ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Струкова Ирина Игоревна

Гармонический анализ периодических на бесконечности функций

01.01.01 — Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор А. Г. БАСКАКОВ

Воронеж - 2014

Содержание

Обозначения

$\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ - группа целых чисел;

$\mathbb{R}$ - поле вещественных чисел;

$\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$ - множество неотрицательных вещественных чисел;

$\mathbb{J}$ - один из промежутков $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$;

$\mathbb{C}$ - поле комплексных чисел;

$\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ - единичная окружность (абелева группа комплексных чисел, модуль которых равен единице);

X - комплексное банахово пространство;

$Hom\ (X, Y)$ - банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y;

$End\ X$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X;

I - тождественный оператор;

$\sigma(B)$ - спектр оператора B;

G - локально компактная абелева группа;

$\hat{G}$ - двойственная локально компактная абелева группа непрерывных унитарных характеров группы G;

$T : G \to End\ X$ - представление локально компактной абелевой группы G операторами из $End\ X$;

$L^p(G, X)$, $p \in [1, \infty)$, - банахово пространство определенных на локально компактной абелевой группе G измеримых по Бохнеру относительно меры Хаара на G (классов) функций со значениями в банаховом пространстве X, суммируемых со степенью p (с отождествлением классов эквивалентности), с нормой $\|x\|_p = \left(\int\limits_G \|x(g)\|_X^p dg\right)^{1/p}$;

$L^\infty(G,X)$ - банахово пространство существенно ограниченных функций, определенных на локально компактной абелевой группе G со значениями в банаховом пространстве X, с нормой $\|x\|_\infty = vrai \sup\limits_{g\in G}\|x(g)\|_X$;

$C_b(G,X)$ - подпространство непрерывных функций из $L^\infty(G,X)$;

$C_{b,u}(G,X)$ - подпространство равномерно непрерывных функций из $L^\infty(G,X)$;

$C_0(G,X)$ - подпространство непрерывных и убывающих на бесконечности функций из $L^\infty(G,X)$;

Sp A - спектр алгебры A;

$C_b = C_b(\mathbb{J},X)$ - банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{J}$ функций с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in\mathbb{J}}\|x(t)\|_X$;

$C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J},X)$ - замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из C_b;

$C_0 = C_0(\mathbb{J},X)$ - замкнутое подпространство убывающих на бесконечности функций из C_b;

$C_\omega = C_\omega(\mathbb{J},X)$ - множество $\omega-$периодических функций;

$C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathbb{J},X)$ - множество медленно меняющихся на бесконечности функций;

$C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)$ - множество $\omega-$периодических на бесконечности функций;

$A_\omega = A_\omega(\mathbb{J},X)$ - множество $\omega-$периодических функций с абсолютно сходящимся рядом Фурье;

$A_{\omega,\infty} = A_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)$ - множество $\omega-$периодических на бесконечности функций с абсолютно сходящимся рядом Фурье;

supp x - носитель функции x;

$\mathrm{Im}_\infty(x)$ - множество значений функции x на бесконечности.

Введение

Диссертация посвящена некоторым избранным вопросам гармонического анализа периодических на бесконечности функций. Такой класс функций является новым и ранее не рассматривался. Обычно появление новых классов функций диктуется различными обстоятельствами. Например, почти периодические функции возникли по причине алгебраического характера: сумма и произведение двух периодических функций с несоизмеримыми периодами не являются периодическими функциями. Периодические на бесконечности функции являются расширением класса периодических функций и возникают как ограниченные решения некоторых классов разностных и дифференциальных уравнений. Естественным образом возникает необходимость решения классических вопросов гармонического анализа для периодических на бесконечности функций: создание теории рядов Фурье (в том числе формулировка определений ряда Фурье, коэффициентов Фурье), проблемы сходимости рядов Фурье, оценки сходимости рядов Фурье, критерии периодичности на бесконечности функции, получение аналога теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье, описание спектра (пространства максимальных идеалов) алгебры периодических на бесконечности функций. Важным является получение критериев периодичности на бесконечности ограниченных решений разностных и дифференциальных уравнений.

Вводится понятие канонического и обобщенного рядов Фурье периодических на бесконечности функций. В отличие от классического случая обычных периодических функций коэффициенты Фурье являются медленно меняющимися на бесконечности функциями (не обязательно постоянными и не обязательно имеющими предел на бесконечности).

Цель работы состоит в создании теории рядов Фурье периодических на бесконечности функций, изучении вопросов их сходимости, получении обобщения теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье, описании спектра алгебры периодических на бесконечности функций, получении критерия представимости периодической на бесконечности функции в виде суммы периодической и убывающей на бесконечности функции и критерия периодичности на бесконечности решений некоторых классов разностных и дифференциальных уравнений.

Методы исследования. Основными методами исследования являются методы гармонического и функционального анализа, спектральной теории изометрических представлений, теории операторов и теории функций.

Научная новизна. Все результаты, включенные в диссертацию, являются новыми. Наиболее значимые из них перечислены в следующем списке:

1. Введены понятия канонического и обобщенного рядов Фурье периодических на бесконечности функций со значениями в комплексном банаховом пространстве X, изучены свойства рядов Фурье и вопросы их сходимости.
2. Теорема Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье для периодических функций распространена для периодических на бесконечности функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье.
3. Описаны спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций.
4. Получен критерий представимости периодической на бесконечности функции в виде суммы периодической и убывающей

на бесконечности функции.

5. Получены критерии периодичности на бесконечности решений некоторых классов разностных и дифференциальных уравнений.

Практическая и теоретическая значимость. Результаты, изложенные в диссертации, имеют в основном теоретическую ценность. Они могут быть использованы для дальнейшего развития теории периодических на бесконечности функций, исследования ограниченных решений некоторых классов разностных и дифференциальных уравнений.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Воронежских зимних математических школах С.Г. Крейна 2010, 2012, 2013, 2014, на Крымских осенних математических школах 2010, 2011, 2012, на Крымской международной математической конференции 2013, на математическом интернет-семинаре ISEM-2013 (Германия, Блаубойрен), на Диффеотопической школе 2012 (Польша, Гдыня), на международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" 2013 (Воронеж), на международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б.М.Левитана 2014 (Москва), на конференции "Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях" 2014 (Воронеж), на семинарах А.Г. Баскакова, а также на научных сессиях ВГУ.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [29-44, 68-71]. Работы [35, 38, 40, 41] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных работ [29, 30, 31, 70] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и библиографии, включающей 75 наименований. Общий объем диссертации 100 страниц.

Содержание диссертации. В первой главе приводятся широко используемые в диссертации понятия и результаты из теории топологических групп, банаховых модулей, банаховых алгебр и представлений групп.

Во второй главе рассматриваются периодические на бесконечности функции, заданные на $\mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$, со значениями в комплексном банаховом пространстве X. Для таких функций получен ряд классических результатов о рядах Фурье в смысле Чезаро, достаточное условие сходимости ряда Фурье. Также получены аналог теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье и критерий представимости периодической на бесконечности функции в виде суммы периодической и убывающей на бесконечности функций. Кроме того, приведен пример периодической на бесконечности функции, коэффициенты Фурье которой могут сколь угодно медленно сходиться к нулю.

Перейдем к изложению основных результатов диссертации.

Пусть X – комплексное банахово пространство, $\mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}\}$.

Определение 2.1. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $(S(t)x - x) \in C_0(\mathbb{J}, X)$ для всех $t \in \mathbb{J}$.

Определение 2.2. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *периодической на бесконечности периода $\omega > 0$ ($\omega-$периодической на бесконечности)*, если $(S(\omega)x - x) \in C_0(\mathbb{J}, X)$ или, что эквивалентно, $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t+\omega) - x(t)\|_X = 0$.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим символом $C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$, а множество

$\omega-$периодических на бесконечности функций – символом $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$. Оба множества образуют линейные замкнутые подпространства из банахова пространства $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, инвариантные относительно операторов $S(t),\ t \in \mathbb{J}$.

Определение 2.3. *Каноническим рядом Фурье* функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ будем называть ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(t)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{J},$$

где функции $x_n : \mathbb{J} \to X,\ n \in \mathbb{Z}$, определяются формулами

$$x_n(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} x(t+\tau)e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)}d\tau,\ t, \tau \in \mathbb{J},\ n \in \mathbb{Z}, \qquad (1)$$

и называются *каноническими коэффициентами Фурье* функции x.

Определение 2.4. *Обобщенным рядом Фурье* функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ называется любой ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n(t)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{J}, \qquad (2)$$

где $y_n,\ \ n \in \mathbb{Z}$, – такие функции из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, для которых $y_n - x_n \in C_0(\mathbb{J}, X),\ n \in \mathbb{Z}$, а функции $x_n,\ n \in \mathbb{Z}$, определяются формулой (1).

Теорема 2.2 (теорема аппроксимации). *Для любой функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ существует последовательность функций (x_n^0) из $C_0(\mathbb{J}, X)$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty}\ \sup_{t\in\mathbb{J}}\ \|x(t) - \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)x_k(t)e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t} - x_n^0(t)\|_X = 0,$$

где $x_k,\ k \in \mathbb{Z}$, – канонические коэффициенты Фурье функции x.

Теорема 2.3 (теорема аппроксимации). *Для любой функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность функций (x_n^0) из $C_0(\mathbb{J}, X)$ и последовательность функций*

(y_n) *из* $C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$ *такие, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{J}} \|x(t) - \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) y_k(t) e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t} - x_n^0(t)\|_X = 0.$$

При этом каждая из функций y_k *(*$k \in \mathbb{Z}$*) эквивалентна функции* x_k*, определяемой формулой (1), и допускает продолжение на всю комплексную плоскость до целой функции экспоненциального типа не выше* ε*.*

Определение 2.5. Будем говорить, что обобщенный ряд Фурье

$$x(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{J},$$

периодической на бесконечности функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ *сходится к* x *относительно подпространства* $C_0(\mathbb{J}, X)$, если существует последовательность функций (x_n^0) из $C_0(\mathbb{J}, X)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{J}} \|x(t) - \sum_{k=-n}^{n} y_k(t) e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t} + x_n^0(t)\|_X = 0.$$

Определение 2.6. *Модулем непрерывности на бесконечности* функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется функция $\omega_\infty(\cdot, x) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, определенная формулой

$$\omega_\infty(\delta, x) = \lim_{\mu\to\infty} \sup_{|t|\le\delta, |\tau|\ge\mu} \|x(t+\tau) - x(\tau)\|_X,\ \delta \in \mathbb{R}_+.$$

Справедлива следующая

Теорема 2.4. *Любой обобщенный ряд Фурье функции* $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ *сходится к* x *относительно подпространства* $C_0(\mathbb{J}, X)$*, если* $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_\infty(\frac{1}{n}, x) \ln n = 0$.

Определение 2.7. Будем говорить, что функция $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ имеет *абсолютно сходящийся ряд Фурье,* если существует обобщенный ряд Фурье (2) этой функции, такой, что $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|y_n\|_\infty < \infty$.

Если X – банахова алгебра, то функции из $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$, имеющие абсолютно сходящийся ряд Фурье, образуют замкнутую подалгебру в $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$, обозначаемую символом $A_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$.

Одним из основных результатов диссертации является теорема 2.6, в которой знаменитая теорема Н. Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье распространяется на функции из $A_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$.

Пусть X – банахова алгебра с единицей e.

Определение 2.8. Функцию $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$ назовем *обратимой относительно подпространства* $C_0(\mathbb{J}, X)$ (или *обратимой на бесконечности*), если существует функция $y \in C_b(\mathbb{J}, X)$ такая, что $xy - e, yx - e \in C_0(\mathbb{J}, X)$, где $e(t) \equiv e,\ t \in \mathbb{J}$. Функцию y будем называть *обратной к* x *относительно подпространства* $C_0(\mathbb{J}, X)$.

Теорема 2.6. *Пусть X – банахова алгебра с единицей. Если функция $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$ и имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то любая обратная к ней относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$ функция имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье.*

Рассмотрим последовательность операторов (A_N) из $End\, C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ вида $A_N = \frac{1}{N} \sum\limits_{k=0}^{N-1} S(k\omega),\ N \geq 1$.

Получен следующий критерий представимости периодической на бесконечности функции в виде суммы периодической и убывающей на бесконечности функций:

Теорема 2.7. *Для того, чтобы функция $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ была представима в виде $x = x_1 + x_0$, где $x_1 \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$, $x_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы в $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ существовал $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x$.*

В третьей главе получен критерий периодичности на бесконечности решений некоторых классов разностных и дифференциальных уравнений.

Рассмотрим разностное уравнение вида

$$x(t+1) = Bx(t) + y_0(t),\ t \in \mathbb{J},\ \mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}, \tag{3}$$

где $B \in EndX$, $y_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$.

Теорема 3.2. *Пусть спектр $\sigma(B)$ оператора B удовлетворяет условию*

$$\sigma(B) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}.$$

Тогда каждое равномерно непрерывное ограниченное решение $x_0 : \mathbb{J} \to X$ разностного уравнения (3) является периодической на бесконечности функцией периода 1.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = y(t),\ t \in \mathbb{J}, \tag{4}$$

где $y \in L^1(\mathbb{J}, X)$ и $A : D(A) \subset X \to X$ – генератор сильно непрерывной ограниченной полугруппы операторов $U : \mathbb{R}_+ \to EndX$ класса C_0.

