79)-(80) в виде ряда

$$u_*(s, \tau; \psi, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(s; \psi, \zeta) e^{in\tau}, \quad (81)$$

рассмотрим отдельно случай $n = 2k, k = 0, \pm 1, \dots$, и случай $n = 2k + 1, k = 0, \pm 1, \dots$.

В случае $n = 2k$ для определения $u_{2k}(s; \psi, \zeta)$ имеем краевую задачу

$$g_{2k}(s) + i2k(\pi + \sigma(\psi; \zeta))u_{2k} = \frac{du_{2k}}{ds}$$

$$u_{2k}(0) + u_{2k}(-1) = q_{2k},$$

из которых однозначно находим

$$u_{2k}(s, \tau; \psi, \zeta) = e^{i2k(\pi + \sigma(\psi, \zeta))s} (c_{2k} + \int_0^s e^{-i2k(\pi + \sigma(\psi, \zeta))s_1} g_{2k}(s_1) ds_1), \quad (82)$$

где

$$c_{2k} = (1 + e^{-i2k\sigma(\psi, \zeta)})^{-1} (q_{2k} + e^{-i2k\sigma(\psi, \zeta)} \int_{-1}^0 e^{-2ki(\pi + \sigma(\psi, \zeta))s_1} g_{2k}(s_1) ds_1).$$

Рассмотрим теперь случай $n = 2k + 1$. Здесь краевая задача для определения $u_{2k}(s; \psi, \zeta)$ будет иметь вид

$$g_{2k+1}(s) + i(2k + 1)(\pi + \sigma(\psi, \zeta))u_{2k+1} = \frac{du_{2k+1}}{ds} \quad (83)$$

$$u_{2k+1}(0) + u_{2k+1}(-1) = q_{2k+1}, k = 0, \pm 1, \dots \quad (84)$$

Подставив общее решение уравнения (83)

$$u_{2k+1}(s; \psi, \zeta) = e^{i(2k+1)(\pi + \sigma(\psi, \zeta))s} (c_{2k+1} + \int_0^s e^{-i(2k+1)(\pi + \sigma(\psi, \zeta))s_1} g_{2k+1}(s_1) ds_1) \quad (85)$$

в краевое условие (84), получим для определения c_{2k+1} следующее уравнение:

$$c_{2k+1}(1 - e^{-i(2k+1)\sigma(\psi, \zeta)}) = q_{2k+1} - e^{-i(2k+1)\sigma(\psi, \zeta)} \int_{-1}^0 e^{-i(2k+1)(\pi + \sigma(\psi, \zeta))s_1} q_{2k+1}(s_1) ds_1. \quad (86)$$

Так как коэффициент при c_{2k+1} обращается в нуль при $\zeta = 0$, уравнение (86) в общем случае не имеет непрерывного по ζ при $0 \leq \zeta \leq \zeta_0$ решения. Потребуем, чтобы правая часть уравнения (86) обращалась в нуль при $\zeta = 0$, т.е

$$q_{2k+1} - \int_{-1}^0 e^{-i(2k+1)\pi s_1} g_{2k+1}(s_1) ds_1 = 0. \quad (87)$$

При выполнении (87) уравнение (86) можно записать в виде

$$c_{2k+1}(1 + O(\sigma(\psi, \zeta))) = \int_{-1}^0 e^{-i(2k+1)\pi s_1} (1 + s_1) g_{2k+1}(s_1) ds_1 + O(\sigma(\psi, \zeta)).$$

Отсюда $c_{2k+1} = c_{2k+1}(\psi, \zeta)$ однозначно определяется. Подставив это выражение в (84), имеем решение $u_{2k+1}(s; \psi, \zeta)$.

Таким образом, при выполнении условий (87) для $k = 0, \pm 1, \dots$, краевая задача (79)-(80) имеет единственное периодическое решение, определяемое рядом (81). На основании свойств $g_n(s)$ и q_n и вида функций $u_n(s; \psi, \zeta)$, определяемых (82), (85), периодическое решение (81) $u_*(s, \tau; \psi, \zeta) \in C^{1\infty}(\bar{\Omega})$.

Линейное подпространство функций $(g(s, \tau), q(\tau)) \in C^{1\infty}(\bar{\Omega}) \oplus C^\infty(R)$ удовлетворяющих условиям (87) при $k = 0, \pm 1, \dots$, обозначим $C_0^{1\infty}(\bar{\Omega}) \oplus C_0^\infty(R)$. Формула (81) с учетом (82), (85) определяет линейный ограниченный оператор

$$\begin{aligned} \Phi : C_0^{1\infty} \oplus C_0^\infty(R) &\rightarrow C^{1\infty}(\Omega), \Phi(g, q; \psi, \zeta) = u, (\Phi(0, 0; \psi, \zeta) \equiv 0), \|u\|_{C^{1\infty}(\bar{\Omega})} \leq \\ &\leq K(\|g\|_{C^{1\infty}(\bar{\Omega})} + \|q\|_{C^\infty(R)})(K > 0), \end{aligned} \quad (88)$$

гладко зависящий от ψ и ζ .

Если подставить функцию $u_0^*(s, \tau; \psi, \zeta)$ в краевую задачу (30)-(31) с учетом (58), то коэффициенты при ζ, ζ^2, ζ^3 в левой и правой частях равенств взаимно сократятся. С учетом этого положим

$$\dot{\tau} = \pi + \sigma(\psi, \zeta) + \zeta^4 \Delta_4 \quad (89)$$

и заменим в (77)

$$\rho_k^*(\psi, \zeta) \rightarrow \rho_k^*(\psi, \zeta) + \zeta^2 \tilde{\rho}_k, \theta_k^*(\psi, \zeta) \rightarrow \theta_k^*(\psi, \zeta) + \zeta^2 \tilde{\theta}_k, \quad k = 1, 3, \dots, \quad (90)$$

где Δ_4 и $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_3, \dots), \tilde{\theta} = (\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_3, \dots)$ подлежащие определению функции.

Представим (78) с учетом (89), (90) в виде

$$u^*(s, \tau, \tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \psi, \zeta) = u_0^*(s, \tau, \tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \psi, \zeta) + \zeta^4 w(s, \tau),$$

где ρ, θ и w искомые функции, и подставим в краевую задачу (30)-(31) с учетом (58), (89). В результате, учитывая аналитичность функции $f(\cdot)$, получим следующую краевую задачу:

$$g(s, \tau, \tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \Delta_4; \psi, \zeta) + \zeta^4 \Delta_4 w_\tau(s, \tau) + i(\pi + \sigma(\psi, \zeta))w_\tau = w_s, \quad (91)$$

$$w(0, \tau) + w(-1, \tau) = q(\tau, \tilde{\rho}, \tilde{\theta}, w(-1, \tau); \psi, \zeta) \quad (92)$$

для определения $w(s, \tau) \in C^{1\infty}(\bar{\Omega})$. В (91)-(92) функции(функционалы) $g(\cdot) \in C^{1\infty}(\bar{\Omega})$, $q(\cdot) \in C^1(R)$. Условия разрешимости (87) краевой задачи (91)-(92) дают следующую последовательность функциональных уравнений

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} (q(\tau, \tilde{\rho}, \tilde{\theta}, w(-1, \tau); \psi, \zeta) + \int_{-1}^0 e^{-i(2k+1)\pi s} (i(2k+1)\pi \zeta^4 \Delta_4 w(s, \tau) - \\ & - g(s, \tau, \tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \Delta_4; \psi, \zeta)) ds) e^{-i(2k+1)\pi \tau} d\tau \equiv a_{2k+1}(\tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \Delta_4, w; \psi, \zeta) + \\ & + ib_{2k+1}(\tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \Delta_4, w; \psi, \zeta) = 0 (a_{2k+1}(0, 0, 0, 0; \psi, 0) + ib_{2k+1}(0, 0, 0, 0; \psi, 0) \equiv 0), \\ & k = 0, \pm 1, \dots, \quad (93) \end{aligned}$$

которую запишем в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} & a_{2k+1}(\tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \Delta_4, w; \psi, \zeta) = 0, \tilde{b}_{2k-1}(\tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \Delta_4, w; \psi, \zeta) \equiv \\ & \equiv b_{2k+1}(\tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \Delta_4, w; \psi, \zeta) - b_{2k-1}(\tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \Delta_4, w; \psi, \zeta) - 2b_1(\tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \Delta_4, w; \psi, \zeta) = 0, \quad k = 1, 3, \dots, \\ & b_1(\tilde{\rho}, \tilde{\theta}, \Delta_4, w; \psi, \zeta) = 0 \quad (b_1(0, 0, \Delta_4, 0; \psi, \zeta) = \rho_1^*(\psi, \zeta) \Delta_4). \quad (94) \end{aligned}$$

Отметим, что бесконечная матрица

$$\begin{pmatrix} \partial a_k / \partial \rho_j & \partial a_k / \partial \theta_j \\ \partial \tilde{b}_k / \partial \rho_j & \partial \tilde{b}_k / \partial \theta_j \end{pmatrix} (k, j = 1, 3, \dots), \quad (95)$$

вычисленная в точке $\tilde{\rho} = 0, \tilde{\theta} = 0, \Delta = 0, w = 0$ совпадает с матрицей $B(\psi; \zeta)$, вычисленной по системе уравнений (73)- (74) в точке $\rho^*(\psi, \zeta), \theta^*(\psi, \zeta)$. Это следует из приведенного выше замечания и того обстоятельства, что матрица $B(\psi; \zeta)$ и (95) получены в результате "малого шевеления" величин $\rho_k^*(\psi; \zeta)$ и $\theta_k^*(\psi; \zeta)$.

Из уравнения (94) в силу сделанных предположений относительно свойств оператора (75), определяемого матрицей (95) по теореме о неявной функции для операторных уравнений [50] находим функционалы

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_k &= \rho_k(w; \psi, \zeta), \tilde{\theta}_k = \theta_k(w; \psi, \zeta), \tilde{\Delta}_4 = \Delta_4(w; \psi, \zeta) \\ &(\tilde{\rho}_k(0; \psi, \zeta) = \tilde{\theta}_k(0; \psi, \zeta) = \Delta_4(0; \psi, \zeta) = 0). \end{aligned} \quad (96)$$

Подставив теперь (96) в (91)- (92) с учетом ограниченности оператора дифференцирования $w_\tau(s, \tau)$ в пространстве $C^{1\infty}(\bar{\Omega})$ сведем задачу нахождения периодического решения краевой задачи (91)-(92) на основании (88) к разрешимости операторного уравнения

$$\begin{aligned} w &= \Phi(g(s, \tau, \tilde{\rho}(w; \psi, \zeta), \tilde{\theta}(w; \psi, \zeta), \Delta_4(w; \psi, \zeta); \psi, \zeta) + \zeta^4 \Delta_4(w; \psi, \zeta) w_\tau(s, \tau); \\ &q(s, \tau, \tilde{\rho}(w; \psi, \zeta), \tilde{\theta}(w; \psi, \zeta), w(-1, \tau; \psi, \zeta); \psi, \zeta) \end{aligned} \quad (97)$$

в пространстве $C^{1\infty}(\bar{\Omega})$. Осталось применить к уравнению (97) теорему о неявной функции [50]. Правая часть (97) позволяет это сделать. В результате имеем решение $w^*(s, \tau; \psi, \zeta) \in C^{1\infty}(\bar{\Omega})$. \square

Решение (78) будет асимптотически орбитально устойчиво, если все собственные значения оператора (68) лежат в левой комплексной полуплоскости, и неустойчиво, если m корней с учетом кратностей принадлежат правой комплексной полуплоскости. В последнем случае периодическое решение (78) имеет m - мерное неустойчивое инвариантное многообразие.

2.5 Алгоритм построения периодических решений уравнения

Теорема 11 позволяет построить алгоритм нахождения периодических решений краевой задачи (30)-(31)(уравнения (6)), бифурцирующих из нулевого состояния равновесия при изменении параметра ε .

Периодические решения краевой задачи (30)-(31) с учетом (58) будем строить в виде ряда

$$u^*(s, \tau; \psi, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta^j u_j(s, \tau, \rho, \theta, \Delta; \psi, \zeta), \quad (98)$$

в котором $u_j(\cdot)$ гладко зависящие от своих переменных функционалы $\rho \in l_2^1, \theta \in c_0, 2\pi$ - периодические по τ при $-1 \leq s \leq 0, \Delta \in R, -\pi/2 < \psi < \pi/2, 0 < \zeta \leq \zeta_0$.

При этом

$$\begin{aligned} \rho &= \rho^* + \zeta^2 \rho_2^* + \zeta^4 \rho_4^* + \dots = (\rho_1, \rho_2, \dots), \rho_j > 0, \rho_j = \rho_j(\psi, \zeta) = \\ &= \rho_j^*(\psi, \zeta) + \zeta^2 \rho_{j2}^*(\psi, \zeta) + \zeta^4 \rho_{j4}^*(\psi, \zeta) + \dots, \theta = \theta^* + \zeta^2 \theta_2^* + \zeta^4 \theta_4^* + \dots = (\theta_1, \theta_2, \dots), \\ \theta_j &= \theta_j(\psi, \zeta) = \theta_j^*(\psi, \zeta) + \zeta^2 \theta_{j2}^*(\psi, \zeta) + \zeta^4 \theta_{j4}^*(\psi, \zeta) + \dots, \\ \Delta &= \Delta(\psi; \zeta) = \Delta_2(\psi; \zeta) + \zeta^4 \Delta_4(\psi; \zeta) + \dots, \end{aligned} \quad (99)$$

при этом $\rho_k^*(\psi; \zeta), \theta_k^*(\psi; \zeta), \Delta_k^*(\psi; \zeta)$ гладкие по ψ и ζ функции,

$$\begin{aligned} u_1(\cdot) \equiv u_1(s, \tau, \rho, \theta; \psi, \zeta) &= \sum_{k=1,3,\dots} \rho_k(\psi, \zeta) [e_k(s; \psi, \zeta) e^{i(\tau + \theta_k^y(\psi; \zeta))} + \\ &e_{-n}(s; \psi, \zeta) e^{-i(\tau + \theta_k^y(\psi; \zeta))}], \theta_k^y(\psi, \zeta) = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_j(\psi, \zeta), \theta_0(\psi, \zeta) \equiv 0. \end{aligned} \quad (100)$$

Подставим ряд (98) в краевую задачу (30)-(31) с учетом представления (58)

$$\dot{\tau} = \pi + \sigma_1(\psi, \zeta) + \zeta^2 \Delta(\psi, \zeta) \quad (101)$$

получим краевую задачу

$$\frac{\partial u^*(\cdot)}{\partial \tau} (\pi + \sigma_1(\psi, \zeta) + \zeta^2 \Delta(\psi, \zeta)) = \frac{\partial u^*(\cdot)}{\partial s} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} \zeta \cos \psi \frac{\partial u^*(\cdot)}{\partial \tau} \Big|_{s=0} &= -u^*(-1, \tau; \psi, \zeta) - (1 + \zeta^2 \sin^2 \psi \operatorname{sign} \psi) u^*(-1, \tau; \psi, \zeta) - \\ &- f(u^*(-1, \tau; \psi, \zeta)) \end{aligned} \quad (103)$$

для определения функций, входящих в (98)-(100).

Приравняем в равенствах (102)-(103) слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях ζ , учтя при этом представления $\gamma_k(\psi, \zeta) = \zeta^2 \gamma_k^*(\psi, \zeta)$, $\sigma_k(\psi, \zeta) = \pi n(-\zeta \cos \psi + \zeta^2 \cos^2 \psi) + \zeta^3 \sigma_k^*(\psi, \zeta)$, где $\gamma_k^*(\psi, \zeta)$ определены в (62) $\sigma_k^*(\psi, \zeta)$ гладкие по ψ, ζ функции, равномерно ограниченные по n .

При первой степени ζ равенства будут выполнены в силу выбора $e_k(s; \psi, \zeta)$ и представления (101) при произвольных ρ, θ . Приравняв в (102)-(103) коэффициенты при ζ^2 , получим краевую задачу для определения $u_2(\cdot)$

$$u_{2\tau}\pi = u_{2s}, \quad (104)$$

$$u_2(0, \tau; \cdot) + u_2(-1, \tau; \cdot) = q_2(\tau; \rho^*, \theta^*; \psi, \zeta), \quad (105)$$

в которой функционал $q_2(\tau; \rho^*, \theta^*; \psi, \zeta)$, 2π - периодичен по τ и содержит лишь четные гармоники, зависит от ρ^*, θ^* как от параметров. Краевая задача согласно п. 2.4 в этом случае имеет единственное периодическое решение $u_2^*(s, \tau; \rho^*, \theta^*, \psi, \zeta)$, определяемое формулами (81)- (82).

Приравняем теперь в (102)-(103) коэффициенты при ζ^3 . В результате получим краевую задачу

$$g_3(s, \tau, \rho^*, \theta^*; \psi, \zeta) + u_{3\tau}\pi = u_{3s}, \quad (106)$$

$$u_3(0, \tau; \cdot) + u_3(-1, \tau; \cdot) = q_3(\tau, \rho^*, \theta^*; \psi, \zeta), \quad (107)$$

для определения $u_3^*(s, \tau; \rho^*, \theta^*, \psi, \zeta)$. В ней функционалы $g_3(\cdot)$, $q_3(\cdot)$ 2π - периодические по τ и содержат лишь нечетные гармоники. В этом случае краевая задача (106)-(107) разрешена при выполнении условий (87), которые в рассматриваемом случае запишутся в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} (q_3(\tau, \rho^*, \theta^*; \psi, \zeta) - \int_{-1}^0 e^{-ik\pi s} g_3(s, \tau, \rho^*, \theta^*; \psi, \zeta) ds) e^{-ik\pi\tau} d\tau \equiv \\ & \equiv a_k(\rho^*, \theta^*; \psi, \zeta) + i(\rho_k^* k \Delta_2 + b_k(\rho^*, \theta^*; \psi, \zeta)) = 0, k = 1, 3, \dots \end{aligned} \quad (108)$$

С учетом структуры функции (100) и вида (101), имеем равенства взамен (108)

$$a_k(\rho^*, \theta^*; \psi, \zeta) \equiv \gamma_k^*(\psi; \zeta) \rho_k^* + R_k(\rho^*, \theta^*; \psi, \zeta) = 0 \quad (109)$$

$$\begin{aligned} & b_k(\rho^*, \theta^*; \psi, \zeta) / \rho_k^* - b_{k-2}(\rho^*, \theta^*; \psi, \zeta) / \rho_{k-2}^* - 2b_1(\rho^*, \theta^*; \psi, \zeta) / \rho_1^* \equiv \delta_k^*(\psi, \zeta) + \\ & + \Theta_k(\rho^*, \theta^*; \psi, \zeta) = 0, \end{aligned} \quad (110)$$

правые части которых определены в (71)- (72), и уравнение

$$\rho_1^* \Delta_2 + b_1(\rho^*, \theta^*; \psi, \zeta) = 0, \quad (111)$$

соответственно для определения $\rho^*, \theta^*, \Delta_2$.

Таким образом, на основании (109)- (110) для определения $\rho_k^*(\psi, \zeta), \theta_k^*(\psi, \zeta)$ имеем систему операторных уравнений (73)- (74). Найдя ее решение из уравнения (108) $\Delta_2 = \Delta_2(\psi, \zeta)$ определяется однозначно.

Это позволяет однозначно определить функцию $u_3^*(s, \tau; \psi, \zeta) = u_3(s, \tau, \rho^*(\psi, \zeta), \theta^*(\psi, \zeta), \Delta_2(\psi, \zeta); \psi, \zeta)$, а также функцию $u_2^*(s, \tau; \psi, \zeta) \equiv u_2(s, \tau, \rho^*(\psi, \zeta), \theta^*(\psi, \zeta); \psi, \zeta)$.

Приравняв коэффициенты при ζ^4 , получим краевую задачу, аналогичную (104)- (105). Решение этой задачи определяется однозначно. В результате получим функцию $u_4(s, \tau, \rho_2^*, \theta_2^*; \psi, \zeta)$.

Приравняем теперь в (102)- (103) коэффициенты при ζ^5 . В результате получим краевую задачу для определения $u_5(\cdot)$

$$g_5(s, \tau, \rho_2^*, \theta_2^*, \Delta_4; \psi, \zeta) + u_{5\tau} \pi = u_{5s}, \quad (112)$$

$$u_5(0, \tau; \cdot) + u_5(-1, \tau; \cdot) = q_5(\tau, \rho_2^*, \theta_2^*, \Delta_4; \psi, \zeta) \quad (113)$$

аналогичную (106)- (107). Условия разрешимости краевой задачи (112)- (113), аналогичные (108), дадут равенства

$$a_k^{(5)}(\rho_2^*, \theta_2^*; \psi, \zeta) + i(\rho_k^* n \Delta_4 + b_k^{(5)}(\rho_2^*, \theta_2^*; \psi, \zeta)) = 0, k = 1, 3, \dots, \quad (114)$$

линейно зависящие от ρ_2^*, θ_2^* .

Приравняем в (114) нулю вещественные и мнимые части. Уравнения для мнимых частей преобразуем в соответствии с равенством (110). В результате получим для определения ρ_2^*, θ_2^* бесконечную линейную неоднородную систему алгебраических уравнений с матрицей вида (67), построенной по уравнениям (109)- (110) и вычисленной в точке $\rho^*(\psi, \zeta), \theta^*(\psi, \zeta)$. Эта система может быть записана в виде операторного уравнения для пространстве E

$$B(\psi, \zeta)v_2^* = f_2^*(\psi, \zeta), v_2^* = (\rho_2^*, \theta_2^*), \quad (115)$$

где оператор $B(\psi, \zeta)$ определен в (75), а $f_2^*(\psi, \zeta) \in E$. В условиях теоремы 11 уравнение (115) имеет единственное решение $v_2^*(\psi, \zeta) \in E_0^1$. Из (114) в дополнение к (115)

имеем уравнение $\rho_1^* \Delta_4 + b_1^{(5)}(\rho_1^*, \theta_1^*; \psi, \zeta) = 0$, из которого находим $\Delta_4(\psi, \zeta)$. Это позволяет однозначно определить периодическое решение

$u_5^*(s, \tau; \psi, \zeta) \equiv u_5^*(s, \tau, \rho_2^*(\psi, \zeta), \theta_2^*(\psi, \zeta), \Delta_4^*(\psi, \zeta); \psi, \zeta)$, а также

$u_4^*(s, \tau; \psi, \zeta) \equiv u_5^*(s, \tau, \rho_2^*(\psi, \zeta), \theta_2^*(\psi, \zeta); \psi, \zeta)$.

