На правах рукописи

Трещёв Валентин Сергеевич

ТЕОРЕМЫ О ВОЗМУЩЕНИЯХ ВЕКТОРНО НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ИССЛЕДОВАНИИ НЕЯВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ВОРОНЕЖ — 2017

Работа выполнена на кафедре функционального анализа
института математики, естествознания и информационных технологий
Тамбовского государственного университета имени Г.Р. Державина

Научный руководитель: Жуковский Евгений Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики, ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г.Р. Державина».

Официальные оппоненты: Корнев Сергей Викторович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет», кафедра высшей математики, доцент;

Максимов Владимир Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет», кафедра информационных систем и математических методов в экономике, профессор.

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (ННГУ)».

Защита состоится «26» декабря 2017 г. в 16:30 на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, г. Воронеж, Университетская площадь, д. 1, ВГУ, математический факультет, ауд. 335.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте
http:// www.science.vsu.ru/dissertations/5064/Диссертация_Трещёв_В.С..pdf

Автореферат разослан «____» ________ 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.038.22,
доктор физико-математических наук,
профессор Гликлих Юрий Евгеньевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. При описании некоторых процессов физики, экономики, медицины необходимо учитывать зависимость параметров модели от скорости изменения состояния объектов. Такие процессы моделируются неявными дифференциальными уравнениями. Исследование неявных дифференциальных уравнений является актуальной теоретической задачей, востребованной в теории управления, теории уравнений с частными производными, теории уравнений релаксационного типа, в задачах физики плазмы, теории колебаний, при анализе поведения сети асимптотических линий на поверхности и др.[1] Уточнение ряда моделей перечисленных физических процессов приводит к неявным дифференциальным уравнениям с отклоняющимся аргументом. Методы исследования неявных дифференциальных уравнений обычно основаны на их разрешении относительно производной. Исследованию краевых задач, задач управления и оптимизации для неявных дифференциальных уравнений посвящено лишь небольшое число работ. Еще в меньшей степени изучены неявные функционально-дифференциальные уравнения. В диссертации предлагаются новые методы исследования неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, основанные на результатах о векторно накрывающих отображениях метрических пространств.

Свойства накрывания и метрической регулярности отображений подробно исследованы, широко и эффективно применяются для исследования различных систем дифференциальных уравнений. Один из первых результатов в этом направлении — условия локальной накрываемости отображений банаховых пространств получены L. M. Graves[2]. В 80-х годах 20 века А.А. Милютиным[3] доказана теорема о липшицевых возмущениях накрывающих отображений, утверждающая, что сумма α-накрывающего и β-липшицева отображений, действующих из метрического пространства в линейное метрическое пространство, при $\alpha > \beta$ есть $(\alpha-\beta)$-накрывающее отображение. А.В. Арутюновым[4] получены утверждения о существовании и свойствах точек совпадения многозначных и, в частном случае, однозначных накрывающего и липшицева отображений, действующих в метрических пространствах. Исследование систем уравнений потребовало определить векторный аналог свойства накрывания (метрической регулярности) для отображений, действующих в произведениях метрических пространств[5].

---

[1] Давыдов А.А. Неявные дифференциальные уравнения и качественная теория управляемых систем на поверхностях. Дисс. ... д.ф.-м.н., М., 1993

[2] *L. M. Graves.* Some mapping theorems // Duke Math. J.. 1950. V. 17. P. 111–114.

[3] *Дмитрук А. В., Милютин А. А., Осмоловский Н. П.* Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35. № 6(216). С. 11–46.

[4] *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.

Арутюнов А.В. Точки совпадения двух отображений. // Функциональный анализ и его приложения. 2014. Т. 48. № 1. С. 89–93.

[5] *Жуковский Е.С.* О возмущениях векторно накрывающих отображений и системах уравнений в метрических пространствах // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57. № 2. С. 297–311

В диссертации рассмотрен вопрос о возмущениях векторно накрывающих отображений, предложены методы исследования систем операторных уравнений. Важным отличием этих результатов от известных является также то, что для систем уравнений получены оценки отклонения каждой компоненты решения от соответствующей компоненты произвольного заданного вектора. На основании перечисленных результатов исследуются системы неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Получены условия существования, непрерывной зависимости от параметров, оценки решений задачи Коши и краевых задач. Применение аппарата накрывающих отображений метрических пространств позволяет включать в уравнения разнообразные ограничения на решения, что делает эти результаты актуальными для задач управления и оптимизации.

Цель работы. Основной целью диссертации является исследование задачи Коши, краевых задач для систем неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, получение условий разрешимости и непрерывной зависимости от параметров решений, нахождение оценок решений. Ставится задача разработать методы исследования систем неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом на основе утверждений о липшицевых возмущениях векторно накрывающих отображений метрических пространств.

Методика исследования. В диссертации применяются методы функционального анализа, общей топологии, теории многозначных отображений, теории дифференциальных уравнений. Для исследования задачи Коши и краевых задач система дифференциальных уравнений, начальных и краевых условий сводится к системе операторных уравнений в функциональных пространствах. Для исследования такой системы используются результаты Е.С. Жуковского[5] о липшицевых возмущениях векторно накрывающих отображений, а также полученные в диссертации утверждения о непрерывной зависимости решений систем от параметров и признаке векторного накрывания оператора Немыцкого.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми. В первой главе рассматривается система операторных уравнений с векторно накрывающими отображениями в произведениях метрических пространств, для которой получены условия непрерывной зависимости от параметров решений. Получены условия векторного накрывания оператора Немыцкого в пространствах измеримых существенно ограниченных функций с векторнозначной метрикой.

Во второй главе рассматриваются задача Коши и краевые задачи для систем неявных дифференциальных уравнений с запаздывающим и отклоняющимся аргументом соответственно. Получены условия существования и оценки компонент решений, а также условия непрерывной зависимости от параметров решений задачи Коши и краевых задач для таких уравнений.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Полученные результаты значимы для теории дифференциальных уравнений, разработанные методы могут использоваться при исследованиях краевых задач и задач управления для различных функционально-дифференциальных уравнений. Результаты о возмущениях векторно накрывающих отображений применимы в анализе при изучении различных операторных уравнений, интегральных уравнений. Полученные результаты также могут использоваться в исследовании разрешимости, корректности математических моделей, нахождении оценок их решений.