Определение 3.1. Функция $x : \mathbb{J} \to X$ называется *слабым решением* уравнения (4) (см. [52]), если для всех $s \leq t$ из $\mathbb{J}$ имеет место равенство

$$x(t) = U(t-s)x(s) + \int\limits_s^t U(t-\tau)y(\tau)d\tau,\ s \leq t,\ s,t \in \mathbb{J}.$$

При $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$ равенство должно быть выполнено при $s = 0$ и $t \geq 0$. Ясно, что функция x равномерно непрерывна.

Теорема 3.3. *Пусть имеет место включение*

$$\sigma(U(1)) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}.$$

Тогда каждое ограниченное на $\mathbb{J}$ слабое решение уравнения (4) является периодической на бесконечности функцией периода 1 ($x \in C_{1,\infty}(\mathbb{J}, X)$).

Теорема 3.4. *Пусть полугруппа операторов* $U : \mathbb{R}_+ \to EndX$ *ограничена и для спектра ее генератора* A *выполнено включение*

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \subset \left\{ i\frac{2\pi n}{\omega}\mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Тогда все функции $\varphi_x : \mathbb{R}_+ \to X$ *вида* $\varphi_x(t) = U(t)x,\ t \geq 0$, *являются периодическими на бесконечности функциями периода 1.*

В четвертой главе с помощью банаховых пределов исследуются спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций.

Рассмотрим коммутативную C^*-алгебру $\mathcal{U}$ с единицей e, на которой задано изометрическое представление $T : \mathbb{R}_+ \to End\,\mathcal{U}$, обладающее свойствами:

1) $\|T(t)\| = 1$;

2) $T(t)(xy) = (T(t)x)\,(T(t)y)$ для всех $x, y \in \mathcal{U}$,

т.е. представление T образует полугруппу гомоморфизмов алгебры $\mathcal{U}$.

Определение 4.2. Линейный функционал B на инвариантной относительно полугруппы T алгебре $\mathcal{U}$ с единицей e называется *банаховым пределом* на $\mathcal{U}$, если выполнены следующие условия:

1) $B(e) = 1$,

2) $\|B\| = 1$,

3) $B(T(t)x) = B(x),\ t \geq 0,\ x \in \mathcal{U}$.

Множество банаховых пределов алгебры $\mathcal{U}$ будем обозначать через $\mathcal{BL}(\mathcal{U})$.

Для каждого $\tau \geq 0$ рассмотрим функционал $\xi_\tau \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})^*$, действующий по правилу

$$\xi_\tau(x) = x(\tau),\ \tau \geq 0. \tag{5}$$

Теорема 4.4. *Спектр алгебры* $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ *представим в виде*

$\mathcal{B}_0\bigcup\{\xi_\tau; \tau \geq 0\}$, где функционалы ξ_τ, $\tau \geq 0$, определяются формулой (5).

Пусть $\xi_0 \in \mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}))$. По нему построим отображение $T_{\xi_0} : A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) \to A_\omega(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, положив для каждого $x \in A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$

$$(T_{\xi_0}(x))(\gamma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_0(x_k)\gamma^k,\ x \in A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}),\ \gamma \in \mathbb{T}.$$

Отображение T_{ξ_0}, $\xi_0 \in \mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}))$, является гомоморфизмом алгебры $A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ в алгебру $A_\omega(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$.

Зафиксируем $\gamma_0 \in \mathbb{T}$ и рассмотрим характер $T_{\xi_0,\gamma_0} : A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, действующий по правилу

$$T_{\xi_0,\gamma_0}(x) = (T_{\xi_0}(x))(\gamma_0),\ x \in A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}). \tag{6}$$

Отметим, что подалгебра $A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ плотна в $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, а $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ - есть C^*-алгебра и для характера T_{ξ_0,γ_0} выполняется свойство $|T_{\xi_0,\gamma_0}(x)| \leq \|x\|_\infty$, $\gamma_0 \in \mathbb{T}$. Поэтому характеры T_{ξ_0,γ_0} допускают расширение на все пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$. Это расширение мы также будем обозначать через $T_{\xi_0,\gamma_0} : C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$.

Рассмотрим множество функционалов вида

$$M = \{T_{\xi_0,\gamma_0}; \gamma_0 \in \mathbb{T}, \xi_0 \in \mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}))\}\bigcup\{\xi_\tau; \tau \geq 0\},$$

где функционалы ξ_τ, $\tau \geq 0$, определяются формулой (5), а функционалы T_{ξ_0,γ_0} – формулой (6).

Теорема 4.6. *Спектр алгебры $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ совпадает с множеством M.*

В пятой главе рассматриваются периодические на бесконечности функции, заданные на $\mathbb{R}^N$, со значениями в комплексном банаховом пространстве X. Для таких функций приводятся результаты, аналогичные результатам, описанным во второй главе данной диссертации, а именно:

Теорема 5.1 (теорема аппроксимации). *Для любой функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ существует последовательность функций (f_n^0) из $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \|f(x) - \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}^N} \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{|k_i|}{n+1}\right) f_k(x)e_k(x) - f_n^0(x)\|_X = 0,$$

где f_k, $k \in \mathbb{Z}^N$, – канонические коэффициенты Фурье функции f.

Теорема 5.2 (теорема аппроксимации). *Для любой функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность функций (f_n^0) из $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ и последовательность функций (y_n) из $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ такие, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \|f(x) - \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}^N} \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{|k_i|}{n+1}\right) y_k(x)e_k(x) - f_n^0(x)\|_X = 0.$$

При этом каждая из функций y_k ($k \in \mathbb{Z}^N$) эквивалентна функции f_k, определяемой формулой (5.4), и допускает продолжение на всю комплексную плоскость до целой функции экспоненциального типа не выше ε.

Теорема 5.3. *Любой обобщенный ряд Фурье функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ сходится к f относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}^N, X)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_\infty(\frac{1}{n}, f) \ln^N n = 0$.*

Теорема 5.4. *Пусть X – банахова алгебра с единицей. Если функция $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ и имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то любая обратная к ней относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ функция имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье.*

Получен следующий критерий представимости периодической на бесконечности функции в виде суммы периодической и убывающей на бесконечности функций:

Теорема 5.5. *Для того, чтобы функция* $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ *была представима в виде* $f = f_1 + f_0$*, где* $f_1 \in C_\omega(\mathbb{R}^N, X)$, $f_0 \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$*, необходимо и достаточно, чтобы в* $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ *существовал* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n f$.

Глава 1

Общие понятия

В данной главе приводятся широко используемые в диссертации понятия и результаты из теории топологических групп, банаховых модулей, банаховых алгебр и представлений групп. Наиболее используемые факты из теории периодических функций содержатся в [18, 19, 20, 25, 27, 48], из теории представлений и банаховых модулей – в [3, 5, 10], из теории коммутативных банаховых алгебр – в [5, 14, 16, 27, 62, 66].

1. Локально компактные группы

Пусть G - множество, являющееся группой и топологическим пространством (см. [24]).

Определение 1.1. Множество G называется *топологической группой,* если:

1. отображение $(x, y) \mapsto xy$ множества $G \times G$ на G является непрерывным отображением прямого произведения $G \times G$ (с топологией прямого произведения) на G;
2. отображение $x \mapsto x^{-1}$ множества G на G непрерывно.

Примерами топологических групп являются аддитивная группа $\mathbb{R}$ вещественных чисел с "обычной" топологией (т.е. топологией, определяемой метрикой $d(x, y) = |x - y|$), мультипликативная группа положительных вещественных чисел с "обычной" топологией, аддитивная группа рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с "обычной" топологией, группа целых чисел $\mathbb{Z}$ с дискретной топологией (т.е. каждое множество является открытым), любая группа с дискретной топологией.

Определение 1.2. Топологическая группа G называется *компактно порожденной,* если в ней существует такое компактное подмножество K, что G совпадает с наименьшей подгруппой (группы G), содержащей K.

Примерами компактно порожденных топологических групп являются группа $\mathbb{R}$, компактно порожденная отрезком $[0,1]$ (или любым другим нетривиальным компактным отрезком) и любая компактная группа.

Определение 1.3. Топологическая группа G называется *локально компактной,* если любая ее точка имеет окрестность, замыкание которой компактно.

Определение 1.4. Если G - абелева топологическая группа, то непрерывный гомоморфизм $\gamma : G \to \mathbb{T}$ называется *характером.* Набор всех характеров называется *группой характеров* или *двойственной к G группой* и обозначается через $\hat{G}$.

2. Банаховы алгебры и C^*-алгебры

Определение 1.5. Векторное пространство A над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел называется *алгеброй*, если в A определено умножение ab элементов $a, b \in A$, удовлетворяющее условиям

1. $a(bc) = (ab)c$;
2. $a(b+c) = ab + ac$;
3. $\alpha\beta(ab) = (\alpha a)(\beta b)$

для всех элементов $a, b, c \in A$ и для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Подпространство A_0 в A называется *подалгеброй*, если оно является алгеброй относительно операций, введенных в A. Алгебра A называется *коммутативной (абелевой)*, если любые два ее элемента a и b перестановочны друг с другом, т.е. $ab = ba$.

Отображение $b \in B \mapsto b^* \in B$ называется *инволюцией* (или *операцией сопряжения*) на алгебре B, если выполняются следующие условия:

1. $b^{**} = b$;
2. $(ab)^* = b^* a^*$;
3. $(\alpha a + \beta b)^* = \overline{\alpha} a^* + \overline{\beta} b^*$.

(Символом $\overline{\alpha}$ обозначено число, комплексно сопряженное с α.) Алгебру с инволюцией называют *инволютивной* или $^*-$алгеброй, а подмножество $B_0 \subset B$ называется *самосопряженным,* если условие $b \in B$ влечет за собой выполнение условия $b^* \in B$.

Алгебра B называется *нормированной,* если каждому элементу $b \in B$ сопоставлено вещественное число $\|b\|$ (*норма* b) и выполняются условия:

1. $\|b\| \geq 0$ и $\|b\| = 0$ тогда и только тогда, когда $b = 0$;
2. $\|\beta b\| \leq |\beta| \|b\|$;
3. $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$;
4. $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$.

Норма задает на B метрическую топологию, которую называют *равномерной топологией* B. Окрестностями элемента $b \in B$ в этой топологии служат множества $\mathcal{U}(b, \varepsilon) = \{a \in B : \|a - b\| < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$. Полная в равномерной топологии алгебра B называется *банаховой алгеброй.* Полная нормированная алгебра с инволюцией, обладающая свойством $\|b\| = \|b^*\|$ для всех $b \in B$, называется *банаховой* $^*-$*алгеброй.* C^*-*алгебра* - это банахова $^*-$алгебра B с дополнительным свойством $\|b^* b\| = \|b\|^2$, выполненным для всех $b \in B$.

Банахова алгебра A называется *алгеброй с единицей*, если существует элемент e из A, называемый *единицей*, такой что $ae = ea = a$ для любого элемента $a \in A$ и $\|e\| = 1$.

Элемент a банаховой алгебры A с единицей e называется *обратимым*, если он обладает *обратным* в A, т.е. существует элемент $a^{-1} \in A$, такой, что $a^{-1}a = aa^{-1} = e$.

Далее будем считать, что A - банахова алгебра с единицей.

Спектром $\sigma(a)$ элемента a из банаховой алгебры B называется множество всех таких комплексных чисел λ, что элемент $\lambda e - a$ не имеет обратного. Множество $\rho(a) = \mathbb{C} \backslash \sigma(a)$ называется *резольвентным множеством* элемента a, т.е. $\rho(a)$ состоит из $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(\lambda e - a)^{-1}$ существует.

Символом $Hom(X, Y)$ обозначим банахово пространство *гомоморфизмов* банаховых пространств X и Y (т.е. непрерывных линейных операторов, определенных на X со значениями в Y).

Пусть A и B - банаховы алгебры. Гомоморфизм $\varphi \in Hom(A, B)$ называется *гомоморфизмом банаховых алгебр,* если $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ для всех $a, b \in A$, причем $\varphi(1_A) = 1_B$, если A содержит единицу 1_A (в этом случае предполагается, что B также содержит единицу 1_B). Множество всех гомоморфизмов банаховых алгебр A и B также будем обозначать $Hom(A, B)$.

Особый интерес представляют комплексные ненулевые гомоморфизмы, т.е. ненулевые элементы пространства $Hom(A, \mathbb{C})$. Они называются *характерами* банаховой алгебры A, а их множество обозначается символом $\mathrm{Sp}A$ и называется *спектром алгебры* A.

Линейное подпространство I из банаховой алгебры B называется *идеалом*, если $ab \in I$ для всех $a \in I$ и $b \in B$. Если $I \neq B$, то I называется *собственным идеалом.* Собственный идеал, который не содержится ни в каком большем собственном идеале, называется *максимальным идеалом.*

Пусть X_0 - замкнутое подпространство из банахова пространства X. Для элементов пространства X определим следующее отношение: $x \sim y$, если $x - y \in X_0$.