В дальнейшем, приравнявая в (102)-(103) слева и справа коэффициенты при четных степенях ζ , будем получать для определения функций $u_{2k}(s, \tau; \rho_{2(k-1)}^*, \theta_{2(k-1)}^*, \Delta_{2k}; \psi, \zeta)$, где $\rho_{2(k-1)}^*, \theta_{2(k-1)}^*, \Delta_{2k}$ фигурируют как параметры, краевые задачи вида (104)-(105), периодическое решение которых находится однозначно. Приравнявая в (102)-(103) коэффициенты при нечетных степенях ζ , будем получать для определения функций $u_{2k+1}(s, \tau; \rho_{2(k-1)}^*, \theta_{2(k-1)}^*, \Delta_{2k}; \psi, \zeta)$ краевые задачи вида (112)-(113), условия разрешимости которых дадут уравнения вида (114)-(115). Решая эти уравнения находим $\rho_{2(k-1)}^*(\psi, \zeta) = \rho_{2(k-1)}^*, \theta_{2(k-1)}^*(\psi, \zeta) = \theta_{2(k-1)}^*, \Delta_{2k}^*(\psi, \zeta) = \Delta_{2k}^*$ и искомые функции $u_{2k}^*(s, \tau; \psi, \zeta), u_{2k+1}^*(s, \tau; \psi, \zeta)$. Таким образом функции, фигурирующие в (98), однозначно определяются. Добавив функцию $u_1^*(s, \tau; \psi, \zeta) = u_1(s, \tau; \rho^*(\psi, \zeta) + \zeta^2 \rho_2^*(\psi, \zeta) + \dots, \theta^*(\psi, \zeta) + \zeta^2 \theta_2^*(\psi, \zeta) + \dots; \psi, \zeta)$, будем иметь ряд

$$u^*(s, \tau; \psi, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta^j u_j^*(s, \tau; \psi, \zeta). \quad (116)$$

Теорема 12. *В условиях теоремы 11, существует такое $\zeta_0 > 0$, при котором ряд (116) сходится равномерно относительно $0 \leq \zeta \leq \zeta_0$ и $(s, \tau) \in \bar{\Omega}$ и совместно с (101) определяет периодическое решение краевой задачи (30)-(31), устойчивость которого определяется условиями теоремы 11.*

Теорема 12 Доказывается аналогично теореме 11. Основное отличие заключается в том, что в качестве основного функционального пространства следует взять пространство равномерно сходящихся последовательностей функций вида (116) с нормой, аналогичной C^∞ .

Для получения периодического решения непосредственно уравнения (6) достаточно в (116) положить $s = 0$. В качестве первого приближения периодического решения следует взять приближение, определяемое решением $\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)$ системы уравнений

(65)-(66), которое будет иметь вид

$$y^*(\tau; \psi, \zeta) = \zeta u_1^*(0, \tau; \psi, 0) + \zeta^2 u_2^*(0, \tau; \psi, 0) + O(\zeta^3) = \zeta \sum_{n=\pm 1, \pm 3} z_k^*(\tau, \psi) - \zeta^2 b_2 / 2p_{k_1 k_2} \sum_{(k_1, k_2) \in \Omega_2} z_{k_1}^*(\tau, \psi) z_{k_2}^*(\tau, \psi) + O(\zeta^3), \quad (117)$$

$$\tau = \pi - \zeta \cos \psi + \zeta^2 \cos \psi + O(\zeta^3), \quad (118)$$

где функции $z_k^*(\tau, \psi)$ определены в (69).

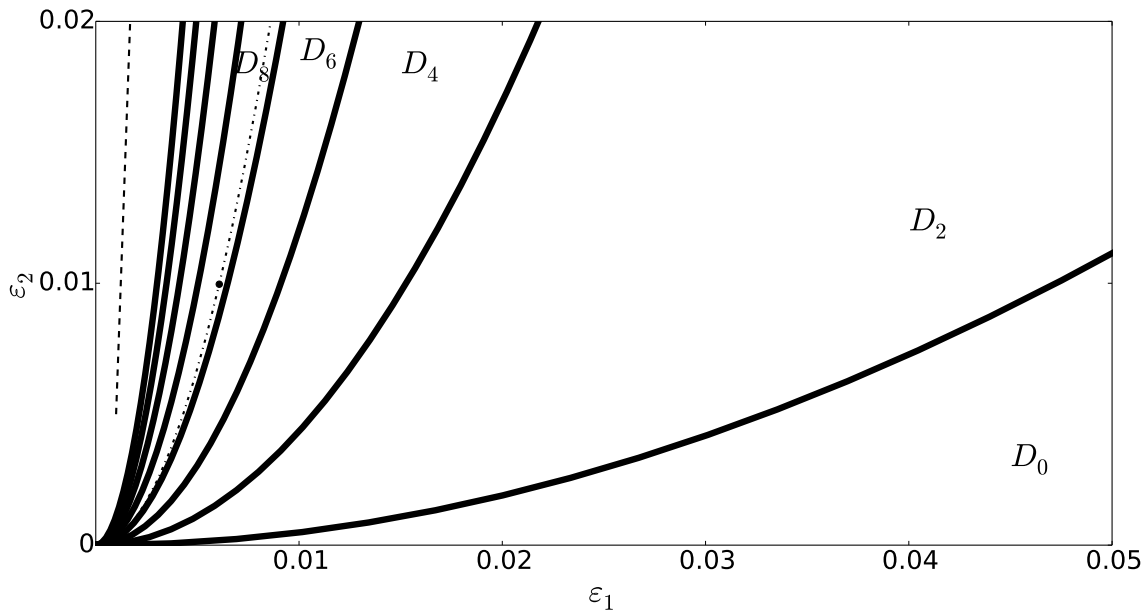


Рис. 2.1: Картина D - разбиений плоскости параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

2.6 Численное исследование нормальной формы

На рис. 2.1 приведена картина D -разбиений [38] плоскости параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. На ней изображены кривые, на которых уравнение (9) имеет корни, лежащие на мнимой оси. Эти кривые являются границами областей D - разбиений. При значениях ε из области D_0 все корни характеристического уравнения (9) находятся в левой комплексной полуплоскости, при $\varepsilon \in D_2$ одна пара комплексно-сопряженных корней находится в правой комплексной полуплоскости, при $\varepsilon \in D_4$ две пары комплексно-сопряженных корней находятся в правой комплексной полуплоскости, а остальные-

в левой, и т.д. Пунктирной линией обозначены границы последующих областей D -разбиений, аналогичные описанным выше.

Зафиксируем значения параметров $\psi = 1.51, \zeta = 0.1$. Построим периодические решения уравнения (6) по формулам (117)-(118). Для этого необходимо последовательно увеличивать число уравнений (65)-(66) и находить их решения до тех пор, пока относительный прирост нормы $\|\rho^*(\psi)\|_{l_2^2}$ не достигнет заданной точности. Удалось найти пять устойчивых периодических решений. Они приведены на рис. 2.2. На рисунке также приведены графики точных решений (тонкая линия), полученные путем численного интегрирования уравнения (6) методом Эйлера с постоянным выбором шага, при этих же значениях параметров. Шаг интегрирования уменьшался до полной стабилизации результатов вычислений. В качестве начальных значений при интегрировании уравнения (6) выбирались функции, полученные согласно (117)-(118).

Зафиксируем теперь значение параметра $\psi = 1.51$ и будем увеличивать ζ . Этому случаю будет соответствовать точечная линия на рис. 2.1. Рассмотрим первое и второе найденные периодические решения. На рис. 2.3 представлены проекции фазовых портретов периодических решения на плоскость $(y(t), y(t-1))$, соответствующие переходу от регулярных колебаний к хаотическим. С ростом ζ наблюдается рост амплитуды и периода колебаний. Численные исследования показали, что происходит переход от регулярной динамики через каскад бифуркаций удвоения периода к хаотическим колебаниям.

Для значений параметров $\psi = 1.55, \zeta = 0.1$ было найдено семь устойчивых периодических решений. Они представлены на рис. 2.4. Рассмотрим второе и третье решение и будем увеличивать ζ . Периодические решения для значений $\zeta = 0.1, 0.2, 0.4, 0.8$ приведены на рис. 2.5.

В заключение отметим, что для нахождения периодических решений (6) использовалась программа, написанная с помощью средств языка программирования Python, а для численного интегрирования дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом использовался пакет dde23 языка Python.

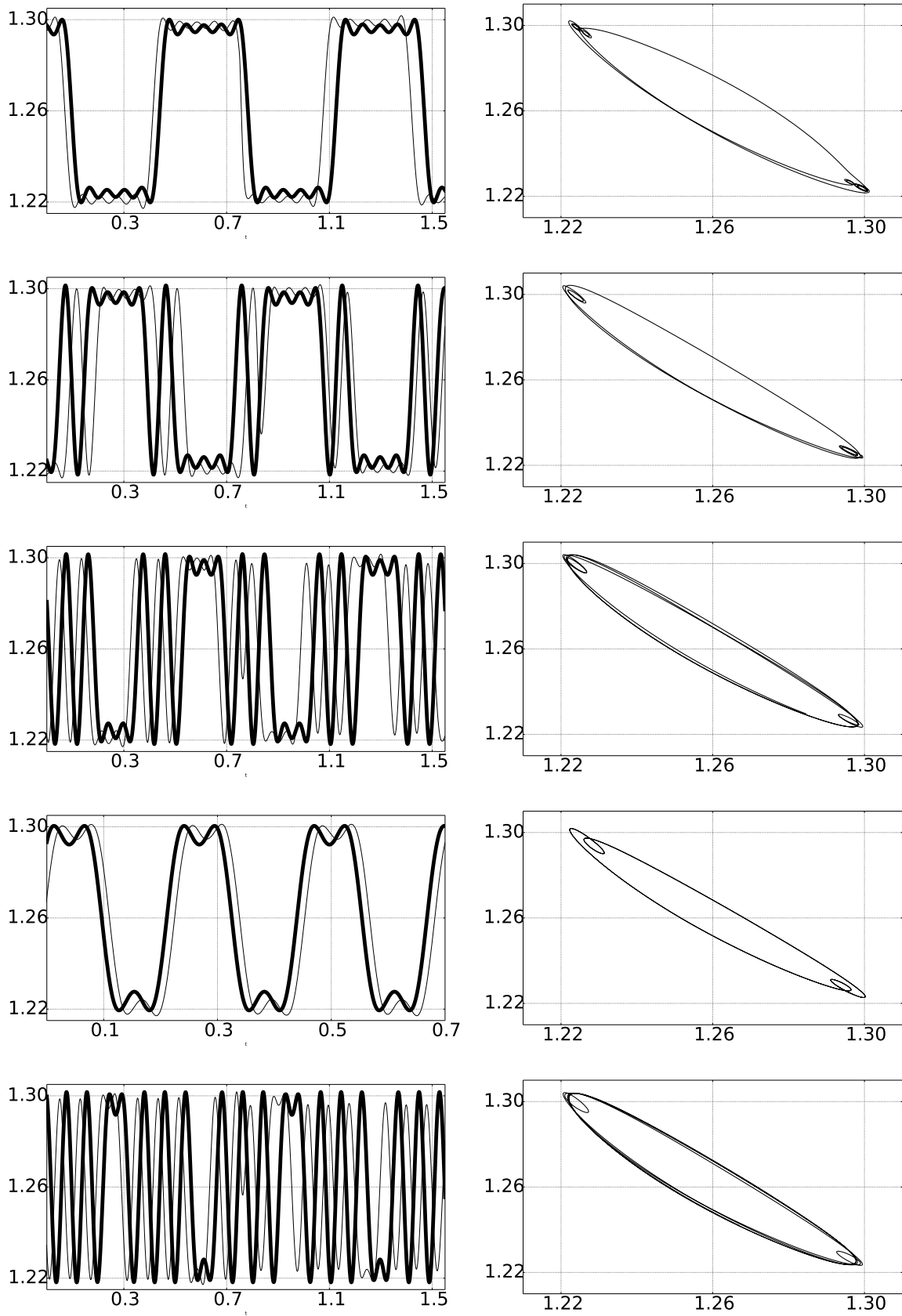
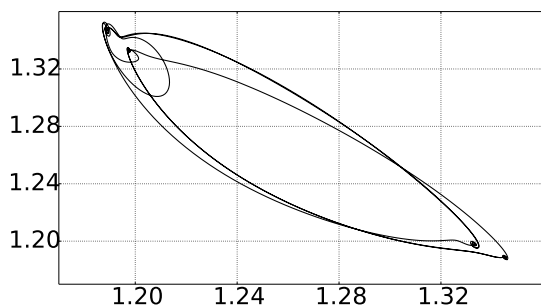
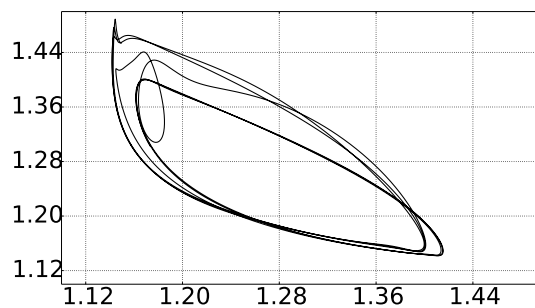


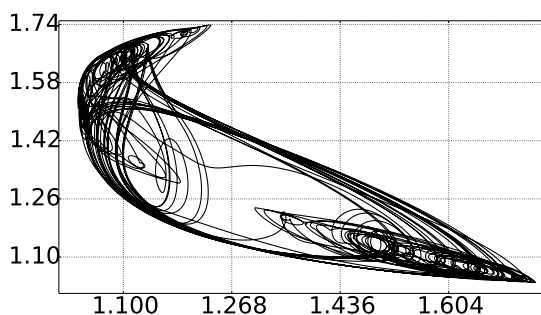
Рис. 2.2: Периодические решения уравнения (6) и проекции фазовых портретов на плоскость $(y(t), y(t - 1))$ для $\zeta = 0.1, \psi = 1.51$



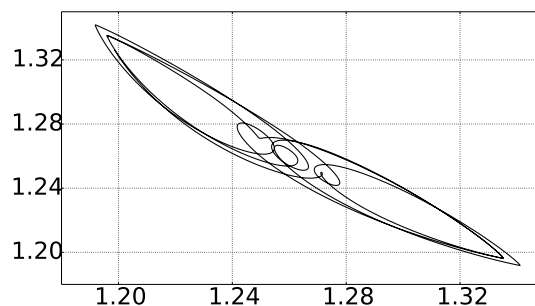
(a)



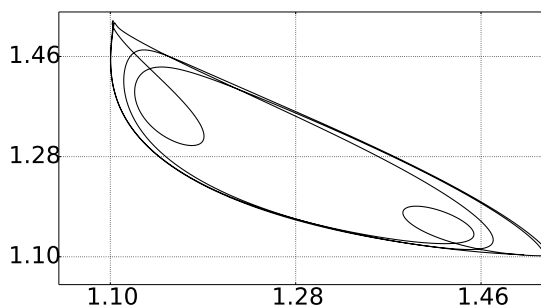
(б)



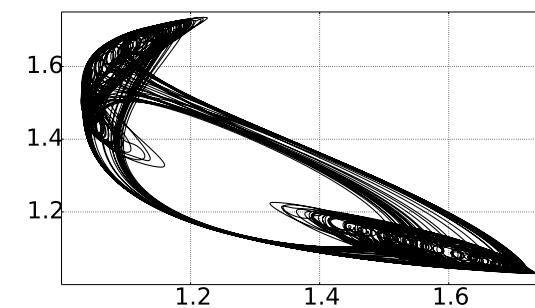
(в)



(г)



(д)



(е)

Рис. 2.3: (а), (б), (в): Проекции фазовых портретов первого периодического решения уравнения (6) на плоскость $(y(t), y(t - 1))$ для значений $\psi = 1.51$, $\zeta = 0.2, 0.4, 0.8$ соответственно; (г), (д), (е): проекции фазовых портретов второго периодического решения уравнения (6) на плоскость $(y(t), y(t - 1))$ для значений $\psi = 1.51$, $\zeta = 0.2, 0.4, 0.8$ соответственно

2.7 Выводы

В данной главе проведен анализ периодических решений уравнения Мэки - Гласса с помощью метода равномерной нормализации сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Получены строгие теоремы об условиях бифуркации периодических решений и построены асимптотические формулы периодических решений. Для одних и тех же значений параметров возможно сосуществование нескольких устойчивых периодических решений, что показывает возможность бифуркации мультистабильности в этом уравнении. Найден сценарий перехода от регулярной динамики к хаотическим колебаниям.

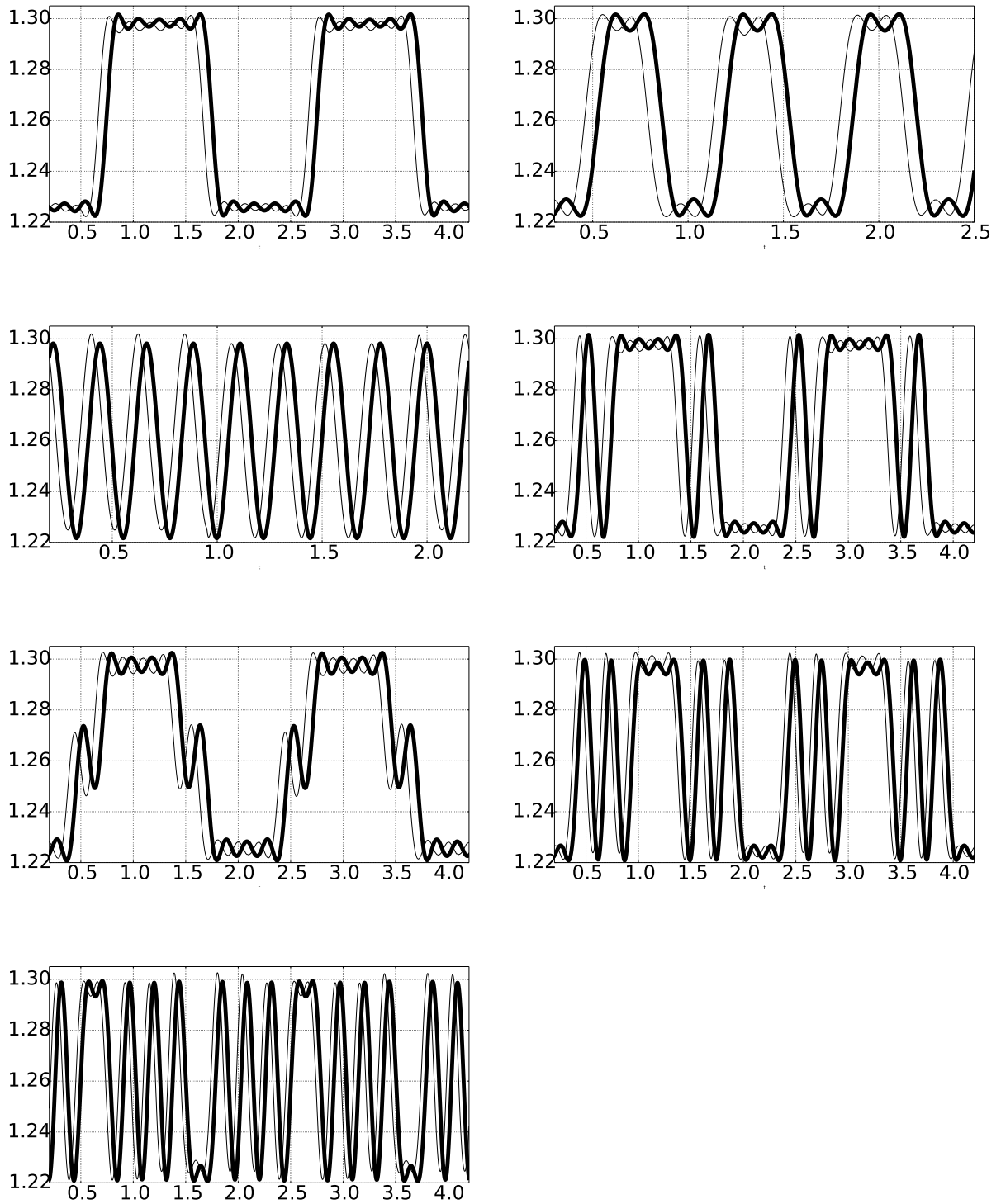
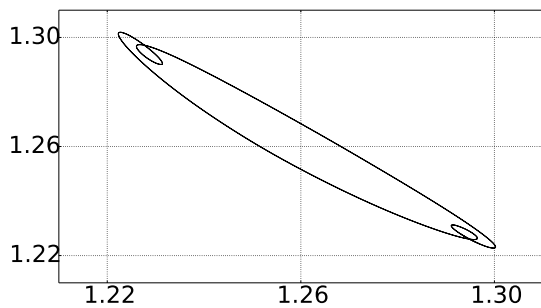
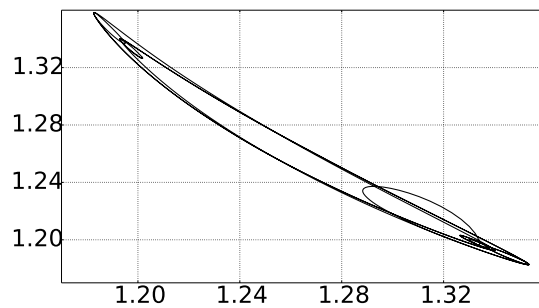


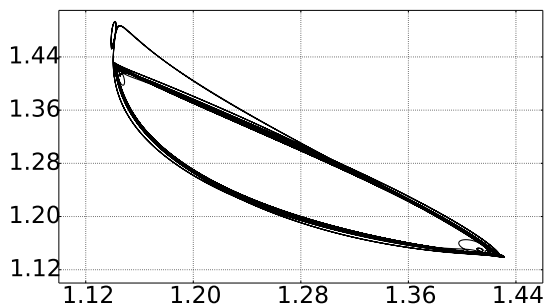
Рис. 2.4: Периодические решения уравнения (6) для $\zeta = 0.1$, $\psi = 1.55$



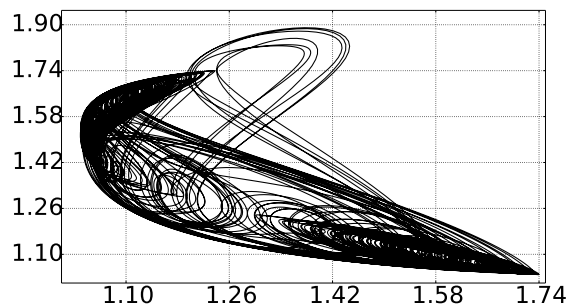
(а)



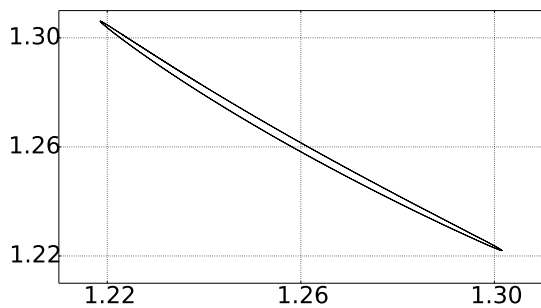
(б)



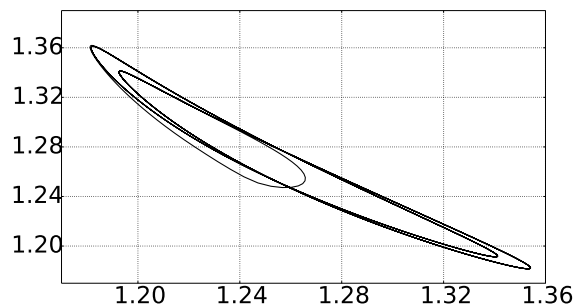
(в)



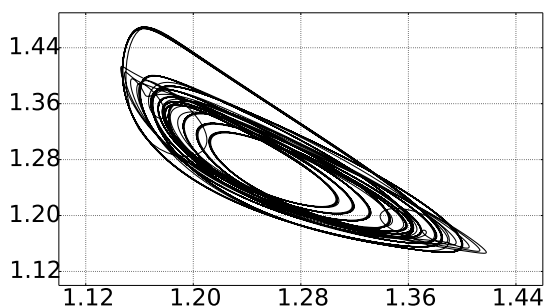
(г)



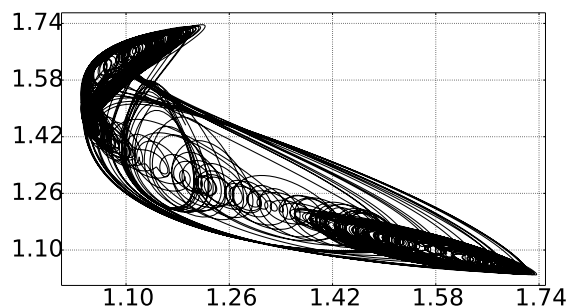
(д)



(е)



(ж)



(з)

Рис. 2.5: (а), (б), (в), (г): Проекция фазовых портретов второго периодического решения на плоскость $(y(t), y(t - 1))$ для значений $\psi = 1.55$, $\zeta = 0.1, 0.2, 0.4, 0.8$; (д), (е), (ж), (з): проекция фазовых портретов третьего периодического решения на плоскость $(y(t), y(t - 1))$ для значений $\psi = 1.55$, $\zeta = 0.1, 0.2, 0.4, 0.8$

Глава 3

Анализ особенностей поведения периодических решений уравнения

Икеды

Рассматривается дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, описывающее динамику пассивного оптического резонатора. Изучена динамика состояний равновесия в зависимости от параметров уравнения и исследована их устойчивость. С использованием метода равномерной нормализации сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом изучены бифуркации периодических решений рассматриваемого уравнения из состояний равновесия при потере их устойчивости.