На защиту диссертации выносятся следующие **основные положения и результаты:**
1) условия непрерывной зависимости от параметров решений систем операторных уравнений с векторно накрывающими отображениями в произведениях метрических пространств;
2) условия векторного накрывания оператора Немыцкого в пространствах измеримых существенно ограниченных функций с векторнозначной метрикой;
3) условия существования и оценки компонент решений задачи Коши для систем неявных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом;
4) условия непрерывной зависимости от параметров решений задачи Коши для систем неявных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом;
5) условия существования и оценки компонент решений краевых задач для систем неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом;
6) условия непрерывной зависимости от параметров решений краевых задач для систем неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на V, VI международных конференциях "Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения" (Тамбов - 2013, 2015); IX международной конференции "Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий" (Воронеж - 2016); школе для студентов, аспирантов и молодых ученых "Математическое и компьютерное моделирование, информационные технологии управления" (Воронеж - 2016); II – IV международных семинарах "Функционально-дифференциальные уравнения и включения и их приложения в математическом моделировании" (Тамбов - 2013, 2014, 2016); совместном семинаре кафедры нелинейного анализа и оптимизации и кафедры математического анализа и теории функции Российского университета дружбы народов, руководители А.В. Арутюнов, В.И. Буренков (Москва - 2017).

Исследования выполнялись при поддержке грантов РФФИ (№ 11-01-00626-а, № 14-01-00877, № 14-01-97504); ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 г. (соглашение № 14.132.21.1348); гранта президента РФ для обучения за рубежом 2014/2015 г. (№ 16-ИН-503,504).

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1 – 11]. Из совместных работ [3], [6], [10] в диссертацию вошли результаты, полученные лично диссертантом. Работы [1 – 7], [11] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, двух глав, разбитых на параграфы, перечня используемых обозначений и списка литературы, содержащего 46 наименований. Общий объем диссертации – 94 страницы.

Краткое содержание работы.

Во введении формулируются цели исследования, дается обзор литературы по исследуемой проблематике, обосновывается актуальность темы диссертации, кратко излагаются основные результаты, выносимые на защиту.

Глава 1 посвящена результатам о векторно накрывающих отображениях, которые используются в диссертации. В § 1.1 дано следующее определение. Пусть заданы метрические пространства $X_i \doteq (X_i, \rho_{X_i})$, $Y_j \doteq (Y_j, \rho_{Y_j})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. На произведениях этих пространств $\overline{X} = \prod_{i=1}^n X_i$, $\overline{Y} = \prod_{j=1}^m Y_j$ зададим векторные метрики

$$\overline{\rho}_{\overline{X}}(x,u) = \big(\rho_{X_1}(x_1,u_1), \ldots, \rho_{X_n}(x_n,u_n)\big), \quad x,u \in \overline{X},$$
$$\overline{\rho}_{\overline{Y}}(y,\omega) = \big(\rho_{Y_1}(y_1,\omega_1), \ldots, \rho_{Y_m}(y_m,\omega_m)\big), \quad y,\omega \in \overline{Y}.$$

Обозначим замкнутый шар в пространстве X_i с центром в точке $u_i \in X_i$ радиуса $d_i \geq 0$ символом $\mathrm{B}_{X_i}(u_i,d_i) \doteq \{x_i \in X_i : \rho_{X_i}(u_i,x_i) \leq d_i\}$. Определим для $d = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^n_+$, $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \overline{X}$ произведение этих шаров $\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u,d) \doteq \prod_{i=1}^n \mathrm{B}_{X_i}(u_i,d_i) = \{x \in \overline{X},\ \overline{\rho}_{\overline{X}}(x,u) \leq d\}$.

Приведем определение[5] векторного аналога понятия накрывания. Пусть заданы множества $W \subset \overline{Y}$, $\mathfrak{A} \subset \overline{X} \times \mathbb{R}^m_+$ и $n \times m$-матрица A с неотрицательными компонентами a_{ij}, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Определение 1. Отображение $\Psi : \overline{X} \to \overline{Y}$ называют *векторно A-накрывающим множество W на совокупности* $\mathfrak{A}$, если

$$\forall\, (u,r) \in \mathfrak{A} \quad \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u),r) \bigcap W \subset \Psi\big(\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u,Ar)\big);$$

и *векторно условно A-накрывающим W на* $\mathfrak{A}$, если

$$\forall\, (u,r) \in \mathfrak{A} \quad \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}(\Psi(u),r) \bigcap W \bigcap \Psi(\overline{X}) \subset \Psi\big(\overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u,Ar)\big).$$

В случае $n = m = 1$ определение векторно (условно) $A-$накрывающего отображения метрических пространств совпадает с определением (условно) $\alpha-$накрывающего отображения, где $A = (a_{11})$, $a_{11} = \alpha^{-1}$.

В диссертации используются следующие совокупности $\mathfrak{A}$:

$\mathfrak{B}(u^0, R, u) = \{(u,r) \in \overline{X} \times \mathbb{R}^m_+ :\ Ar + \overline{\rho}_{\overline{X}}(u,u^0) \leq R\}$, где $u^0 \in \overline{X}$, $R \in \mathbb{R}^n_+$, $u \in \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u^0,R)$;

$\mathfrak{B}\big(u^0, R\big) = \{\big(u,r\big) \in \overline{X} \times \mathbb{R}^m_+ :\ Ar + \overline{\rho}_{\overline{X}}\big(u,u^0\big) \leq R\}$, где $u^0 \in \overline{X}$, $R \in \mathbb{R}^n_+$;

$\mathfrak{B}(u) = \{(u,r) \in \overline{X} \times \mathbb{R}^m_+ \ \ \forall r \geq 0\}$, где $u \in \overline{X}$.

В § 1.2 приведена теорема[5] о разрешимости и оценке решения системы уравнений — векторный аналог теорем о точке совпадения двух отображений и о нелинейных возмущения накрывающих отображений. Сформулируем это утверждение. Пусть определены $y \in \overline{Y}$ и отображение $\Phi : \overline{X} \times \overline{X} \to \overline{Y}$, обладающее по первому аргументу свойством накрывания. Рассмотрим уравнение

$$\Phi(x,x) = y. \tag{1}$$

Пусть заданы векторы $u^0 \in \overline{X}$, $R \in \mathbb{R}^n_+$, $d \in \mathbb{R}^m_+$ и имеющие неотрицательные компоненты матрицы A, B размерностей $n \times m$ и $m \times n$, соответственно. Определим $U \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u^0, R)$ и для каждого $u \in U$ положим $W(u) \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0, u),\, d\big)$. Обозначим через I_m единичную $m \times m$-матрицу.

