На правах рукописи

Морякова Алена Романовна

АНАЛИЗ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2017

Работа выполнена в Ярославском государственном университете им. П.Г. Демидова.

Научный руководитель:

Кубышкин Евгений Павлович,
доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты:

Нефедов Николай Николаевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова, кафедра математики
физического факультета, заведущий.

Семенов Михаил Евгеньевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
Военный учебно-научный центр ВВС «Военно-воздушная
академия им. профессора Н.Е.Жуковского и Ю.А. Гагарина»,
кафедра теоретической гидрометеорологии, профессор

Ведущая организация:

Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского.

Защита диссертации состоится 26 декабря 2017 года в 15 часов 10 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1. ауд. 335.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/dissertations/5065/Диссертация_Морякова_А.Р..pdf

Автореферат разослан “___” октября 2017 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Гликлих Юрий Евгеньевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию установившихся колебательных решений некоторых дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом являются математическими моделями многих физических систем, приборов и механизмов, в которых присутствуют запаздывающие обратные связи. Регулярные и хаотические колебания могут оказывать как положительное, так и негативное воздействие на исследуемые системы и механизмы. Изучение колебательных процессов в силу своей прикладной значимости представляет собой весьма актуальную задачу.

В диссертации изучаются три нелинейных дифференциальных уравнения с запаздыванием, возникающие в прикладных задачах. В первой части диссертации рассмотрено нелинейное дифференциально- разностное уравнение второго порядка, содержащее запаздывающие слагаемые от искомой функции и ее производной. Частным случаем это уравнения является известное уравнение Минорского, полученное им при рассмотрении задачи вертикальной стабилизации судов. Аналогичное уравнение исследовали Г.С. Горелик и Э. Пинни. Анализ колебаний, бифурцирующих из нулевого состояния равновесия в случае бифуркации Андронова- Хопфа, в уравнении Минорского был проведен Ю.С. Колесовым. Уравнения такого типа возникают при моделировании работы электронных устройств с запаздывающей обратной связью. В диссертационной работе проведен детальный анализ возможных вариантов потери устойчивости нулевого решения указанного уравнения и возникающих при этом возможных критических случаев. Изучаются бифурцирующие из нулевого состояния равновесия колебательные решения в одном критическом случае внутреннего резонанса 1:3. Необходимо отметить, что указанный критический случай в уравнениях такого типа ранее не изучался.

Вторая часть диссертации посвящена исследованию двух сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены известные уравнения Мэкки - Гласса и Икеды. Первое из них является математической моделью процесса образования нейтрофилов (белых кровяных телец). Уравнение Мэкки - Гласса исследовалось в ряде работ, где на основе численного интегрирования было отмечено существование различных периодических решений, а также сложной, в том числе хаотической, динамики. Уравнение Икеды описывает динамику пассивного оптического резонатора. Уравнения такого типа демонстрируют сложную динамику, в том числе в них можно наблюдать мультистабильность, хаотическую турбулентность, образование диссипативных структур. После записи в безразмерных переменных, эти уравнения переходят к широкому классу дифференциальных уравнений первого порядка с запаздыванием, содержащих малый параметр при старшей производной и нелинейную обратную связь, которая определена физикой процессов. Общие свойства поведения решений таких уравнений и их связь с решениями одномерных отображений изучались в монографии А.Н. Шарковского, Ю.Л. Майстренко, Е.Ю. Романенко. Некоторые подходы к построению асимптотики решений указанного типа сингулярно возмущенных уравнений были предложены в работах С.А. Кащенко, И.С. Кащенко. В диссертации изучаются бифуркации автоколебательных решений из состояний равновесия двух указанных уравнений с помощью метода равномерной нормализации, предложенного в работах Е.П. Кубышкина. Этот метод позволяет свести задачу нахождения периодических решений исходного уравнения к анализу счетной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащей уравнения для "быстрых" и "медленных" переменных, и доказать строгие теоремы о существовании периодических решений.

Изучению уравнений Мэкки - Гласса и Икеды посвящено большое число исследований. Однако в большинстве работ анализ проводился на основании численного интегрирования. В диссертационной работе результаты получены с помощью качественной теории дифференциальных уравнений, что позволило получить строгие теоремы об условиях бифуркаций периодических решений и построить асимптотические формулы периодических решений.

Целью настоящей работы является исследование колебательных решений трех дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, бифурцирующих из состояний равновесия при изменении параметров уравнения.

В первой главе предполагалось проанализировать бифурцирующие автоколебательные решения дифференциально - разностного уравнения второго порядка, содержащего запаздывающие слагаемые от неизвестной функции, в критическом случае резонанса 1:3.

Во второй и третьей главах предполагалось провести анализ периодических решений уравнения Мэкки - Гласса и уравнения Икеды с помощью метода равномерной нормализации в зависимости от параметров уравнения.

Методы исследования. Основными методами исследования являются метод интегральных(инвариантных) многообразий, метод нормальных форм дифференциальных уравнений, метод равномерной нормализации сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, теория нелинейных операторных уравнений и теория бифуркаций.

Научная новизна. Все основные результаты данной работы являются новыми. Научная новизна проявляется в следующем:

Глава 1. В этой главе рассмотрено нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка. Для этого уравнения проведен анализ устойчивости нулевого решения и построена полная картина D - разбиений пространства параметров. Выделен критический случай внутреннего резонанса 1:3 при потере устойчивости нулевого решения. Для этого критического случая исследованы бифуркации периодических решений. Показана возможность перехода периодических решений через бифуркацию удвоения периода к хаосу.