Введение

В работах [8, 9] для описания динамики пассивного оптического резонатора было предложено уравнение с запаздывающим аргументом

$$\dot{x} = \mu \sin(x(t - \tau) - c) - x, \quad (1)$$

в котором переменная $x(t)$ определяет сдвиг фазы электрического поля в нелинейной среде кольцевого резонатора, τ – время распространения света в кольцевом резонаторе, $0 \leq c < 2\pi$ – постоянный фазовый сдвиг, $\mu > 0$ – коэффициент, характеризующий интенсивность лазерного излучения. Уравнение (1), получившее название

уравнения Икеды, широко используется в нелинейной оптике для объяснения нелинейных оптических эффектов. Оно изучалось в ряде работ [17–21], в которых на основе численного интегрирования показано существование разнообразных периодических решений, а также сложных, в том числе хаотических колебаний. В работе [21] на основе уравнения Икеды предложена и исследована линия передачи информации с использованием хаотической несущей.

Уравнение (1) в зависимости от значений параметров c и μ может иметь большое количество различных устойчивых и неустойчивых состояний равновесия. Некоторые состояния равновесия могут возникать парами - устойчивое и неустойчивое. Потеря состоянием равновесия устойчивости при изменении параметров приводит к бифуркации определенного количества (в зависимости от характера изменения параметров) устойчивых периодических решений, т.е. имеет место бифуркация мультистабильности. При дальнейшем изменении бифуркационных параметров каждое такое периодическое решение через серию бифуркаций удвоения периода переходит в хаотический аттрактор. В динамике решений уравнения наблюдается хаотическая мультистабильность. Изучению этих вопросов и посвящена настоящая работа. В качестве метода исследования используется метод равномерной нормализации, предложенный в [26].

3.1 Математическая постановка задачи, анализ состояний равновесия

В реальных оптических системах время запаздывания τ существенно больше характерного времени колебаний электрического поля. В связи с этим перейдем в уравнении (1) к безразмерному времени $t' = t/\tau$ (штрих в дальнейшем опустим). В результате, положив $\varepsilon_1 = \tau^{-1} \ll 1$, имеем уравнение

$$\varepsilon_1 \dot{x}(t) + x(t) = \mu \sin(x(t-1) - c). \quad (2)$$

Опишем состояния равновесия $x_*(c, \mu)$ уравнения (2), которые определяются корнями уравнения

$$x = \mu \sin(x - c) \quad (3)$$

в зависимости от c и μ и исследуем их устойчивость. Устойчивость $x_*(c, \mu)$ определяется, как легко заметить, расположением корней характеристического уравнения

$$P(\lambda; \varepsilon_1) = \varepsilon_1 \lambda + 1 - \mu \cos(x_*(\mu, c) - c) \exp(-\lambda) = 0. \quad (4)$$

При $|\mu \cos(x_*(\mu, c) - c)| < 1$ все корни уравнения (4) лежат в левой открытой комплексной полуплоскости. В этом случае состояние равновесия $x_*(c, \mu)$ асимптотически устойчиво. При $|\mu \cos(x_*(\mu, c) - c)| > 1$ уравнение (4) имеет корни, принадлежащие правой открытой комплексной полуплоскости, т.е. состояние равновесия $x_*(c, \mu)$ неустойчиво [49]. Пограничным является случай $|\mu \cos(x_0(\mu, c) - c)| = 1$. Это равенство определяет в плоскости c, μ множество точек бифуркации периодических решений из состояния равновесия $x_*(c, \mu)$.

Уравнение (3) имеет единственное решение вида $x_*(\mu, c)$, $\lim_{\mu \rightarrow 0} x_*(\mu, c) = 0$ при $0 < c < 2\pi$. При этом $-\pi < x_*(\mu, c) < 0$, если $0 < c < \pi$, $x_*(\mu, \pi) \equiv 0$, $0 < x_*(\mu, c) < \pi$, если $\pi < c < 2\pi$. При $c = 0$ уравнение (3) имеет решение $x_*(\mu, c) \equiv 0$, а также при $\mu > 1$ два решения $\pm x_*(\mu, c)$, $x_*(\mu, c) > 0$, $\lim_{\mu \rightarrow 1} x_*(\mu, c) = 0$.

Кроме того, при каждом c существует последовательность значений $0 < \mu_1(c) \leq \mu_2(c) \leq \dots$, при которых в уравнении (3) появляются кратные корни $x_*^-(\mu_k(c), c) = x_*^+(\mu_k(c), c)$, $\mu_k(c) \cos(x_*^\pm(\mu_k(c), c)) = 1$, которым при $\mu > \mu_k(c)$ отвечают парные (устойчивое и неустойчивое) состояния равновесия $x_*^-(\mu, c)$ и $x_*^+(\mu, c)$ уравнения (2). При дальнейшем увеличении параметра μ состояние равновесия $x_*^-(\mu, c)$ теряет устойчивость при некотором μ_* и при этом $\mu_* \cos(x_*^-(\mu_*, c)) = -1$.

На рис. 3.1 приведены диаграммы состояний равновесия уравнения (2) для разных значений параметра c и $0 \leq \mu \leq 10$. На диаграммах устойчивые состояния равновесия отмечены толстой линией, неустойчивые – тонкой. Состояния равновесия $x_*(\mu_*(c), c)$, теряющие устойчивость при условии $\mu_*(c) \cos(x_*(\mu_*(c), c)) = 1$ отмечены темным кружочком, при условии $\mu_*(c) \cos(x_*(\mu_*(c), c)) = -1$ – светлым. При дальнейшем увеличении параметра μ картина состояний равновесия уравнения (2) качественно не меняется – появляются новые парные (устойчивое и неустойчивое) состояния равновесия $x_*^-(\mu, c)$ и $x_*^+(\mu_k(c), c)$, первое из которых в дальнейшем теряет устойчивость при некотором μ_* при условии $\mu_* \cos(x_*^-(\mu_*, c)) = -1$.

Из сказанного следует, что в уравнении (2) возможны три вида потери устойчивости состояний равновесия: когда состояние равновесия $x_*(\mu, c)$ теряет устойчивость

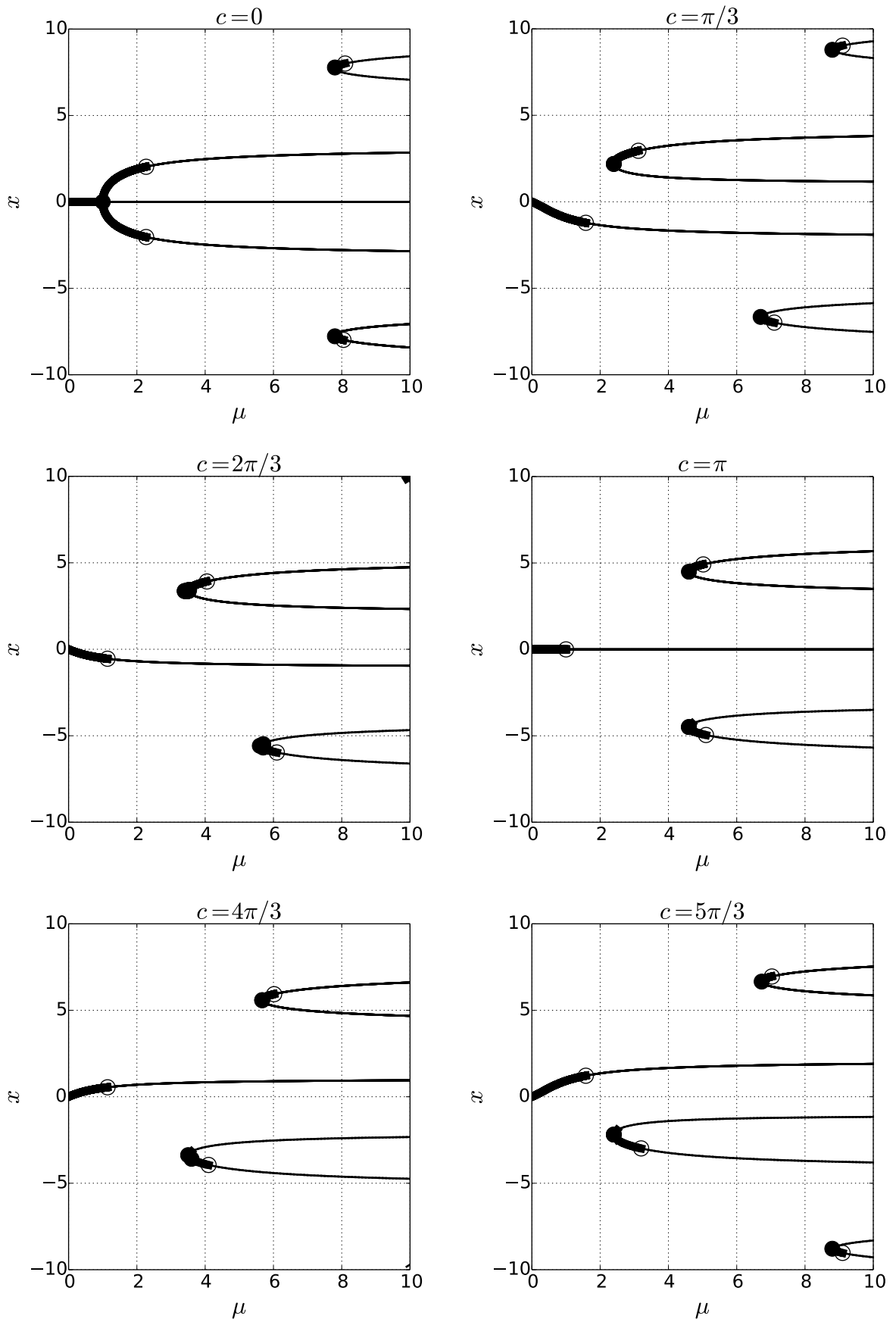


Рис. 3.1: Состояния равновесия уравнения (1) в зависимости от параметра c

при некотором μ_* при условии $\mu_* \cos(x_*^-(\mu_*, c)) = -1$, при $c = 0$ состояние равновесия $x_*(\mu, 0) \equiv 0$ в точке $\mu_* = 1$ теряет устойчивость при условии $\mu_* \cos(x_*^-(\mu_*, 0)) = 1$ и в точке появления кратного корня уравнения (3) при рождении парных состояний равновесия $x_*^-(\mu, c)$ и $x_*^+(\mu, c)$. Рассмотрим эти случаи подробнее.

3.2 Бифуркационный анализ потери устойчивости состояния равновесия $x_*(\mu, c)$, $\lim_{\mu \rightarrow 0} x_*(\mu, c) = 0$, $0 < c < 2\pi$

3.2.1 Математическая постановка задачи, анализ устойчивости состояния равновесия $x_*(\mu, c)$

Рассмотрим первый случай. Выполним в уравнении (2) замену $x(t) = x_*(\mu, c) + y(t)$ и представим нелинейную часть уравнения (2) рядом Тейлора, считая μ в окрестности μ_* . В результате, в окрестности состояния равновесия $x_*(\mu, c)$ поведение решений уравнения (2) будет определяться следующим уравнением

$$\varepsilon_1 \dot{y}(t) + y(t) - \mu \cos(x_*(\mu, c) - c)y(t-1) + f(y(t-1)) = 0, \quad (5)$$

в котором $f(y) = b_2(\mu, c)y^2 + b_3(\mu, c)y^3 + o(y^3)$ аналитическая в окрестности $y = 0$ функция, где

$$b_2(\mu, c) = x_*(\mu, c)/2, \quad b_3(\mu, c) = \mu \cos(x_*(\mu, c) - c)/6. \quad (6)$$

Устойчивость нулевого решения (5) определяется поведением решений его линейной части

$$\varepsilon_1 \dot{y}(t) + y(t) - \mu \cos(x_*(\mu, c) - c)y(t-1) = 0, \quad (7)$$

которое, в свою очередь, определяется расположением корней характеристического уравнения

$$P(\lambda; \varepsilon_1) = \varepsilon_1 \lambda + 1 - \mu \cos(x_*(\mu, c) - c) \exp(-\lambda) = 0 \quad (8)$$

уравнения (7).

При $\mu = \mu_*(c)$ имеем $\mu_*(c) \cos(x_*(\mu_*(c), c) - c) = -1$. График функции $\mu_*(c)$ приведен на рис. 3.2.

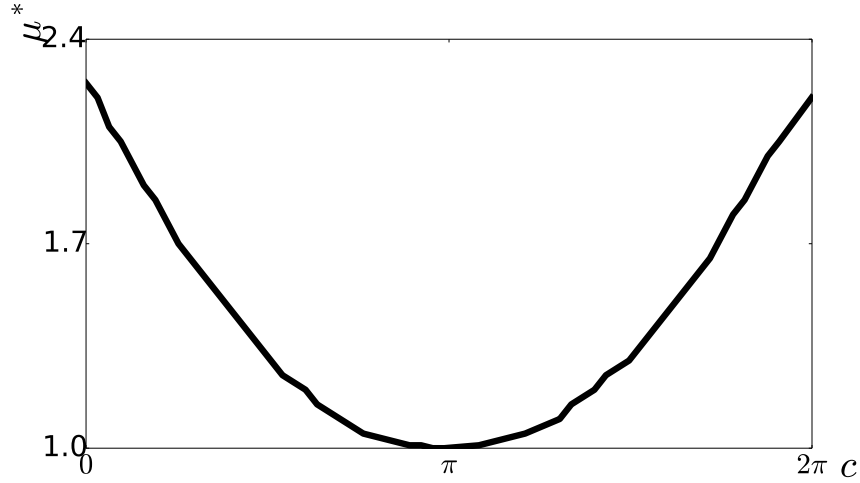


Рис. 3.2: $\mu^*(c)$

Рассмотрим уравнение

$$(\mu^*(c) + \mu) \cos(x_0(\mu^*(c) + \mu, c) - c) = -1 - \varepsilon_2, |\varepsilon_2| \ll 1, \quad (9)$$

Так как $((\mu^*(c) + \mu) \cos(x_0(\mu^*(c) + \mu, c) - c))|_{\mu=0} = -(1 + \mu^*(c)^2)/(2\mu^*(c)) \neq 0$, найдем из (9) $\mu = \mu(\varepsilon_2)$ и подставим в (5). В результате имеем

$$b_2(\varepsilon_2, c) = x_0(\mu^*(c) + \mu(\varepsilon_2), c)/2 = x_0(\varepsilon_2, c)/2, b_3(\varepsilon_2, c) = -(1 + \varepsilon_2)/6, \quad (10)$$

а характеристическое уравнение (8) примет вид

$$P(\lambda; \varepsilon) = \varepsilon_1 \lambda + 1 + (1 + \varepsilon_2) \exp(-\lambda) = 0. \quad (11)$$

Таким образом получили, что уравнение (5) свелось к уравнению вида (2.1).

На рис. 3.3, 3.4 приведены графики семи устойчивых периодических решений, полученных для значений параметров $c = \pi/3$, $\psi = 1.55$, $\zeta = 0.1$.

Два других случая потери устойчивости состояний равновесия требуют более детального рассмотрения.

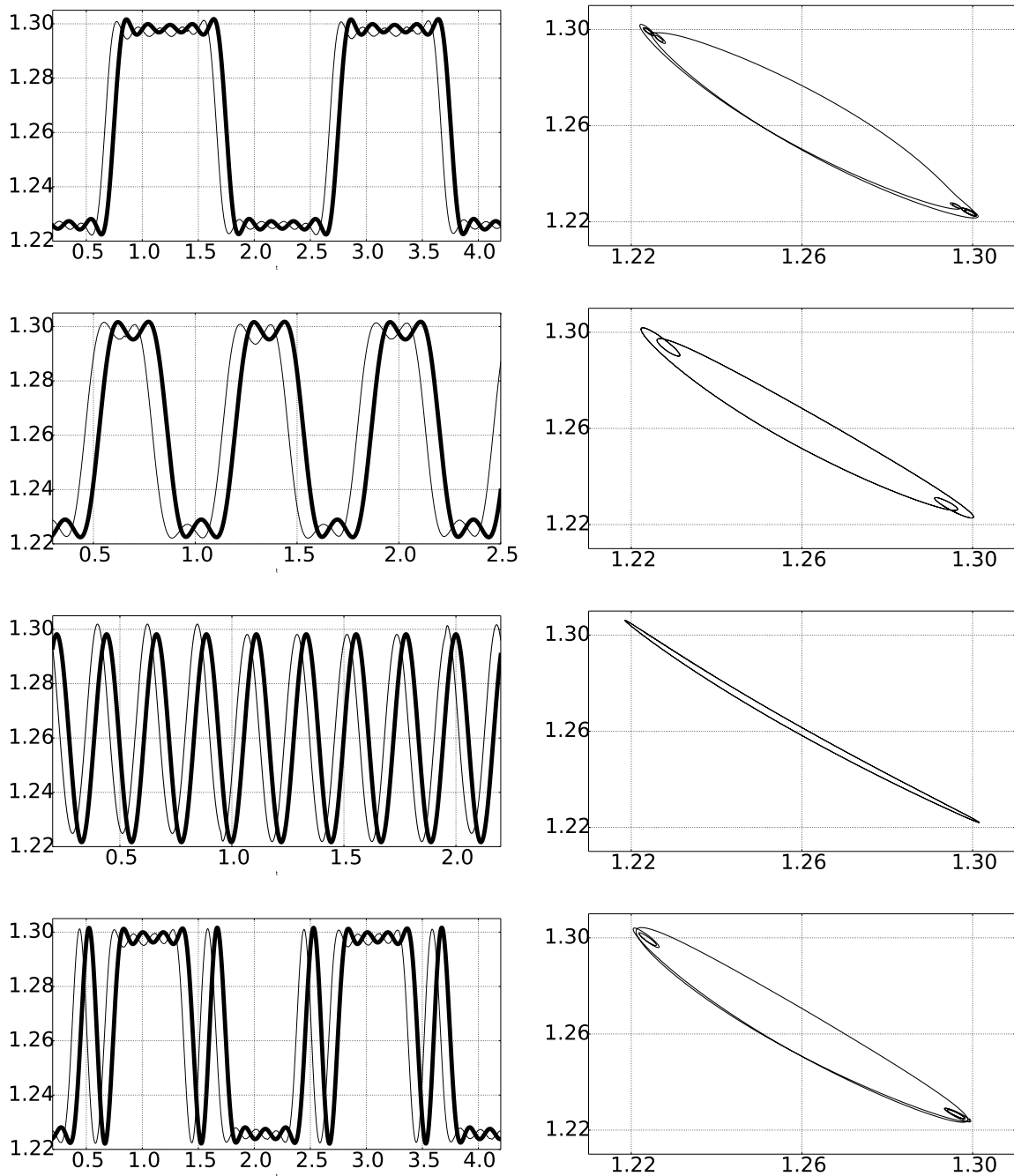


Рис. 3.3: Периодические решения уравнения Икеды и проекции фазовых портретов на плоскость $(y(t), y(t - 1))$ для $\zeta = 0.1, \psi = 1.55$