Обозначим через $\tilde{x}$ (или $x + X_0$) множество $\{y \in X : y - x \in X_0\}$. Его называют *классом эквивалентности,* содержащим x. Классы эквивалентности являются элементами векторного пространства X/X_0, называемого *фактор-пространством* пространства X по подпространству X_0. В данном пространстве сложение элементов и умножение их на скаляры определяются следующими формулами

$$\tilde{x} + \tilde{y} = \widetilde{x + y}, \quad \alpha\tilde{x} = \widetilde{\alpha x}.$$

Фактор-пространство X/X_0 является банаховым пространством с нормой

$$\|\tilde{x}\| = \inf_{y \in X_0} \|x + y\|.$$

Пусть I - замкнутый идеал из банаховой алгебры A. Тогда фактор-пространство A/I является банаховой алгеброй, если в ней операцию умножения ввести следующим образом

$$\tilde{x}\tilde{y} = \widetilde{xy}, \quad x, y \in A.$$

В этом случае алгебра A/I называется *фактор-алгеброй.*

3. Банаховы $L^1(G)-$модули и их свойства

Пусть $\mathcal{X}$ – комплексное банахово пространство.

Определение 1.6. Пусть B - банахова алгебра, рассматриваемая над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. *Левым банаховым модулем над* B (или, короче, *левым* $B-$*модулем*) называется комплексное банахово пространство X вместе с отображением $(a, x) \mapsto ax : B \times X \to X$, обладающим свойствами:

1. $(a + b)x = ax + bx$ и $a(x + y) = ax + ay$;

2. $(\alpha a)x = a(\alpha x) = \alpha(ax)$;
3. $(ab)x = a(bx)$;
4. $ex = x$, если B содержит единицу e;
5. $\|ax\| \le Const\|a\|\|x\|$ для всех $a, b \in B$, $x, y \in X$ и $\alpha \in \mathbb{C}$.

Пусть G – локально компактная абелева группа, $\widehat{G}$ – двойственная группа непрерывных унитарных характеров группы G. Через $L^p(G, E)$, $p \in [1, \infty)$, обозначим банахово пространство измеримых по Бохнеру и суммируемых (относительно меры Хаара) со степенью $p \in [1, \infty]$ (существенно ограниченных при $p = \infty$) функций, определенных на группе G и принимающих свои значения в банаховом пространстве E. Нормы в данных пространствах имеют вид

$$\|x\|_p = \left(\int\limits_G \|x(g)\|_E^p dg\right)^{1/p}, \ p \in [1, \infty),$$

$$\|x\|_\infty = vrai \sup_{g \in G} \|x(g)\|_E, \ p = \infty.$$

Если $E = \mathbb{C}$, то символ E в обозначениях этих пространств будет опускаться. Отметим, что $L^1(G) = L^1(G, \mathbb{C})$ является коммутативной банаховой алгеброй со сверткой функций в качестве умножения

$$(f_1 * f_2)(g) = \int\limits_G f_1(g - s) f_2(s) ds, \ g \in G, \ f_1, f_2 \in L^1(G).$$

Пусть банахово пространство X является невырожденным банаховым $L^1(G)-$модулем (см. [10, 13]), структура которого ассоциирована с некоторым ограниченным изометрическим представлением $T : G \to End\ X$. Это означает, что выполняются два свойства следующего предположения:

Предположение 1.1 Для банахова $L^1(G)-$модуля X выполняются следующие условия:

1. из равенства $fx = 0$, справедливого для любой функции $f \in L^1(G)$, следует, что вектор $x \in X$ – нулевой (свойство невырожденности банахова модуля X);
2. для всех $f \in L^1(G)$, $x \in X$, $g \in G$ имеют место равенства (свойство ассоциированности модульной структуры на X с представлением $T : G \to End\ X$):

$$T(g)(fx) = (T(g)f)x = f(T(g)x).$$

Если $T : G \to End\ X$ – сильно непрерывное ограниченное представление, то формула

$$T(f)x = fx = \int\limits_G f(g)T(-g)xdg,\ f \in L^1(G),\ x \in X,$$

определяет на X структуру банахова $L^1(G)-$модуля, удовлетворяющего условиям предположения 1.1, причем эта модульная структура будет ассоциирована с представлением T.

Замечание 1.1. С каждым невырожденным банаховым $L^1(G)-$модулем X ассоциировано единственное представление $T : G \to End\ X$ (см. [13]). Чтобы это подчеркнуть, иногда будет использоваться обозначение (X, T).

Определение 1.7. Вектор из банахова $L^1(G)-$модуля (X, T) назовем T-*непрерывным*, если функция $\varphi_x : G \to X$, $\varphi_x(g) = T(g)x$, $g \in G$, непрерывна в нуле (и, значит, непрерывна на G).

Совокупность всех T-непрерывных векторов из банахова $L^1(G)-$модуля X обозначим через X_c или (X_c, T). Непосредственно из последнего определения следует, что X_c – замкнутый подмодуль из X, причем представление T на нем сильно непрерывно.

4. Преобразование Фурье, спектр Берлинга и его свойства, существенный спектр

Через $\widehat{f} : \widehat{G} \to \mathbb{C}$,

$$\widehat{f}(\gamma) = \int\limits_G f(g)\gamma(-g)dg,\ \gamma \in \widehat{G}, \tag{1.1}$$

обозначается преобразование Фурье функции $f \in L^1(G)$.

Определение 1.8. (определение Бохнера) Вектор x из банахова $L^1(G)-$модуля (X, T) называется *почти периодическим,* если $x \in X_c$ и множество $\{T(g)x,\ \ g \in G\}$ (орбита вектора x) предкомпактно в X.

Множество $AP\ X$ почти периодических векторов из X образует замкнутый подмодуль из X.

Существует также и другое, эквивалентное, определение почти периодического вектора.

Введем в рассмотрение множество

$$\Omega(\varepsilon, x) = \{g \in G : \|T(g)x - x\| < \varepsilon\},$$

которое называется *множеством $\varepsilon-$периодов* вектора $x \in X_c$.

Множество $\sigma \subset G$ называется *относительно плотным* в G, если существует такой компакт $K \subset G$, что для любого $g \in G$ выполненно условие $(g + K) \cap \sigma \neq \emptyset$.

Определение 1.9. (определение Бора) Вектор $x \in X_c$ называется *почти периодическим,* если для любого $\varepsilon > 0$ множество $\Omega(\varepsilon, x)$ относительно плотно в G.

Среди линейных операторов, действующих в пространстве $AP\ X$, существует и единственен оператор $\mathcal{J}$, обладающий следующими свойствами:

1. оператор $\mathcal{J}$ ограничен и $\|\mathcal{J}\| = 1$;
2. $\mathcal{J}(T(t)x) = T(t)\mathcal{J}(x) = \mathcal{J}(x)$ для всех $g \in G$, $x \in AP\ X$.

Значение данного оператора $\mathcal{J}(x)$ на каждом векторе $x \in AP\ X$ называется *средним значением* вектора x относительно представления T.

Наличие оператора $\mathcal{J}$ позволяет каждому почти периодическому вектору $x \in AP\ X$ поставить в соответствие формальный ряд

$$x \sim \sum_{\gamma \in \widehat{G}} \widehat{x}(\gamma),$$

называемый *рядом Фурье* вектора x. Здесь функция $\widehat{x} : \widehat{G} \to X$ определяется по формуле

$$\widehat{x}(\gamma) = \mathcal{J}_\gamma(x),$$

где $\mathcal{J}_\gamma(x)$ – среднее значение вектора x относительно представления $T_\gamma(g) = T(g)\gamma(-g)$, $g \in G$.

В качестве примера пространства почти периодических векторов можно рассмотреть пространство $AP\ C_b(G, E) \subset C_b(G, E)$ почти периодических функций (Бора), являющееся пространством почти периодических векторов относительно представления группой операторов сдвигов функций в пространстве $C_b(G, E)$.

Ряд Фурье почти периодической функции $\varphi \in AP\ C_b(G, E)$ удобно записывать в виде

$$\varphi(g) \sim \sum_{\gamma \in \widehat{G}} \widehat{\varphi}(\gamma)\gamma(g),$$

где $\widehat{\varphi} : \widehat{G} \to E$.

Группа G может быть таким образом вложена в качестве всюду плотной подгруппы компактной группы $\overline{G}$, двойственной к группе

$\widehat{G}_d$ (символом $\widehat{G}_d$ обозначается группа $\widehat{G}$ с дискретной топологией), что $AP\ C_b(G,E)$ оказывается семейством сужений на G всевозможных функций из $C_b(\overline{G},E)$. При этом отображение $f \mapsto f|_G$ является изометрическим изоморфизмом. Это соотношение между почти периодичностью и $\overline{G}$ и есть причина, по которой связывают имя Бора с группой $\overline{G}$, называя ее *боровской компактификацией.*

Заметим, что если $\overline{m}$ – мера Хаара на $\overline{G}$, то для любого вектора $x \in AP\ X$

$$\mathcal{J}(x) = \int\limits_{\overline{G}} \overline{\varphi}(g)\overline{m}(dg),$$

где $\overline{\varphi}$ – продолжение почти периодической функции $\varphi(g) = T(g)x$ на группу $\overline{G}$. Следовательно, функция $\overline{x}$ имеет вид $\widehat{x}(\gamma) = \int\limits_{\overline{G}} \overline{\varphi}(g)\gamma(-g)\overline{m}(dg)$, т.е. функция $\widehat{x}$ является преобразованием Фурье функции $\varphi : \overline{G} \to E$.

При включении группы G в группу $\overline{G}$ топология в G изменяется (становясь более слабой). А именно, определяющие окрестности любой точки $s_0 \in G$ имеют вид

$$U(s_0,\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_k,\varepsilon) = \{s \in G : |(s,\gamma_j) - (s_0,\gamma_j)| < \varepsilon;\ \varepsilon > 0,$$

$$\gamma_j \in \widehat{G},\ j = 1,2,...,k\}.$$

Эта новая топологическая группа обозначается через G_0, а ограниченные и непрерывные на G_0 комплексные функции, называемые почти периодическими функциями Левитана, образуют банахово пространство $\mathcal{L}(G)$. Ясно, что $AP\ C_b(G) \subset \mathcal{L}(G) \subset C_b(G)$, причем почти периодическая функция Левитана почти периодична тогда и только тогда, когда она равномерно непрерывна на $C_0(G)$.

Наряду с группой G рассмотрим ее дискретную подгруппу Ω такую, что группа $K = G/\Omega$ является компактной. Представим группу G в виде

$$G = \Omega \oplus V,$$

где группа V гомеоморфна группе K.

Определение 1.10. Вектор $x \in X_c$ называется $\Omega-$*периодическим* (относительно представления T), если для всех $\omega \in \Omega$ выполнено $T(\omega)x = x$.

Совокупность всех $\Omega-$периодических векторов обозначим через $X_\Omega = X_\Omega(T)$. Множество X_Ω образует замкнутое подпространство в $\mathcal{X}$, инвариантное относительно операторов $T(g),\ g \in G$.

Используемые далее понятия и результаты из спектральной теории модулей можно найти в [1, 2, 3, 4, 7, 10, 13, 26].

Определение 1.11. *Спектром Берлинга* вектора x из банахова $L^1(G)-$модуля (X, T) называется множество $\Lambda(x) = \Lambda(x, T)$ характеров группы $\widehat{G}$, являющееся дополнением к множеству

$$\{\gamma \in \widehat{G} : \text{ существует } f \in L^1(G) \text{ такая, что } \widehat{f}(\gamma) \neq 0 \text{ и } fx = 0\},$$

или, что эквивалентно,

$$\Lambda(x) = \{\gamma \in \widehat{G} : fx \neq 0 \text{ для любой } f \in L^1(G) \text{ со свойством } \widehat{f}(\gamma) \neq 0\}.$$

Справедливы следующие свойства спектра Берлинга векторов из банахова пространства:

Лемма 1.1. *(см. [5, 10, 13]) Для любых $f \in L^1(G)$ и $x \in (X, T)$ справедливы свойства:*

1. *$\Lambda(x)$ – замкнутое подмножество из $\widehat{G}$, причем $\Lambda(x) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;*
2. *$\Lambda(fx) \subset (supp\widehat{f}) \cap \Lambda(x)$;*
3. *$fx = 0$, если $(supp\widehat{f}) \cap \Lambda(x) = \emptyset$, и $fx = x$, если множество $\Lambda(x)$ компактно и $\widehat{f} = 1$ в некоторой его окрестности;*

4. $\Lambda(x) = \{\gamma_0\}$ *– одноточечное множество из* $\widehat{G}$ *тогда и только тогда, когда вектор* x *удовлетворяет равенствам* $T(g)x = \gamma_0(g)x,\ g \in G,$ *и* $x \neq 0$.

Глава 2

Классические вопросы теории рядов Фурье периодических на бесконечности функций

1. Основные определения

Пусть X – комплексное банахово пространство, $EndX$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X. Пусть $\mathbb{J}$ – один из промежутков $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Символом $C_b = C_b(\mathbb{J}, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{J}$ функций с нормой $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t \in \mathbb{J}} \|x(t)\|_X$, $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ – замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из C_b, $C_0 = C_0(\mathbb{J}, X)$ – замкнутое подпространство убывающих на бесконечности функций.