Глава 2. Изучены периодические решения уравнения Мэкки - Гласса методом равномерной нормализации. Построена нормальная форма уравнения и получены строгие теоремы об условиях бифуркации периодических решений. Приведена асимптотическая формула периодических решений и алгоритм нахождения периодических решений уравнения Мэкки - Гласса, бифурцирующих из состояния равновесия при изменении параметра. С помощью этого алгоритма построены периодические решения уравнения. В результате численного моделирования показана возможность перехода к хаотическим колебаниям и хаотической мультистабильности.

Глава 3. Проведен анализ состояний равновесия уравнения Икеды в зависимости от параметров. С использованием метода равномерной нормализации изучены бифуркации периодических решений. Показана возможность явлений мультистабильности и хаотической мультистабильности.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Диссертация носит в основном теоретический характер. Методы, применяемые в диссертационной работе, могут быть использованы при решении аналогичных задач. Во второй главе приведен алгоритм, позволяющий построить периодические решения других дифференциальных уравнений первого порядка содержащих малый параметр при старшей производной.

На защиту диссертации выносятся следующие **основные положения и результаты:**

1) Для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом, содержащего нелинейные запаздывающие слагаемые от искомой функции и ее производной, построена картина D - разбиений пространства параметров квазиполинома линейной части уравнения. Исследованы возможные критические случаи потери устойчивости нулевого решения. Проведен анализ бифуркаций автоколебательных решений в критическом случае внутреннего резонанса 1:3. Показана возможность существования сложных, в том числе хаотических, колебательных решений.

2) Изучены периодические решения уравнения Мэкки - Гласса, бифурцирующие из единственного положительного состояния равновесия. Получены строгие теоремы об условиях бифуркации периодических решений, построены асимптотические формулы периодических решений. Численным моделированием показано, что при увеличении бифуркационного параметра эти решения становятся хаотическими.

3) Изучена динамика состояний равновесия уравнения Икеды в зависимости от параметров уравнения и исследована их устойчивость. Построены асимптотические формулы периодических решений. Изучены бифуркации периодических решений из различных состояний равновесия.

4) Показана возможность существования одновременно большого числа устойчивых периодических решений, т.е. явления мультистабильности, для уравнений Мэкки - Гласса и Икеды.

5) Показано, что в уравнениях Мэкки - Гласса и Икеды может наблюдаться хаотическая мультистабильность, т.е. существование одновременно большого числа хаотических колебательных решений.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на Международных молодежных научно-практических конференциях “Путь в науку”, Ярославль, 2012, 2013, 2014, 2015; Международной студенческой конференции «Science and Progress», Санкт-Петербург, 2013; Международной конференции “Нелинейная динамика и ее приложения”, посвященной 150- летию со дня рождения Поля Пенлеве, Ярославль, 2013; Международной конференция «Нелинейные явления в задачах современной математики и физики», посвященной 210-летию Демидовского университета, Ярославль, 2013; Международной конференции «Нелинейные методы в физике и механике» посвященной 90-летию со дня рождения Мартина Крускала, Ярославль, 2015; International Workshop: Waves, Solitons and Turbulence in Optical Systems, Берлин, 2015; V-ой Международной конференции “Проблемы математической и теоретической физики и математическое моделирование”, Москва, 2016.

Частично результаты диссертационной работы получены в процессе выполнения работ по госзаданию № 1.5722.2017/БЧ.

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1-13]. Из совместных работ [5,6,12,13] в диссертацию вошли результаты, полученные лично диссертантом. Работы [5,6,12,13] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Работа изложена на 112 страницах машинописного текста, содержит 27 рисунков. Библиографический раздел включает 50 наименований.

Содержание работы.

В **первой главе** рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + A\dot{x} + x + f(x(t-h)) + g(\dot{x}(t-h)) = 0, \tag{1}$$

в котором $A, h > 0$, $f(x) = f_1 x + f_2 x^2 + f_3 x^3 + o(x^3)$, $g(x) = g_1 x + g_2 x^2 + g_3 x^3 + o(x^3)$ гладкие при $|x| \leq x_0$ функции.

Характеристическое уравнение линейной части уравнения (1) имеет вид

$$P(\lambda) \equiv \lambda^2 + A\lambda + 1 + (f_1 + \lambda g_1)\exp(-\lambda h) = 0. \tag{2}$$

Анализ расположения корней уравнения (2) проводится с помощью метода D - разбиений. Построены картины D - разбиений для различных значений параметров. Показано, что возможны следующие механизмы потери устойчивости квазиполиномом (2): при прохождении корня уравнения (2) через точку $\lambda = 0$, при прохождении пары комплексно сопряженных корней уравнения (2) через точки $\pm i\omega(\omega > 0)$, при одновременном прохождении корней уравнения (2) через точки $\lambda = 0$ и $\pm i\omega(\omega > 0)$, при одновременном прохождении двух пар комплексно сопряженных корней через точки $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2 (0 < \omega_1 < \omega_2)$. В последнем случае возможна реализация соотношения $\omega_1/\omega_2 = 1/3$, т.е. имеет место критический случай внутреннего резонанса 1:3. Обозначим $A = A_0,\ f_1 = f_{10},\ g_1 = g_{10},\ h = h_0$ значения параметров, при которых уравнение (2) имеет корни $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2 (0 < \omega_1 < \omega_2, \omega_1/\omega_2 = 1/3)$.