Теорема 1. *Пусть метрические пространства X_i, $i = \overline{1,n}$, являются полными и выполнены следующие условия:*
- *при любом $u \in U$ отображение $\Phi(\cdot, u) : \overline{X} \to \overline{Y}$ векторно условно A-накрывает множество $W(u)$ на совокупности $\mathfrak{B}(u^0, R,\, u)$;*
- *для любых $v, u \in U$ справедливо $\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(v, u),\, \Phi(v, v)\big) \le B\overline{\rho}_{\overline{X}}(u, v)$;*
- *для любых $\{v^k\} \subset U$, $u \in U$, если имеют место сходимости $\overline{\rho}_{\overline{X}}(v^k, u) \to 0$, $\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(v^k, v^k), y\big) \to 0$ (в пространствах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, соответственно), то выполнено соотношение $\Phi(u, u) = y$.*
- *для спектрального радиуса ϱ матрицы BA выполнено $\varrho(BA) < 1$;*
- *справедливо*[6] *$r(y) \doteq (I_m - BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi(u^0, u^0),\, y\big) \le d$, $Ar(y) \le R$;*
- *при любых $u \in \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}\big(u^0,\, Ar(y)\big)$ выполнено включение $y \in \Phi(U, u)$.*

Тогда существует решение $x = \xi \in \overline{X}$ уравнения (1), удовлетворяющее неравенству $\overline{\rho}_{\overline{X}}\big(\xi, u^0\big) \le Ar(y)$.

Отметим, что неподвижные точки операторов в пространствах с векторнозначной метрикой исследованы А.И. Перовым[7].

В § 1.2 исследован вопрос о корректности системы (1). Пусть при любом натуральном l определены отображение $\Phi^l : \overline{X} \times \overline{X} \to \overline{Y}$ и вектор $y^l \in \overline{Y}$. Рассмотрим последовательность уравнений

$$\Phi^l(x, x) = y^l, \quad l = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Пусть заданы $u^0 \in \overline{X}$, $R \in \mathbb{R}^n_+$, $d \in \mathbb{R}^m_+$ и матрицы $A_{n\times m}$, $B_{m\times n}$ с неотрицательными компонентами.

Теорема 2. *Пусть пространства X_i, $i = \overline{1,n}$, являются полными и при всех $l = 1, 2, \ldots$ выполнены следующие условия:*
- *для любого $u \in U \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}(u^0, R)$ отображение $\Phi^l(\cdot, u) : \overline{X} \to \overline{Y}$ векторно условно A-накрывает множество $W_l(u) \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\overline{Y}}\big(\Phi^l(u^0, u), d\big)$ на совокупности $\mathfrak{B}(u^0, R, u)$;*
- *для любых $u, v \in U$ справедливо $\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi^l(v, u), \Phi^l(v, v)\big) \le B\overline{\rho}_{\overline{X}}(u, v)$;*
- *для любой последовательности $\{v^k\} \subset U$ из $v^k \to v$, $\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi^l(v^k, v), y^l\big) \to 0$, при $k \to \infty$, следует $\Phi^l(v, v) = y^l$, $l = 1, 2, \ldots$;*
- *для спектрального радиуса ϱ матрицы BA выполнено $\varrho(BA) < 1$;*
- *для всех $u \in \overline{\mathrm{B}}_{\overline{X}}\big(u^0, Ar(y^l)\big)$ имеет место включение $y^l \in \Phi^l(U, u)$, где $r(y^l) \doteq (I_m - BA)^{-1}\overline{\rho}_{\overline{Y}}\big(\Phi^l(u^0, u^0), y^l\big)$.*

Тогда, если при $l \to \infty$ имеет место соотношение $\rho_{Y_i}\big(\Phi^l_i(u^0, u^0), y^l_i\big) \to 0$, $i = \overline{1,m}.$, то при каждом l, начиная с некоторого номера, существует такое решение $\xi^l = (\xi^l_1, \ldots, \xi^l_n) \in \overline{X}$ системы (2), что в $\overline{X}$ имеет место сходимость $\xi^l \to u^0$.

---

[6]Из предположения $\varrho(BA) < 1$ следует обратимость матрицы $I_m - BA$, и это позволяет использовать $(I_m - BA)^{-1}$ при определении вектора $r(y)$.

[7]*Перов А.И.* Многомерная версия принципа обобщенного сжатия М.А. Красносельского // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44. № 1. С. 83–87.

В исследовании систем неявных дифференциальных уравнений кроме результатов о векторно накрывающих отображениях требуются условия накрывания оператора Немыцкого в лебеговых пространствах. В § 1.3 доказана теорема о накрывании оператора Немыцкого в пространствах существенно ограниченных функций. Сформулируем это утверждение.

Для $x, u \in \mathbb{R}^n$ положим $\overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}(x,u) = \big(|x_1 - u_1|, \dots, |x_n - u_n|\big)$. Обозначим через $\mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$ совокупность непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ — произведение пространств $L_\infty([a,b],\mathbb{R})$ измеримых существенно ограниченных функций с векторной метрикой

$$\overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)}(x,u) = \big(\operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[a,b]} |x_1(s) - u_1(s)|, \dots, \operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[a,b]} |x_n(s) - u_n(s)|\big).$$

Пусть определена удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $g : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, для которой при любом $r \in \mathbb{R}^m_+$ существует такая функция $\eta_r \in L_\infty([a,b],\mathbb{R})$, что при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(0,r)$ выполнено $|g(t,x)| \le \eta_r(t)$. Определим оператор Немыцкого

$$(N_g y)(t) \doteq g(t, y(t)). \tag{3}$$

Принятые предположения есть необходимые и достаточные условия[8] действия оператора N_g из $L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ в $L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$, и при их выполнении оператор N_g будет замкнутым и ограниченным.

Пусть заданы матрица $A_{n\times m}$ с неотрицательными компонентами и измеримые отображения $W : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^m)$, $\mathfrak{A} : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+)$. Пусть при п.в. $t \in [a,b]$ функция $g(t,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является векторно A-накрывающей множество $W(t)$ на совокупности $\mathfrak{A}(t)$. Определим, с какой матрицей, какое множество и на какой совокупности будет накрывающим оператор $N_g : L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$.