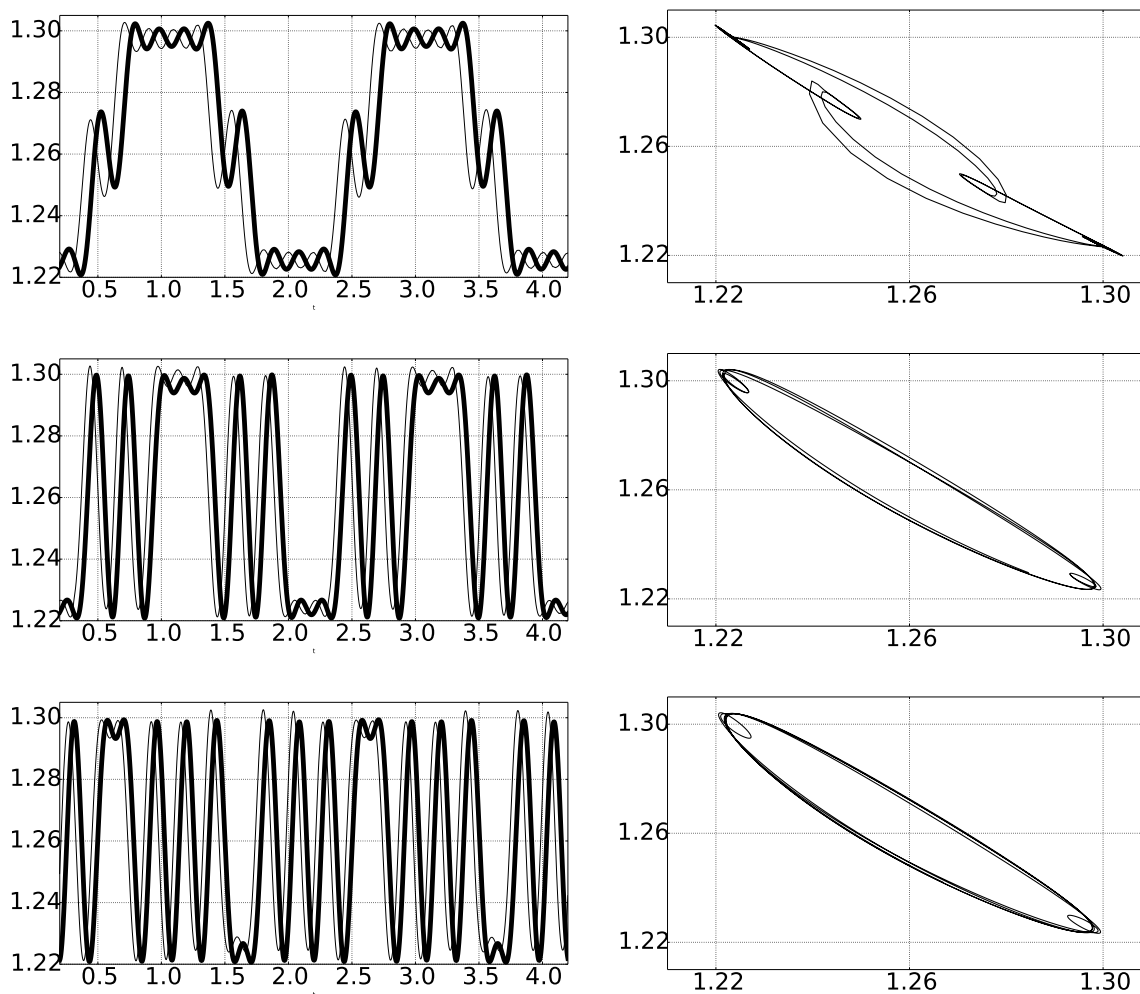


Рис. 3.4: Периодические решения уравнения Икеды и проекции фазовых портретов на плоскость $(y(t), y(t - 1))$ для $\zeta = 0.1$, $\psi = 1.55$

3.3 Бифуркационный анализ потери устойчивости состояния равновесия $x_*(\mu, 0) \equiv 0$ в случае $c = 0$

3.3.1 Анализ устойчивости состояния равновесия $x_*(\mu, c) \equiv 0$

В случае $c = 0$ потеря устойчивости состояния равновесия $x_*(\mu, 0) \equiv 0$ происходит в точке $\mu_* = 1$. Положим $\mu = 1 + \varepsilon_2$, $|\varepsilon_2| \ll 1$ и запишем уравнение (2) в окрестности $x_*(\mu, 0) \equiv 0$ в виде

$$\varepsilon_1 \dot{y}(t) + y(t) - (1 + \varepsilon_2)y(t-1) + f(y(t-1); \varepsilon) = 0, \quad (12)$$

где $f(y) = (1 + \varepsilon_2)/6y^3 + o(y^3)$ аналитическая функция.

Линейная часть уравнения (12) имеет следующий вид

$$\varepsilon_1 \dot{y}(t) + y(t) - (1 + \varepsilon_2)y(t-1) = 0. \quad (13)$$

Изучим расположение корней её характеристического уравнения

$$P(\lambda; \varepsilon_1) = \varepsilon_1 \lambda + 1 - (1 + \varepsilon_2) \exp(-\lambda) = 0, \quad \lambda = \gamma + i\delta. \quad (14)$$

Уравнение (14) имеет один вещественный корень $\lambda_0(\varepsilon) = \gamma_0(\varepsilon)$, который является решением уравнения

$$\gamma + \ln(1 + \varepsilon_1 \gamma) = \ln(1 + \varepsilon_2), \quad (15)$$

в области $1 - \varepsilon_0^{-1} < \gamma$, и определяется формулой

$$\gamma_0(\varepsilon) = \ln(1 + \varepsilon_2) - \ln(1 + \varepsilon_1(\ln(1 + \varepsilon_2) - \ln(1 + \varepsilon_1(\ln(1 + \varepsilon_2) - \dots)))) \quad (16)$$

Рассмотрим область $\text{Im } \lambda > 0$. Запишем уравнение (14) в виде

$$e^\lambda(\varepsilon_1 \lambda + 1) = (1 + \varepsilon_2),$$

что эквивалентно последовательности уравнений

$$e^{\lambda + \ln(1 + \varepsilon_1 \lambda)} = e^{\ln(1 + \varepsilon_2) + i\pi k}, \quad k = 2, 4, \dots,$$

здесь $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ ($-\pi < \arg z < \pi$).

Для определения корней уравнения (14) достаточно рассмотреть последовательность уравнений

$$\lambda + \ln(1 + \varepsilon_1 \lambda) = \ln(1 + \varepsilon_2) + i\pi k, \quad k = 2, 4, \dots \quad (17)$$

Каждое из этих уравнений имеет единственное решение, определяемое формулой

$$\lambda_k(\varepsilon) = i\pi k + \ln(1 + \varepsilon_2) + \lambda^1(i\pi k + \ln(1 + \varepsilon_2); \varepsilon_1), \quad (18)$$

где функция $\lambda^1(w; \varepsilon_1)$ определена в п. 2. Доказательство этого почти дословно повторяет доказательство разрешимости уравнения (2.13). Множество корней уравнения (14) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \lambda_k(\varepsilon) &= \gamma_k(\varepsilon) + i(\pi k + \sigma_k(\varepsilon)) = i\pi k + \ln(1 + \varepsilon_2) - \ln(1 + \varepsilon_1(i\pi k + \ln(1 + \varepsilon_2))) + O(|\varepsilon|^2), \\ \gamma_k(\varepsilon) &= \ln(1 + \varepsilon_2) - \ln((1 + \varepsilon_1 \ln(1 + \varepsilon_2))^2 + \varepsilon_1^2 \pi^2 k^2)/2 + O(|\varepsilon|^2), \\ \sigma_k(\varepsilon) &= -\arccos((1 + \varepsilon_1 \ln(1 + \varepsilon_2))/((1 + \varepsilon_1 \ln(1 + \varepsilon_2))^2 + \varepsilon_1^2 \pi^2 k^2)^{1/2}) + O(|\varepsilon|^2), \end{aligned} \quad (19)$$

где равенства выполняются равномерно относительно $k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ и $\lambda_{-k}(\varepsilon) = \bar{\lambda}_k(\varepsilon)$, $\lambda_0(\varepsilon) = \gamma_0(\varepsilon)$.

Вопрос устойчивости решений уравнения (13) сводится к анализу функций $\gamma_k(\varepsilon)$, являющихся аналитическими в точке $\varepsilon = 0$ и имеющих радиус сходимости соответствующих рядов $r_k = O(k^{-1})$. При этом имеем

$$\gamma_k(\varepsilon) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1^2(\pi k)^2/2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2^2/2 + o(|\varepsilon|^3), \quad k = 0, 2, 4, \dots, \quad (20)$$

т.е. при малых ε и выполнении неравенства $\varepsilon_2 > \varepsilon_1^2(\pi k)^2/2$ k -й корень характеристического уравнения (14) имеет положительную вещественную часть.

3.3.2 Построение нормальной формы

Построение нормальной формы уравнения (12) проводится по схеме, изложенной в главе 2.

Обозначим через l_2 пространство комплексных последовательностей вида $z = (z_0, z_2, z_{-2}, z_4, z_{-4}, \dots)$, $z_0 \in R$, $z_k \in C$, $k = 2, 4, \dots$, $z_{-k} = \bar{z}_k$, $\|z\|_{l_2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |z_k|^2 < \infty$. Через l_2^1 обозначим подпространство l_2 комплексных последовательностей $z = (z_0, z_2, z_{-2}, z_4, z_{-4}, \dots)$ для которых $\|z\|_{l_2^1}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k(\varepsilon)|^2 |z_k|^2 < \infty$ и $\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k \lambda_k(\varepsilon)^*$

$*e_k(s; \varepsilon)||_C < \infty$. В дальнейшем $s(r_0) = \{z \in l_2, \|z\|_{l_2} \leq r_0\}$, $s^1(r_0) = \{z \in l_2^1, \|z\|_{l_2^1} \leq r_0\}$.

Система дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_k = \lambda_k(\varepsilon)z_k + \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \Omega_k^3} d_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon)z_{k_1}z_{k_2}z_{k_3} \quad (21)$$

в пространстве l_2 с областью определения правой части $s^1(r_0)$, гладко зависящей от ε , в которой $\Omega_k^3 = \{(k_1, k_2, k_3) : k_1, k_2, k_3 = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, k_1 \leq k_2 \leq k_3, k_1 + k_2 + k_3 = k\}$,

$$d_{k_1 k_2 k_3}(s; \varepsilon)(s; \varepsilon) = (\varepsilon_1 - (1 + \varepsilon_2)(e^{-\lambda_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon)} - e^{-\lambda_k(\varepsilon)})/(\lambda_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon) - \lambda_k(\varepsilon)))^{-1} * \\ * (1 + \varepsilon_1 + \lambda_k(\varepsilon))f_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon).$$

$f_{k_1 k_2 k_3}(\varepsilon) = -p_{k_1 k_2 k_3}(1 + \varepsilon_2)e_{k_1}(-1; \varepsilon)e_{k_2}(-1; \varepsilon)e_{k_3}(-1; \varepsilon)/6$, $e_k(s; \varepsilon) = e^{\lambda_k(\varepsilon)}/(1 + \varepsilon_1 + \lambda_k(\varepsilon))$, $p_{k_1 k_2 k_3} = 1$, если $k_1 = k_2 = k_3$; $p_{k_1 k_2 k_3} = 3$, если $k_1 = k_2 \neq k_3$, либо $k_1 = k_3 \neq k_2$, либо $k_2 = k_3 \neq k_1$; $p_{k_1 k_2 k_3} = 6$, если $k_1 \neq k_2 \neq k_3$, называется нормальной формой уравнения (12). Построение системы уравнений (21) проводится аналогично п.2.

3.3.3 Анализ нормальной формы

Перейдем в системе уравнений (21) к полярным координатам в плоскостях (z_k, z_{-k}) , $k = 2, 4, \dots$, положив $z_k = \rho_k e^{i\tau_k}$ ($\rho_k \geq 0, -\infty < \tau_k < \infty$) и обозначим для единообразия $z_0 = \rho_0$. В результате получим систему уравнений

$$\dot{\rho}_k = \gamma_k(\varepsilon)\rho_k + R_k(\rho, \tau; \varepsilon), \quad k = 0, 2, 4, \dots, \quad (22)$$

$$\dot{\tau}_k = \pi k + \sigma_k(\varepsilon) + T_k(\rho, \tau; \varepsilon), \quad k = 2, 4, \dots, \quad (23)$$

в которой $\gamma_k(\varepsilon)$ и $\sigma_k(\varepsilon)$ определены в (19), $\rho = (\rho_0, \rho_2, \rho_4, \dots)$, $\rho_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \rho_k^2 < \infty, \tau = (\tau_2, \tau_4, \dots)$, функционалы $R_k(\cdot), T_k(\cdot)$ гладко зависят от входящих переменных и параметров, 2π -периодические по τ_j .

Структура системы (22)-(23) позволяет ввести одну "быструю" переменную и счетное число "медленных" переменных. Как это сделать покажем сначала на примере "усеченной" системы. Рассмотрим нормальную форму (21), в которой положим $z_k = 0, k = \pm 6, \pm 8, \dots$. В результате имеем систему уравнений

$$\dot{z}_0 = \lambda_0(\varepsilon)z_0 + d_{000}(\varepsilon)z_0^3 + d_{-202}(\varepsilon)z_{-2}z_0z_2 + d_{-404}(\varepsilon)z_{-4}z_0z_4 + d_{-2-24}(\varepsilon)z_{-2}^2z_4 + d_{-422}(\varepsilon)z_{-4}z_2^2, \quad (24)$$

$$\dot{z}_2 = \lambda_2(\varepsilon)z_2 + d_{-222}(\varepsilon)z_{-2}z_2^2 + d_{-424}(\varepsilon)z_{-4}z_2z_4 + d_{-204}(\varepsilon)z_{-2}z_0z_4 + d_{002}(\varepsilon)z_0^2z_2, \quad (25)$$

$$\dot{z}_4 = \lambda_4(\varepsilon)z_4 + d_{-444}(\varepsilon)z_{-4}z_4^2 + d_{-224}(\varepsilon)z_{-2}z_2z_4 + d_{004}(\varepsilon)z_0^2z_4 + d_{022}(\varepsilon)z_0z_2^2. \quad (26)$$

Уравнения для z_{-2}, z_{-4} получаются сопряжением (25)-(26) с учетом равенств $\bar{\lambda}_k(\varepsilon) = \lambda_{-k}(\varepsilon)$, $\bar{z}_k(\varepsilon) = z_{-k}(\varepsilon)$. Обозначив $d_*(\varepsilon) = a_*(\varepsilon) + ib_*(\varepsilon)$, $A_*(\varepsilon) = |d_*(\varepsilon)|$, $\beta_*(\varepsilon) = \text{arg} d_*(\varepsilon)$, перейдем к переменным $\rho_0, \rho_2, \rho_4, \tau_1, \tau_2$. В результате получим систему уравнений

$$\dot{\rho}_0 = (\gamma_0(\varepsilon) + a_{-202}(\varepsilon)\rho_2^2 + a_{-404}(\varepsilon)\rho_4^2)\rho_0 + a_{000}\rho^3 + A_{-2-24}(\varepsilon)(\cos(-2\tau_2 + \tau_4 + \beta_{-2-24}(\varepsilon)) + \cos(2\tau_2 - \tau_4 - \beta_{-2-24}(\varepsilon)))\rho_2^2\rho_4, \quad (27)$$

$$\dot{\rho}_2 = (\gamma_2(\varepsilon) + a_{-222}(\varepsilon)\rho_2^2 + a_{-424}(\varepsilon)\rho_4^2)\rho_2 + a_{002}\rho_0^2\rho_2 + A_{-204}(\varepsilon)\cos(-2\tau_2 + \tau_4 + \beta_{-204}(\varepsilon))\rho_0\rho_2\rho_4, \quad (28)$$

$$\dot{\rho}_4 = (\gamma_4(\varepsilon) + a_{-224}(\varepsilon)\rho_2^2 + a_{-444}(\varepsilon)\rho_4^2)\rho_4 + a_{004}\rho_0^2\rho_4 + A_{022}(\varepsilon)\cos(2\tau_2 - \tau_4 + \beta_{022}(\varepsilon))\rho_0\rho_2^2, \quad (29)$$

$$\dot{\tau}_2 = 2\pi + \sigma_2(\varepsilon) + b_{-222}(\varepsilon)\rho_2^2 + a_{-424}(\varepsilon)\rho_4^2 + b_{002}\rho_0^2 + A_{-204}(\varepsilon)\sin(-2\tau_2 + \tau_4 + \beta_{-204}(\varepsilon))\rho_0\rho_4, \quad (30)$$

$$\dot{\tau}_4 = 4\pi + \sigma_4(\varepsilon) + b_{-224}(\varepsilon)\rho_2^2 + b_{-444}(\varepsilon)\rho_4^2 + b_{004}\rho_0^2 + A_{022}(\varepsilon)\sin(2\tau_2 - \tau_4 + \beta_{022}(\varepsilon))\rho_0\rho_2^2/\rho_4. \quad (31)$$

Перейдем в (27)-(31) к переменным $\rho_0, \rho_2, \rho_4, \theta_2 = -2\tau_2 + \tau_4$ и $\tau = \tau_2$. В результате получим систему уравнений

$$\dot{\rho}_0 = (\gamma_0(\varepsilon) + a_{-202}(\varepsilon)\rho_2^2 + a_{-404}(\varepsilon)\rho_4^2)\rho_0 + a_{000}\rho_0^3 + A_{-2-24}(\varepsilon)(\cos(-\theta_2 + \beta_{-2-24}(\varepsilon)) + \cos(\theta_2)) * \rho_2^2\rho_4, \quad (32)$$

$$\dot{\rho}_2 = (\gamma_2(\varepsilon) + a_{-222}(\varepsilon)\rho_2^2 + a_{-424}(\varepsilon)\rho_4^2)\rho_2 + a_{002}\rho_0^2\rho_2 + A_{-204}(\varepsilon)\cos(\theta_2 + \beta_{-204}(\varepsilon))\rho_0\rho_2\rho_4, \quad (33)$$

$$\dot{\rho}_4 = (\gamma_4(\varepsilon) + a_{-224}(\varepsilon)\rho_2^2 + a_{-444}(\varepsilon)\rho_4^2)\rho_4 + a_{004}\rho_0^2\rho_4 + A_{022}(\varepsilon)\cos(-\theta_2 + \beta_{022}(\varepsilon))\rho_0\rho_2^2 \quad (34)$$

$$\dot{\theta}_2 = \delta_2(\varepsilon) - 2(b_{-222}(\varepsilon)\rho_2^2 + a_{-424}(\varepsilon)\rho_4^2 + b_{002}\rho_0^2 + A_{-204}(\varepsilon)\sin(\theta_2 + \beta_{-204}(\varepsilon))\rho_0\rho_4) + b_{-224}(\varepsilon)\rho_2^2 + b_{-444}(\varepsilon)\rho_4^2 + b_{004}\rho_0^2 + A_{022}(\varepsilon)\sin(-\theta_2 + \beta_{022}(\varepsilon))\rho_0\rho_2^2/\rho_4, \quad (35)$$

”медленных“ переменных, где $\delta_2(\varepsilon) = -2\sigma_2(\varepsilon) + \sigma_4(\varepsilon)$, и уравнение ”быстрой“ переменной

$$\dot{\tau} = 2\pi + \sigma_2(\varepsilon) + b_{-222}(\varepsilon)\rho_2^2 + a_{-424}(\varepsilon)\rho_4^2 + b_{002}\rho_0^2 + A_{-204}(\varepsilon)\cos(\theta_2 + \beta_{-204}(\varepsilon))\rho_0\rho_4. \quad (36)$$

Заметим, что правая часть (32)-(35) не зависит от τ .

Пусть теперь в (21) все $z_k(t) \neq 0$. Ввести переменные θ_k можно не единственным способом, однако они все связаны между собой линейными соотношениями. В качестве одного из возможных способов введение θ_k может быть предложен следующий. В качестве "быстрой" переменной берем τ_2 и рассматриваем "усеченные" конечномерные системы последовательно полагая в (21) $z_k = 0, k = \pm 6, \pm 8, \dots$, затем $k = \pm 8, \pm 10, \dots$ и т.д. Первый случай рассмотрен выше. Во втором случае к системе (32)-(35) добавляются два новых уравнения для переменных z_6 и z_{-6} . При этом в правой части уравнения для ρ_0 появляются резонансные мономы $z_{-6}z_4z_2$ и $z_6z_{-4}z_{-2}$, в правой части уравнения для z_2 появляются резонансные мономы $z_6z_{-2}z_{-2}$, $z_{-6}z_4z_4$, $z_{-4}z_0z_6$. В качестве новой "медленной" переменной θ_4 берем выражение $\tau_6 - \tau_4 - \tau_2$. Остальные зависимости от τ_2, τ_4, τ_6 являются линейной комбинацией θ_2, θ_4 . В результате имеем две дополнительные "медленные" переменные ρ_6, θ_4 . Система уравнений для $\rho_0, \rho_2, \rho_4, \rho_6, \theta_2, \theta_4$ будет иметь вид, аналогичный (32)-(35), правая часть которой также не будет зависеть от τ . В правой части уравнения (36) для τ появятся новые слагаемые, зависящие от ρ_6, θ_4 . При рассмотрении следующей "усеченной" системы в правой части уравнения для ρ_0 появятся резонансные мономы $z_{-8}z_2z_6$, $z_8z_{-2}z_{-6}$, $z_{-8}z_4z_4$ и $z_{-4}z_{-4}z_8$, а при переходе к полярным координатам слагаемые, зависящие от выражений $\tau_8 - \tau_6 - \tau_2 = \theta_6$. Имеем две новые "медленные" переменные ρ_8, θ_6 . В общем случае на очередном шаге добавляются две новые "медленные" переменные $\rho_{k_0}, \theta_{k_0-2} = \tau_{k_0} - \tau_{k_0-2} - \tau_2$. Продолжая этот процесс осуществим переход к "медленным" переменным $\rho = (\rho_0, \rho_2, \rho_4, \dots), \theta = (\theta_2, \theta_4, \dots)$ и "быстрой" τ , а соответствующая система дифференциальных уравнений для их определения будет иметь вид

$$\dot{\rho}_k = \gamma_k(\varepsilon)\rho_k + R_k(\rho, \theta; \varepsilon), \quad k = 0, 2, 4, \dots, \quad (37)$$

$$\dot{\theta}_k = \delta_k(\varepsilon) + \Theta_k(\rho, \theta; \varepsilon), \quad k = 2, 4, \dots, \quad (38)$$

$$\dot{\tau} = 2\pi + \sigma_1(\varepsilon) + T(\rho, \theta; \varepsilon), \quad (39)$$

в которой функционалы $R_k(\cdot), \Theta_k(\cdot), T(\cdot) - 2\pi$ -периодические по θ_k , остальные их свойства и функции $\delta_k(\varepsilon) (\delta_k(0) = 0)$ определяются свойствами функций и функционалов, входящих в (22)-(23). Особо отметим, что правая часть (39) не зависит от переменной τ .