Положим $A = A_0 + \varepsilon A_1,\ f_1 = f_{10} + \varepsilon f_{11},\ g_1 = g_{10} + \varepsilon g_{11},\ h = h_0 + \varepsilon h_1,\ 0 < \varepsilon << 1$. Изучим поведение решений уравнения (1) с начальными условиями из некоторого шара $S(r_0)$ радиуса r_0 фазового пространства $H = C[-h, 0] \oplus C^1[-h, 0]$ уравнения с центром в нуле. В окрестности нуля фазового пространства H уравнение (1) имеет локальное асимптотически устойчивое гладкое инвариантное четырехмерное центральное многообразие поведение решений на котором определяет поведение решений уравнения (1) из шара $S(r_0)$. В свою очередь поведение решений на интегральном многообразии определяется поведением решений следующей нормализованной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_1 = (i\omega_1 + \lambda_1^1\varepsilon + d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1 + d_1\bar{z}_1^2 z_2 + \cdots = Z_1(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2; \varepsilon), \quad (3)$$

$$\dot{z}_2 = (i\omega_2 + \lambda_2^1\varepsilon + d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2 + d_2\bar{z}_1^3 + \cdots = Z_2(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2; \varepsilon), \quad (4)$$

в которой $\lambda_j^1 = \tau_j^1 + i\omega_j^1$, комплексные постоянные $d_{jk} = a_{jk} + ic_{jk}, d_j (j, k = 1, 2)$ эффективно вычисляются и точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по $\varepsilon z_j,\ \varepsilon\bar{z}_j, z_j\bar{z}_j$.

Положим в (3)-(4) $z_j = \varepsilon^{1/2}\rho_j \exp(i\tau_j), \rho_j \geq 0, -\infty < \tau_j < \infty (j = 1, 2),\ d_j = |d_j|\exp(i\gamma_j), 0 \leq \gamma_j < 2\pi$. Введем "медленные" переменные $\rho_1,\ \rho_2,\ \theta = 2\tau_1 - \tau_2$ и быструю переменную τ_1 и выполним нормировки $\rho_j = \rho_j/(-d_{jj})^{1/2},\ j = 1, 2,\ t \to t/\varepsilon$. Выберем $A_1,\ f_{11},\ g_{11},\ h_1$ таким образом, чтобы $\tau_1^1 = \tau_2^1 = 1$. В результате "главная" часть системы уравнений "медленных" переменных примет вид

$$\dot{\rho}_1 = (1 - \rho_1^2 + a_1\rho_2^2)\rho_1 + b_1\cos(-\theta + \gamma_1)\rho_1^2\rho_2, \quad (5)$$

$$\dot{\rho}_2 = (1 + a_2\rho_1^2 - \rho_2^2)\rho_2 + b_2\cos(\theta + \gamma_2)\rho_1^3, \quad (6)$$

$$\dot{\theta} = \omega + c_1\rho_1^2 + c_2\rho_2^2 - 3b_1\sin(-\theta + \gamma_1)\xi_1\xi_2 - b_2\sin(\theta + \gamma_2)\rho_1^3/\rho_2, \quad (7)$$

где $a_1 = d_{12}/(-d_{22}),\ a_2 = d_{21}/(-d_{11}), b_1 = |d_1|/(a_{11}a_{22})^{1/2}, b_2 = |d_2|/(-d_{11})^{3/2}(-d_{22})^{1/2},\ c_1 = (3c_{11} - c_{21})/(-d_{11}), c_2 = (3c_{12} - c_{22})/(-d_{22}),\ \omega = 2\omega_1^1 - \omega_2^1$.

Система (5)-(7) анализировалась численно. Отмечено существование устойчивых состояний равновесия, что соответствует устойчивым периодическим решениям системы уравнений (3)-(4) (уравнения (1)), от которых в результате бифуркации Андронова- Хопфа ветвятся устойчивые периодические решения, которые соответствуют устойчивым двумерным инвариантным торам системы уравнений (3)-(4) (уравнения (1)). Через серию бифуркаций удвоения периода эти решения переходят в хаотический аттрактор.

В **главе 2** рассматривается известное уравнение Мэкки -Гласса

$$\dot{x} = -\gamma x + \beta x_\tau \theta^n (\theta^n + x_\tau^n)^{-1}, x_\tau = x(t-\tau), \tag{8}$$

где τ, - некоторый положительный параметр, n - натуральное число, параметры β, γ, θ по физике задачи принимают значение порядка единицы. Параметр τ по своим значениям значительно превосходит остальные параметры, входящие в (8). Нормируем $x \to \theta x,\ t \to \tau t,\ \beta \to \beta/\gamma$ и запишем уравнение (8) в окрестности состояния равновесия $x_* = (\beta-1)^{1/n}$ в следующем виде

$$\varepsilon_1 \dot{y} + y(t) + b_1 y(t-1) + f(y(t-1)) = 0, \tag{9}$$

где $\varepsilon_1 = (\tau)^{-1},\ f(y) = b_2 y^2 + b_3 y^3 + o(y^3)$ аналитическая в окрестности $y = 0$ функция,

$$b_1 = n - 1 - n/\beta, -1 < b_1,\ b_2 = n(1 + (1-n)(\beta-1))(\beta-1)^{(n-1)/n}/(2\beta),$$
$$b_3 = (6n^2 - (5n^2+1)\beta)(\beta-1)^{(n-2)/n}/(6\beta^2). \tag{10}$$

Характеристическое уравнение линейной части уравнения (9) примет вид

$$P(\lambda; \varepsilon_1) = \varepsilon_1 \lambda + 1 + b_1 \exp(-\lambda) = 0,\ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

При $-1 < b_1 < 1$ и $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, где ε_0 мало, нулевое решение уравнения (9) асимптотически устойчиво, при $b_1 > 1$ нулевое решение неустойчиво. Пограничной является точка $b_1 = 1$. Это определяет согласно (10) последовательность критических значений $\beta_n = n/(n-2)$.

Положим $\beta = \beta_n(1 + \varepsilon_2/(n-2-\varepsilon_2)),\ |\varepsilon_2| \ll 1$, имеем $b_1 = 1 + \varepsilon_2, b_2 = b_2(\varepsilon_2), b_3 = b_3(\varepsilon_2)$.