Для произвольного $r \in \mathbb{R}^m_+$ определим многозначное отображение $t \in [a,b] \mapsto \mathfrak{A}_r(t) \doteq \mathfrak{A}(t) \cap (\mathbb{R}^n \times \{r\})$. Являясь пересечением замкнутозначных измеримых отображений отображение $\mathfrak{A}_r : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+)$ измеримо[9]. Определим отображение $\Pi_{\mathbb{R}^n} : \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n \times \{r\}) \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$ равенством $\Pi_{\mathbb{R}^n}\{(x,r)\} = \{x\}$. Имеем $\mathfrak{A}_r(t) = \Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r(t) \times \{r\}$, и поэтому отображение $\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^n)$, $\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r(t) = \{x : (x,r) \in \mathfrak{A}(t)\}$, измеримо. Определим следующее множество сечений этого отображения

$$\mathbb{S}_{L_\infty}[\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r] = \{u \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) : u(t) \in \Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r(t) \ \text{ при п.в. } t \in [a,b]\}.$$

Эффективное множество $\mathrm{dom}(\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r) \doteq \{t \in [a,b] : \Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r(t) \ne \varnothing\}$ измеримо при любом $r \in \mathbb{R}^m_+$; определим совокупность $\mathfrak{R}_0$ векторов $r \in \mathbb{R}^m_+$, для

---

[8] *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я.* Интегральные уравнения. СМБ. М.: Наука,1968. 448 с.

[9] *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. Изд. 2-е испр. и доп. М.: Книжный дом "Либроком", 2011. 224 с.

которых мера множества $\mathrm{dom}(\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r)$ максимальна, т.е. равна $b-a$. Теперь определим совокупность

$$\mathfrak{B} = \big\{(u,r) \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^m_+ : \, r \in \mathfrak{R}_0, \; u \in \mathbb{S}_{L_\infty}[\Pi_{\mathbb{R}^n}\mathfrak{A}_r]\big\}\,. \tag{4}$$

Далее, определим множество измеримых существенно ограниченных сечений измеримого отображения $W : [a,b] \to \mathrm{cl}(\mathbb{R}^m)$:

$$\mathbb{S}_{L_\infty}[W] = \{y \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m) : \, y(t) \in W(t) \text{ при п.в. } t \in [a,b]\}\,.$$

Теорема 3. *Пусть при п.в.* $t \in [a,b]$ *отображение* $g(t,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *является (условно) векторно* A*-накрывающим множество* $W(t)$ *на совокупности* $\mathfrak{A}(t)$. *Тогда определенный равенством (3) оператор Немыцкого* $N_g \,:\, L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)$ *будет (условно) векторно* A*-накрывающим множество* $\mathbb{S}_{L_\infty}[W]$ *на заданной равенством (4) совокупности* $\mathfrak{B}$.

В § 1.3 также получены следствия из теоремы 3 для совокупностей $\mathfrak{A}(t) = \mathfrak{B}\big(u^0(t), R\big)$ или $\mathfrak{A}(t) = \mathfrak{B}\big(u^0(t), R, u(t)\big)$, где $u^0 \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $R \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathrm{B}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)}(u^0,R)$.

Глава 2 посвящена исследованию задачи Коши и краевых задач для неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Используется метод, основанный на сведении дифференциальных уравнений, начальных и краевых условий к системе операторных уравнений относительно пары векторов $\big(\dot{x}, x(a)\big)$, компонентами первого являются производные искомых функций, второго — начальные значения. Полученные в § 1.3 результаты позволяют найти условия накрывания отображений по соответствующим переменным, а утверждения из § 1.1, § 1.2 — исследовать полученные системы уравнений.

В § 2.1 получены условия существования, продолжаемости (§ 2.1.1) и непрерывной зависимости от параметров (§ 2.1.2) решений задачи Коши.

Обозначим через $\mathfrak{I}_m$ матрицу размерности $m \times m$, все компоненты которой равны 1. Пусть заданы: измеримая функция $h : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая при почти всех $t \in [a,b]$ неравенству $h(t) \le t$; измеримая существенно ограниченная функция $y : [a,b] \to \mathbb{R}^m$; измеримая по Борелю ограниченная функция $\varphi : (-\infty,a) \to \mathbb{R}^n$; вектор $\gamma \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющая условиям Каратеодори (то есть измеримая по первому и непрерывная по совокупности остальных аргументов) функция $f = (f_1,\ldots,f_m) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Пусть при любом $r \in \mathbb{R}^m_+$ существует такое неотрицательное число η_r, что при почти всех $t \in [a,b]$ и любых $x,\omega \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(0,r)$ выполнено неравенство $|f(t,x,\omega)| \le \eta_r$.

Рассмотрим при $t \in [a,b]$ систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{gathered} f_i\Big(t, x_1\big(h_1(t)\big),\ldots,x_n\big(h_n(t)\big),\dot{x}_1(t),\ldots,\dot{x}_n(t)\Big) = y_i(t), \quad i=\overline{1,m}, \\ x_j(s) = \varphi_j(s), \quad \text{если } s \notin [a,b], \quad j=\overline{1,n}, \end{gathered} \tag{5}$$

с начальными условиями

$$x_j(a) = \gamma_j, \quad j = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Уравнение (5) — это дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом, его решение может быть определено не только на всем отрезке $[a,b]$, но и на $[a,c]$, для произвольного $c \in [a,b]$. Для любого $j = \overline{1,n}$ зададим (очевидно, измеримые) множества $E_j = h_j^{-1}[a,b] = \{t \in [a,b] : h_j(t) \in [a,b]\}$, $E_j^c = E_j \cap [a,c]$. Определим оператор внутренней суперпозиции

$$S_h^c : C([a,c],\mathbb{R}^n) \to L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n), \quad S_h^c x = (S_{h_1}^c x_1, \ldots, S_{h_n}^c x_n),$$

$$(S_{h_j}^c x_j)(t) = \begin{cases} x_j(h_j(t)), \text{ если } t \in E_j^c, \\ \varphi_j(h_j(t)), \text{ если } t \notin E_j^c, \end{cases} \quad j = \overline{1,n}.$$

В этом обозначении не будем писать верхний индекс, если $c = b$.