В банаховом пространстве $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ рассмотрим полугруппу $S : \mathbb{J} \to End\, C_{b,u}$ операторов, действующих по правилу

$$(S(t)x)(\tau) = x(t + \tau), \quad t, \tau \in \mathbb{J}. \tag{2.1}$$

Отметим, что S – группа операторов, если $\mathbb{J} = \mathbb{R}$.

Определение 2.1. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если

$$(S(t)x - x) \in C_0(\mathbb{J}, X) \text{ для любого } t \in \mathbb{J}.$$

Примером таких функций являются:

1) $x_1(t) = \sin \ln(1 + t^2),\ t \in \mathbb{R}$;

2) $x_2(t) = \sin \sqrt{t},\ t \in \mathbb{R}_+$;

3) $x_3(t) = \operatorname{arctg} t,\ t \in \mathbb{R}$;

4) $x_4 : \mathbb{R}_+ \to X$, $x_4(t) = c + x_0(t), t \geq 0$, где c – вектор из банахова пространства X и x_0 – любая функция из $C_0(\mathbb{R}_+, X)$;

5) любая непрерывно дифференцируемая функция x из $C_b(\mathbb{R}, X)$ со свойством $x' \in C_0(\mathbb{R}, X)$.

В теории дифференциальных уравнений (см. [17, р. 3.6.3]) использовалось эквивалентное (если рассматривать функции из $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$) определение, при этом функции назывались *стационарными на бесконечности.*

Отметим, что в статьях Пака [25, с. 123] и Караматы [63] положительная непрерывная функция $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ называлась *медленно меняющейся,* если при любом $\lambda > 0$ выполнено $\frac{L(\lambda x)}{L(x)} \to 1$ при $x \to +\infty$. Например, функции $\ln^\nu(x), \ln\ln^\nu(x), ...$, где $\nu \in \mathbb{R}$, являются таковыми. Медленно меняющиеся функции находят свое применение в теории тригонометрических рядов (см. [60]), в теории вероятности [28], а также в теории целых функций [23].

Медленно меняющиеся функции составляют часть класса регулярно растущих функций, которые впервые в 1925 году ввел в рассмотрение Р. Шмидт [67]. В [11] приведена следующая

Теорема 2.1. *Если функция $L \in C_{b,u}(\mathbb{R}_+)$ является медленно меняющейся, то функция $f(t) = \ln L(e^t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, принадлежит пространству $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+)$.*

Верно и обратное. Если $f \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+)$, то функция $L(t) = e^{f(\ln t)}$, $t \in \mathbb{R}_+$, является медленно меняющейся функцией.

Определение 2.2. Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется *периодической на бесконечности периода $\omega > 0$ ($\omega-$периодической на бесконечности)*, если

$$(S(\omega)x - x) \in C_0(\mathbb{J}, X)$$

или, что эквивалентно, $\lim\limits_{|t|\to\infty} \|x(t+\omega) - x(t)\|_X = 0$.

В [12] было дано определение почти периодической на бесконечности функции.

Таким образом, каждая $\omega-$периодическая на бесконечности функция x является решением разностного уравнения вида $x(t+\omega) - x(t) = y(t),\ t \in \mathbb{J}$, где $y \in C_0(\mathbb{J}, X)$, а каждая медленно меняющаяся на бесконечности функция является периодической на бесконечности любого периода.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим символом $C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$, а множество $\omega-$периодических на бесконечности функций – символом $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$. Оба множества образуют линейные замкнутые подпространства из банахова пространства $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$. Банахово пространство $C_\omega = C_\omega(\mathbb{J}, X)$ непрерывных $\omega-$периодических функций, определенных на $\mathbb{J}$ со значениями в X, образует замкнутое подпространство в $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$. Таким образом, имеют место включения $C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X) \subset C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, при этом все они инвариантны относительно операторов $S(t),\ t \in \mathbb{J}$.

Если $X = \mathbb{C}$, то в обозначениях рассматриваемых функциональных пространств опускается символ X, например, $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J})$ обозначает пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, \mathbb{C})$.

Примерами периодических на бесконечности функций являются:

1) предельно периодические функции, т.е. функции $x : \mathbb{J} \to X$, представимые в виде $x = y + y_0$, где $y \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$, $y_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$;

2) функция $\overline{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ такая, что она совпадает с $x \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$ на $\mathbb{R}_+$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} \|\overline{x}(t)\| = 0$;

3) любая функция из $C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$;

4) любая функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, представимая в виде

$x(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} x_k(t)e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, $t \in \mathbb{J}$, $n \in \mathbb{N}$, где $x_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Если X – банахова алгебра, то все введенные в рассмотрение функциональные пространства являются банаховыми алгебрами (с операцией поточечного умножения $(xy)(t) = x(t)y(t),\ t \in \mathbb{J}$, для функций x, y из рассматриваемого пространства). Каждая из таких алгебр коммутативна, если коммутативна алгебра X, и является C^*-алгеброй, если X – C^*-алгебра. В частности, коммутативными C^*-алгебрами являются алгебры $C_{sl,\infty}(\mathbb{J})$ и $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J})$.

Пусть $\mathcal{B}$ – банахова алгебра. Символом $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ обозначим банахову алгебру со сверткой функций в качестве умножения

$$(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)ds,\ t \in \mathbb{R},\ f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}).$$

Если $\mathcal{B} = \mathbb{C}$, то $End\,\mathcal{B} \approx \mathbb{C}$ и введенная алгебра обозначается символом $L^1(\mathbb{R})$.

Появление класса периодических на бесконечности функций связано с тем, что свертка Лапласа

$$(f \overset{L}{*} x)(t) = \int\limits_0^t f(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int\limits_0^t f(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

функций $x \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$ и $f \in L^1(\mathbb{J}, X)$, используемая при описании ограниченных решений разностных и дифференциальных уравнений (см. Главу 3), как правило, не является периодической функцией, но является периодической на бесконечности.

Определение 2.3. *Каноническим рядом Фурье* функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ будем называть ряд вида

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n(t)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{J}, \tag{2.2}$$

где функции $x_n : \mathbb{J} \to X,\ n \in \mathbb{Z}$, определяются формулами

$$x_n(t) = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^\omega x(t+\tau) e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)} d\tau,\ t, \tau \in \mathbb{J},\ n \in \mathbb{Z}, \tag{2.3}$$

и называются *каноническими коэффициентами Фурье* функции x.

Ясно, что если $x \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$, то $x_k(t) \equiv x_k = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega x(\tau) e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau} d\tau,\ \tau \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}$, – обычные коэффициенты Фурье функции x.

Определение 2.4. *Обобщенным рядом Фурье* функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ называется любой ряд вида

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{J}, \tag{2.4}$$

где $y_n,\ n \in \mathbb{Z}$, – такие функции из $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, для которых $y_n - x_n \in C_0(\mathbb{J}, X),\ n \in \mathbb{Z}$, а функции $x_n,\ n \in \mathbb{Z}$, определяются формулой (2.3).

Отметим, что если функция $\overline{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ такова, что она совпадает с $x \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$ на $\mathbb{R}_+$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} \|\overline{x}(t)\|_X = 0$, то $\overline{x} \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}, X)$ и один из ее обобщенных рядов Фурье имеет вид $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} y_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}, t \in \mathbb{R}$, где $y_n(t) \equiv x_n(t),\ n \in \mathbb{Z},\ t \geq 0,\ y_n(t) = 0$ при $t \leq -1$ и функции y_n непрерывны.

Лемма 2.1. *Канонические коэффициенты Фурье $x_n,\ n \in \mathbb{Z}$, (определенные формулой (2.3)) являются медленно меняющимися на бесконечности функциями, т.е. $x_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X),\ n \in \mathbb{Z}$.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из равенств $x_n(t+\omega) - x_n(t) = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega (S(\omega)x - x)(t+\tau) e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}(t+\tau)} d\tau,\ t \in \mathbb{J},\ n \in \mathbb{Z}$. □

Непосредственно из определения 2.4 и леммы 2.1 следует, что коэффициенты любого обобщенного ряда Фурье обладают свойством: $y_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X),\ n \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что канонические коэффициенты Фурье периодической на бесконечности функции могут сходиться к нулю сколь угодно медленно. Далее приведен соответствующий пример.

Пример 2.1. Рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такую, что $\mathrm{supp}\varphi \subset [0,1]$ и $\varphi(\frac{1}{2}) = 1$. Возьмем произвольную числовую последовательность (α_n), $n \geq 1$, со свойством $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$. Далее построим последовательность функций (x_n) из $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+)$ с непересекающимися носителями вида:

$$x_1(t) = \begin{cases} \varphi\left(\frac{t-2^m}{\ln(m+2)}\right) & , \ t \in [2^m, 2^m + \ln(m+2)], \ m \geq 0, \\ 0 & , \ t \notin \bigcup\limits_{m\geq 0} [2^m, 2^m + \ln(m+2)]; \end{cases}$$

$$x_n(t) = \begin{cases} \alpha_n x_1\left(t - (n-1)\ln(n+2)\right) & , \ t \geq 2^n, \\ 0 & , \ t \in [0, 2^n), \ n \geq 2. \end{cases}$$

Отметим, что $\|x_n\|_\infty = \alpha_n$, $n \geq 1$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n(t)e^{int}$ равномерно сходится к некоторой функции x периода 2π. Этот ряд является обобщенным рядом Фурье для x (но не является каноническим). Ясно, что $\|\widetilde{x_n}\| = \alpha_n$, $n \geq 1$, и, ввиду произвольности выбора последовательности (α_n) со свойством $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, получаем, что коэффициенты Фурье функций из $C_{2\pi,\infty}(\mathbb{R})$ могут сколь угодно медленно сходиться к нулю.

Теорема 2.2. *(теорема аппроксимации) Для любой функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ существует последовательность функций (x_n^0) из $C_0(\mathbb{J}, X)$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{J}} \|x(t) - \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) x_k(t) e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t} - x_n^0(t)\|_X = 0,$$

где x_k, $k \in \mathbb{Z}$, – канонические коэффициенты Фурье функции x.

Уточнением теоремы 2.2 является следующая

Теорема 2.3. *(теорема аппроксимации) Для любой функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность функций (x_n^0) из $C_0(\mathbb{J}, X)$ и последовательность функций (y_n) из $C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$ такие, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{J}} \|x(t) - \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) y_k(t) e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t} - x_n^0(t)\|_X = 0.$$

При этом каждая из функций y_k ($k \in \mathbb{Z}$) эквивалентна функции x_k, определяемой формулой (2.3), и допускает продолжение на всю комплексную плоскость до целой функции экспоненциального типа не выше ε.

Определение 2.5. Будем говорить, что обобщенный ряд Фурье

$$x(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n(t) e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},\ t \in \mathbb{J},$$

периодической на бесконечности функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ *сходится к x относительно подпространства* $C_0(\mathbb{J}, X)$, если существует последовательность функций (x_n^0) из $C_0(\mathbb{J}, X)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{J}} \|x(t) - \sum_{k=-n}^{n} y_k(t) e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t} + x_n^0(t)\|_X = 0.$$

Важно отметить, что данное определение корректно, т.е. сходимость не зависит от выбора обобщенного ряда Фурье функции x. Это объясняется тем, что $y_n - x_n \in C_0(\mathbb{J}, X)$, где x_n, $n \in \mathbb{Z}$, – канонические коэффициенты Фурье функции x, определяемые по формуле (2.3).

Определение 2.6. *Модулем непрерывности на бесконечности* функции $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ называется функция $\omega_\infty(\cdot, x) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, определенная формулой

$$\omega_\infty(\delta, x) = \lim_{\mu\to\infty} \sup_{|t|\le\delta, |\tau|\ge\mu} \|x(t+\tau) - x(\tau)\|_X,\ \delta \in \mathbb{R}_+.$$

Справедлива следующая

Теорема 2.4. *Любой обобщенный ряд Фурье функции* $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ *сходится к* x *относительно подпространства* $C_0(\mathbb{J}, X)$, *если*

$$\lim_{n\to\infty} \omega_\infty(\frac{1}{n}, x) \ln n = 0.$$

Определение 2.7. Будем говорить, что функция $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ имеет *абсолютно сходящийся ряд Фурье,* если существует обобщенный ряд Фурье (2.4) этой функции такой, что $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|y_n\|_\infty < \infty$.

Отметим, что если функция $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ дважды непрерывно дифференцируема и $x', x'' \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, то $x', x'' \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$. Непосредственный подсчет канонических коэффициентов Фурье функции x'' показывает, что канонический ряд Фурье функции x абсолютно сходится.

Отметим также, что если функция x имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то ее канонический ряд Фурье сходится к x относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$. Однако канонический ряд Фурье функции x может не быть абсолютно сходящимся, хотя функция имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье в смысле определения 2.7.

Если X – банахова алгебра, то функции из $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$, имеющие абсолютно сходящийся ряд Фурье, образуют замкнутую подалгебру в $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$, обозначаемую символом $A_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ (символом $A_{\omega,\infty}(\mathbb{J})$, если $X = \mathbb{C}$).

Одним из основных результатов является теорема 2.6, в которой следующая знаменитая теорема Н. Винера распространяется на функции из $A_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$. Существует множество различных вариаций и приложений теоремы Винера (см. [6, 8, 9, 22, 47, 49, 50, 51, 55, 56, 57, 58, 59, 64, 65, 66, 73, 74]).