Фазовым пространством системы уравнений (37)-(39) будет произведение пространств $l_2 \otimes c = E \otimes R_1$, здесь $l_2 = \{\rho = (\rho_0, \rho_2, \rho_4, \dots)\}, \rho_k \geq 0, k = 2, 4, \dots, \|\rho\|_{l_2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^2 < \infty, c = \{\theta = (\theta_2, \theta_4, \dots)\}, \|\theta\|_c = \sup_k |\theta_k| < \infty$. Областью определения правой части (37)-(39) является произведение пространств $l_2^1 \otimes c_0 = E_0^1 \otimes R$, здесь $l_2^1 = \{\rho \in l_2, \|\rho\|_{l_2^1}^2 = \sum_{k=2}^{\infty} k^2 \rho_k^2 < \infty\}, c_0 = \{\theta = (\theta_2, \theta_4, \dots) \in c, 0 \leq \theta_k < 2\pi\}$.

Введем в области $\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \varepsilon_1 > 0, |\varepsilon| < \varepsilon_0\}$ переменные $\zeta \geq 0$ и $\pi/2 < \psi < \pi/2$, положив

$$\zeta = (\varepsilon_1^2 + |\varepsilon_2|)^{1/2}, \varepsilon_1 = \zeta \cos \psi, \varepsilon_2 = \zeta^2 \sin^2 \psi \operatorname{sign} \psi. \quad (40)$$

Подставим (40) в (37)-(39) и нормируем $\rho_k \rightarrow \zeta \rho_k, t \rightarrow t/\zeta^2$. В результате получим систему уравнений

$$\dot{\rho}_k = \gamma_k^*(\psi, \zeta) \rho_k + R_k(\rho, \theta; \psi, \zeta) (R_k(\rho, \theta; \psi, 0) \equiv R_k(\rho, \theta)), k = 0, 2, \dots, \quad (41)$$

$$\dot{\theta}_k = \delta_k^*(\psi, \zeta) + \Theta_k(\rho, \theta; \psi, \zeta), (\Theta_k(\rho, \theta; \psi, 0) \equiv \Theta_k(\rho, \theta)) k = 2, 4, \dots, \quad (42)$$

где $\gamma_k^*(\psi, \zeta) = \gamma_k(\psi, \zeta)/\zeta^2, \delta_k^*(\psi, \zeta) = \delta_k(\psi, \zeta)/\zeta^2$ согласно (18)-(19) непрерывные функции $\pi/2 \leq \psi \leq -\pi/2, 0 \leq \zeta \leq \zeta_0$. При этом

$$\gamma_k^*(\psi, 0) = \gamma_k(\psi) = \sin^2 \psi \operatorname{sign} \psi - \pi^2 k^2 \cos^2 \psi / 2, \quad \delta_k^*(\psi, 0) = 0. \quad (43)$$

В (41)-(42) свойства функций и функционалов определяются свойствами функций и функционалов системы (37)-(39).

Рассмотрим главную часть системы уравнений "медленных" переменных (41)-(42)

$$\dot{\rho}_k = \gamma_k^*(\psi) \rho_k + R_k(\rho, \theta), k = 0, 2, \dots \quad (44)$$

$$\dot{\theta}_k = \Theta_k(\rho, \theta), k = 2, 4, \dots, \quad (45)$$

Теорема 1. Пусть при некотором ψ система уравнений (44)-(45) имеет экспоненциально устойчивое или неустойчивое состояние равновесия $(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)) \in E_0^1$. В последнем случае t характеристических показателей (с учетом кратностей) линеаризованной на $(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi))$ системы уравнений положительны. Тогда существует такое $\zeta_0 > 0$, что при $0 < \zeta < \zeta_0$ уравнение (12) с учетом выражений (40) имеет периодическое решение того же характера устойчивости. При этом размерность

неустойчивого многообразия периодического решения равна t . Для периодического решения справедлива следующая формула

$$y^*(\tau; \psi, \zeta) = \zeta(\rho_0^*(\psi) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{2k}^*(\tau, \psi) \cos(k\tau + \sum_{j=1}^{2k-2} \theta_{2j}^*(\psi))) + O(\zeta^3), \quad (46)$$

$$\dot{\tau} = 2\pi - \zeta \cos \psi + \zeta^2 \cos \psi^2 + O(\zeta^3). \quad (47)$$

3.3.4 Результаты численного анализа нормальной формы

Приведем результаты численного анализа нормальной формы (21). На рис. 3.5 приведена картина D -разбиений плоскости параметров $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, определенная в соответствии с (20). На ней изображены кривые, на которых уравнение (14) имеет корни, лежащие на мнимой оси, и области, соответствующие определенному числу корней уравнения, лежащих в правой комплексной полуплоскости.

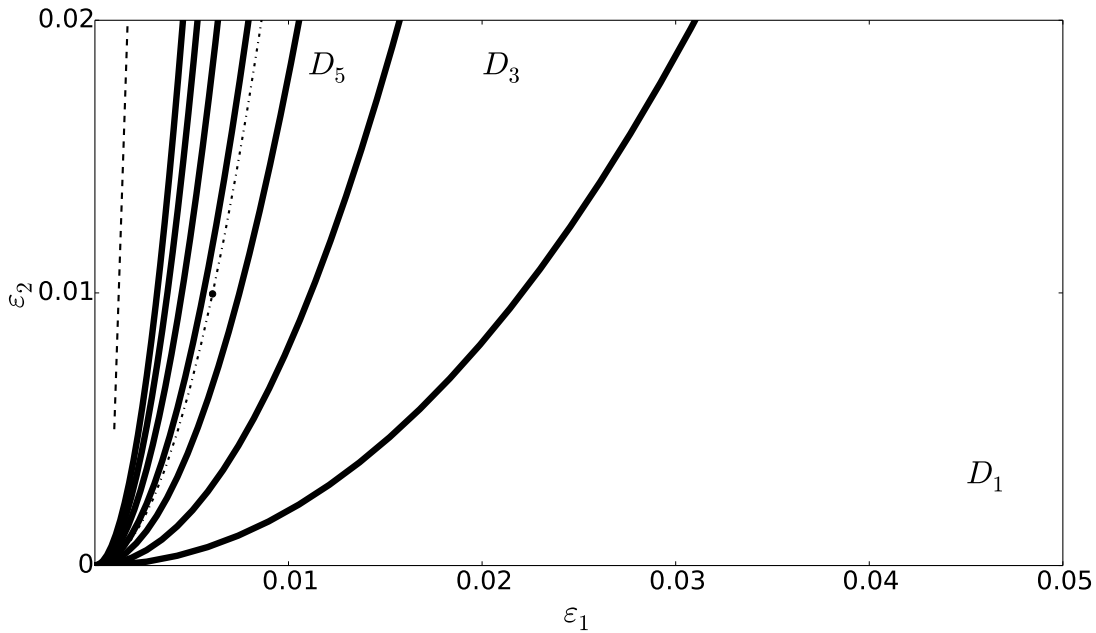


Рис. 3.5: Картина D -разбиения области параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ уравнения Икеды для $c = 0$

При значениях параметров $c = 0, \psi = 1.0$ находимся в области D_1 , соответствующей наличию одного корня уравнения (14) в правой комплексной полуплоскости. Для этого случая было найдено шесть устойчивых периодических решений. Эти решения приведены на рис. 3.6, 3.7. Жирной линией изображены решения, построенные по

формулам (46)-(47), тонкой линией изображены графики точных решений, полученные численным интегрированием уравнения (12). В качестве начальных значений при интегрировании уравнения (12) выбирались функции, полученные согласно (46)-(47).

Аналогичная картина сохраняется и для значений параметров из области D_3 (рис. 3.8, 3.9).

При дальнейшем увеличении параметра ψ и переходе в область D_5 возникают новые устойчивые периодические решения. Решения для значений параметров $\psi = 1.49, \psi = 1.51, \psi = 1.55$ приведены на рис. 3.10, 3.11, 3.12, 3.13, 3.14, 3.15. Таким образом, в поведении решений уравнения (12) наблюдается мультистабильность.

Зафиксируем значение параметра $\psi = 1.51$ и будем увеличивать ζ . Этому случаю будет соответствовать точечная линия на рис. 3.5. При увеличении значения параметра ζ произойдет переход от периодических колебаний к более сложным, в дальнейшем - хаотическим. Этот переход для одного решения уравнения (12) приведен на рис. 3.16.

3.4 Бифуркационный анализ поведения решений уравнения Икеды при рождении парных состояний равновесия $x_*^-(\mu, c)$ и $x_*^+(\mu, c)$

3.4.1 Анализ устойчивости состояний равновесия $x_*^-(\mu, c)$ и $x_*^+(\mu, c)$

Рассмотрим случай рождения парных состояний равновесия для определенности в случае $c = \pi/3$. В этом случае при $\mu_1(\pi/3) = \mu_* \approx 2.4, x_* \approx 2.2$ появляются кратные корни $x_*^-(\mu^*, \pi/3) = x_*^+(\mu^*, \pi/3) = 2.2, \mu_1(c) \cos(x_*^\pm(\mu^*, \pi/3)) = 1$. Этим корням при $\mu > \mu_1(c)$ отвечают парные состояния равновесия $x_*^-(\mu, \pi/3)$ и $x_*^+(\mu, \pi/3)$ уравнения (2).

Изучим поведение решений уравнения (2) в окрестности состояний равновесия $x_*^-(\mu, \pi/3)$ и $x_*^+(\mu, \pi/3)$. Для этого представим $x_*(\mu)$ в виде формального ряда по степеням μ

$$x_*(\mu) = x_* + \mu^{1/2}x_1 + \mu x_2 + \mu^{3/2}x_3 + \dots \quad (48)$$

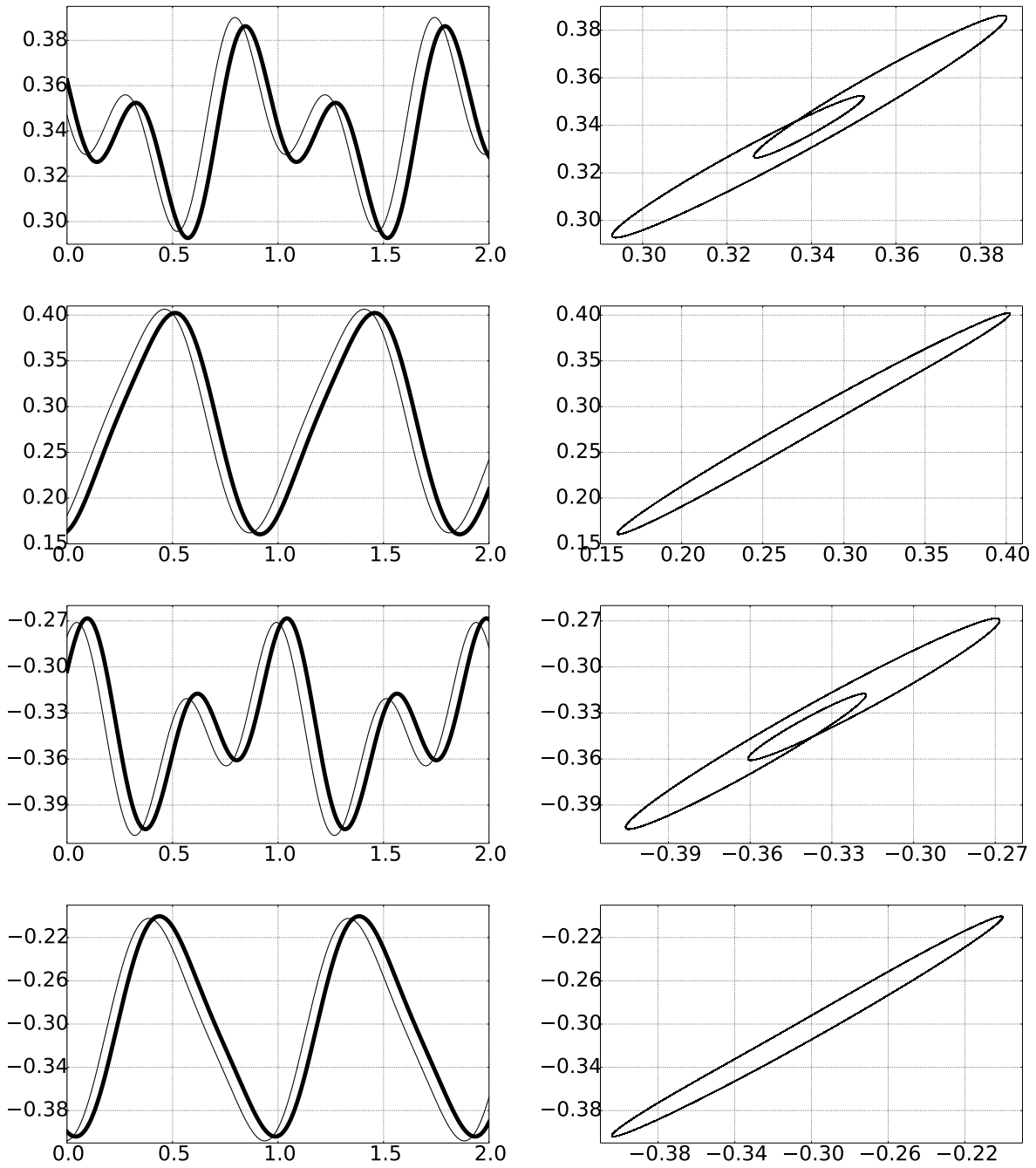


Рис. 3.6: Периодические решения уравнения Икеды и проекции их фазовых портретов на плоскость $(y(t), y(t - 1))$ для $\zeta = 0.1, \psi = 1.0$

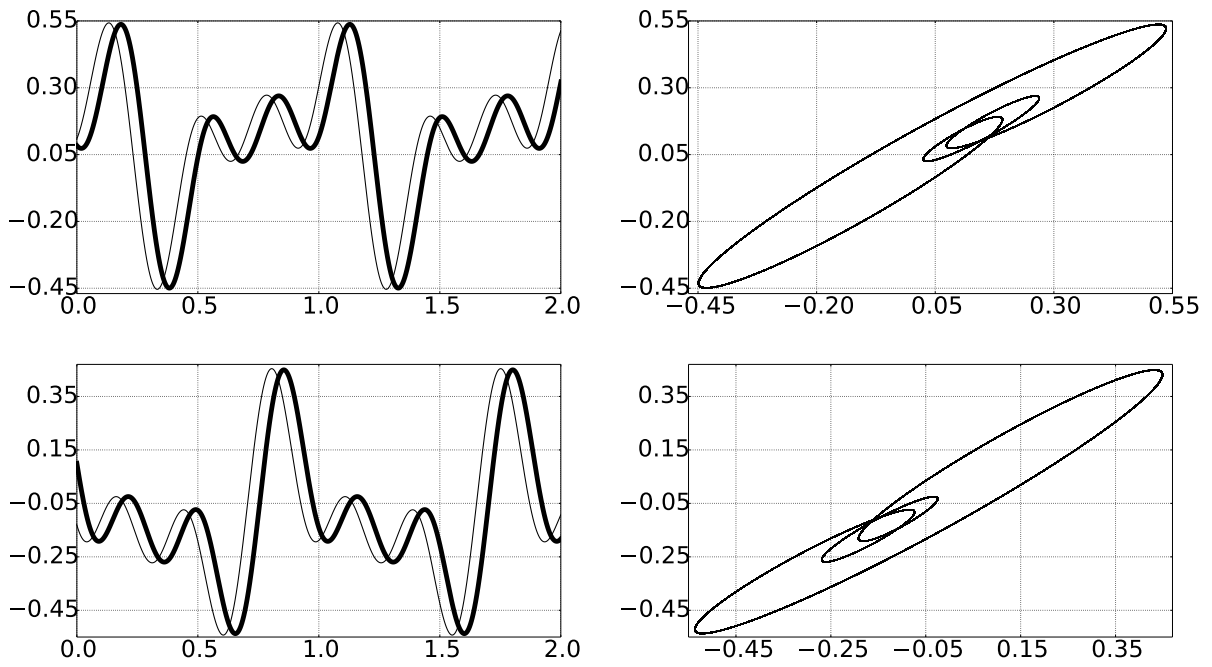


Рис. 3.7: Периодические решения уравнения Икеды и проекции фазовых портретов на плоскость $(y(t), y(t - 1))$ для $\zeta = 0.1, \psi = 1.0$

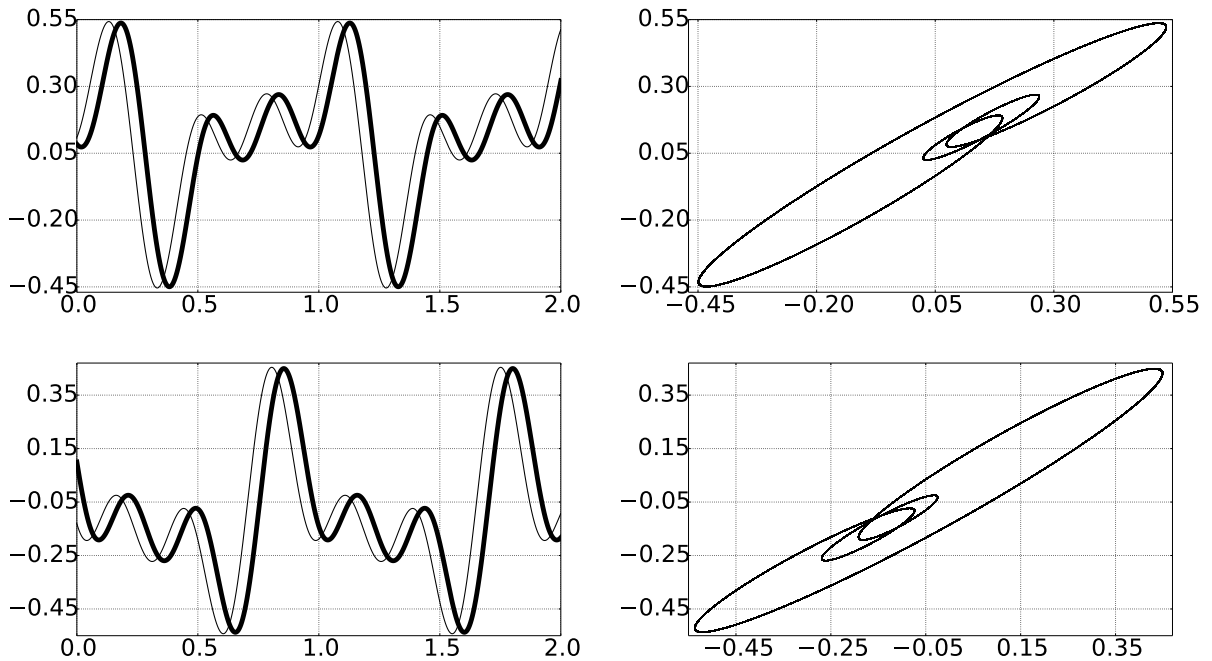


Рис. 3.8: Периодические решения уравнения Икеды и проекции фазовых портретов на плоскость $(y(t), y(t - 1))$ для $\zeta = 0.1, \psi = 1.4$

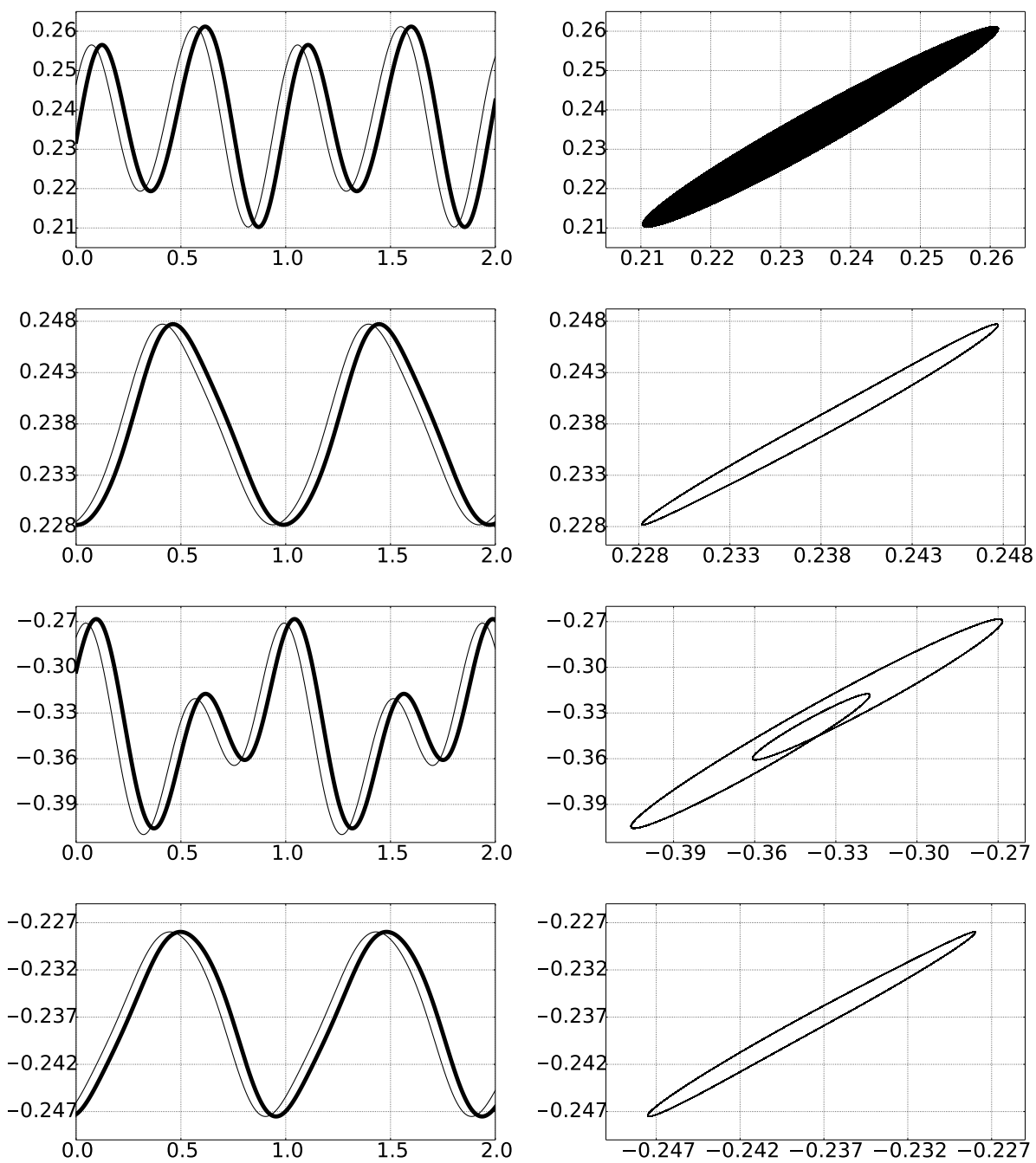


Рис. 3.9: Периодические решения уравнения Икеды и их проекции их фазовых портретов на плоскость $(y(t), y(t - 1))$ для $\zeta = 0.1, \psi = 1.4$