Пусть заданы $u^0 \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $R \in \mathbb{R}_+^n$, $d \in \mathbb{R}_+^m$, $\sigma > 0$ и $n \times m$-матрица A с неотрицательными компонентами. Зададим при каждом $t \in [a,b]$ совокупность $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R\big) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ равенством

$$\mathfrak{B}\big(u^0(t),R\big) \doteq \big\{\big(u,r\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m : \, Ar + \overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}\big(u,u^0(t)\big) \le R\big\}. \tag{7}$$

Определим абсолютно непрерывную функцию $x^0 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с компонентами $x_j^0(t) = \gamma_j + \int\limits_a^t u_j^0(s)\,ds$, $j = \overline{1,n}$, и положим

$$\widehat{D}(t) \doteq \prod_{j=1}^n \widehat{D}_j(t), \text{ где } \widehat{D}_j(t) \doteq \begin{cases} [x_j^0(t) - \sigma, x_j^0(t) + \sigma], \text{ если } t \in E_j, \\ \{\varphi_j(h_j(t))\}, \text{ если } t \notin E_j, \end{cases} \quad j = \overline{1,n}.$$

Далее, определим при почти всех $t \in [a,b]$ и любом $x \in \widehat{D}(t)$ множество

$$W(t,x) \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^m}\big(f(t,x,u^0(t)),d\big) = \prod_{i=1}^m W_i(t,x),$$

$$W_i(t,x) \doteq \big[f_i(t,x,u^0(t)) - d_i, \, f_i(t,x,u^0(t)) + d_i\big], \quad i = \overline{1,m}.$$

Обозначим $y^0(t) \doteq f\big(t, (S_{h_1}x_1^0)(t), \ldots, (S_{h_n}x_n^0)(t), u_1^0(t), \ldots, u_n^0(t)\big)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

- *при п.в. $t \in [a,b]$ и любом $x \in \widehat{D}(t)$ отображение $f(t,x,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ является условно векторно A-накрывающим множество $W(t,x)$ на совокупности $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R\big)$;*
- *существует такое $\beta_{ij} \ge 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, что при п.в. $t \in E_j$, всех $\omega \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t),R\big)$, $x_k \in \widehat{D}_k(t)$, $k = \overline{1,n}$ и $k \neq j$ отображение $f_i(t,x_1,\ldots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\ldots,x_n,w) : \widehat{D}_j(t) \to \mathbb{R}$ β_{ij}-липшицево;*
- *для любых $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $x_j \in \widehat{D}_j(t)$ имеет место включение $y_i(t) \in f_i\big(t,x_1,\ldots,x_n,\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t),R\big)\big)$;*
- *для некоторого $\varepsilon > 0$ имеют место неравенства*

$$r_\varepsilon(y) \doteq (I_m + \varepsilon\mathfrak{I}_m)\overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}(y^0,y) \le d, \quad Ar_\varepsilon(y) \le R.$$

Тогда найдется такое $c \in (a,b]$, *что существует определенное на* $[a,c]$ *решение* $x_c \in AC_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)$ *задачи* (5), (6), *удовлетворяющее оценке*[10]

$$\overline{\rho}_{L_\infty([a,c],\mathbb{R}^n)}(\dot{x}_c, u^0) \le A(I_m + \varepsilon\mathfrak{I}_m)\overline{\rho}_{L_\infty([a,c],\mathbb{R}^m)}(y^0, y).$$

В § 2.1.2 исследована непрерывная зависимость от параметров решений задачи Коши (5), (6).

Обозначим $\overline{1}_m$ — $m-$мерный вектор, компоненты которого равны 1.

Пусть при любом натуральном l заданы: измеримая функция $h^l : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая при п.в. $t \in [a,b]$ неравенству $h^l(t) \le t$, измеримая существенно ограниченная функция $y^l : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, измеримая по Борелю ограниченная функция $\varphi^l : (-\infty, a) \to \mathbb{R}^n$, вектор $\gamma^l \in \mathbb{R}^n$. Далее, пусть при любом натуральном l определена удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $f^l : [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, относительно которой предполагаем, что при любом $r \in \mathbb{R}^m_+$ существует неотрицательное число η^l_r, для которого при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $x, \omega \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(0,r)$ выполнено $|f^l(t,x,\omega)| \le \eta^l_r$. Рассмотрим при $t \in [a,b]$ последовательность систем дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &f^l_i\Big(t, x_1\big(h^l_1(t)\big), \ldots, x_n\big(h^l_n(t)\big), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t)\Big) = y^l_i(t), \quad i = \overline{1,m}, \\ &x_j(s) = \varphi^l_j(s), \quad \text{если } s \notin [a,b], \quad j = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{8}$$

с начальными условиями

$$x_j(a) = \gamma^l_j, \quad j = \overline{1,n} \tag{9}$$

($l = 1, 2, \ldots$). Пусть заданы $u^0 \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathbb{R}^n$. Обозначим

$$y^{0l}_i(t) = f^l_i\Big(t, S_{h^l_1}\big(\gamma^l_1 + \int_a^{(\cdot)} u^0_1(s)ds\big)(t), \ldots, S_{h^l_n}\big(\gamma^l_n + \int_a^{(\cdot)} u^0_n(s)ds\big)(t), u^0_1(t), \ldots, u^0_n(t)\Big);$$

Предположим, что при $l \to \infty$ имеют место сходимости

$$\gamma^l_j \to \gamma_j, \quad \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}\big|y^{0l}_i(t) - y^l_i(t)\big| \to 0, \quad j = \overline{1,n}, \ i = \overline{1,m}. \tag{10}$$

При каждом натуральном l определим абсолютно непрерывную функцию $x^l : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, компоненты которой $x^l_j(t) = \gamma^l_j + \int_a^t u^0_j(s)\,ds$, $j = \overline{1,n}$. Для некоторого $\sigma > 0$ положим

$$\widehat{D}^l(t) = \prod_{j=1}^n \widehat{D}^l_j(t), \text{ где } \widehat{D}^l_j(t) = \begin{cases} [x^l_j(t) - \sigma,\ x^l_j(t) + \sigma], \text{если } t \in E^l_j, \\ \{\varphi^l_j(h^l_j(t))\}, \text{ если } t \notin E^l_j, \end{cases} \quad j = \overline{1,n}.$$

Пусть $\epsilon > 0$, $d \doteq \epsilon\overline{1}_m \in \mathbb{R}^m_+$. Определим при п.в. $t \in [a,b]$ и любом $x \in \widehat{D}^l(t)$ множество $W^l(t,x) \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^m}\big(f^l(t,x,u^0(t)), d\big) = \prod_{i=1}^m W^l_i(t,x)$, $W^l_i(t,x) \doteq \big[f^l_i(t,x,u^0(t)) - \epsilon,\ f^l_i(t,x,u^0(t)) + \epsilon\big]$, $i = \overline{1,m}$.