Теорема 2.5. *[75]. Если функция $f \in A_\omega(\mathbb{R})$ обладает свойством $f(t) \neq 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, то функция $1/f$ также имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье.*

Пусть X – банахова алгебра с единицей e.

Определение 2.8. Функцию $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$ назовем *обратимой относительно подпространства* $C_0(\mathbb{J}, X)$ (или *обратимой на бесконечности*), если существует функция $y \in C_b(\mathbb{J}, X)$ такая, что $xy - e, yx - e \in C_0(\mathbb{J}, X)$, где $e(t) \equiv e,\ t \in \mathbb{J}$. Функцию y будем называть *обратной к x относительно подпространства* $C_0(\mathbb{J}, X)$.

Отметим, что если y_1, y_2 – обратные к $x \in C_b(\mathbb{J}, X)$ относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$ функции, то $y_1 - y_2 \in C_0(\mathbb{J}, X)$.

Теорема 2.6. *Пусть X – банахова алгебра с единицей. Если функция $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$ и имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то любая обратная к ней относительно подпространства $C_0(\mathbb{J}, X)$ функция имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье.*

Рассмотрим последовательность операторов (A_N) из $End\ C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ следующего вида $A_N = \frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1} S(k\omega),\ \ N \geq 1$. Отметим, что $\|A_N\| = 1,\ N \geq 1$.

Получен следующий критерий представимости периодической на бесконечности функции в виде суммы периодической и убывающей на бесконечности функций:

Теорема 2.7. *Для того, чтобы функция $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ была представима в виде $x = x_1 + x_0$, где $x_1 \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$, $x_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$, необходимо и достаточно, чтобы в $C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ существовал $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x$.*

2. О гармоническом анализе периодических векторов и операторов

Пусть $\mathcal{X}$ – комплексное банахово пространство и $T : \mathbb{R} \to End\,\mathcal{X}$ – сильно непрерывное изометрическое представление.

Пусть $L^1(\mathbb{R})$ – банахова алгебра определенных на $\mathbb{R}$ измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных функций со сверткой функций в качестве умножения

$$(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t-s)g(s)ds,\ t \in \mathbb{R},\ f, g \in L^1(\mathbb{R}).$$

Банахово пространство $\mathcal{X}$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R})-$модуля с помощью формулы

$$fx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)T(-t)xdt,\ x \in \mathcal{X},\ f \in L^1(\mathbb{R}). \tag{2.5}$$

Используемые далее понятия и результаты из спектральной теории модулей можно найти в [1, 2, 3, 4, 7, 10, 13, 26].

Преобразование Фурье $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ задается формулой

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}dt,\ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

Определение 2.9. *Спектром Бёрлинга* вектора $x \in \mathcal{X}$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}$ вида $\Lambda(x) = \{\lambda_0 \in \mathbb{R} : fx \neq 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$, для которой $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0\}$.

Из определения следует, что $\Lambda(x) = \mathbb{R}\backslash\{\mu_0 \in \mathbb{R} :$ существует функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f}(\mu_0) \neq 0$ и $fx = 0\}$.

Банахово пространство $C_b(\mathbb{R}, X)$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R})-$модуля (см. [1, 13]) с помощью операции свертки

$$(f * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\left(S(-\tau)x\right)(t)d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)x(t-\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(t-\tau)x(\tau)d\tau,\ t \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

где $f \in L^1(\mathbb{R}),\ x \in C_b(\mathbb{R}, X)$.

Отметим, что $C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ является замкнутым подмодулем $C_b(\mathbb{R}, X)$, а структура банахова $L^1(\mathbb{R})-$модуля на нем задается формулой (2.5), где $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ и $T(t) = S(t),\ t \in \mathbb{R}$.

Определение 2.10. Число $\lambda_0 \in \Lambda(x)$ отнесем к *несущественному спектру* $\Lambda_0(x)$ функции $x \in C_b(\mathbb{R}, X)$, если существует функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такая, что $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $f * x \in C_0(\mathbb{R}, X)$. Множество $\Lambda_{ess}(x) = \Lambda(x) \backslash \Lambda_0(x)$ назовем *существенным спектром* функции x.

Определение 2.11. Пусть $x \in C_b(\mathbb{R}_+, X)$ и $\overline{x}$ – функция из $C_b(\mathbb{R}, X)$, совпадающая с x на $\mathbb{R}_+$ и обладающая свойством $\lim\limits_{t\to-\infty} \overline{x}(t) = 0$. *Существенным спектром* $\Lambda_{ess}(x)$ функции x назовем множество $\Lambda_{ess}(\overline{x})$.

Отметим, что данное определение корректно, т.е. не зависит от выбора продолжения $\overline{x} \in C_b(\mathbb{R}, X)$ функции x на $\mathbb{R}$ (если $\overline{x_1}$ – еще одно такое продолжение x на $\mathbb{R}$, то $\overline{x_1} - \overline{x} \in C_0(\mathbb{R}, X)$).

Отметим, что существенный спектр функции $x(t) = \exp it^2$, $t \in \mathbb{R}$, пуст. Если $x(t) = y(t) + x_0(t),\ t \geq 0$, где $y \in C_\omega(\mathbb{R}_+, X)$ и $x_0 \in C_0(\mathbb{R}_+, X)$, то $\Lambda_{ess}(x) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$. Если $z \in C_\omega(\mathbb{R}, X)$ – нечетная периодическая функция, то функция $z_1 : t \mapsto z(|t|)$ не является периодической, но z_1 является $\omega-$ периодической на бесконечности, а ее существенный спектр содержится в множестве $\frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$.

Определение 2.12. Вектор $x_0 \in \mathcal{X}$ назовем *периодическим вектором* периода $\omega > 0$ (относительно представления T), если $T(\omega)x_0 = x_0$.

Множество $\omega-$периодических векторов обозначим через $\mathcal{X}_\omega = \mathcal{X}_\omega(T)$. Оно образует замкнутое подпространство в $\mathcal{X}$, инвариантное относительно операторов $T(t),\ t \in \mathbb{R}$.

Теорема 2.8. *Для того, чтобы вектор $x_0 \in \mathcal{X}$ был $\omega-$периодическим (т.е. $x_0 \in \mathcal{X}_\omega$), необходимо и достаточно, чтобы имело место включение*

$$\Lambda(x_0) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

Доказательство. Необходимость. Если $x_0 \in \mathcal{X}_\omega$, то по определению $T(\omega)x_0 - x_0 = 0$. Тогда для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ из формулы (2.5) получаем, что

$$f(T(\omega)x_0 - x_0) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T(-\tau)(T(\omega)x_0 - x_0)d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)T(-\tau+\omega)x_0 d\tau - fx_0 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(T(\omega)f\right)(u)T(-u)x_0du - fx_0 = (T(\omega)f - f)x_0 = 0.$$

Если $\lambda_0 \notin \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$, то рассмотрим $f \in L^1(\mathbb{R})$, такую, что $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$. Тогда $\widehat{g}(\lambda_0) = (e^{i\lambda_0\omega} - 1)\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ для $g = S(\omega)f - f \in L^1(\mathbb{R})$. Отсюда получаем, что найдена функция $g \in L^1(\mathbb{R})$ такая, что $gx = (S(\omega)f - f)x = 0$ и $\widehat{g}(\lambda_0) \neq 0$. Из определения 2.10 следует, что $\lambda_0 \notin \Lambda(x_0)$. Таким образом, доказано включение (2.8).

Достаточность. Пусть теперь для $\Lambda(x_0)$ выполнено (2.8). Рассмотрим вектор $y_0 = T(\omega)x_0 - x_0$. Если функция $f \in L^1(\mathbb{R})$ такова, что $\mathrm{supp}\widehat{f}$ – компакт, то из свойства 3 леммы 1.1 следует, что $\Lambda(fy_0) \subset supp\widehat{f} \cap \Lambda(y_0) \subset supp\widehat{f} \cap \Lambda(x_0) \subset supp\widehat{f} \cap \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$ – конечное множество вида $\left\{\frac{2\pi}{\omega}k_1, ..., \frac{2\pi}{\omega}k_n\right\},\ k_1, ..., k_n \in \mathbb{Z}$.

Из доказательства теоремы 1 в [1] и теоремы 3.2.7 в [10] следует, что вектор fx_0 представим в виде

$$fx_0 = x_1 + ... + x_n,$$

где $\Lambda(x_j) = \left\{\frac{2\pi}{\omega}k_j\right\}$, $T(t)x_j = e^{i\frac{2\pi}{\omega}k_j t}x_j,\ 1 \le j \le n.$

Тогда $fy_0 = f(T(\omega)x_0 - x_0) = (T(\omega) - I)fx_0 = \sum\limits_{j=1}^{n}\left(e^{i2\pi k_j} - 1\right)x_j = 0.$

Отметим, что поскольку множество функций из $L^1(\mathbb{R})$, имеющих преобразование Фурье с компактным носителем, плотно в $\mathcal{X}$, и $L^1(\mathbb{R})-$модуль $\mathcal{X}$ невырожден (см. свойство 1 леммы 1.1), то $T(\omega)x_0 - x_0 = 0$. Следовательно, $x_0 \in \mathcal{X}_\omega$. □

Из равенств $T(t+\omega)x - T(t)x = T(t)(T(\omega)x - x) = 0,\ t \in \mathbb{R}$, для любого $x \in \mathcal{X}_\omega$, следует, что функция $\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathcal{X},\ \varphi_x(t) = T(t)x$, является непрерывной периодической функцией. Рассмотрим ее ряд Фурье

$$\varphi_x(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t},$$

где

$$x_n = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau)xe^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau,\ n \in \mathbb{Z}. \qquad (2.9)$$

Определение 2.13. Ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \qquad (2.10)$$

назовем *рядом Фурье* вектора $x \in \mathcal{X}_\omega$, а векторы $x_n,\ n \in \mathbb{Z}$, – *коэффициентами Фурье* вектора x.

Если ряд Фурье вектора $x \in \mathcal{X}$ абсолютно сходится, т.е. выполнено условие $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\| < \infty$, то справедливо равенство $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} x_n$.

Лемма 2.2. *Для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathcal{X}_\omega$ вектор $fx \in \mathcal{X}_\omega$ и имеет ряд Фурье вида $fx \sim \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right)x_k$.*

Доказательство. Непосредственно из формулы (2.5) следует, что $fx \in \mathcal{X}_\omega$. Далее вектор fx обозначим через y. Для коэффициентов Фурье периодического вектора y из формулы (2.9) имеем $y_k = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau)(fx)e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}d\tau$. Используя формулы (2.5) и (2.6) и меняя порядок интегрирования, получаем следующую цепочку равенств:

$$y_k = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau)\left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(s)T(-s)x ds\right)e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}d\tau =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega \left(\int\limits_{\mathbb{R}} f(s)T(\tau - s)x ds\right)e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)\left(\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau - s)xe^{-i\frac{2\pi k}{\omega}\tau}d\tau\right)ds =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)\left(\frac{-e^{i\frac{2\pi k}{\omega}s}}{\omega}\int\limits_0^\omega T(t)xe^{-i\frac{2\pi k}{\omega}t}dt\right)ds =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} f(s)x_k e^{-i\frac{2\pi k}{\omega}s}ds = \widehat{f}\left(\frac{2\pi k}{\omega}\right)x_k.$$

$\square$

Отметим работы [1, 2], в которых многие классические результаты теории рядов Фурье для периодических функций обобщались на векторы из банаховых пространств, в которых действует однопараметрическая группа операторов.

Подпространство $\mathcal{X}_\omega$ периодических векторов и утверждения следующей леммы фактически рассматривались в [46, теорема 16.7.2]. Из указанных источников следует

Лемма 2.3. *Пусть $x \in \mathcal{X}_\omega$. Тогда операторы*

$$P_n x = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega T(\tau)xe^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau,\ n \in \mathbb{Z},$$

являются проекторами, $x_n = P_n x$, $n \in \mathbb{Z}$, *– коэффициенты Фурье вектора* x, $T(t)P_n = e^{i\frac{2\pi n}{\omega}t}P_n$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$, *и* $\|P_n\| = 1$, *если* $P_n \neq 0$.

Лемма 2.4. *Для любого* $x \in \mathcal{X}_\omega$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0,$$

где x_n, $n \in \mathbb{Z}$, *– коэффициенты Фурье вектора* x.

Доказательство. Возьмем произвольный вектор x из области определения $D(A)$ генератора A (infinitesimal generator в [54]) полугруппы операторов T. Справедлива следующая оценка:

$$\|x_n\| = \|\frac{1}{\omega}\int_0^\omega T(\tau)xe^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau\| = \|\frac{1}{\omega}\int_0^\omega T(\tau)Ax\frac{1}{-i\frac{2\pi n}{\omega}}e^{-i\frac{2\pi n}{\omega}\tau}d\tau\| \leq$$

$$\leq \frac{\|Ax\|}{|n|},\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$. Поскольку $D(A)$ плотно в $\mathcal{X}_\omega$, то свойство $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$ верно для любого $x \in \mathcal{X}_\omega$. □

Определение 2.14. Функция $\omega(\cdot, x) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\omega(\delta, x) = \sup\limits_{|t|\leq\delta} \|T(t)x - x\|$, называется *модулем непрерывности* вектора x.