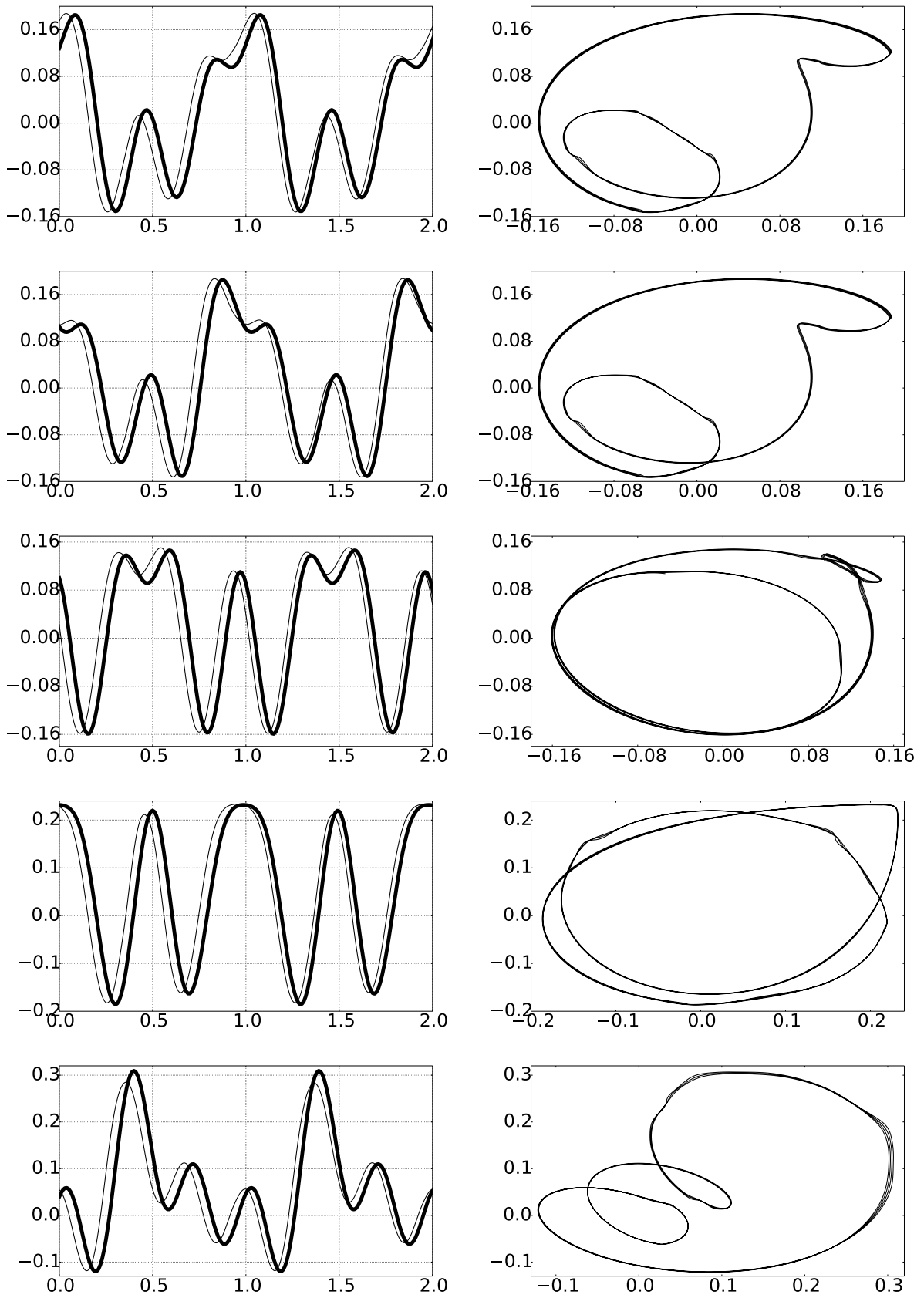


Рис. 3.10: Периодические решения уравнения Икеды и проекции фазовых портретов на плоскость $(y(t), y(t-1))$ для $\zeta = 0.1, \psi = 1.49$

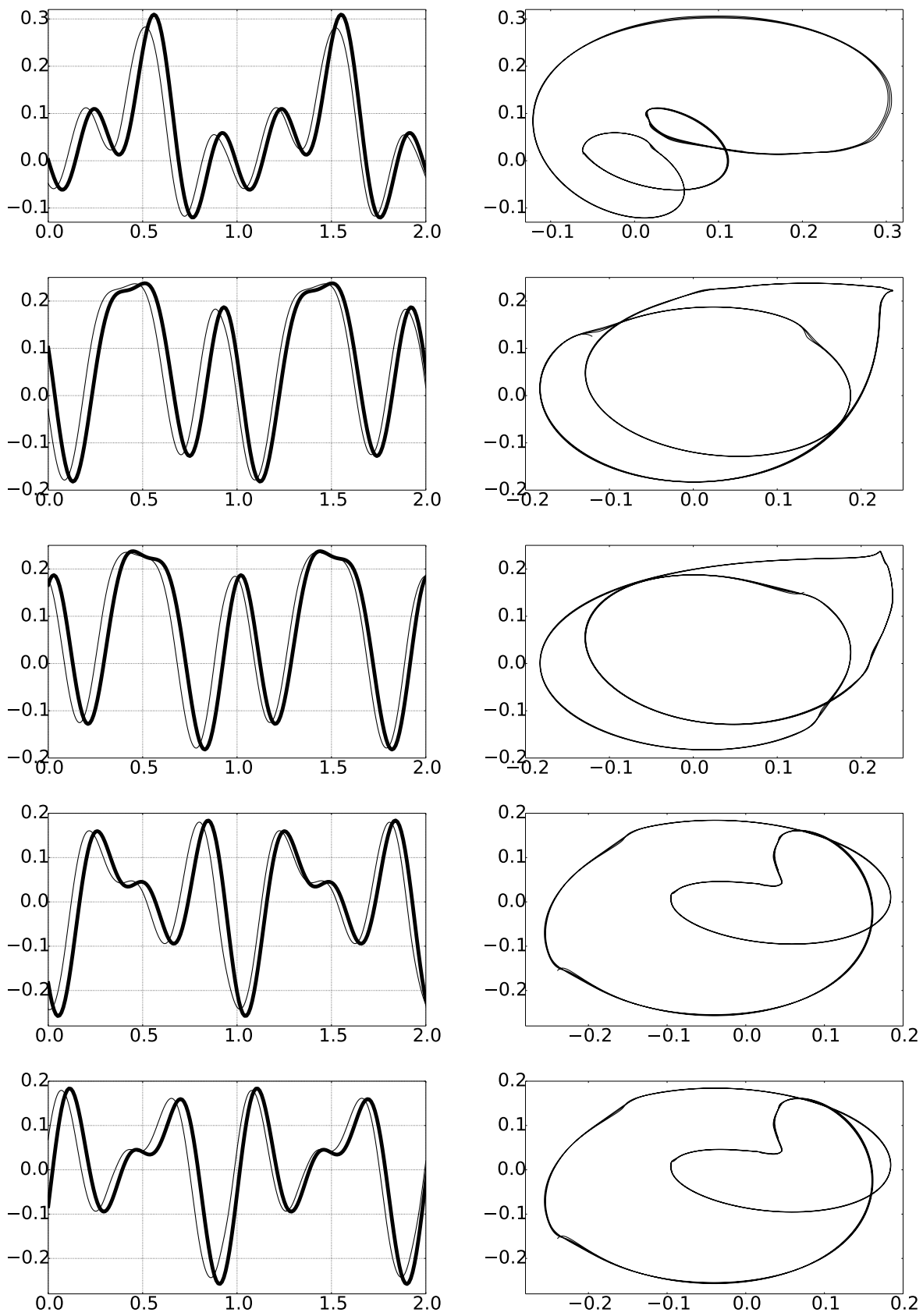


Рис. 3.11: Периодические решения уравнения Икеды и проекции их фазовых портретов на плоскость $(y(t), y(t - 1))$ для $\zeta = 0.1, \psi = 1.49$

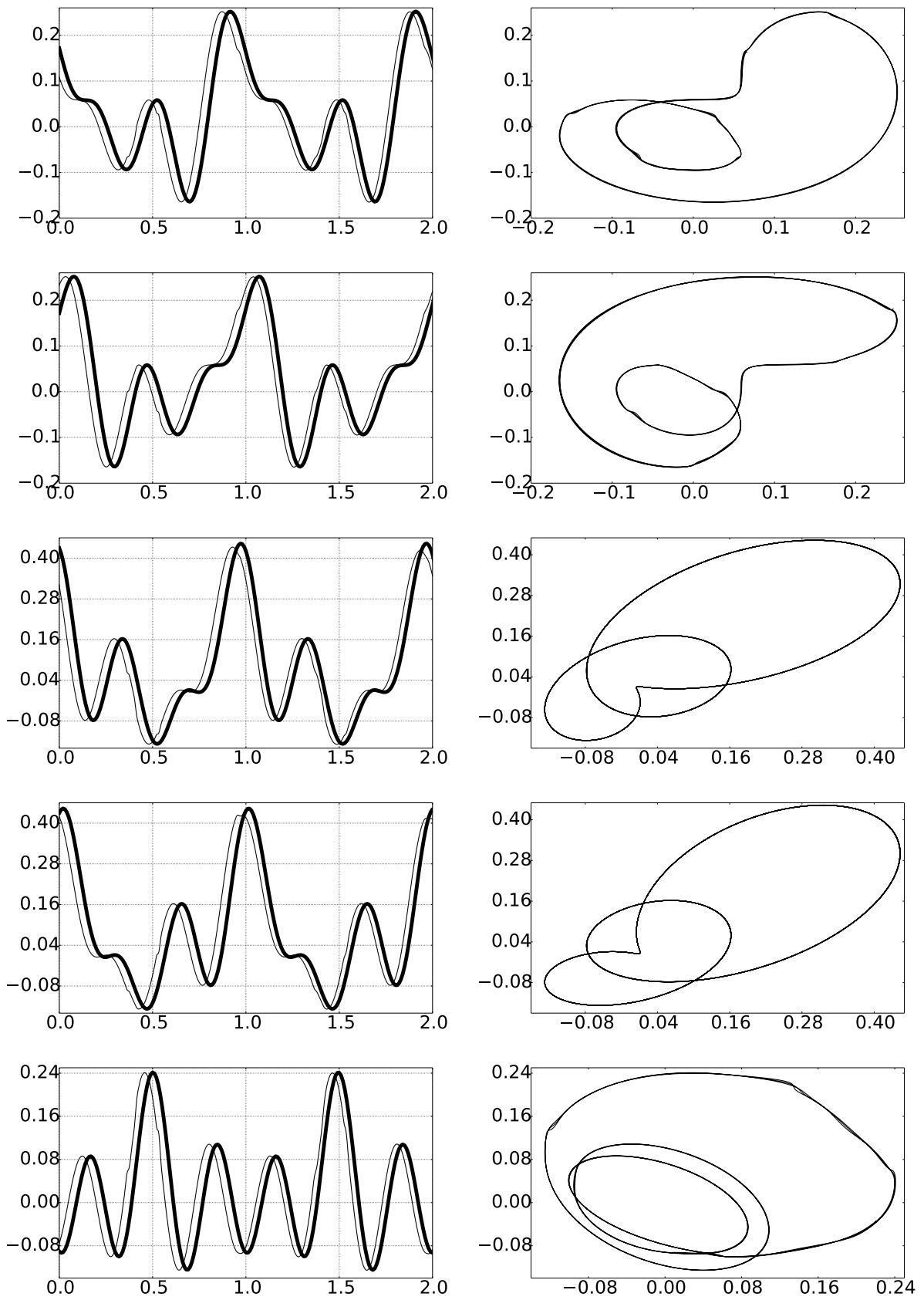


Рис. 3.12: Периодические решения уравнения Икеды и проекции фазовых портретов на плоскость $(y(t), y(t-1))$ для $\zeta = 0.1, \psi = 1.51$

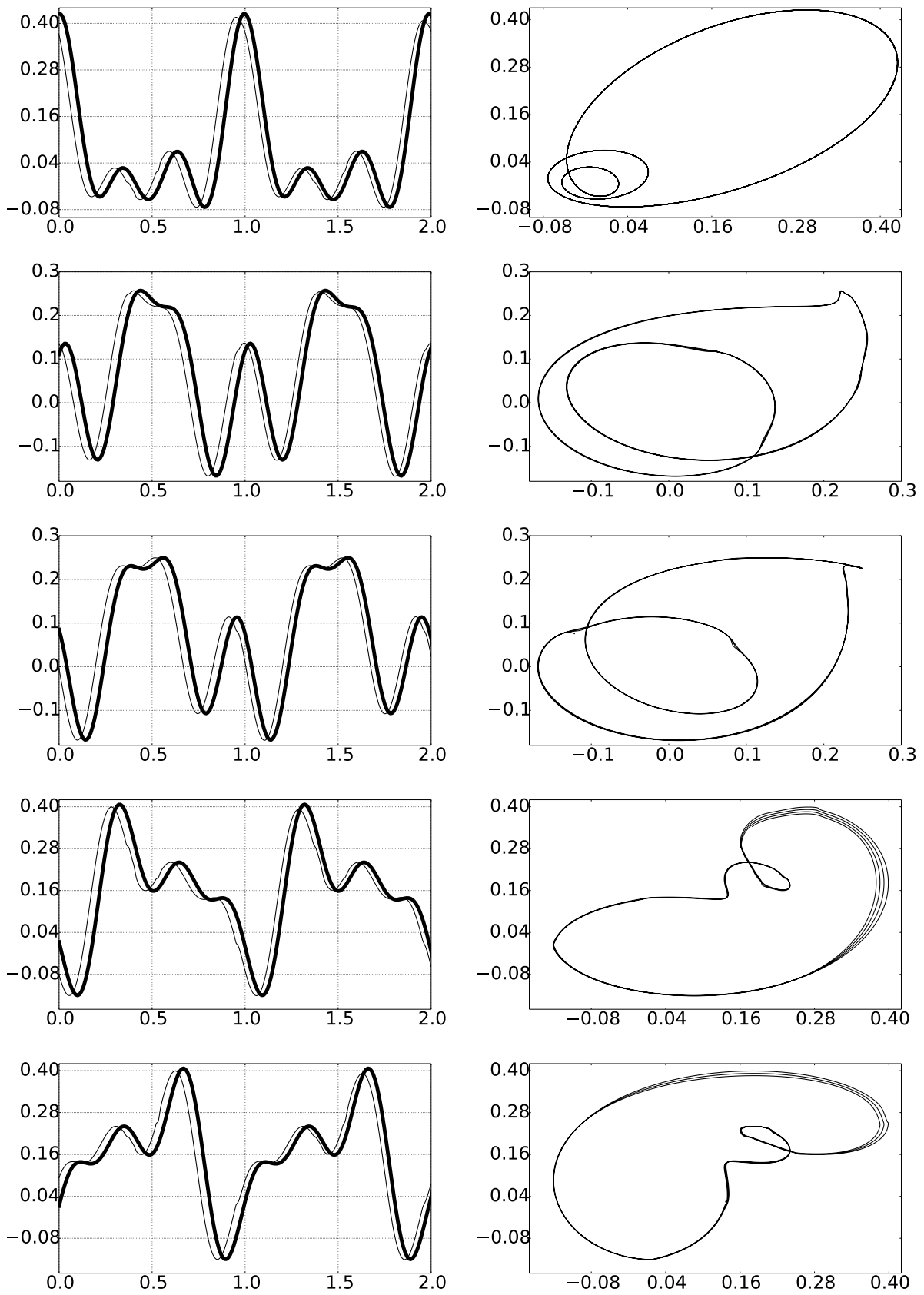


Рис. 3.13: Периодические решения уравнения Икеды и проекции их фазовых портретов на плоскость $(y(t), y(t - 1))$ для $\zeta = 0.1, \psi = 1.51$

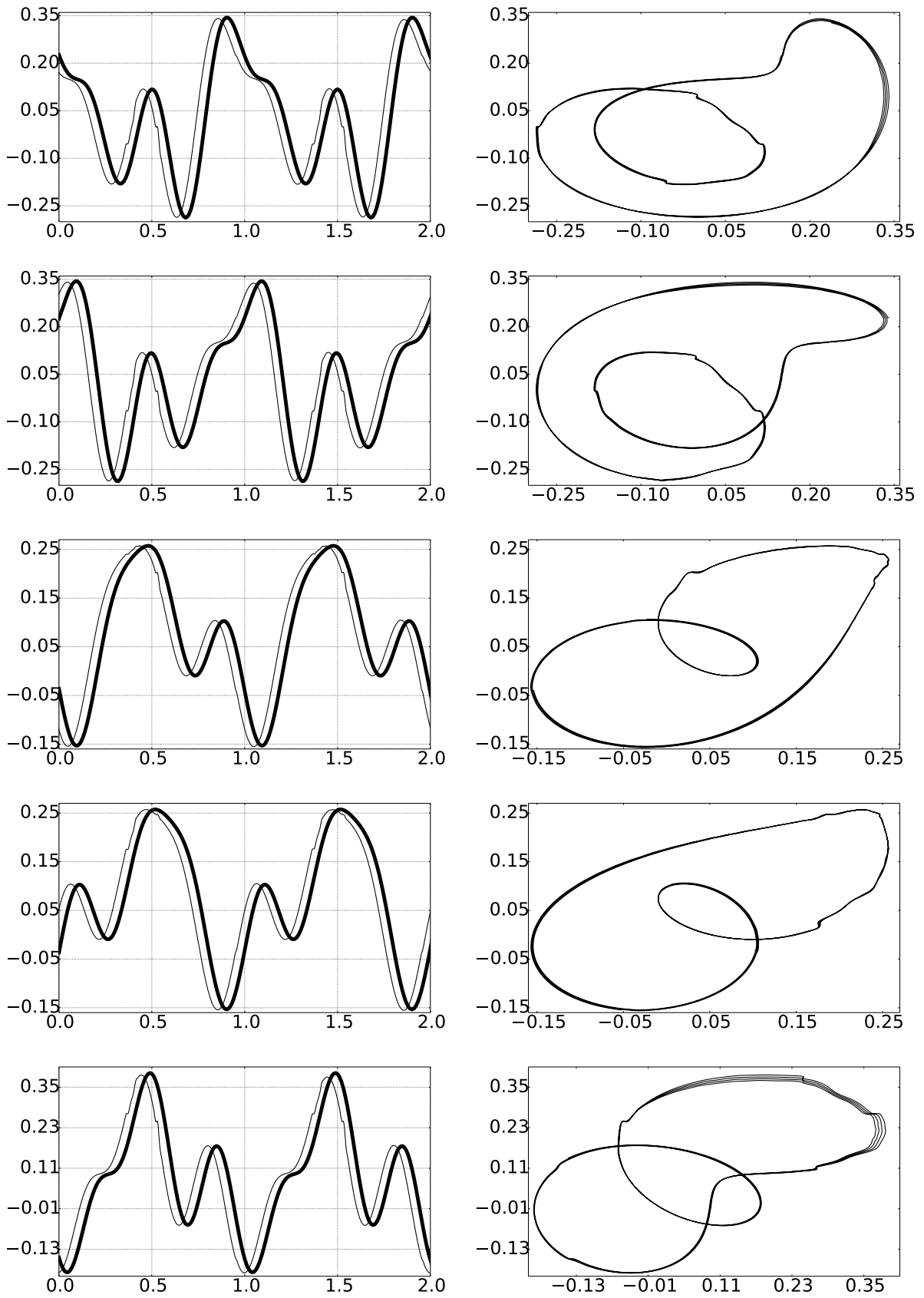


Рис. 3.14: Периодические решения уравнения Икеды и проекции фазовых портретов на плоскость $(y(t), y(t-1))$ для $\zeta = 0.1, \psi = 1.55$