[10] Здесь, для сокращения записи сужения на $[a,c]$ функций u^0, y^0, y обозначены теми же символами, что и исходные определенные на всем $[a,b]$ функции.

Пусть, далее, задана $n\times m$-матрица A с неотрицательными компонентами. Определим при п.в. $t\in[a,b]$ совокупность $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R\big)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+$ равенством (7), где $R\doteq\epsilon\overline{1}_n\in\mathbb{R}^n_+$.

Теорема 5. *Пусть при $l=1,2,\ldots$ выполнены следующие условия:*

• *при п.в. $t\in[a,b]$ и любом $x\in\widehat{D}(t)$ отображение $f^l(t,x,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ является условно векторно A-накрывающим множество $W^l(t,x)$ на совокупности $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R\big)$;*

• *существует такое $\beta_{ij}\geq 0$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, что отображение $f^l_i(t,x_1,\ldots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\ldots,x_n,w):\widehat{D}_j(t)\to\mathbb{R}$ при п.в. $t\in E^l_j\doteq(h^l_j)^{-1}[a,b]=\{t\in[a,b]:h^l_j(t)\in[a,b]\}$, всех $\omega\in\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t),R\big)$ и любых $x_k\in\widehat{D}_k(t)$, $k=\overline{1,n}$ и $k\neq j$ является β_{ij}-липшицевым;*

• *для любых $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, при п.в. $t\in[a,b]$ и любых $x_j\in\widehat{D}^l_j(t)$ имеет место включение $y^l_i(t)\in f^l_i\big(t,x_1,\ldots,x_n,\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(u^0(t),R)\big)$.*

Тогда, если имеют место соотношения (10)*, то при любом l, начиная с некоторого номера, существует определенное на $[a,b]$ решение $\xi^l=(\xi^l_1,\ldots,\xi^l_n)\in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ задачи* (8), (9) *такое, что имеет место сходимость $\xi^l\to x^0$, т.е. $\xi^l_j(a)\to x^0_j(a)$, $\operatorname{vrai\,sup}_{t\in[a,b]}\big|\dot{\xi}^l_j(t)-\dot{x}^0_j(t)\big|\to 0$, $j=\overline{1,n}$.*

В § 2.2 представлены результаты о существовании (§ 2.2.1) и непрерывной зависимости (§ 2.2.2) решений краевой задачи для системы (5) неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. В отличие от § 2.1 здесь не требуется, чтобы аргумент "запаздывал", то есть, не предполагается неравенство $h(t)\leq t$.

Пусть заданы вектор $\Delta=(\Delta_1,\ldots,\Delta_k)\in\mathbb{R}^k$, непрерывная функция $g=(g_1,\ldots,g_k):\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$, измеримая функция $h:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, измеримая существенно ограниченная функция $y:[a,b]\to\mathbb{R}^m$, измеримая по Борелю ограниченная функция $\varphi:(-\infty,a)\bigcup(b,\infty)\to\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $f=(f_1,\ldots,f_m):[a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Предполагаем, что для любого $r\in\mathbb{R}^m_+$ существует такое неотрицательное число η_r, что при п.в. $t\in[a,b]$ и любых $x,\omega\in\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(0,r)$ выполнено неравенство $|f(t,x,\omega)|\leq\eta_r$.

Рассмотрим при $t\in[a,b]$ систему (5) с краевыми условиями

$$g_i\big(x_1(a),\ldots,x_n(a),x_1(b),\ldots,x_n(b)\big)=\Delta_i,\quad i=\overline{1,k}. \tag{11}$$

Положим $H_j=\operatorname{vrai\,sup}_{t\in E_j}(h_j(t)-a)$, $j=\overline{1,n}$. Будем полагать $H_j=0$, если $E_j=\varnothing$. Пусть заданы $u^0\in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\gamma^0\in\mathbb{R}^n$, $d^1\in\mathbb{R}^m_+$, $R^1,R^2\in\mathbb{R}^n_+$ и $n\times m$-матрица A_1 с неотрицательными компонентами. Зададим при каждом $t\in[a,b]$ множество $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R^1\big)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+$ равенством (7), где $A=A_1$, т.е.

$$\mathfrak{B}\big(u^0(t),R^1\big)\doteq\big\{\big(u,r\big)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+:\ A_1r+\overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}\big(u,u^0(t)\big)\leq R^1\big\}. \tag{12}$$

Определим абсолютно непрерывную функцию $x^0:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ с компонентами $x^0_j(t)=\gamma^0_j+\int\limits_a^t u^0_j(s)ds$, $j=\overline{1,n}$, и положим $\widehat{D}(t)\doteq\prod\limits_{j=1}^n\widehat{D}_j(t)$, где $\widehat{D}_j(t)\doteq$

$\begin{cases} \mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x_j^0(t), R_j^2 + R_j^1(t-a)\big), \text{ если } t \in E_j, \\ \{\varphi_j(h_j(t))\}, \text{ если } t \notin E_j. \end{cases}$ Определим при п.в. $t \in [a,b]$ и любом $x \in \widehat{D}(t)$ множество $W^1(t,x) \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^m}\big(f(t,x,u^0(t)), d^1\big) = \prod_{i=1}^{m} W_i^1(t,x)$, $W_i^1(t,x) \doteq \big[f_i(t,x,u^0(t)) - d_i^1,\ f_i(t,x,u^0(t)) + d_i^1\big]$, $i = \overline{1,m}$.

Пусть определены $n \times k$-матрица A_2 с неотрицательными компонентами и вектор $d^2 \in \mathbb{R}_+^k$. Зададим совокупность $\mathfrak{B}\big(\gamma^0, R^2\big) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^k$

$$\mathfrak{B}\big(\gamma^0, R^2\big) \doteq \big\{\big(\gamma, r\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^k :\ A_2 r + \overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}\big(\gamma, \gamma^0\big) \le R^2\big\}. \tag{13}$$

При любом $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(x^0(b), R^2 + R^1(b-a)\big)$ определим множество $W^2(x) \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^k}\big(g(\gamma^0, x), d^2\big) = \prod_{i=1}^{k} W_i^2(x)$, $W_i^2(x) \doteq \big[g_i(\gamma^0, x) - d_i^2,\ g_i(\gamma^0, x) + d_i^2\big]$, $i = \overline{1,k}$.