Теорема 1. *Существует* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ $(\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2),\ |\varepsilon| = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{1/2})$ *все множество корней уравнения* (11) *определяется формулой*

$$\begin{aligned} \lambda_k(\varepsilon) &= i\pi k + \ln(1+\varepsilon_2) + \lambda^1(i\pi k + \ln(1+\varepsilon_2); \varepsilon_1), \\ \lambda_{-k}(\varepsilon) &= \bar{\lambda}_k(\varepsilon), k = 1, 3, 5\ldots, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\lambda^1(w;\varepsilon) \equiv -\ln(1 - \varepsilon_1(w - \ln(1 + \varepsilon_1(w - \ln(1 + \varepsilon_1(w - \ldots))))))$ $(lnw = ln|w| + iargw,\ -\pi < argw < \pi)$*- непрерывная по совокупности переменных, аналитическая по* ε_1 *при каждом фиксированном* $w \in \{w : -x_0 < Re < x_0, Imw \geq \pi, x_0$*-малое фиксированное число*$\}$ *и аналитическая по* w *при каждом* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0,\ |Rew| < \delta_0$ *функция.*

При этом равномерно относительно k

$$\lambda_k(\varepsilon) = \gamma_k(\varepsilon) + i(\pi k + \sigma_k(\varepsilon)), \tag{13}$$

$$\gamma_k(\varepsilon) = \ln(1+\varepsilon_2) - \ln((1+\varepsilon_1\ln(1+\varepsilon_2))^2 + \varepsilon_1^2\pi^2k^2)/2 + O(|\varepsilon|^2),$$
$$\sigma_k(\varepsilon) = -\arccos((1+\varepsilon_1\ln(1+\varepsilon_2))/((1+\varepsilon_1\ln(1+\varepsilon_2))^2 + \varepsilon_1^2\pi^2k^2)^{1/2}) + \\ + O(|\varepsilon|^2). \tag{14}$$

Фазовым пространством уравнения (9) является пространство непрерывных вещественных функций $C[-1;0]$. Перейдем от уравнения (9) к эквивалентной начально - краевой задаче в полосе $-1 \le s \le 0, t \ge 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial s}, \tag{15}$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial u}{\partial s}\bigg|_{s=0} = -u(0,t) - (1+\varepsilon_2)u(1,t) - f(u(1,t)), u(s,0) = y_0(s) \tag{16}$$

положив $u(s,t) = y(t+s)$

Производящим оператором полугруппы линейных вполне непрерывных операторов $T(t;\varepsilon)$ $(T(t_1+t_2;\varepsilon) = T(t_1;\varepsilon)T(t_2;\varepsilon) = T(t_2;\varepsilon)T(t_1;\varepsilon),\ T(0;\varepsilon) = I$- единичный оператор), действующих в пространстве $C[-1,0]$ и определяющих решение линейной части задачи (15)-(16), будет оператор

$$A(\varepsilon)v = \begin{cases} dv/ds, -1 \le s < 0, \\ -\varepsilon_1^{-1}(v(0) + (1+\varepsilon_2)v(-1)), s = 0 \end{cases} \tag{17}$$

с областью определения $D(A) = \{v(s) \in C^1[-1,0], \varepsilon v'(0) + v(0) + (1+\varepsilon_2)v(-1) = 0\}$.

Собственными значениями оператора $A(\varepsilon)$ являются величины $\lambda_k = \lambda_k(\varepsilon)$, а соответствующими собственными функциями будут функции $e_k(s;\varepsilon) = e^{\lambda_k(\varepsilon)s}/P'(\lambda_k(\varepsilon);\varepsilon) = e^{\lambda_k(\varepsilon)s}/(1+\varepsilon_1+\varepsilon_1\lambda_k(\varepsilon)),\ k = \pm1, \pm3, \dots$ $||e_k(s;\varepsilon)||_C \sim 1$ при $n \to \infty$.

Пусть l_2 комплексное пространство последовательностей вида $z = (z_1, z_{-1}, z_3, z_{-3}, \dots)$, $z_k \in C, z_{-k} = \bar{z}_k, ||z||_{l_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2 < \infty$, l_2^1- комплексное подпространство l_2 последовательностей $z = (z_1, z_{-1}, z_3, z_{-3}, \dots)$, для которых $||z||_{l_2^1}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k(\varepsilon)|^2 |z_k|^2 < \infty$ и $|| \sum_{k=1}^{\infty} z_k \lambda_k(\varepsilon) e_k(s;\varepsilon)||_C < \infty$.

Вводится в рассмотрение функция-оператор

$$u(s,z;\varepsilon) = \sum_{k=\pm1,\pm3,\dots} z_k e_k(s;\varepsilon) + \sum_{(k_1,k_2)\in\Omega_2} z_{k_1} z_{k_2} u_{k_1k_2}(s;\varepsilon) + \\ + \sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\Omega_3} z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} u_{k_1k_2k_3}(s;\varepsilon), \tag{18}$$

где $\Omega_2 = \{(k_1, k_2) : k_1, k_2 = \pm 1, \pm 3, \dots, k_1 \le k_2\}, \Omega_3 = \{(k_1, k_2, k_3) : k_1, k_2, k_3 = \pm 1, \pm 3, \dots, k_1 \le k_2 \le k_3\}$, действующая из $s^1(r_0) \otimes \{|\varepsilon| < \varepsilon_0\}$ в $C[-1, 0]$ и гладко зависящая от своих переменных, и система дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_k = \lambda_k(\varepsilon) z_k + \sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\Omega_k^3} d_{k_1k_2k_3}(\varepsilon) z_{k_1} z_{k_2} z_{k_3} \tag{19}$$

в пространстве l_2 с областью определения правой части $s^1(r_0)$.