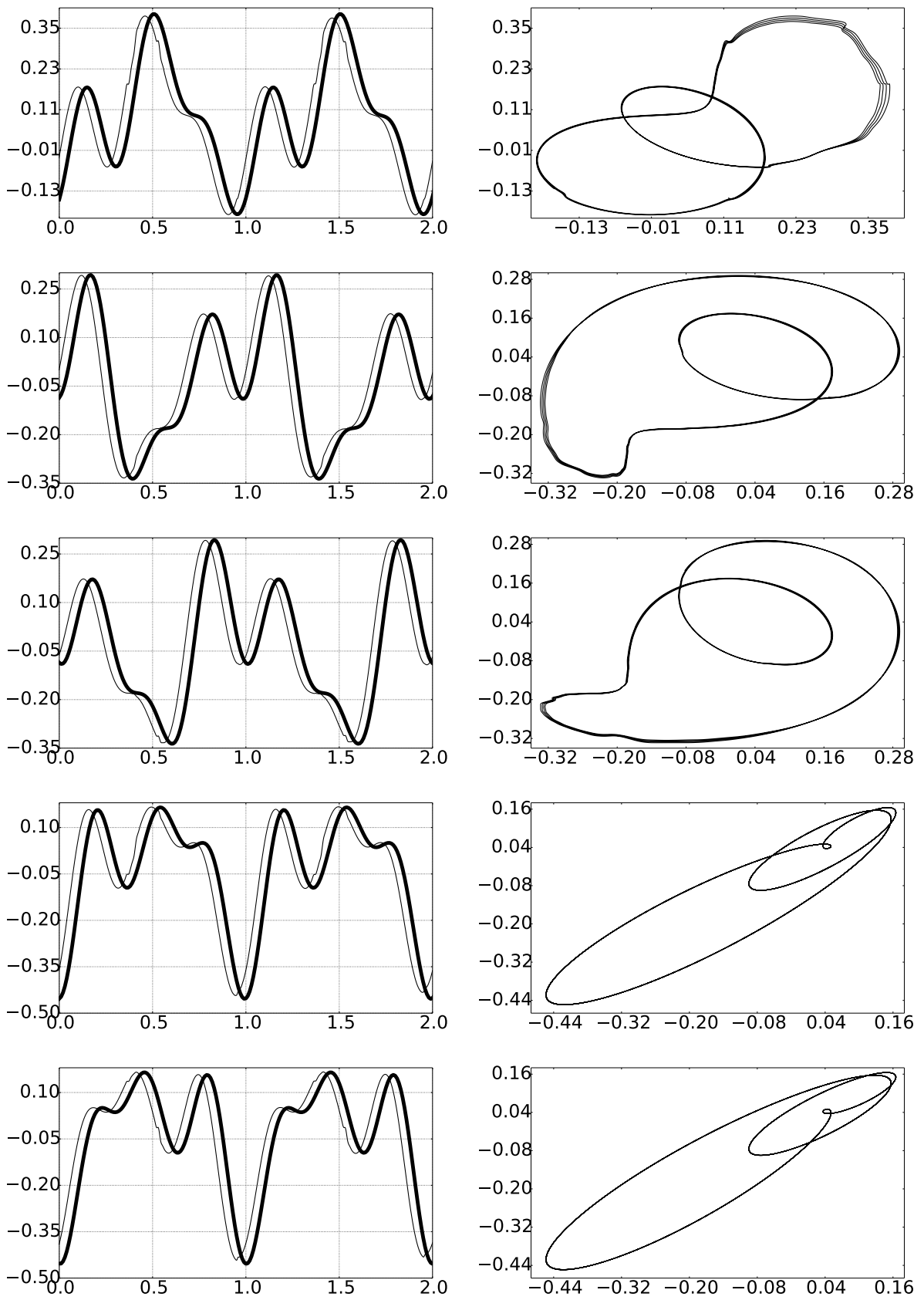


Рис. 3.15: Периодические решения уравнения Икеды и проекции их фазовых портретов на плоскость $(y(t), y(t - 1))$ для $\zeta = 0.1, \psi = 1.55$

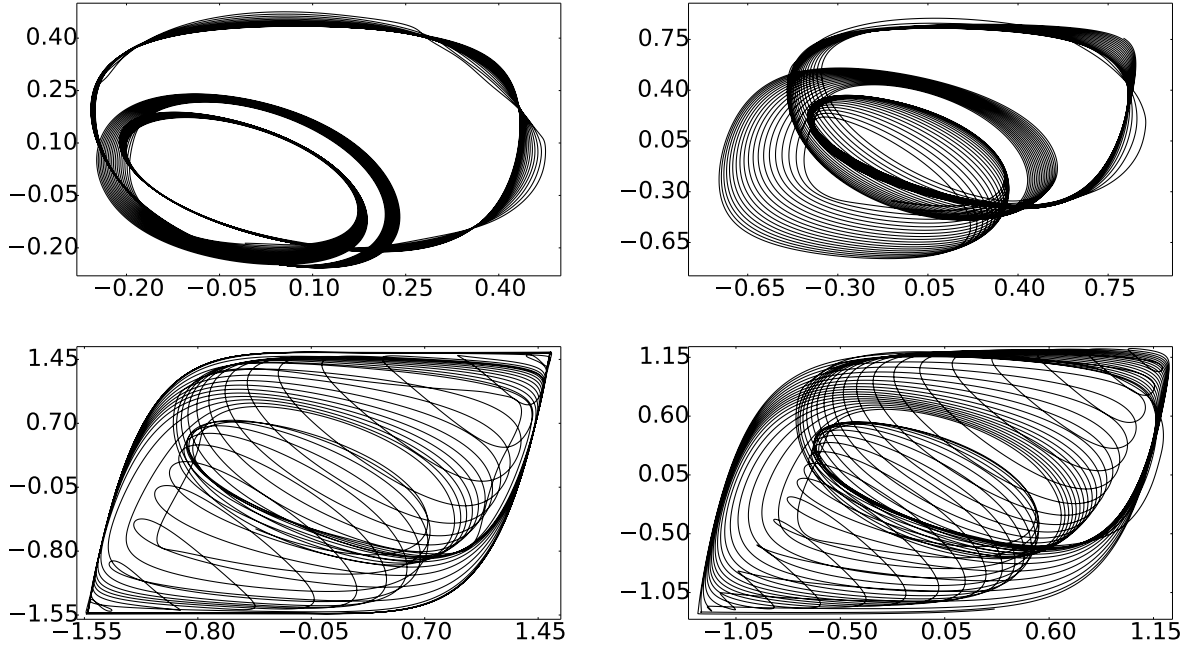


Рис. 3.16: Проекция фазовых портретов периодических решений уравнения Икеды на плоскость $(y(t), y(t-1))$ для $\zeta = 0.2, 0.8, 1.0, 1.2$, $\psi = 1.51$

и положим $\mu = \mu_*(1 + \mu)$. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях μ , получаем следующие формулы для состояний равновесия

$$x_*^\pm(\mu, \pi/3) = x_* \pm \mu^{1/2} + \mu \frac{1}{3x_*} \mp \mu^{3/2} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 + \frac{1}{9x_*^2}\right) + O(\mu^2) \quad (49)$$

и следующее верное равенство

$$\mu_*(1 + \mu) \cos(x_*^\pm(\mu) - \pi/3) = 1 \mp x_* \sqrt{2} \mu^{1/2} + \dots \quad (50)$$

Выполним в уравнении (2) замену $x(t) = x_*^-(\mu, \pi/3) + y(t)$, представим нелинейную часть уравнения (2) рядом Тейлора и учитывая (49), (50) получим следующее уравнение

$$\varepsilon_1 \dot{y}(t) + y(t) - (1 + x_* \sqrt{2} \mu^{1/2} + \dots) y(t-1) + 1/2 x_* y^2(t-1) + 1/6 (1 + x_* \sqrt{2} \mu^{1/2} + \dots) y^3(t-1) + \dots \quad (51)$$

Положим $\varepsilon_2 = x_* \sqrt{2} \mu^{1/2}$. Уравнение (51) примет вид

$$\varepsilon_1 \dot{y}(t) + y(t) - (1 + \varepsilon_2) y(t-1) + 1/2 x_* y^2(t-1) + 1/6 (1 + \varepsilon_2) y^3(t-1) + \dots \quad (52)$$

Линейная часть уравнения (52) имеет следующий вид

$$\varepsilon_1 \dot{y}(t) + y(t) - (1 + \varepsilon_2) y(t-1) = 0, \quad (53)$$

а корни её характеристического уравнения определяются следующей формулой

$$\begin{aligned}\lambda_k(\varepsilon) &= \gamma_k(\varepsilon) + i(\pi k + \sigma_k(\varepsilon)) = i\pi k + \ln(1 + \varepsilon_2) - \ln(1 + \varepsilon_1(i\pi k + \ln(1 + \varepsilon_2))) + O(|\varepsilon|^2), \\ \gamma_k(\varepsilon) &= \ln(1 + \varepsilon_2) - \ln((1 + \varepsilon_1 \ln(1 + \varepsilon_2))^2 + \varepsilon_1^2 \pi^2 k^2)/2 + O(|\varepsilon|^2), \\ \sigma_k(\varepsilon) &= -\arccos((1 + \varepsilon_1 \ln(1 + \varepsilon_2))/((1 + \varepsilon_1 \ln(1 + \varepsilon_2))^2 + \varepsilon_1^2 \pi^2 k^2)^{1/2}) + O(|\varepsilon|^2), \\ & k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \quad (54)\end{aligned}$$

3.4.2 Построение нормальной формы

Построение нормальной формы уравнения (52) проводится по схеме, изложенной в главе 2.

Обозначим через l_2 пространство комплексных последовательностей вида $z = (z_0, z_2, z_{-2}, z_4, z_{-4}, \dots)$, $z_k \in C$, $z_{-k} = \bar{z}_k$, $\|z\|_{l_2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |z_k|^2 < \infty$. Через l_2^1 обозначим подпространство l_2 комплексных последовательностей $z = (z_0, z_2, z_{-2}, z_4, z_{-4}, \dots)$ для которых $\|z\|_{l_2^1}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k(\varepsilon)|^2 |z_k|^2 < \infty$ и $\|\sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k \lambda_k(\varepsilon) e_k(s; \varepsilon)\|_C < \infty$. В дальнейшем $s(r_0) = \{z \in l_2, \|z\|_{l_2} \leq r_0\}$, $s^1(r_0) = \{z \in l_2^1, \|z\|_{l_2^1} \leq r_0\}$.

Система дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_k = \lambda_k(\varepsilon) z_k + \sum_{(k_1, k_2) \in \Omega_k^2} d_{k_1 k_2(\varepsilon)} z_{k_1} z_{k_2} \quad (55)$$

в пространстве l_2 с областью определения правой части $s^1(r_0)$, гладко зависящей от ε , в которой $\Omega_k^2 = \{(k_1, k_2) : k_j = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, k = k_1 + k_2\}$, называется нормальной формой уравнения (52).

Функции $d_{k_1 k_2 k_3}(s; \varepsilon)$ имеют следующий вид

$$\begin{aligned}d_{k_1 k_2}(s; \varepsilon) &= (\varepsilon_1 - (1 + \varepsilon_2))(e^{-\lambda_{k_1 k_2}(\varepsilon)} - e^{-\lambda_k(\varepsilon)}) / (-\lambda_{k_1 k_2}(\varepsilon) + \lambda_k(\varepsilon))^{-1} (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon \lambda_k(\varepsilon)) * \\ & * \left(-\frac{1}{2}\right) p, \quad p = 1, 2, \quad (56)\end{aligned}$$

$$\lambda_{k_1 k_2}(\varepsilon) = \lambda_{k_1}(\varepsilon) + \lambda_{k_2}(\varepsilon).$$

3.4.3 Анализ нормальной формы

Перейдем в системе уравнений (55) к полярным координатам, положив $z_0 = \rho_0$, $z_k = \zeta^2 \rho_k e^{i\tau_k} x_*^{-1}$ ($\rho_k \geq 0$, $-\infty < \tau_k < \infty$). В результате получим систему урав-

нений вида

$$\dot{\rho}_k = \gamma_k(\varepsilon)\rho_k + R_k(\rho, \tau; \varepsilon), k = 0, 2, 4, \dots \quad (57)$$

$$\dot{\tau}_k = \pi k + \sigma_k(\varepsilon) + \zeta^2 T_k(\rho, \tau; \varepsilon), k = 2, 4, \dots, \quad (58)$$

в которой $\gamma_k(\varepsilon)$ и $\sigma_k(\varepsilon)$ определены в (54), $\rho = (\rho_0, \rho_2, \dots)$, $\rho_0 \in R$, $\rho_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \rho_k^2 < \infty$, $\tau = (\tau_2, \tau_4, \dots)$, функционалы $R_k(\cdot)$, $T_k(\cdot)$ гладко зависят от входящих переменных и параметров, 2π -периодические по τ_j .

Рассмотрим нормальную форму (55), в которой положим $z_k = 0$, $k = \pm 6, \pm 8, \dots$. В результате имеем систему уравнений

$$\dot{z}_0 = \lambda_0(\varepsilon)z_0 + d_{00}(\varepsilon)z_0^2 + d_{-22}(\varepsilon)z_{-2}z_2 + d_{-44}(\varepsilon)z_{-4}z_4, \quad (59)$$

$$\dot{z}_2 = \lambda_2(\varepsilon)z_2 + d_{02}(\varepsilon)z_0z_2 + d_{-24}(\varepsilon)z_{-2}z_4, \quad (60)$$

$$\dot{z}_4 = \lambda_4(\varepsilon)z_4 + d_{04}(\varepsilon)z_0z_4 + d_{22}(\varepsilon)z_2^2. \quad (61)$$

Уравнения для z_{-2} , z_{-4} получаются сопряжением (60)-(61) с учетом равенств $\bar{\lambda}_k(\varepsilon) = \lambda_{-k}(\varepsilon)$, $\bar{z}_k(\varepsilon) = z_{-k}(\varepsilon)$. Обозначив $d_*(\varepsilon) = a_*(\varepsilon) + ib_*(\varepsilon)$, $A_*(\varepsilon) = |d_*(\varepsilon)|$, $\beta_*(\varepsilon) = \arg d_*(\varepsilon)$, перейдем к полярным переменным x , ρ_2 , ρ_4 , τ_2 , τ_4 . В результате получим систему уравнений

$$\dot{\rho}_0 = \gamma_0(\varepsilon)\rho_0 + a_{00}(\varepsilon)\rho_0^2 + a_{-22}(\varepsilon)\rho_2^2 + a_{-44}(\varepsilon)\rho_4^2, \quad (62)$$

$$\dot{\rho}_2 = \gamma_2(\varepsilon)\rho_2 + a_{02}(\varepsilon)\rho_0\rho_2 + A_{-24}(\varepsilon)\cos(\tau_4 - 2\tau_2 + \beta_{-24}(\varepsilon))\rho_2\rho_4, \quad (63)$$

$$\dot{\rho}_4 = \gamma_4(\varepsilon)\rho_4 + a_{04}(\varepsilon)\rho_0\rho_4 + A_{22}(\varepsilon)\cos(2\tau_2 - \tau_4 + \beta_{22}(\varepsilon))\rho_2^2, \quad (64)$$

$$\dot{\tau}_2 = 2\pi + \sigma_2(\varepsilon) + b_{02}(\varepsilon)x + A_{-24}(\varepsilon)\sin(\tau_4 - 2\tau_2 + \beta_{-24}(\varepsilon))\rho_4, \quad (65)$$

$$\dot{\tau}_4 = 4\pi + \sigma_4(\varepsilon) + b_{04}(\varepsilon)\rho_0 + A_{22}(\varepsilon)\sin(2\tau_2 - \tau_4 + \beta_{22}(\varepsilon))\rho_2^2/\rho_4. \quad (66)$$

Перейдем в (62)-(66) к переменным ρ_0 , ρ_2 , ρ_4 , $\theta_2 = \tau_4 - 2\tau_2$ и $\tau = \tau_2$. В результате получим систему уравнений

$$\dot{\rho}_0 = \gamma_0(\varepsilon)\rho_0 + a_{00}(\varepsilon)\rho_0^2 + a_{-22}(\varepsilon)\rho_2^2 + a_{-44}(\varepsilon)\rho_4^2, \quad (67)$$

$$\dot{\rho}_2 = \gamma_2(\varepsilon)\rho_2 + a_{02}(\varepsilon)\rho_0\rho_2 + A_{-24}(\varepsilon)\cos(\theta_2 + \beta_{-24}(\varepsilon))\rho_2\rho_4, \quad (68)$$

$$\dot{\rho}_4 = \gamma_4(\varepsilon)\rho_4 + a_{04}(\varepsilon)\rho_0\rho_4 + A_{22}(\varepsilon)\cos(-\theta_2 + \beta_{22}(\varepsilon))\rho_2^2, \quad (69)$$

$$\dot{\theta}_2 = \delta_2(\varepsilon) + b_{04}(\varepsilon)\rho_0 + A_{22}(\varepsilon) \sin(\theta_2 + \beta_{22}(\varepsilon))\rho_2^2/\rho_4 - 2(b_{02}(\varepsilon)x + A_{-24}(\varepsilon) \sin(\theta_2 + \beta_{-24}(\varepsilon))\rho_4), \quad (70)$$

”медленных“ переменных, где $\delta_2(\varepsilon) = \sigma_4(\varepsilon) - 2\sigma_2(\varepsilon)$, и уравнение ”быстрой“ переменной

$$\dot{\tau} = 2\pi + \sigma_2(\varepsilon) + b_{02}(\varepsilon)x + A_{-24}(\varepsilon) \sin(\tau_4 - 2\tau_2 + \beta_{-24}(\varepsilon))\rho_4. \quad (71)$$

Положим теперь в (55) все $z_k(t) \neq 0$. Покажем один из возможных способов ввести переменные θ_k . Любой другой способ является линейной комбинацией введенных переменных. В качестве ”быстрой“ переменной берем τ_2 . Рассматриваем ”усеченные“ конечномерные системы последовательно полагая в (55) $z_k = 0, k = \pm 6, \pm 8, \dots$, затем $k = \pm 8, \pm 10, \dots$ и т.д. Первый случай рассмотрен выше. Во втором случае к системе (67)-(70) добавляются два новых уравнения для переменных z_6 и z_{-6} . При этом в правой части уравнения для ρ_0 резонансных мономов не появляется, в правой части уравнения для z_2 появляется резонансный моном $z_{-4}z_6$, а в правой части уравнения для z_6 - моном z_2z_4 . При переходе к полярным координатам это приводит к появлению слагаемых, зависящих от выражений $\tau_6 - \tau_4 - \tau_2, -\tau_6 + \tau_4 + \tau_2$. В качестве новой ”медленной“ переменной θ_4 берем выражение $\tau_6 - \tau_4 - \tau_2$. В результате имеем две дополнительные ”медленные“ переменные ρ_6, θ_4 . Система уравнений для $x, \rho_2, \rho_4, \rho_6, \theta_2, \theta_4$ будет иметь вид, аналогичный (67)-(70). При рассмотрении следующей ”усеченной“ системы в правой части уравнения появятся резонансные мономы $z_{-6}z_8, z_{-4}z_8, z_{-2}z_8$ для правых частей для уравнений z_2, z_4, z_6 соответственно, а при переходе к полярным координатам слагаемые, зависящие от выражений $\tau_8 - \tau_6 - \tau_2 = \theta_6$. Имеем две новые ”медленные“ переменные ρ_8, θ_6 . В общем случае на очередном шаге добавляются две новые ”медленные“ переменные $\rho_{k_0}, \theta_{k_0-2} = \tau_{k_0} - \tau_{k_0-2} - \tau_2$. Продолжая этот процесс осуществим переход к ”медленным“ переменным $\rho = (\rho_0, \rho_2, \dots), \theta = (\theta_2, \theta_4, \dots)$ и ”быстрой“ τ , а соответствующая система дифференциальных уравнений для их определения будет иметь вид

$$\dot{\rho}_k = \gamma_k(\varepsilon)\rho_k + R_k(\rho, \theta; \varepsilon), \quad k = 0, 2, 4, \dots, \quad (72)$$

$$\dot{\theta}_k = \delta_k(\varepsilon) + \Theta_k(\rho, \theta; \varepsilon), \quad k = 2, 4, \dots, \quad (73)$$

$$\dot{\tau} = 2\pi + \sigma_1(\varepsilon) + T(\rho, \theta; \varepsilon), \quad (74)$$

в которой функционалы $R_k(\cdot)$, $\Theta_k(\cdot)$, $T(\cdot)$ — 2π -периодические по θ_k , остальные их свойства и функции $\delta_k(\varepsilon)$ ($\delta_k(0) = 0$) определяются свойствами функций и функционалов, входящих в (67)-(70). Особо отметим, что правая часть (74) не зависит от переменной τ .

Фазовым пространством системы уравнений (72)-(74) будет произведение пространств $l_2 \otimes c \times R$, здесь $l_2 = \{\rho = (x, \rho_2, \rho_4, \dots)\}$, $\rho_k \geq 0$, $\|\rho\|_{l_2}^2 = x + \sum_{k=2}^{\infty} \rho_k^2 < \infty$, $c = \{\theta = (\theta_2, \theta_4, \dots)\}$, $\|\theta\|_c = \sup_k |\theta_k| < \infty$. Областью определения правой части (72)-(74) является произведение пространств $l_2^1 \otimes c_0 \times R$, здесь $l_2^1 = \{\rho \in l_2, \|\rho\|_{l_2^1}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \rho_k^2 < \infty\}$, $c_0 = \{\theta = (\theta_2, \theta_4, \dots) \in c, 0 \leq \theta_k < 2\pi\}$.

Введем в области $\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \varepsilon_1 > 0, |\varepsilon| < \varepsilon_0\}$ переменные $\zeta \geq 0$ и $\pi/2 < \psi < \pi/2$, положив

$$\zeta = (\varepsilon_1^2 + |\varepsilon_2|)^{1/2}, \varepsilon_1 = \zeta \cos \psi, \varepsilon_2 = \zeta^2 \sin^2 \psi \operatorname{sign} \psi. \quad (75)$$

Подставим (75) в (72)-(74), нормировав также $\rho_k \rightarrow \zeta^2 \rho_k$. В результате получим систему уравнений

$$\dot{\rho}_k = \gamma_k(\psi, \zeta) \rho_k + \zeta^2 R_k(\rho, \theta; \psi, \zeta), \quad k = 0, 2, 4, \dots, \quad (76)$$

$$\dot{\theta}_k = \delta_k(\psi, \zeta) + \zeta^2 \Theta_k(\rho, \theta; \psi, \zeta), \quad k = 2, 4, \dots, \quad (77)$$

$$\dot{\tau} = \pi + \sigma_1(\psi, \zeta) + \zeta^2 T(\rho, \theta; \psi, \zeta), \quad (78)$$

в которой свойства функций и функционалов определяются свойствами функций и функционалов системы (72)-(74).