Обозначим

$$y^0(t) \doteq f\big(t, (S_{h_1}x_1^0)(t), \ldots, (S_{h_n}x_n^0)(t), u_1^0(t), \ldots, u_n^0(t)\big),$$
$$\Delta^0 \doteq g^0\Big(\gamma_1^0, \ldots, \gamma_n^0, \gamma_1^0 + \int_a^b u_1^0(s)ds, \ldots, \gamma_n^0 + \int_a^b u_n^0(s)ds\Big).$$

Теорема 6. *Пусть выполнены следующие условия:*

• *при п.в.* $t \in [a,b]$ *и любом* $x \in \widehat{D}(t)$ *отображение* $f(t,x,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *является векторно условно* A_1*-накрывающим множество* $W^1(t,x)$ *на совокупности* $\mathfrak{B}\big(u^0(t), R^1\big)$*; при любом* $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(x^0(b), R^2 + R^1(b-a)\big)$ *отображение* $g(\cdot, x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *является векторно условно* A_2*-накрывающим множество* $W^2(x)$ *на совокупности* $\mathfrak{B}\big(\gamma^0, R^2\big)$;

• *существует такое* $\beta_{ij}^1 \ge 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, *что отображение* $f_i(t, x_1, \ldots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \ldots, x_n, w) : \widehat{D}_j(t) \to \mathbb{R}$ *при п.в.* $t \in E_j$, *всех* $\omega \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t), R^1\big)$, $x_p \in \widehat{D}_p(t)$, $p = \overline{1,n}$ *и* $p \ne j$, *является* β_{ij}^1*-липшицевым; существует такое* $\beta_{ij}^2 \ge 0$, $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,n}$, *что отображение* $g_i(\gamma, x_1, \ldots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \ldots, x_n) : \mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x_j^0(b), R_j^2 + R_j^1(b-a)\big) \to \mathbb{R}$ *при п.в.* $\gamma \in \mathrm{B}\big(\gamma^0, R^2\big)$, $x_p \in \mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x_p^0(b), R_p^2 + R_p^1(b-a)\big)$, $p = \overline{1,n}$ *и* $p \ne j$, *является* β_{ij}^2*-липшицевым;*

• *для любых* $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, *при п.в.* $t \in [a,b]$ *и любых* $x_j \in \widehat{D}_j(t)$ *выполнено* $y_i(t) \in f_i\big(t, x_1, \ldots, x_n, \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(u^0(t), R^1)\big)$; *для любых* $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,n}$, $x_j \in \mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x_j^0(b), R_j^2 + R_j^1(b-a)\big)$ *имеет место включение* $\Delta_i \in g_i\big(\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(\gamma^0, R^2), x_1, \ldots, x_n\big)$;

• *для матриц* $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$, $B_{11} = \big(H_j \beta_{ij}^1\big)_{m \times n}$, $B_{12} = \big(\beta_{ij}^1\big)_{m \times n}$, $B_{21} = \big((b-a)\beta_{ij}^2\big)_{k \times n}$, $B_{22} = \big(\beta_{ij}^2\big)_{k \times n}$ *спектральный радиус* ϱ *произведения* BA *удовлетворяет неравенству* $\varrho(BA) < 1$;

• *имеют место неравенства*

$$r(y,\Delta) \doteq (I_{m+k} - BA)^{-1} \begin{pmatrix} \overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}(y, y^0) \\ \overline{\rho}_{\mathbb{R}^k}(\Delta, \Delta^0) \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} d^1 \\ d^2 \end{pmatrix},\ Ar(y,\Delta) \le \begin{pmatrix} R^1 \\ R^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда существует решение $x \in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ краевой задачи (5), (11), *удовлетворяющее неравенству*

$$\begin{pmatrix} \overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)}(\dot{x},u^0) \\ \overline{\rho}_{\mathbb{R}^n}(x(a),\gamma^0) \end{pmatrix} \le A(I_{m+k}-BA)^{-1} \begin{pmatrix} \overline{\rho}_{L_\infty([a,b],\mathbb{R}^m)}(y,y^0) \\ \overline{\rho}_{\mathbb{R}^k}(\Delta,\Delta^0) \end{pmatrix}.$$

В § 2.2.2 исследована проблема непрерывной зависимости от параметров решений краевой задачи (5), (11).

Пусть при любом натуральном l заданы: вектор $\Delta^l \in \mathbb{R}^k$, непрерывная функция $g^l : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, измеримая функция $h^l : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, измеримая существенно ограниченная функция $y^l : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, измеримая по Борелю ограниченная функция $\varphi^l : (-\infty,a)\bigcup(b,\infty) \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая условиям Каратеодори функция $f^l : [a,b]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Предполагаем, что для любого $r \in \mathbb{R}^m_+$ существует такое $\eta^l_r \ge 0$, что при п.в. $t \in [a,b]$ и любых $x,\omega \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(0,r)$ выполнено $|f^l(t,x,\omega)| \le \eta^l_r$.

Рассмотрим при $t\in[a,b]$ последовательность систем (8) с краевыми условиями

$$g^l_i\big(x_1(a),\ldots,x_n(a),x_1(b),\ldots,x_n(b)\big) = \Delta^l_i, \quad l=1,2,\ldots, \quad i=\overline{1,k}. \tag{14}$$

Для любого $l=1,2,\ldots$ определим $H^l_j = \operatorname{vrai}\sup_{t\in E^l_j}(h^l_j(t)-a)$. Будем полагать $H^l_j = 0$, если $E^l_j = \varnothing$. Определим $H_j = \sup_{l=1,2,\ldots} H^l_j$.

Пусть заданы $x^0 \in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ и $n\times m$-матрица A_1 с неотрицательными компонентами, $\epsilon^1>0$, $\epsilon^2>0$, $R^1 \doteq \epsilon^1\overline{1}_n$, $R^2 \doteq \epsilon^2\overline{1}_n \in \mathbb{R}^n_+$, $d^1 \doteq \epsilon^1\overline{1}_m \in \mathbb{R}^m_+$. Определим $u^0 = \dot{x}^0 \in L_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$, $\gamma^0 = x^0(a) \in \mathbb{R}^n$. Зададим совокупность $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R^1\big)\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m_+$, $t\in[a,b]$ равенством (12). Положим при $l=1,2,\ldots$ $\widehat{D}^l(t) \doteq \prod_{j=1}^n \widehat{D}^l_j(t)$, где $\widehat{D}^l_j(t) \doteq \begin{cases} \mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x^0_j(t),R^2_j+R^1_j(t-a)\big), & \text{если } t\in E^l_j, \\ \{\varphi^l_j(h^l_j(t))\}, & \text{если } t\notin E^l_j,\ j=\overline{1,n}. \end{cases}$
Определим при п.в. $t\in[a,b]$ и любом $x\in\widehat{D}^l(t)$ множество $W^{1l}(t,x) \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^m}\big(f^l(t,x,u^0(t)),d^1\big)$.