Функции $u_{k_1k_2}(s;\varepsilon), u_{k_1k_2k_3}(s;\varepsilon), d_{k_1k_2k_3}(\varepsilon)$ эффективно и однозначно определяются из условий принадлежности траекторий системы (19) в силу (18) краевой задачи (15)-(16).

Пусть $\rho = (\rho_1, \rho_3, \dots)$, $\rho_j \ge 0$, $j = 1, 3, \dots$, $\sum_{j=1}^{\infty} k^2 \rho_j^2 < \infty$ и $\theta = (\theta_1, \ \theta_2, \dots)$, $0 \le \theta_j < 2\pi$, $j = 1, 3, \dots$ - вещественные последовательности. Введем в области $\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2), \varepsilon_1 > 0, |\varepsilon| < \varepsilon_0\}$ переменные $\zeta \ge 0$ и $\pi/2 < \psi < \pi/2$, положив

$$\zeta = (\varepsilon_1^2 + |\varepsilon_2|)^{1/2}, \varepsilon_1 = \zeta \cos\psi, \varepsilon_2 = \zeta^2 \sin\psi^2 sign\psi. \tag{20}$$

Структура системы уравнений (19) позволяет ввести взамен z_k ($k = \pm 1, \dots$) одну "быструю" переменную и счетное число "медленных" переменных вида ρ и θ. Нормируем $\rho_k \to \zeta\rho_k, t \to t/\zeta^2$ и усредняя затем полученную систему уравнений по "быстрой" переменной, получим систему уравнений, главная часть которой (при $\zeta \to 0$) будет иметь вид

$$\dot{\rho}_k = \gamma_k(\psi, \xi)\rho_k + R_k(\rho, \ \theta)(\gamma_k = \sin^2\psi sign\psi - 2\cos^2\psi(\pi k)^2), \tag{21}$$

$$\dot{\theta}_k = \Theta_k(\rho, \theta), \ k = 1, 3, \dots, \tag{22}$$

в которой функционалы $R_k(\cdot), \Theta_k(\cdot)$ - 2π периодические по θ_j, $R_k(\cdot)$ является однородной формой порядка 3 по ρ_j.

Пусть $(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)) \in l_2^1 \otimes C_0$ решение системы уравнений

$$R_k(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)) = 0, k = 1, 3 \dots, \tag{23}$$

$$\Theta_k(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)) = 0, \ k = 1, 3, \dots. \tag{24}$$

Введем в рассмотрение бесконечную матрицу

$$B(\psi) = \begin{pmatrix} \gamma_k(\psi)\delta_{kj} + \partial R_k/\partial\rho_j & \partial R_k/\partial\theta_j \\ \partial\theta_k/\partial\rho_j & \partial R_k/\partial\theta_j \end{pmatrix} (k, j = 1, 3, \dots), \tag{25}$$

вычисленную в точке $\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)$, где δ_{kj} символ Кронекера. Матрица определяет линейный оператор

$$B(\psi)v \ (v = (\rho, \theta)) : E^1 = l_2^1 \otimes C \to E = l_2 \otimes C, \tag{26}$$

$||v||_E = ||\rho||_{l_2} + ||\theta||_C, \ ||v||_{E^1} = ||\rho||_{l_2^1} + ||\theta||_C.$

Пусть

$$z_1^*(t;\psi,\zeta) = \rho_1^*(\psi,\zeta)e^{i\tau}, z_3^*(t;\psi,\zeta) = \rho_3^*(\psi,\zeta)e^{i3\tau+\theta_1^*(\psi)},$$
$$z_5^*(t;\psi,\zeta) = \rho_5^*(\psi,\zeta)e^{i5\tau+\theta_1^*(\psi)+\theta_3^*(\psi)}, \dots, z_{-k}^*(t;\psi,\zeta) = \bar{z}_k^*(t;\psi,\zeta), \ k = 1,3,\dots \tag{27}$$

Теорема 2. *Пусть при некотором* ψ *система уравнений (21)-(22) имеет решение* $(\rho^*(\psi),\theta^*(\psi)) \in E_0^1$*, а построенная по этому решению матрица (25) определяет оператор (26), который не имеет собственных значений лежащих на мнимой комплексной плоскости. Тогда существует такое* $\zeta_0 > 0$*, что при* $0 < \zeta < \zeta_0$ *краевая задача (15)-(16), в которой* ε_1 *и* ε_2 *определены согласно (20) имеет периодическое решение* $u^*(s,\tau;\psi,\zeta)$*, допускающее представление*

$$u^*(s,\tau;\psi,\zeta) = u_0^*(s,\tau;\psi,\zeta) + O(\zeta^4) =$$
$$= \zeta \sum_{k=\pm1,\pm3} e_k(s;\psi,\zeta)z_k^*(\tau;\psi,\zeta) + \zeta^2 \sum_{(k_1,k_2)\in\Omega_2} u_{k_1k_2}(s;\psi,\zeta)z_{k_1}^*(\tau;\psi,\zeta)z_{k_2}^*(\tau;\psi,\zeta) +$$
$$+ \zeta^3 \sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\Omega_3} u_{k_1k_2k_3}(s;\psi,\zeta)z_{k_1}^*(\tau;\psi,\zeta)z_{k_2}^*(\tau;\psi,\zeta)z_{k_3}^*(\tau;\psi,\zeta) + O(\zeta^4), \tag{28}$$

$$\dot{\tau} = \pi + \sigma_1(\psi,\zeta) + \zeta^2 T_1(\rho^*(\psi,\zeta),\theta^*(\psi,\zeta);\psi,\zeta) =$$
$$= \pi + \sigma_1(\psi,\zeta) + \zeta^2\Delta_2(\psi,\zeta) = \pi + \sigma(\psi,\zeta), \ (\sigma(\psi,\zeta) \equiv 0), \tag{29}$$