Теорема 2.9. *Для любого* $x \in \mathcal{X}_\omega$ *с рядом Фурье вида (2.10) справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)x_k\| = 0.$$

Доказательство. Возьмем произвольный периодический вектор $x \in \mathcal{X}_\omega$. Рассмотрим функции $f_n \in L^1(\mathbb{R})$ следующего вида

$f_n(t) = \frac{\omega \sin^2 \frac{(n+1)\pi t}{\omega}}{4\pi^4 t^2 (n+1)}$, $t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$. Отметим, что преобразование Фурье данных функций имеет вид

$$\widehat{f_n}(\lambda) = \begin{cases} 1 - \frac{\omega|\lambda|}{2\pi(n+1)} & , \ |\lambda| \le \frac{2\pi(n+1)}{\omega}, \\ 0 & , \ |\lambda| > \frac{2\pi(n+1)}{\omega}, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тогда

$$\widehat{f_n}(\frac{2\pi k}{\omega}) = \begin{cases} 1 - \frac{|k|}{n+1} & , \ |k| \le n+1, \\ 0 & , \ |k| > n+1, \quad k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

и из леммы 2.2 следует, что свертка функции f_n с вектором x определяется равенством

$$f_n x = \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) x_k,\ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда имеет место оценка

$$\|x - \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) x_k\| = \|x - f_n x\| =$$

$$= \| \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(\tau) x d\tau - \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(\tau) T(-\tau) x d\tau \| =$$

$$= \| \int\limits_{\mathbb{R}} f_n(\tau) \left(x - T(-\tau)x\right) d\tau \| \le$$

$$\le \| \int\limits_{-\delta_n}^{\delta_n} f_n(\tau) \omega(\delta_n, x) d\tau \| + 2\|x\| \| \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta_n,\delta_n)} f_n(\tau) d\tau \| \le$$

$$\le \omega(\delta_n, x) \int\limits_{-\delta_n}^{\delta_n} f_n(\tau) d\tau + 2\|x\| \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta_n,\delta_n)} f_n(\tau) d\tau \le$$

$$\le \omega(\delta_n, x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(\tau) d\tau + \frac{\omega\|x\|}{2\pi^4(n+1)} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus(-\delta_n,\delta_n)} \frac{\sin^2 \frac{(n+1)\pi\tau}{\omega}}{\tau^2} d\tau \le$$

$$\leq \omega(\delta_n, x) + \frac{\omega\|x\|}{\pi^4(n+1)} \int\limits_{\delta_n}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau^2} \leq \omega(\delta_n, x) + \frac{\omega\|x\|}{\pi^4(n+1)\delta_n} \to 0,\ n \to \infty,$$

для любой последовательности $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющей условиям $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\delta_n = \infty$. $\square$

Теорема 2.10. *Для любого $x \in \mathcal{X}_\omega$ справедлива оценка*

$$\left\| x - \sum_{k=-n}^{n} x_k \right\| \leq Const \cdot \omega(\frac{1}{n}, x) \ln n, n \in \mathbb{N}. \tag{2.11}$$

В частности, ряд Фурье вектора x сходится к x, если $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(\frac{1}{n}, x) \ln n = 0$.

Доказательство. Пусть $E_n[x]$, $n \geq 1$, - наилучшее приближение вектора $x \in \mathcal{X}_\omega$ тригонометрическими полиномами порядка n (см. [18, стр.189]). Из [18, стр.198] вытекает следующая оценка

$$\left\| x - \sum_{k=-n}^{n} x_k \right\| \leq (L_n + 1) E_n[x], \tag{2.12}$$

где L_n, $n \geq 1$, - константы Лебега, для которых выполнено условие (см. [18, стр.115])

$$L_n = 4\pi^{-2} \ln n + O(1) \simeq 4\pi^{-2} \ln n \text{ при } n \to \infty. \tag{2.13}$$

Для дальнейших оценок требуются оценки для $E_n(x)$, $n \geq 1$. Рассмотрим функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$, обладающую следующими свойствами:

1. $\widehat{f}(0) = 1$, $\widehat{f}(\lambda) = \widehat{f}(-\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$;
2. $\mathrm{supp}\widehat{f} \subset [-1, 1]$;
3. $f \geq 0$;
4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |t| f(t) dt = M_f < \infty$.

Отметим, что третье свойство нужно лишь для удобства доказательства, первое свойство позволяет обойтись и без него.

Возьмем произвольное $\alpha > 0$ и введем обозначение $f_\alpha(t) = \alpha f(\alpha t)$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда имеет место следующая оценка

$$E_\alpha[x] \le \|x - f_\alpha x\| = \|\int\limits_{\mathbb{R}} (T(-\tau)x - x) f_\alpha(\tau) d\tau\| \le$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}} \|T(-\tau)x - x\| f_\alpha(\tau) d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \|T(-\tau)x - x\| f_\alpha(\tau) d\tau + \int\limits_{|\tau|\ge\alpha} \|T(-\tau)x - x\| f_\alpha(\tau) d\tau \le$$

$$\le \omega(\frac{1}{\alpha}, x) \int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f_\alpha(\tau) d\tau + \omega(\frac{1}{\alpha}, x) \int\limits_{|\tau|\ge\alpha} (|\tau|\alpha + 1) f_\alpha(\tau) d\tau \le$$

$$\le \omega(\frac{1}{\alpha}, x) \left(2 + \int\limits_{|\tau|\ge\alpha} |\tau|\alpha f_\alpha(\tau) d\tau \right) \le \omega(\frac{1}{\alpha}, x) \left(2 + \int\limits_{|t|\ge\alpha^2} |t| f(t) dt \right) \le$$

$$\le \omega(\frac{1}{\alpha}, x) \left(2 + \int\limits_{\mathbb{R}} |t| f(t) dt \right) \le (2 + M_f)\, \omega(\frac{1}{\alpha}, x),$$

Из последней оценки с использованием (2.12) и (2.13) получаем требуемую оценку (2.11). □

Замечание 2.1. Для скалярных периодических функций оценка наилучшего приближения через модуль непрерывности была получена Джексоном [61]. В [15] близкая оценка была получена для равномерно непрерывных функций, ограниченных на всей вещественной оси, где в качестве функции f была выбрана функция вида $f(t) = \frac{96}{\pi t^4} \sin^4 \frac{t}{4}$, $t \in \mathbb{R}$.

Наряду с изометрическим (не обязательно периодическим) представлением $T : \mathbb{R} \to End\ \mathcal{X}$ рассмотрим представление $\widetilde{T} : \mathbb{R} \to End(End\ \mathcal{X})$, $\widetilde{T}(t)A = T(t)AT(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, $A \in End\ \mathcal{X}$.

Определение 2.15. Оператор $A \in End\ \mathcal{X}$ назовем *периодическим* (относительно представления $\widetilde{T}$) *периода* $\omega > 0$, если

$$\widetilde{T}(\omega)A = T(-\omega)AT(\omega) = A,$$

(т.е. оператор A перестановочен с оператором $T(\omega)$) и функция $t \mapsto T(t)AT(-t) : \mathbb{R} \to End\ \mathcal{X}$ непрерывна в равномерной операторной топологии.

Множество $\omega-$периодических операторов образует замкнутую подалгебру $End_\omega \mathcal{X} = (End\ \mathcal{X})_\omega$ из алгебры $End\ \mathcal{X}$.

В соответствии с определением 2.12 рассмотрим ряд Фурье

$$A \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n \tag{2.14}$$

оператора A относительно представления $\widetilde{T}$, т.е.

$$A_n = \frac{1}{\omega} \int\limits_0^\omega T(\tau)AT(-\tau)e^{i\frac{2\pi n}{\omega}\tau} d\tau.$$

В статье [53] было введено понятие ряда Фурье для операторов, действующих в алгебре периодических функций $C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Концепция рядов Фурье периодических операторов рассматривалась в [2, 7, 9, 10].

В работах [7, 50] была установлена

Теорема 2.11. *Пусть $A \in End_\omega \mathcal{X}$ – $\omega-$периодический непрерывно обратимый оператор с абсолютно сходящимся рядом Фурье (2.14). Тогда обратный оператор $B = A^{-1}$ также является $\omega-$периодическим и его ряд Фурье $A^{-1} \sim \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} B_n$ также абсолютно сходится.*

3. Доказательства основных теорем

Далее через X обозначается банахова алгебра с единицей.

В дальнейшем символом $\mathcal{X}$ будем обозначать фактор-пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)/C_0(\mathbb{J},X)$, которое является банаховым пространством с нормой $\|\widetilde{x}\| = \inf\limits_{y\in x+C_0(\mathbb{J},X)} \|y\|$, где $\widetilde{x} = x + C_0(\mathbb{J},X)$ – класс эквивалентности, содержащий функцию x.

Отметим, что банахово пространство $\mathcal{X}$ становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом

$$\widetilde{x}\widetilde{y} = \widetilde{xy},\ \ \widetilde{x},\widetilde{y}\in\mathcal{X}. \tag{2.15}$$

Ясно, что подпространства $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R},X)$, $C_0(\mathbb{R},X)$ являются замкнутыми подмодулями из $L^1(\mathbb{R})-$модуля $C_b(\mathbb{R},X)$. Формула (2.15) не позволяет корректно задать структуру $L^1(\mathbb{R})-$модуля в $C_b(\mathbb{R}_+,X)$. Тем не менее, такой структурой наделяются фактор-пространства $C_{b,u}(\mathbb{J},X)/C_0(\mathbb{J},X)$, $C_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)/C_0(\mathbb{J},X)$. (Случай $\mathbb{J}=\mathbb{R}$ очевиден: в этом случае $C_b(\mathbb{R},X)/C_0(\mathbb{R},X)$ является фактор-модулем.)

Пусть $\mathbb{J}=\mathbb{R}_+$. В фактор-пространстве $C_{b,u}(\mathbb{R}_+,X)/C_0(\mathbb{R}_+,X)$ корректно определяется сильно непрерывная группа изометрий $\widetilde{S}:\mathbb{R}\to End(C_{b,u}(\mathbb{R}_+,X)/C_0(\mathbb{R}_+,X))$, действующая по правилу

$$\widetilde{S}(t)\widetilde{x} = \widetilde{S(t)x},\ t\in\mathbb{R},\ \widetilde{x}\in C_{b,u}(\mathbb{R}_+,X)/C_0(\mathbb{R}_+,X), \tag{2.16}$$

где $S(t)x$ – сдвиг функции x влево (см. формулу (2.1)) для $t\geq 0$, а для $t<0$ символ $\widetilde{S(t)x}$ обозначает класс эквивалентности, содержащий непрерывную функцию $x_t\in C_b(\mathbb{R}_+,X)$ вида

$$x_t(s) = \begin{cases} x(s+t) & ,\ \ s+t>0, \\ -t^{-1}x(0)s & ,\ \ s+t\leq 0,\ s\geq 0. \end{cases}$$

Структура банахова $L^1(\mathbb{R})-$модуля на $C_{b,u}(\mathbb{J},X)/C_0(\mathbb{J},X)$ ($C_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)/C_0(\mathbb{J},X)$ в частности) наделяется формулой

$$f\widetilde{x} = \int\limits_{\mathbb{R}} f(\tau)\widetilde{S}(-\tau)\widetilde{x}d\tau,\ f \in L^1(\mathbb{R}),\ \widetilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{J},X)/C_0(\mathbb{J},X), \quad (2.17)$$

где $\mathbb{J} = \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$.

Непосредственно из определения представления $\widetilde{S} : \mathbb{R} \to End\ C_{b,u}(\mathbb{J},X)/C_0(\mathbb{J},X)$ следует, что $\widetilde{S}(\omega)\widetilde{x} = \widetilde{x}$, $\widetilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{J},X)/C_0(\mathbb{J},X)$. Таким образом, функция $t \mapsto \widetilde{S}(t)\widetilde{x} : \mathbb{R} \to C_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)/C_0(\mathbb{J},X)$ является непрерывной $\omega-$периодической функцией, т.е. она принадлежит банахову пространству $C_\omega(\mathbb{R}, C_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)/C_0(\mathbb{J},X))$. Следовательно, имеет место

Лемма 2.5. *Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J},X)$ является $\omega-$периодической на бесконечности тогда и только тогда, когда класс эквивалентности $\widetilde{x} = x + C_0(\mathbb{J},X)$ является $\omega-$периодическим вектором относительно представления $\widetilde{S} \in End\ C_{b,u}(\mathbb{J},X)/C_0(\mathbb{J},X)$.*

Доказательства теорем 2.2, 2.3 и 2.4 следуют из леммы 2.5 и теорем 2.9 и 2.10, где в качестве пространства $\mathcal{X}_\omega$ взято пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N,X)/C_0(\mathbb{R}^N,X)$.