Нормируем время $t \rightarrow t/\zeta^2$. В результате имеем

$$\dot{\rho}_k = \gamma_k^*(\psi, \zeta) \rho_k + R_k(\rho, \theta; \psi, \zeta), \quad (R_k(\rho, \theta; \psi, 0) \equiv R_k(\rho, \theta)), \quad k = 0, 2, 4, \dots, \quad (79)$$

$$\dot{\theta}_k = \delta_k^*(\psi, \zeta) + \Theta_k(\rho, \theta; \psi, \zeta), \quad (\Theta_k(\rho, \theta; \psi, 0) \equiv \Theta_k(\rho, \theta)), \quad k = 2, 4, \dots, \quad (80)$$

где $\gamma_k^*(\psi, \zeta) = \gamma_k(\psi, \zeta)/\zeta^2$, $\delta_k^*(\psi, \zeta) = \delta_k(\psi, \zeta)/\zeta^2$ согласно (54) непрерывные функции $\pi/2 \leq \psi \leq -\pi/2, 0 \leq \zeta \leq \zeta_0$. При этом

$$\gamma_k^*(\psi, 0) = \gamma_k(\psi) = \sin^2 \psi \operatorname{sign} \psi - \pi^2 k^2 \cos^2 \psi / 2, \quad \delta_k^*(\psi, 0) = 0. \quad (81)$$

Рассмотрим главную часть системы уравнений "медленных" переменных (79)- (80)

$$\dot{\rho}_k = \gamma_k(\psi) \rho_k + R_k(\rho, \theta), \quad k = 0, 2, 4, \dots, \quad (82)$$

$$\dot{\theta}_k = \Theta_k(\rho, \theta; \psi, \zeta), \quad (\Theta_k(\rho, \theta; \psi, 0) \equiv \Theta_k(\rho, \theta)), \quad k = 2, 4, \dots, \quad (83)$$

Теорема 2. Пусть при некотором ψ система уравнений (82)-(83) имеет экспоненциально устойчивое или неустойчивое состояние равновесия $(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)) \in E_0^1$. В последнем случае t характеристических показателей (с учетом кратностей) линеаризованной на $(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi))$ системы уравнений положительны. Тогда существует такое $\zeta_0 > 0$, что при $0 < \zeta < \zeta_0$ уравнение (52) с учетом выражений (81) имеет периодическое решение того же характера устойчивости. При этом размерность неустойчивого многообразия периодического решения равна t . Для периодического решения справедлива следующая формула

$$y^*(\tau; \psi, \zeta) = \zeta^2(\rho_0^*(\psi)) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{2k}^*(\tau, \psi) \cos(k\tau + \sum_{j=1}^{2k-2} \theta_{2j}^*(\psi)) + O(\zeta^3), \quad (84)$$

$$\dot{\tau} = 2\pi - \zeta \cos \psi + \zeta^2 \cos \psi^2 + O(\zeta^3). \quad (85)$$

3.4.4 Результаты численного исследования периодических решений нормальной формы

Приведем результаты численного анализа нормальной формы. При значениях параметров $\psi = 1.51, \zeta = 0.1$ удалось построить шесть устойчивых периодических решений уравнения (52) по формулам (84)-(85). Они приведены на рис. 3.17, 3.18. Необходимо отметить, что одновременно с каждым из устойчивых периодических решений рождается одно неустойчивое решение. При увеличении параметра ζ найденные решения теряют свою устойчивость.

3.5 Выводы

В данной главе рассматривалось уравнение Икеды. Найдены состояния равновесия для различных значений параметров, исследована их устойчивость. Выделены три вида потери устойчивости состояний равновесия. С помощью метода равномерной нормализации построены периодические решения уравнения Икеды для этих случаев. Изучены бифуркации полученных решений в зависимости от параметров уравнения. Показана возможность явлений мультистабильности и хаотической мультистабильности.

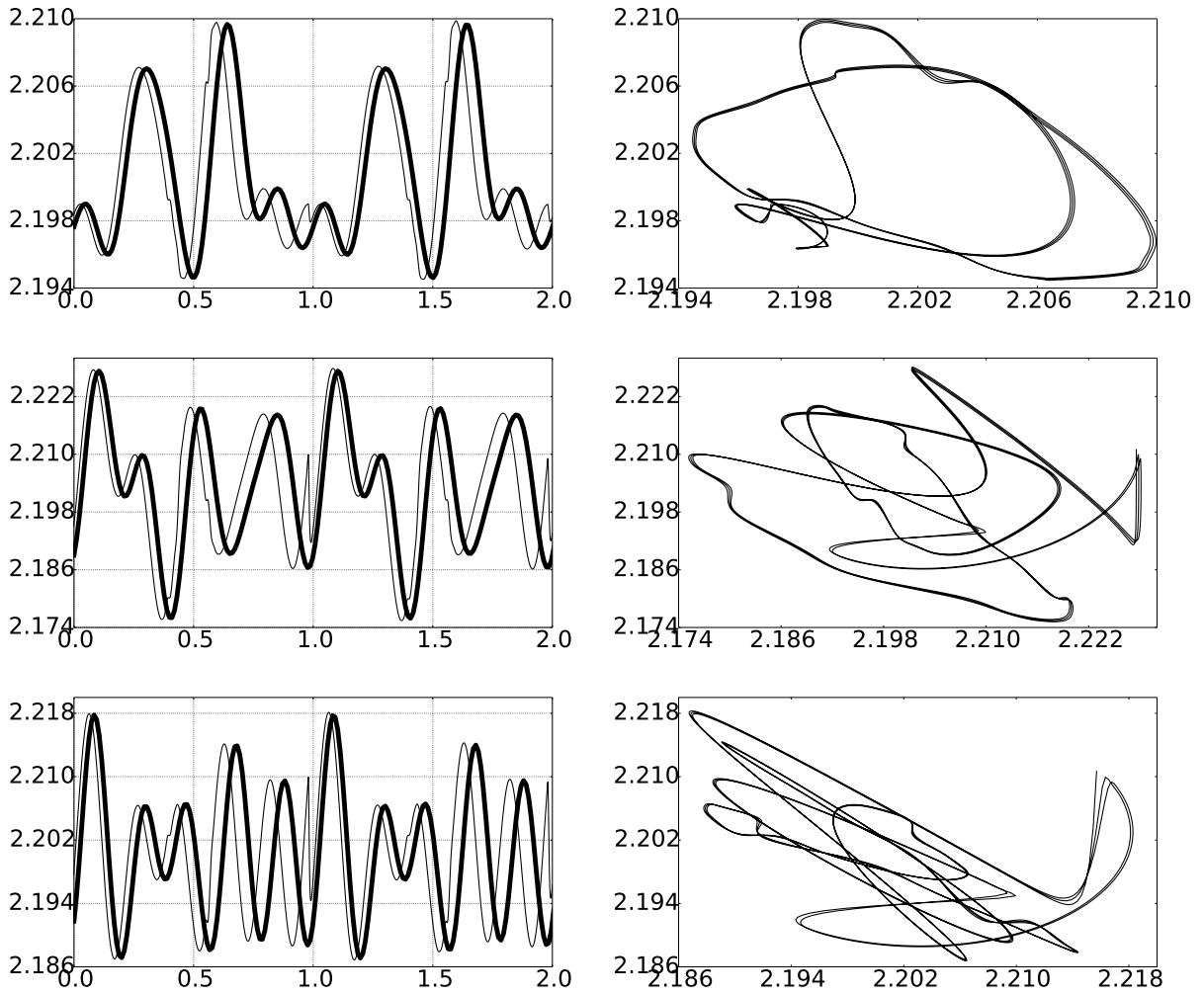


Рис. 3.17: Периодические решения уравнения Икеды и проекции их фазовых портретов на плоскость $(y(t), y(t - 1))$ для $\zeta = 0.1, \psi = 1.51$

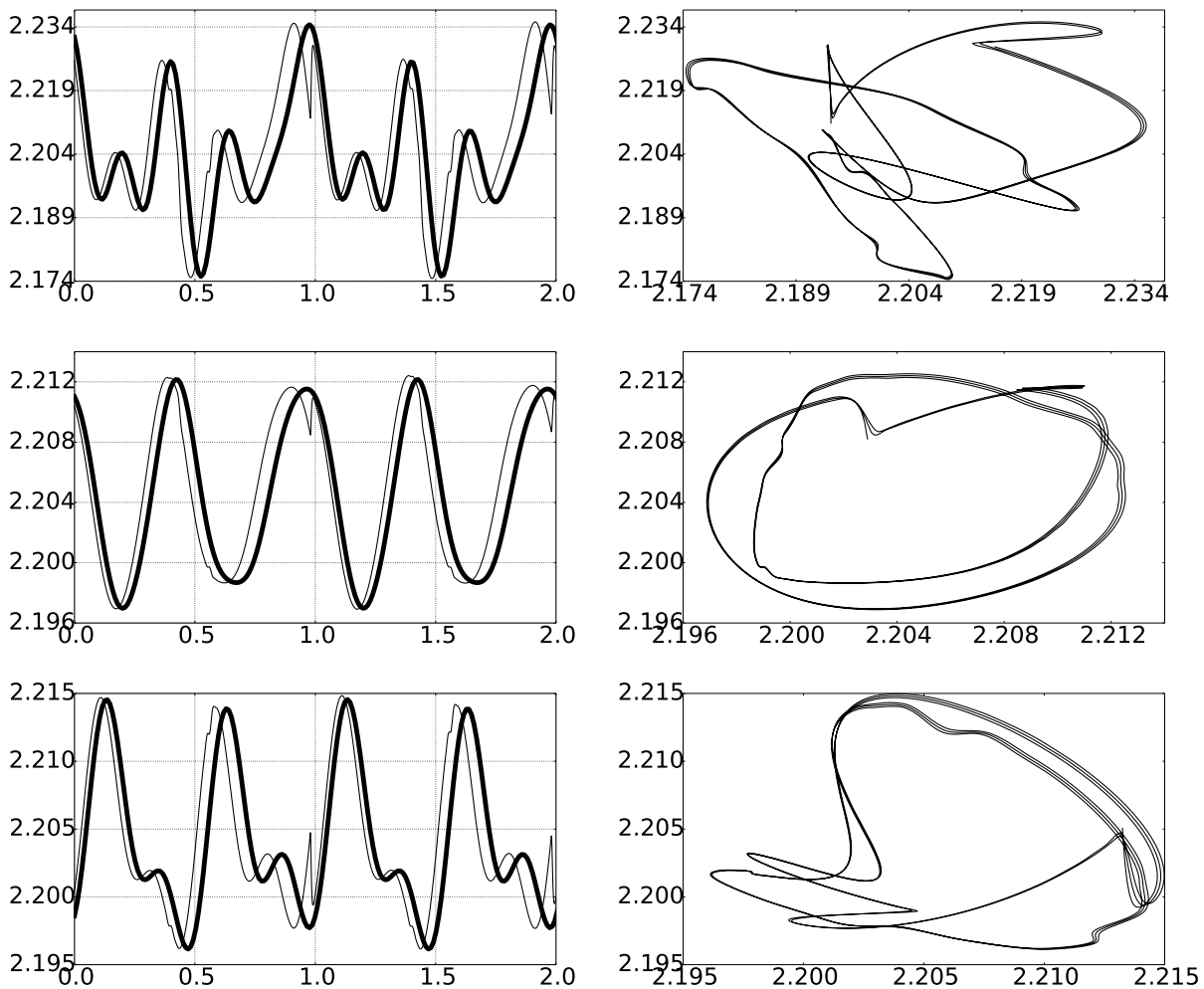


Рис. 3.18: Периодические решения уравнения Икеды и проекции их фазовых портретов на плоскость $(y(t), y(t - 1))$ для $\zeta = 0.1, \psi = 1.51$

Заключение

В первой главе рассмотрено дифференциально - разностное уравнение второго порядка, содержащее нелинейные запаздывающие слагаемые от неизвестной функции и от ее производной.

1. Проведен анализ его линейной части и изучено расположение корней характеристического уравнения с помощью метода D - разбиений. Показана возможность потери устойчивости нулевого решения, связанная с прохождением через мнимую ось двух пар чисто мнимых корней характеристического квазиполинома, находящихся в резонансном соотношении 1:3.
2. Изучены бифурцирующие автоколебательные решения в критическом случае внутреннего резонанса 1:3. Найдены значения параметров, вблизи которых могут быть найдены хаотические колебания. Для полученного хаотического аттрактора вычислены ляпуновские показатели и ляпуновская размерность.

Во второй главе для уравнения Мэкки - Гласса исследованы периодические решения, бифурцирующие из единственного положительного состояния равновесия с помощью метода равномерной нормализации сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

1. Проведен анализ устойчивости нулевого решения уравнения, для этого изучено расположение корней характеристического уравнения линейной части.
2. Построена нормальная форма - счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих уравнения для “быстрых” и “медленных” переменных. Проведен анализ состояний равновесия уравнений “медленных” переменных и построены периодические решения уравнения Мэкки - Гласса. Изу-

чены бифуркации периодических решений в зависимости от параметров уравнения и их устойчивость.

3. Показана возможность явления мультистабильности - одновременной бифуркации большого числа устойчивых периодических решений и хаотической мультистабильности - одновременного сосуществования нескольких хаотических аттракторов.

В третьей главе рассмотрено уравнение Икеды.

1. Изучена динамика состояний равновесия в зависимости от параметров уравнения и исследована их устойчивость. Выделены три вида потери устойчивости состояний равновесия.
2. С помощью метода равномерной нормализации сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом построены периодические решения уравнения Икеды для этих случаев и изучены бифуркации полученных решений в зависимости от параметров уравнения. Показана возможность мультистабильности и хаотической мультистабильности.

Литература

- [1] *Minorski N.* Control problems / N. Minorski // Journal of the Franklin Institute. — 1941. — Vol. 232, No 6. — P. 519-551.
- [2] *Minorski N.* Self-excited mechanical oscillations / N. Minorski // J. Appl. Phys. — 1948. — Vol. 19. — P. 332-338.
- [3] *Minorski N.* Self-excited oscillations in systems possessing retarded actions / N. Minorski // Proc. of Seventh Intern. Congress. Appl. Mech. — 1948. — Vol. 4. — P. 43-51.
- [4] *Горелик Г.С.* К теории запаздывающей обратной связи / Г.С. Горелик // ЖТФ. — 1939. — Т. 9, N 50. — С. 450-454.
- [5] *Пинни Э.* Обыкновенные дифференциально - разностные уравнения / Пинни Э. — М.: 1961. — 248 с.
- [6] *Колесов, Ю.С.* Автоколебания в системах с запаздыванием / Ю.С. Колесов, Д.И. Швитра. Вильнюс: Мокслас, 1979. — 146 с.
- [7] *Гласс, Л.* От часов к хаосу: Ритмы жизни / Л. Гласс, М. Мэкки. — М.: Мир, 1991. — 248 с.
- [8] *Ikeda, K.* Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system / K. Ikeda // Optics Communications. — 1979. — Vol. 30, Iss. 2. — P. 257-261.
- [9] *Ikeda, K.* Optical instabilities / K. Ikeda, R. W. Boyd // Cambridge : Cambridge University Press, 1985. — P.85.

- [10] *Glass, L. Mackey M.C.* Oscillation and chaos in physiological control systems / L. Glass, M. C. Mackey // Science, New Series. — 1977. — Vol. 197, Iss. 4300. — P. 287-289.
- [11] *Ikeda, K.* Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity / K. Ikeda, H. Daido, O. Akimoto // Phys. Rev. Lett. — 1980. — Vol. 45, No 9. — P. 709.
- [12] *Ikeda, K.* Successive Higher-Harmonic Bifurcations in Systems with Delayed Feedback / K. Ikeda, K. Kondo, O. Akimoto // Phys. Rev. Lett. — 1982. — Vol. 49, No 20. — P. 1467.
- [13] *Lourenco, C.* Control of chaos in networks with delay: a model for synchronization of cortical tissue / C. Lourenco, A. Bablouantz // Neural Computation. — 1994. — Vol. 6, No 6. — P. 1141–1154
- [14] *Campbell S. A.* Limit cycles, tori, and complex dynamics in a second-order differential equation with delayed negative feedback / S. A. Campbell, J. Belair, T. Ohira, J. G. Milton // J. Dyn. Diff. Eq. — 1995. — No 7. — P. 213-236.
- [15] *Marcus C.M.* Stability of analog neural networks with delay / C.M. Marcus, R.M. Westerwelt // Phys. Rev. A. — 1989. — No 39. — P. 347.
- [16] *Ikeda, K.* High-dimensional chaotic behavior in system with time-delayed feedback / K. Ikeda, K. Matsumoto // Physica D. — 1987. — Vol. 29. — P. 223-235.
- [17] *Ikeda, K.* Mackey–Glass type delay differential equations near the boundary of absolute stability / K. Ikeda, H. Daido, O. Akimoto // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1980. — Vol. 275, No 2. — P. 747–760.
- [18] *Ikeda, K.* Numerical bifurcation control of Mackey–Glass system / K. Ikeda, R. Boyd // Applied Mathematical Modelling. — 1985. — Vol. 35, No 27. — P. 3460–3472.
- [19] *Sprot J.* Intricate routes to chaos in the Mackey–Glass delayed feedback system / J. Sprot // Physics Letters A. — 2012. — Vol. 376, No 30-31. — P. 2109–2116.

- [20] *Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* Определение параметров уравнения Икеды по зашумленному временному ряду / В.И. Пономаренко, М.Д. Прохоров // Письма в ЖТФ. — 2005. — Т. 31, N 6. — С. 73–78.
- [21] *Larger L., Goedgebuier J-P., Udaltsov V.* A necessary and sufficient condition for the existence of positive periodic solutions of a model of hematopoiesis / L. Larger, J-P. Goedgebuier, V. Udaltsov // Computers & Mathematics with Applications. — 2004. — Vol. 54, No 6. — P. 840–849.
- [22] *Шарковский, А.Н.* Разностные уравнения и их приложения / Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю. — Киев: Наукова думка, 1986. — 280 с.
- [23] *Кащенко, С.А.* Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностного уравнения с малым множителем при производной / С.А. Кащенко // Дифференц. уравнения. — 1989. — Т. 25, N 6. — С. 1448-1451.
- [24] *Кащенко, С.А.* Бифуркационные особенности сингулярно возмущенного уравнения с запаздыванием / С.А. Кащенко // Сиб. матем. журн. — 1999. — Т. 40, N 3. — С. 567-572.
- [25] *Кащенко, И.С.* Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием / И.С. Кащенко // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2008. — Т. 48, N 12. — С. 2141-2150.
- [26] *Кубышкин, Е. П.* Анализ колебательных решений одного нелинейного сингулярно возмущенного дифференциально-разностного уравнения / Е. П. Кубышкин, А. Ю. Назаров // Математическое моделирование. Оптимальное управление. Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. — 2012. — N 5(2). — С. 118-125.
- [27] *Кубышкин, Е. П.* Метод равномерной нормализации в исследовании периодических решений дифференциально-разностных уравнений с малым параметром при производной / Е. П. Кубышкин // Моделирование и анализ информационных систем. — 2012. — Т. 19, N 3. — С. 143.

- [28] *Глызин, Д.С.* Пакет программ для анализа динамических систем “Tracer”. Заявка №2008610548 от 14.02.2008г. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2008611464. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 24.03.2008г.
- [29] *Глызин, Д.С.* Кубышкин Е.П., Морякова А.Р. О нулях некоторых характеристических квазиполиномов / Д.С. Глызин, Е.П. Кубышкин, А.Р. Морякова // Моделирование и анализ информационных систем. — 2015. — Т. 22, N 1. — С. 74-84.
- [30] *Кубышкин, Е.П.* Исследование колебательных решений дифференциально-разностного уравнения второго порядка в одном критическом случае / Е.П. Кубышкин, А.Р. Морякова // Моделирование и анализ информационных систем. — 2015. — Т. 22, N 3. — С. 439-447.
- [31] *Кубышкин Е.П.* Бифуркации периодических решений уравнения Мэкки–Гласса / Е.П. Кубышкин, А.Р. Морякова // Моделирование и анализ информационных систем. — 2016. — Т. 23, N 6. — С. 784-803.
- [32] *Kubyshkin, E. P.* Analysis of Bifurcations of Periodic Solutions of Ikeda Equation / E. P. Kubyshkin, A. R. Moriakova // Nonlinear phenomena in complex systems. — 2017. — Vol. 20, No 1. — P. 40-49.
- [33] *Кубышкин Е.П.* Особенности поведения решений нелинейной динамической системы в случае двухчастотного параметрического резонанса / Е.П. Кубышкин, А.Ю. Коверга // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.. — Т. 53, N 5. — P. 737-743.
- [34] *Хейл, Дж.* Колебания в нелинейных системах / Дж. Хейл. — М.: Наука, 1966. — 232 с.
- [35] *Шиманов, С. Н.* К теории квазилинейных систем с запаздыванием / С. Н. Шиманов // ПММ. — 1959. — Т. 23, N 5. — С. 836-844.
- [36] *Рубаник, В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием / В. П. Рубаник. — М.: Наука, 1969. — 287 с.

- [37] *Капранов, М.В.* Теория колебаний в радиотехнике / М.В. Капранов, М.В. Кулешов, В.Н. Уткин. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
- [38] *Неймарк, Ю. И.* D-разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости линейризованных распределенных систем) / Ю. И. Неймарк // ПММ. — 1949. — Т. 13, N 4. — С. 349–380.
- [39] *Куликов, А. Н.* О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространства / А. Н. Куликов // Исследования по устойчивости и теории колебаний. / Под. ред. Ю. С. Колесова. — Ярославль:ЯрГУ, 1976. — С. 114–129.
- [40] *Марсден Дж.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак - Кракен. — М.: Мир, 1966. — 368 с.
- [41] *Глызин, Д. С.* Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора / Д. С. Глызин, С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, N 2. — С. 268 – 273.
- [42] *Liz E., Trofimchuk E., Trofimchuk S.* Mackey–Glass type delay differential equations near the boundary of absolute stability / E. Liz, E. Trofimchuk, S. Trofimchuk // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2002. — Vol. 275, No 2. — P. 747–760.
- [43] *Su H., Ding X., Li W.* Numerical bifurcation control of Mackey–Glass system / H. Su, X. Ding, W. Li // Applied Mathematical Modelling. — 2011. — Vol. 35, No 27. — P. 3460–3472.
- [44] *Berezansky L., Braverman E.* Mackey-glass equation with variable coefficients / L. Berezansky, Braverman E. // Computers & Mathematics with Applications. — 2006. — Vol. 51, No 1. — P. 1–16.
- [45] *Wu X.-M., Li J.-W., Zhou H.-Q.* A necessary and sufficient condition for the existence of positive periodic solutions of a model of hematopoiesis / X.-M. Wu, J.-W.Li, H.-Q.

Zhou // Computers & Mathematics with Applications. — 2007. — Vol. 54, No 6. — P. 840–849.

- [46] *Junges L., Gallas J.* Intricate routes to chaos in the Mackey–Glass delayed feedback system / L. Junges, J. Gallas // Physics Letters A. — 2012. — Vol. 376, No 30-31. — P. 2109–2116.
- [47] *Amil P., Cabeza C., Masoller C., Marti A.* Organization and identification of solutions in the time-delayed Mackey-Glass model / P. Amil, C. Cabeza, C. Masoller, A. Marti // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2015. — Vol. 25, No 4. — P. 043112.
- [48] *Gyori, I.*, Oscillation Theory of Delay Differential Equations / I. Gyori, G. Ladas. — Oxford: Clarendon Press, 1991. — 380 p.
- [49] *Bellman, R.* Differential-Difference Equations / R. Bellman, K. L. Cooke. — New York – London: Academic Press, 1963. — 478 p.
- [50] *Krasnoselskii, M.A.* Approximate solution of operator equation / M. A. Krasnoselskii, G. M. Vainikko, R. P. Zabreyko, Ya. B. Ruticki, V. Ya Stetsenko. — Springer Netherlands, 1972. — 484 p.