в котором Ω_2, Ω_3 *определены в (18), функции* $e_k(\cdot), u_{k_1k_2}(\cdot), u_{k_1k_2k_3}(\cdot)$ *определены выше с учетом замены (20), функции* $z_k^*(\cdot)$ *определены в (27).*

Алгоритм нахождения периодических решений краевой задачи (15)-(16)(уравнения (9)), предложенный в диссертации, позволяет строить решения в виде ряда

$$u^*(s,\tau;\psi,\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta^j u_j(s,\tau,\rho,\theta,\Delta;\psi,\zeta), \tag{30}$$

в котором $u_j(\cdot)$ гладко зависящие от своих переменных функционалы $\rho \in l_2^1, \theta \in c_0, 2\pi$- периодические по τ при $-1 \le s \le 0, \Delta \in R, -\pi/2 < \psi < \pi/2, 0 < \zeta \le \zeta_0$.

При этом

$$\rho = \rho^* + \zeta^2\rho_2^* + \zeta^4\rho_4^* + \dots = (\rho_1,\rho_2,\dots), \rho_j > 0, \rho_j = \rho_j(\psi,\zeta) =$$
$$= \rho_j^*(\psi,\zeta) + \zeta^2\rho_{j2}^*(\psi,\zeta) + \zeta^4\rho_{j4}^*(\psi,\zeta) + \dots, \theta = \theta^* + \zeta^2\theta_2^* + \zeta^4\theta_4^* + \dots = (\theta_1,\theta_2,\dots),$$
$$\theta_j = \theta_j(\psi,\zeta) = \theta_j^*(\psi,\zeta) + \zeta^2\theta_{j2}^*(\psi,\zeta) + \zeta^4\theta_{j4}^*(\psi,\zeta) + \dots,$$
$$\Delta = \Delta(\psi;\zeta) = \zeta^2\Delta_2(\psi;\zeta) + \zeta^4\Delta_4(\psi;\zeta) + \dots, \tag{31}$$

$\rho^*_*(\psi;\zeta), \theta^*_*(\psi;\zeta), \Delta_*(\psi;\zeta)$ гладкие по ψ и ζ функции,

$$u_1(\cdot) \equiv u_1(s,\tau,\rho,\theta;\psi,\zeta) = \sum_{k=1,3,\ldots} \rho_k(\psi,\zeta)[e_k(s;\psi,\zeta)e^{i(\tau+\theta_k^\vee(\psi;\zeta))}+$$

$$e_{-n}(s;\psi,\zeta)e^{-i(\tau+\theta_k^\vee(\psi;\zeta))}], \theta_k^\vee(\psi,\zeta) = \sum_{j=0}^{n-1}\theta_j(\psi,\zeta), \theta_0(\psi,\zeta) \equiv 0. \quad (32)$$

Подставляя ряд (30) в краевую задачу (15)-(16) с учетом (20) и приравнивая в полученных равенствах слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях ζ, определим функции, входящие в (30)-(32).

Теорема 3. *В условиях теоремы 2, существует такое $\zeta_0 > 0$, при котором ряд*

$$u^*(s,\tau;\psi,\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \zeta^j u_j^*(s,\tau;\psi,\zeta). \quad (33)$$

сходится равномерно относительно $0 \le \zeta \le \zeta_0$ и $(s,\tau) \in \{(s,\tau) : -1 \le s \le 0, -\infty < \tau < \infty\}$ и определяет периодическое решение краевой задачи (15)-(16), устойчивость которого определяется условиями теоремы 2. Переменная τ определяется в соответствии со следующим уравнением

$$\dot{\tau} = \pi + \sigma_1(\psi,\zeta) + \zeta^2\Delta_2(\psi,\zeta). \quad (34)$$

Ниже приведены некоторые результаты численного анализа. При $\psi = 1.51, \zeta = 0.1$ было найдено пять устойчивых периодических решений. При $\psi = 1.55$ к уже найденным периодическим решениям добавляются еще два. Изучается вопрос возможности перехода периодических решений в хаотические колебания при фиксированном ψ и увеличении значения параметра ζ, а также вопрос возможности сосуществования нескольких хаотических аттракторов для одинаковых значений параметров.

В **третьей главе** рассматривается известное уравнение Икеды

$$\dot{x} = \mu \sin(x(t-\tau) - c) - x, \quad (35)$$

здесь τ – время распространения света в кольцевом резонаторе, $0 \le c < 2\pi$ – постоянный фазовый сдвиг, $\mu > 0$ – безразмерный коэффициент, характеризующий интенсивность лазерного излучения.

Положив $t' = t/\tau, \varepsilon_1 = \tau^{-1} \ll 1$, имеем уравнение

$$\varepsilon_1\dot{x}(t) + x(t) = \mu\sin(x(t-1) - c). \quad (36)$$

Состояния равновесия $x_*(c,\mu)$ уравнения (36) определяются корнями уравнения

$$x = \mu\sin(x - c) \quad (37)$$

в зависимости от c и μ. Устойчивость $x_*(c,\mu)$ определяется расположением корней характеристического уравнения

$$P(\lambda;\varepsilon_1)=\varepsilon_1\lambda+1-\mu\cos(x_*(\mu,c)-c)\exp(-\lambda)=0. \qquad (38)$$

При $|\mu\cos(x_*(\mu,c)-c)|<1$ состояние равновесия $x_*(c,\mu)$ асимптотически устойчиво. При $|\mu\cos(x_*(\mu,c)-c)|>1$ состояние равновесия $x_*(c,\mu)$ неустойчиво. Пограничным является случай $|\mu\cos(x_*(\mu,c)-c)|=1$. Это равенство определяет в плоскости c,μ множество точек бифуркации периодических решений из состояния равновесия $x_*(c,\mu)$.