Доказательство теоремы 2.6. Пусть функция $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)$ обратима на бесконечности и $b \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J},X)$ – одна из обратных к a (относительно подпространства $C_0(\mathbb{J},X)$) функций. Следовательно, $\widetilde{a}\widetilde{b} = \widetilde{b}\widetilde{a} = \widetilde{e}$ – единица алгебры $C_{b,u}(\mathbb{J},X)/C_0(\mathbb{J},X)$. Рассмотрим оператор $A \in End\ C_{b,u}(\mathbb{J},X)/C_0(\mathbb{J},X)$ вида

$$A\widetilde{x} = \widetilde{a}\widetilde{x},\ \widetilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{J},X).$$

Этот оператор является $\omega-$периодическим относительно представления $\widetilde{S} \in End\ C_{b,u}(\mathbb{J},X)/C_0(\mathbb{J},X)$, и коэффициенты A_n, $n \in \mathbb{Z}$, его ряда Фурье

$A \sim \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ относительно представления $\widetilde{S}$ имеют вид $A_n\widetilde{x} = \widetilde{a_n}\widetilde{x}$, $\widetilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$, где $a_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{J}, X)$, $n \in \mathbb{Z}$, – канонические коэффициенты Фурье функции a. Поскольку $\|\widetilde{a_n}\| = \inf\limits_{x_0\in C_0(\mathbb{J},X)} \|a_n + x_0\|$, то ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|A_n\| = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|\widetilde{a_n}\|$ абсолютно сходится. Оператор A непрерывно обратим, и обратный к нему оператор $B = A^{-1} \in End\, C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$, имеет вид $B\widetilde{x} = \widetilde{b}\widetilde{x}$. В силу теоремы 2.11 оператор B также является $\omega-$периодическим относительно представления $\widetilde{S}$ и его ряд Фурье $B \sim \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} B_n$ также абсолютно сходится.

Поскольку $B_n\widetilde{x} = \widetilde{b_n}\widetilde{x}$, $\widetilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$, где $\widetilde{b_n}$, $n \in \mathbb{Z}$, – коэффициенты Фурье класса $\widetilde{b}$, и $\|B_n\| = \|\widetilde{b_n}\|$, то $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|B_n\| = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \|\widetilde{b_n}\| < \infty$. Откуда получаем абсолютную сходимость ряда Фурье функции b. $\square$

Доказательство теоремы 2.7. Необходимость. Пусть функция $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ представима в виде $x = x_1 + x_0$, где $x_1 \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$, $x_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$. Тогда $A_N(x_1 + x_0) = x_1 + A_N x_0$, $N \geq 1$. Поскольку $x_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$, то $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x_0 = 0$, и, следовательно, $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x = x_1$.
Достаточность. Пусть для некоторой функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$ существует предел $\lim\limits_{N\to\infty} A_N x = y$. Покажем, что x представима в виде $x = x_1 + x_0$, где $x_1 \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$, $x_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$. В силу равенств

$$S(\omega)y - y = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S((k+1)\omega)x - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k\omega)x \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{N}(S(N\omega)x - x) \right) = 0$$

функция y является периодической, т.е. $y \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$, откуда вытекает, что $A_N y = y$ для любого $N \geq 1$. Обозначив $x - y = x_0 \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)$, получим следующую цепочку равенств:

$$\lim_{N\to\infty} A_N x_0 = \lim_{N\to\infty} A_N(x - y) = \lim_{N\to\infty} (A_N x - y) = y - y = 0. \quad (2.18)$$

По функции x_0 построим класс $\widetilde{x_0} \in \mathcal{X}$, который в силу леммы 2.5 является $\omega-$периодическим вектором в пространстве $\mathcal{X} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$, т.е. $\widetilde{x_0} \in \mathcal{X}_\omega$. Наряду с операторами A_N, $N \geq 1$, рассмотрим последовательность операторов $(\widetilde{A_N})$, $N \geq 1$, из $End\ \mathcal{X}$ следующего вида $\widetilde{A_N} = \frac{1}{N}\sum\limits_{k=0}^{N-1}\widetilde{S}(k\omega)$. Тогда $\widetilde{A_N}\widetilde{x_0} = \widetilde{x_0}$ для любого $N \geq 1$. С другой стороны, из (2.18) следует справедливость равенства $\lim\limits_{N\to\infty}\widetilde{A_N}\widetilde{x_0} = \widetilde{0}$, откуда непосредственно получаем, что $\widetilde{x_0} = \widetilde{0}$. А значит $x_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$, т.е. функция x представима в виде $x = y + x_0$, где $y \in C_\omega(\mathbb{J}, X)$, $x_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$. $\square$

Глава 3

Периодические на бесконечности решения разностных и дифференциальных уравнений

Пусть X – комплексное банахово пространство, $\mathbb{J}$ – один из промежутков $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Следующий спектральный критерий является полезным при доказательстве периодичности на бесконечности ограниченных решений разностных и дифференциальных уравнений.

Теорема 3.1. *Для того, чтобы функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ была $\omega-$периодической на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы имело место включение $\Lambda_{ess}(x) \subset \frac{2\pi}{\omega}\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Рассмотрим фактор-пространство $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{J}, X)/C_0(\mathbb{J}, X)$. Как отмечалось ранее, оно является банаховым $L^1(\mathbb{R})-$модулем. Непосредственно из определений 2.9 и 2.10 следует, что $\Lambda(\widetilde{x}) = \Lambda_{ess}(x)$, при этом без ограничения общности можно считать, что $\mathbb{J} = \mathbb{R}$. Утверждение теоремы следует из леммы 2.5 и теоремы 2.8. $\square$

Рассмотрим разностное уравнение вида

$$x(t+1) = Bx(t) + y_0(t),\ t \in \mathbb{J},\ \mathbb{J} \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}, \tag{3.1}$$

где $B \in EndX$, $y_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$.

Теорема 3.2. *Пусть спектр $\sigma(B)$ оператора B удовлетворяет условию*

$$\sigma(B) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}. \tag{3.2}$$

Тогда каждое равномерно непрерывное ограниченное решение $x_0 : \mathbb{J} \to X$ разностного уравнения (3.1) является периодической на бесконечности функцией периода 1.

Доказательство. Пусть функция $x_0 \in C_{b,u}(\mathbb{J}, X)$ удовлетворяет разностному уравнению (3.1), т.е.

$$S(1)x_0 - Bx_0 = y_0,$$

где $(Bx_0)(t) = Bx_0(t),\ t \in \mathbb{J}$.

Поскольку $y_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$, то

$$\widetilde{S}(1)\widetilde{x_0} - B\widetilde{x_0} = \widetilde{0}, \tag{3.3}$$

где $B\widetilde{x_0} = \widetilde{Bx_0}$.

Докажем включение $\Lambda(\widetilde{x_0}) \subset 2\pi\mathbb{Z}$. Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. Выберем функцию $f \in L^1(\mathbb{R})$ такую, что $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $\mathrm{supp}\widehat{f}$ – компакт, причем $(\mathrm{supp}\widehat{f}) \cap 2\pi\mathbb{Z} = \emptyset$. Покажем, что $f\widetilde{x_0} = 0$. Из (3.3) получаем

$$f(\widetilde{S}(1)\widetilde{x_0} - B\widetilde{x_0}) = (S(1)f)\widetilde{x_0} - Bf\widetilde{x_0} = f_1\widetilde{x_0} - Bf\widetilde{x_0} = \widetilde{0}, \tag{3.4}$$

где $f_1 = S(1)f \in L^1(\mathbb{R})$.

В случае $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$ символом $\overline{x_0}$ будем обозначать произвольное продолжение $\overline{x_0} \in C_{b,u}(\mathbb{R}, X)$ функции x_0 на $\mathbb{R}$, обладающее свойством $\lim\limits_{t\to-\infty} \overline{x_0}(t) = 0$. Если $\mathbb{J} = \mathbb{R}$, положим $\overline{x_0} = x_0$.

Из (3.4) получаем включение $(f_1 - Bf) * \overline{x_0} \in C_0(\mathbb{J}, X)$. Поскольку $\sigma(B) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}$, то существует окрестность $V \subset \mathbb{T}$ числа $\gamma_0 = e^{i\lambda_0}$, такая, что определена резольвента $\lambda \mapsto R(e^{i\lambda}, B) : V \to EndX$ оператора B.

Рассмотрим бесконечно дифференцируемую функцию $\widehat{\varphi} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ такую, что $\widehat{\varphi}(\lambda_0) \neq 0$ и $\mathrm{supp}\varphi \subset [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ для любого малого $\delta > 0$, такого, что $e^{i\lambda} \in \rho(B)$ для $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$.

Тогда она является преобразованием Фурье некоторой функции $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, а функция

$$\widehat{F}(\lambda) = \begin{cases} \widehat{\varphi}(\lambda)(e^{i\lambda}I - B)^{-1} & , \ \lambda \in [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta], \\ 0 & , \ \lambda \notin [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta], \end{cases}$$

является (в силу голоморфности функции $\lambda \mapsto (e^{i\lambda}I - B)^{-1} : \mathbb{R} \to EndX$) преобразованием Фурье некоторой суммируемой функции $F : \mathbb{R} \to EndX$.

Из равенств

$$F * \widehat{(f_1 - Bf)}(\lambda) = \widehat{F}(\lambda)(e^{i\lambda}I - B)\widehat{f}(\lambda) = \widehat{\varphi}(\lambda)\widehat{f}(\lambda)I, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

и формулы (3.4) следует, что

$$F * (f_1 - Bf) * \overline{x_0} = (\varphi * f) * \overline{x_0} \in C_0(\mathbb{R}, X).$$

Обозначив $\varphi * f$ через g, получаем, что $\widehat{g}(\lambda_0) = \widehat{\varphi}(\lambda_0)\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$. Таким образом, λ_0 не принадлежит существенному спектру функции $\overline{x_0}$. Отсюда в силу теоремы 3.1 (считая $\omega = 1$) следует, что функция $\overline{x_0}$ (а, следовательно, и x_0) является периодической на бесконечности периода 1 функцией. □

Следствие 3.1. *Пусть для оператора $B \in EndX$ выполнено условие доказанной теоремы. Рассмотрим нелинейное уравнение*

$$x(t+1) = Bx(t) + f(t, x(t)), \ t \geq 0, \tag{3.5}$$

где $t \mapsto f(t,x)$ непрерывна равномерно относительно x из любого ограниченного множества из X и $\lim\limits_{t\to\infty} \sup\limits_{\|x\|\leq R} \|f(t,x)\| = 0$ для любого $R > 0$. Тогда каждое равномерно непрерывное ограниченное решение x_0 уравнения (3.5) является периодической на бесконечности функцией периода 1.

Следствие 3.2. *Пусть для оператора* $B \in EndX$ *выполнено условие доказанной теоремы,* $F_0 \in C_0(\mathbb{R}_+, EndX)$*, а* $g : X \to \mathbb{C}$ *– непрерывная функция. Тогда каждое равномерно непрерывное ограниченное решение уравнения*

$$x(t+1) = Bx(t) + F_0(t)g(x),\ t \geq 0,$$

является периодической на бесконечности функцией периода 1.

Следствие 3.3. *Пусть для оператора* $B \in EndX$ *выполнено условие доказанной теоремы и* $F_0 \in C_0(\mathbb{R}_+, EndX)$*. Тогда каждое равномерно непрерывное ограниченное решение уравнения*

$$x(t+1) = (B + F_0(t))x(t),\ t \geq 0,$$

является периодической на бесконечности функцией периода 1.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = y(t),\ t \in \mathbb{J}, \tag{3.6}$$

где $y \in L^1(\mathbb{J}, X)$ и $A : D(A) \subset X \to X$ – генератор сильно непрерывной ограниченной полугруппы операторов $U : \mathbb{R}_+ \to EndX$ класса C_0.

Определение 3.1. Функция $x : \mathbb{J} \to X$ называется *слабым решением* уравнения (3.6) (см. [52]), если для всех $s \leq t$ из $\mathbb{J}$ имеет место равенство

$$x(t) = U(t-s)x(s) + \int\limits_s^t U(t-\tau)y(\tau)d\tau,\ s \leq t,\ s, t \in \mathbb{J}. \tag{3.7}$$

При $\mathbb{J} = \mathbb{R}_+$ равенство должно быть выполнено при $s = 0$ и $t \geq 0$. Ясно, что функция x равномерно непрерывна.

Теорема 3.3. *Пусть имеет место включение*

$$\sigma(U(1)) \cap \mathbb{T} \subset \{1\}. \qquad (3.8)$$

Тогда каждое ограниченное на $\mathbb{J}$ слабое решение уравнения (3.6) является периодической на бесконечности функцией периода 1 ($x \in C_{1,\infty}(\mathbb{J}, X)$).

Доказательство. Пусть выполнено условие (3.8). Пусть $x : \mathbb{J} \to X$ – ограниченное на $\mathbb{J}$ слабое решение уравнения (3.6). Положив в (3.7) $s = t$ и рассматривая функцию x в точке $t+1$, получим следующее равенство:

$$x(t+1) = U(1)x(t) + \int\limits_t^{t+1} U(t+1-\tau)f(\tau)d\tau, \ t \in \mathbb{J}.$$

Введем обозначения $U(1) = B$, $\int\limits_t^{t+1} U(t+1-\tau)f(\tau)d\tau = y_0(t), \ t \in \mathbb{J}$, и покажем, что $y_0 \in C_0(\mathbb{J}, X)$. В силу ограниченности полугруппы U имеем

$$\|y_0(t)\| = \|\int\limits_t^{t+1} U(t+1-\tau)y(\tau)d\tau\| \leq M \int\limits_t^{t+1} \|y(\tau)\|d\tau \to 0$$

при $|t| \to \infty$, поскольку

$$\int\limits_t^{t+1} \|y(\tau)\|d\tau \leq \int\limits_n^{n+1} \|y(\tau)\|d\tau + \int\limits_{n+1}^{n+2} \|y(\tau)\|d\tau \to 0 \quad \text{при} \quad |n| \to \infty,$$

где $n = [t]$ (символом $[\cdot]$ обозначена целая часть числа), $y \in L^1(\mathbb{J}, X)$.