Пусть определена $n\times k$-матрица A_2 с неотрицательными компонентами. Пусть $\epsilon^2>0$, $d^2 \doteq \epsilon^2\overline{1}_k \in \mathbb{R}^k_+$. Зададим совокупность $\mathfrak{B}\big(\gamma^0,R^2\big) \subset \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^k_+$ равенством (13). При любом $x \in \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(x^0(b),R^2+R^1(b-a)\big)$ определим множество $W^{2l}(x) \doteq \overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^k}\big(g^l(\gamma^0,x),d^2\big)$. Вычислим

$$y^{0l}(t) \doteq f^l\big(t,(S_{h^l_1}x^0_1)(t),\ldots,(S_{h^l_n}x^0_n)(t),u^0_1(t),\ldots,u^0_n(t)\big),$$
$$\Delta^{0l} \doteq g^{0l}\Big(\gamma^0_1,\ldots,\gamma^0_n,\gamma^0_1+\int_a^b u^0_1(s)ds,\ldots,\gamma^0_n+\int_a^b u^0_n(s)ds\Big).$$

Теорема 7. *Пусть при каждом натуральном $l=1,2,\ldots$ выполнены следующие условия:*
• *при п.в. $t\in[a,b]$, любом $x\in\widehat{D}^l(t)$ отображение $f^l(t,x,\cdot):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ является векторно условно A_1-накрывающим множество $W^{1l}(t,x)$ на совокупности $\mathfrak{B}\big(u^0(t),R^1\big)$; при любом $x\in\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(x^0(b),R^2+R^1(b-a)\big)$ отображение*

$g^l(\cdot,x):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ является векторно условно A_2-накрывающим множество $W^{2l}(x)$ на совокупности $\mathfrak{B}\big(\gamma^0,R^2\big)$;

- *существует такое $\beta^1_{ij}\geq 0$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, что отображение $f^l_i(t,x_1,\ldots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\ldots,x_n,w)\ :\ \widehat{D}^l_j(t)\ \to\ \mathbb{R}$ при п.в. $t\in E^l_j$, всех $\omega\in\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}\big(u^0(t),R^1\big)$, $x_p\in\widehat{D}^l_p(t)$, $p=\overline{1,n}$, $p\neq j$, является β^1_{ij}-липшицевым; существует такое $\beta^2_{ij}\geq 0$, $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,n}$, что отображение $g^l_i(\gamma,x_1,\ldots,x_{j-1},\cdot,x_{j+1},\ldots,x_n):\mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x^0_j(b),R^2_j+R^1_j(b-a)\big)\to\mathbb{R}$ при всех $\gamma\in\mathfrak{B}\big(\gamma^0,R^2\big)$, $x_p\in\mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x^0_p(b),R^2_p+R^1_p(b-a)\big)$, $p=\overline{1,n}$, $p\neq j$, является β^2_{ij}-липшицевым;*
- *при п.в. $t\in[a,b]$ для любых $x_j\in\widehat{D}^l_j(t)$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, имеет место включение $y^l_i(t)\in f^l_i\big(t,x_1,\ldots,x_n,\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(u^0(t),R^1)\big)$; для любых $x_j\in\mathrm{B}_{\mathbb{R}}\big(x^0_j(b),R^2_j+R^1_j(b-a)\big)$, $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,n}$, справедливо $\Delta^l_i\in g^l_i\big(\overline{\mathrm{B}}_{\mathbb{R}^n}(\gamma^0,R^2),x_1,\ldots,x_n\big)$.*
- *для матриц $A=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$, $B_{11}=(H_j\beta^1_{ij})_{m\times n}$, $B_{12}=(\beta^1_{ij})_{m\times n}$, $B_{21}=\big((b-a)\beta^2_{ij}\big)_{k\times n}$, $B_{22}=(\beta^2_{ij})_{k\times n}$, спектральный радиус ϱ произведения BA удовлетворяет неравенству $\varrho(BA)<1$;*

Тогда, если при $l\to\infty$ имеют место соотношения $\mathit{vrai}\sup\limits_{t\in[a,b]}|y^{0l}-y^l|\to 0$, $\Delta^{0l}-\Delta^l|\to 0$, то при каждом l, начиная с некоторого номера, существует определенное на $[a,b]$ решение $\xi^l\in AC_\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ краевой задачи (8), (14) *такое, что имеет место сходимость $\xi^l\to x^0$.*

Публикации автора по теме диссертации

[1] *Трещёв В.С.* Разрешимость краевых задач для дифференциальных уравнений с запаздыванием // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18. № 5-2. С. 2708–2710.

[2] *Трещёв В.С.* Разрешимость краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2014. Т. 19. № 2. С. 440–443.

[3] *Пасечников И.И., Трещёв В.С.* Существование периодических решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2014. Т. 19. № 2. С. 408–411.

[4] *Трещёв В.С.* Непрерывная зависимость от параметров решений краевых задач дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. № 1. С. 62–66.

[5] *Трещёв В.С.* Корректная разрешимость систем операторных уравнений с векторными накрывающими отображениями // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. № 5. С. 1487–1489.

[6] *Алвеш М.Ж., Плужникова Е.А., Трещёв В.С.* Условия накрывания оператора Немыцкого а пространстве существенно ограниченных функций //

Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20. № 5. С. 992–995.

[7] *Трещёв В.С.* О задаче Коши для систем неявных дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2016. Т. 21. № 2. С. 430–434.

[8] *Трещёв В.С.* Об условиях накрывания оператора Немыцкого в пространстве измеримых существенно ограниченных функций // Математическое и компьютерное моделирование, информационные технологии управления: сб.тр. Школы для студентов, аспирантов и молодых ученых «МКМИТУ-2016». Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2016. С. 229–232.

[9] *Трещёв В.С.* О нелинейной краевой задаче для систем неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сб. тр. IX междунар. конф. «ПМТУКТ-2016». Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2016. С. 356–360.

[10] *Жуковский Е.С., Трещёв В.С.* Накрывающие отображения в теории неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Изд-во ТГУ. 2016. 88 с.

[11] *Трещёв В.С.* Непрерывная зависимость от параметров решения краевой задачи для системы неявных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2017. Т. 22. № 3. С. 579–584.

Работы [1-7], [11] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.