Уравнение (37) имеет единственное решение вида $x_*(\mu,c)$, $\lim_{\mu\to 0}x_*(\mu,c)=0$ при $0<c<2\pi$. При этом $-\pi<x_*(\mu,c)<0$, если $0<c<\pi$, $x_*(\mu,\pi)\equiv 0$, $0<x_*(\mu,c)<\pi$, если $\pi<c<2\pi$. При $c=0$ уравнение (37) имеет решение $x_*(\mu,c)\equiv 0$, а также при $\mu>1$ два решения $\pm x_*(\mu,c), x_*(\mu,c)>0, \lim_{\mu\to 1}x_*(\mu,c)=0$.

Кроме того, при каждом c существует последовательность значений $0<\mu_1(c)\le\mu_2(c)\le ...$, при которых в уравнении (37) появляются кратные корни $x_*^-(\mu_k(c),c)=x_*^+(\mu_k(c),c),\ \mu_k(c)\cos(x_*^{\pm}(\mu_k(c),c)-\mathrm{c})=1$, которым при $\mu>\mu_k(c)$ отвечают парные (устойчивое и неустойчивое) состояния равновесия $x_*^-(\mu,c)$ и $x_*^+(\mu,c)$ уравнения (36). При дальнейшем увеличении параметра μ состояние равновесия $x_*^-(\mu,c)$ теряет устойчивость при некотором μ_* и при этом $\mu_*\cos(x_*^-(\mu_*,c)-\mathrm{c})=-1$.

В параграфе 3.2 показано, что бифуркационный анализ потери устойчивости состояния равновесия $x_*(\mu,c)$, $\lim_{\mu\to 0}x_*(\mu,c)=0$, $0<c<2\pi$ проводится аналогично уравнению (9).

В параграфе 3.3. проводится бифуркационный анализ потери устойчивости состояния равновесия $x_*(\mu,0)\equiv 0$ в случае $c=0$. Потеря устойчивости состоянием равновесия $x_*(\mu,0)\equiv 0$ происходит в точке $\mu_*=1$. Пусть $\mu=1+\varepsilon_2,\ |\varepsilon_2|<<1$. Уравнение (36) в окрестности $x_*(\mu,0)\equiv 0$ примет вид

$$\varepsilon_1\dot y(t)+y(t)-(1+\varepsilon_2)y(t-1)+f(y(t-1);\varepsilon)=0, \qquad (39)$$

где $f(y)=(1+\varepsilon_2)/6y^3+o(y^3)$ аналитическая функция.

Множество корней характеристического уравнения линейной части уравнения (39) можно записать в виде (12), где $k=0,2,4,\ldots$

Обозначим через l_2 - пространство комплексных последовательностей вида $z=(z_0,z_2,z_{-2},z_4,z_{-4},\ldots),z_0\in R,z_k\in C,k=2,4,\ldots,z_{-n}=\bar z_k, ||z||^2_{l_2}=\sum_{k=0}^{\infty}|z_k|^2<\infty$. Через l_2^1 обозначим подпространство l_2 комплексных последовательностей $z=(z_0,z_2,z_{-2},z_4,z_{-4},\ldots)$ для которых $||z||^2_{l_2^1}=\sum_{k=0}^{\infty}|\lambda_k(\varepsilon)|^2|z_k|^2<\infty$ и $||\sum_{k=-\infty}^{\infty}z_k\lambda_k(\varepsilon)*e_k(s;\varepsilon)||_C<\infty$.

В рассматриваемом случае нормальной формой уравнения (39) будет система вида (19) в пространстве l_2 с областью определения правой части $s^1(r_0)$, гладко зависящая от ε, в которой $\Omega_k^3=\{(k_1,k_2,k_3),k_1,k_2,k_3=$

$0, \pm 2, \pm 4, \dots, k_1 \le k_2 \le k_3, k_1 + k_2 + k_3 = n\}$. Схема ее построения аналогична схеме построения системы уравнений (19).

Введем взамен переменных z_k $(k = 0, \pm 2, \dots)$ одну "быструю" переменную и счетное число "медленных" переменных вида $\rho = (\rho_0, \rho_2, \dots), \theta = (\theta_2, \theta_4, \dots)$. Рассмотрим "главную" часть системы (при $\zeta \to 0$), подставив в нее $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ согласно (20) и усредним полученную систему уравнений по "быстрой" переменной. В результате получим систему уравнений

$$\dot{\rho}_n = \gamma_k^*(\psi)\rho_k + R_k(\rho,\ \theta)(\gamma_k^*(\psi) = \sin^2\psi sign\psi - \pi^2 k^2 \cos^2\psi/2), k = 0, 2, \dots, \tag{40}$$

$$\dot{\theta}_n = \Theta_k(\rho, \theta),\ k = 2, 4, \dots. \tag{41}$$

Теорема 4. *Пусть при некотором ψ система уравнений* (40)-(41) *имеет экспоненциально устойчивое или неустойчивое состояние равновесия $(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi)) \in E_0^1$. В последнем случае m характеристических показателей (с учетом кратностей) линеаризованной на $(\rho^*(\psi), \theta^*(\psi))$ системы уравнений положительны. Тогда существует такое $\zeta_0 > 0$, что при $0 < \zeta < \zeta_0$ уравнение* (39) *с учетом выражений* (20) *имеет периодическое решение того же характера устойчивости. При этом размерность неустойчивого многообразия периодического решения равна m. Для периодического решения справедлива следующая формула*

$$y^*(\tau; \psi, \zeta) \quad = \quad \zeta(\rho_0^*(\psi)\ +\ 2\sum_{k=1}^{\infty} \rho_{2k}^*(\psi)\cos{(k\tau + \sum_{j=1}^{2k-2}\theta_{2j}^*(\psi))}\ +\ O(\zeta^3), \tag{42}$$

$$\dot{\tau} = 2\pi - \zeta\cos\psi + \zeta^2\cos\psi^2 + O(\zeta^3). \tag{43}$$

Для некоторых значений параметров ψ и ζ численным моделированием построены периодические решения и показана возможность бифуркации мультистабильности и хаотической мультистабильности.

В параграфе 3.4 анализируются бифуркации периодических решений уравнения (36) при рождении парных состояний равновесия $x_*^-(\mu, c)$ и $x_*^+(\mu, c)$. Для определенности рассмотрим случай $c = \pi/3, \mu_* \approx 2.4, x_* \approx 2.2$.

Уравнение (36) в окрестности рассматриваемых состояний равновесия примет вид

$$\varepsilon_1\dot{y}(t) + y(t) - (1 + \varepsilon_2)y(t-1) + f(y(t-1)), \tag{44}$$

где $f(y) = 1/2x_* y^2 + 1/6(1 + \varepsilon_2)y^3 + o(y^4)$.

Корни характеристического уравнения линейной части уравнения (44) определяются формулой (12), в которой $k = 0, 2, 4, \dots.$.

Нормальной формой уравнения (44) является система

$$\dot{z}_k = \lambda_k(\varepsilon)z_k + \sum_{(k_1 k_2)\in\Omega_k^2} d_{k_1 k_2(\varepsilon)} z_{k_1} z_{k_2}, \tag{45}$$

в которой $\Omega_k^2 = \{(k_1, k_2) : k_j = 0, \pm 2,\ \pm 4, \ldots,\ k = k_1 + k_2\}$. Функции $d_{k_1 k_2}(s; \varepsilon)$ эффективно вычисляются.

В рассматриваемом случае справедлива теорема, аналогичная теореме 4.

Проведен численный анализ уравнения Икеды в рассматриваемом случае для различных параметров, в частности, построены периодические решения для значений параметров $\psi = 1.51, \zeta = 0.1$ и показана возможность бифуркации одновременно нескольких периодических решений.

Публикации автора по теме диссертации

1) Морякова А.Р. Численный анализ расположения корней характеристических квазиполиномов уравнений с запаздыванием / А.Р. Морякова // Путь в науку. Информационные технологии и математика: Материалы Международной молодежной научно- практической конференции.Ярославль.—2013.—С.79-82.

2) Moryakova A.R. Analysis of the oscillatory regimes of the second-order nonlinear delay differential equation / A.R. Moryakova // Conference abstracts. International Student Conference "Science and Progress".—SPb.: Solo.—2013.—P.33.

3) Морякова А.Р. Анализ колебательных решений одного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом / А.Р. Морякова // Путь в науку. Математика: Материалы II Международной молодежной научно-практической конференции.—Ярославль.—2014.—С. 33-34.

4) Морякова А.Р. Анализ колебательных решений нелинейного дифференциально- разностного уравнения второго порядка в одном критическом случае / А.Р. Морякова // Вестник Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова. Серия естественные и технические науки.—Ярославль.—2014.—№2.—С.128-134.

5) Глызин, Д.С. О нулях некоторых характеристических квазиполиномов / Д.С. Глызин, Е.П. Кубышкин, А.Р. Морякова // Моделирование и анализ информационных систем.—2015.—Т. 22, №1.—С.74-84.

6) Кубышкин, Е.П. Исследование колебательных решений дифференциально-разностного уравнения второго порядка в одном критическом случае / Е.П. Кубышкин, А.Р. Морякова // Моделирование и анализ информационных систем.—2015.—Т. 22, №3.—С.439-447.

7) Moryakova A.R. Analysis of periodic solutions of Mackey-Glass equation / A.R. Moryakova // International Workshop: Waves, Solitons and Turbulence in Optical Systems October 12 - 14, 2015. - Berlin: Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics.—2015.—P.27.

8) Морякова А.Р. Исследование сложных колебательных решений одного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом / А.Р. Морякова // IV Международная научно-практическая молодежная конференция «Путь в науку», 24.04.2015 - 30.04.2015.—Ярославль.—2015.—С.35-36.

9) Морякова А.Р. Построение периодических решений уравнения Мэкки-Гласса / А.Р. Морякова // V Международная конференция «Проблемы математической и теоретической физики и математическое моделирование»: сборник докладов.—М.: НИЯУ МИФИ.—2016.—С.83-84.

10) Морякова А.Р. Исследование поведения решений некоторых уравнений с запаздывающим аргументом / А.Р. Морякова // Сборник материалов научного семинара стипендиантов программ «Михаил Ломоносов» и «Иммануил Кант» 2015-2016 года.—М.:Флинта.—2016.—№ 12.—С.115-117.

11) Moryakova A.R. Analysis of multistability of Mackey-Glass equation / A.R. Moryakova // XVIII International Conference & School & Advance in Nonlinear Science and III International Simposium Advances in Nonlinear Photonics. Program & Book of abstracts.—Saint Petersburg: Publishing House of SPhPU.—2016.—P.51.

12) Кубышкин, Е.П. Бифуркации периодических решений уравнения Мэкки–Гласса / Е.П. Кубышкин, А.Р. Морякова // Моделирование и анализ информационных систем.—2016.—Т. 23, №6.—С.784-803.

13) Kubyshkin, E. P. Analysis of Bifurcations of Periodic Solutions of Ikeda Equation / E. P. Kubyshkin, A. R. Moriakova // Nonlinear phenomena in complex systems.—2017.—Vol. 20, №1.—P.40-49.

Работы [5,6,12,13] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.