В итоге получаем, что функция x удовлетворяет разностному уравнению (3.1). Из (3.8) следует, что выполнено условие (3.2) теоремы 3.2, а значит $x \in C_{1,\infty}(\mathbb{J}, X)$. □

Теорема 3.4. *Пусть полугруппа операторов* $U : \mathbb{R}_+ \to EndX$ *ограничена и для спектра ее генератора* A *выполнено включение*

$$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \subset \left\{ i\frac{2\pi n}{\omega}\mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Тогда все функции $\varphi_x : \mathbb{R}_+ \to X$ *вида* $\varphi_x(t) = U(t)x,\ t \geq 0$, *являются периодическими на бесконечности функциями периода 1.*

Доказательство. Из определения 3.1 следует, что все функции φ_x являются ограниченными решениями уравнения (3.6), поэтому выполнены условия теоремы 3.3. $\square$

Глава 4

Спектры алгебр медленно меняющихся и периодических на бесконечности функций и банаховы пределы

1. Определение банахова предела на коммутативной C^*-алгебре с единицей

Пусть $\mathcal{U}$ – коммутативная C^*-алгебра.

Определение 4.1. *Характер* ξ алгебры $\mathcal{U}$ – это такой ненулевой линейный функционал $\xi \in \mathcal{U}^*$, что $\xi(ab) = \xi(a)\xi(b)$ при всех $a, b \in \mathcal{U}$. *Спектром* алгебры $\mathcal{U}$ называется множество $\mathrm{Sp}\,\mathcal{U}$ всех ее характеров.

Отметим, что характер коммутативной C^*-алгебры – это в точности чистое состояние на этой алгебре (см. [14]).

Банаховы пределы на пространстве последовательностей l_∞ рассматривались в [45, 72].

Рассмотрим коммутативную C^*-алгебру $\mathcal{U}$ с единицей e, на которой задано изометрическое представление $T : \mathbb{R}_+ \to End\,\mathcal{U}$, обладающее свойствами:

1) $\|T(t)\| = 1$;

2) $T(t)(xy) = (T(t)x)\,(T(t)y)$ для всех $x, y \in \mathcal{U}$,

т.е. представление T образует полугруппу гомоморфизмов алгебры $\mathcal{U}$.

Определение 4.2. Линейный функционал B на инвариантной относительно полугруппы T алгебре $\mathcal{U}$ с единицей e называется *банаховым пределом* на $\mathcal{U}$, если выполнены следующие условия:

1) $B(e) = 1$,

2) $\|B\| = 1$,

3) $B(T(t)x) = B(x),\ t \geq 0,\ x \in \mathcal{U}$.

Множество банаховых пределов алгебры $\mathcal{U}$ будем обозначать через $\mathcal{BL}(\mathcal{U})$.

2. Банаховы пределы на алгебрах функций

Символом $\mathbb{K}$ обозначим одно из полей $\mathbb{R}, \mathbb{C}$. А символом $C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ будем обозначать одну из следующих трех алгебр: $C_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}),\ C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}),\ C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$.

В качестве коммутативной C^*-алгебры $\mathcal{U}$ возьмем алгебру $C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$. Роль единицы в ней играет функция $e \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$, $e(t) \equiv 1,\ t \geq 0$. В качестве представления T на алгебре $C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ возьмем стандартную полугруппу сдвигов, задаваемую формулой (2.1).

Введем величины $\alpha_\infty(x), \beta_\infty(x),\ x \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Возьмем некоторое число $s > 0$. Замыкание множества значений функции $x \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ при $t \geq s$ заполняет некоторый отрезок, который мы обозначим через $[\alpha_x(s), \beta_x(s)]$, где $\alpha_x(s) = \inf\limits_{t \geq s} x(t)$, $\beta_x(s) = \sup\limits_{t \geq s} x(t)$. Тогда для любого $\tau > s$ справедливо включение $[\alpha_x(\tau), \beta_x(\tau)] \subseteq [\alpha_x(s), \beta_x(s)]$, т.е. функция $\alpha_x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ является неубывающей, а функция $\beta_x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ - невозрастающей. По данной функции $x \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ построим две следующие величины: $\alpha_\infty(x) = \lim\limits_{s \to \infty} \alpha_x(s), \quad \beta_\infty(x) = \lim\limits_{s \to \infty} \beta_x(s)$.
Заметим, что $[\alpha_\infty(x); \beta_\infty(x)] = \bigcap\limits_{s > 0} [\alpha_x(s), \beta_x(s)],\ x \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Определение 4.3. Будем говорить, что число $a \in \mathbb{K}$ принадлежит *множеству значений функции* $x \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ *на бесконечности*, если существует последовательность $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ такая, что

$t_n \to \infty$, $n \to \infty$, и $\lim\limits_{n\to\infty} x(t_n) = a$.

Множество значений функции x на бесконечности будем обозначать через $\mathrm{Im}_\infty(x)$.

Замечание 4.1. Отметим, что $\mathrm{Im}_\infty(x) = [\alpha_\infty(x), \beta_\infty(x)]$ для $x \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Кроме того, $\sigma(\widetilde{x}) = \mathrm{Im}_\infty(x)$, где $\widetilde{x} \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})/C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ - класс, построенный по функции $x \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$, причем это множество замкнуто.

Замечание 4.2. Каждый банахов предел B на алгебре $C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ обладает свойствами:

1. Условия 1) и 2) определения 4.2 эквивалентны условию $\alpha_\infty(x) \le B(x) \le \beta_\infty(x),\ x \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2. Банахов предел $\overline{B}$ на алгебре $C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ определяется по правилу $\overline{B}(\varphi_1 + i\varphi_2) = B(\varphi_1) + iB(\varphi_2)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, где B - банахов предел на $C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ (это следует непосредственно из определения 4.2).
3. Если $B \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})^*$, то условие 3) определения 4.2 эквивалентно условию $B \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})^\perp$ (т.е. функционал B аннулируется на пространстве $C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$).

   Действительно, пусть $B \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})^\perp$, $B(e) = 1$ и $\|B\| = 1$. Тогда $B(x_0) = 0$ для всех $x_0 \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$. Если $x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$, то $B(S(t)x) - B(x) = B(S(t)x - x) = 0,\ t \ge 0$, ввиду свойства $S(t)x - x \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$, справедливого для любого $t \ge 0$.

3. Банаховы пределы на фактор-алгебрах

Далее будем использовать следующие обозначения:

$\mathcal{C}_b(\mathbb{K}) = C_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})/C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$,

$\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K}) = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})/C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$,

$\mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{K}) = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})/C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$.
Символом $\mathcal{C}_*(\mathbb{K})$ будем обозначать одну из этих банаховых алгебр.

В качестве коммутативной C^*−алгебры $\mathcal{U}$ возьмем алгебру $\mathcal{C}_*(\mathbb{K})$. Роль единицы в ней играет элемент $\widetilde{e} \in \mathcal{C}_*(\mathbb{K})$, $\widetilde{e} = e + C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$, где e – единица алгебры $C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$. В качестве представления T на алгебре $\mathcal{C}_*(\mathbb{K})$ возьмем полугруппу операторов $\widetilde{S}$, задаваемую формулой (2.16).

Замечание 4.3. Банаховы пределы на $\mathcal{C}_*(\mathbb{K})$ обладают следующими свойствами:

1. Для любого банахова предела $\widetilde{B}$ на подалгебре $\mathcal{C}_*(\mathbb{K})$ алгебры $\mathcal{C}_b(\mathbb{K})$ существует банахов предел B, определенный на соответствующей подалгебре $C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ алгебры $C_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ такой, что
$$\widetilde{B}(\widetilde{x}) = B(x), \tag{4.1}$$
где $x \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ - произвольный представитель класса $\widetilde{x} \in \mathcal{C}_*(\mathbb{K})$.
2. Для произвольного элемента $\widetilde{x} \in \mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ величины $\alpha_\infty(\widetilde{x})$ и $\beta_\infty(\widetilde{x})$ определим по следующим формулам
$$\alpha_\infty(\widetilde{x}) = \alpha_\infty(x), \quad \beta_\infty(\widetilde{x}) = \beta_\infty(x), \quad \widetilde{x} \in \mathcal{C}_*(\mathbb{R}),$$
где $x \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ - произвольный представитель класса $\widetilde{x}$. В этом случае для банахова предела $\widetilde{B}$ на фактор-алгебре $\mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ справедливо неравенство, аналогичное приведенному в замечании 4.2:
$$\alpha_\infty(\widetilde{x}) \le \widetilde{B}(\widetilde{x}) \le \beta_\infty(\widetilde{x}),\ \widetilde{x} \in \mathcal{C}_*(\mathbb{R}).$$

4. Спектры банаховых алгебр $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K})$ и $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$

Непосредственно из определения спектра элемента банаховой алгебры следует, что элемент $\widetilde{x} \in \mathcal{C}_*(\mathbb{K})$ обратим тогда и только тогда, когда $0 \notin \sigma(\widetilde{x})$. Тогда из замечания 4.1 получаем справедливость следующего утверждения:

Лемма 4.1. *Элемент $\widetilde{x} \in \mathcal{C}_*(\mathbb{K})$ обратим тогда и только тогда, когда $0 \notin \mathrm{Im}_\infty(x)$, где $x \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ – произвольный представитель класса $\widetilde{x}$.*

Отметим, что для $\widetilde{x} \in \mathcal{C}_*(\mathbb{R})$ это означает, что $0 \notin [\alpha_\infty(\widetilde{x}), \beta_\infty(\widetilde{x})]$.

Далее используется следующая теорема (см. [27, теорема 10.9]):

Теорема 4.1. *Если ξ - такой линейный функционал на банаховой алгебре A, что $\xi(e) = 1$ и $\xi(x) \neq 0$ для каждого обратимого элемента $x \in A$, то $\xi(xy) = \xi(x)\xi(y)$, $x, y \in A$, т.е. ξ - мультипликативный функционал (характер банаховой алгебры A).*

Теорема 4.2. *Каждый функционал $\widetilde{B} \in \mathcal{BL}(\mathcal{C}_*(\mathbb{K}))$ является характером этой алгебры.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный банахов предел $\widetilde{B}$ на алгебре $\mathcal{C}_*(\mathbb{K})$. Возьмем произвольный обратимый элемент $\widetilde{x} \in \mathcal{C}_*(\mathbb{K})$. В силу леммы 4.1 получаем, что $0 \notin \mathrm{Im}_\infty(x)$, где $x \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ – произвольный представитель класса $\widetilde{x}$. Непосредственно из определения 4.2 следует, что $\widetilde{B}(\widetilde{x}) \neq 0$ и $\widetilde{B}(\widetilde{e}) = 1$, т.е. выполнены условия теоремы 4.1. Следовательно, функционал $\widetilde{B}$ является характером банаховой алгебры $\mathcal{C}_*(\mathbb{K})$. □

Из данной теоремы и формулы (4.1) вытекает

Следствие 4.1. *Каждый банахов предел на алгебре $C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ является характером этой алгебры.*

Для каждого $\tau \geq 0$ рассмотрим функционал $\xi_\tau \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})^*$, действующий по правилу

$$\xi_\tau(x) = x(\tau),\ \tau \geq 0. \tag{4.2}$$

Далее для каждого $\tau \geq 0$ введем множества

$$A_\tau = \{\xi_t; t \in [\tau; +\infty)\}.$$

Введем обозначение $\mathcal{B}_0 = \bigcap\limits_{\tau \geq 0} \overline{A_\tau}$.

В соответствии с замечанием 4.3 каждому из функционалов $\xi \in \mathcal{B}_0$ поставим в соответствие функционал $\widetilde{\xi} : \mathcal{C}_*(\mathbb{K}) \to \mathbb{C}$, действующий по правилу $\widetilde{\xi}(\widetilde{x}) = \xi(x)$, где x - произвольный представитель класса $\widetilde{x} \in \mathcal{C}_*(\mathbb{K})$. Отметим, что данное определение корректно, поскольку значение функционала ξ не зависит от конкретного представителя рассматриваемого класса $\widetilde{x} \in \mathcal{C}_*(\mathbb{K})$. Совокупность таких функционалов $\widetilde{\xi}$ обозначим символом $\widetilde{\mathcal{B}_0}$.

Лемма 4.2. *Имеет место равенство* $\widetilde{\mathcal{B}_0} = \mathcal{BL}(\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K}))$.

Доказательство. Покажем сначала, что любой функционал из $\widetilde{\mathcal{B}_0}$ является банаховым пределом. Возьмем произвольный функционал $\widetilde{\xi} \in \widetilde{\mathcal{B}_0}$. Наряду с функционалом $\widetilde{\xi}$ рассмотрим функционал $\xi \in \mathcal{B}_0$, такой, что $\widetilde{\xi}(\widetilde{x}) = \xi(x)$, где x - произвольный представитель класса $\widetilde{x} \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K})$.

Возьмем произвольную функцию $x_0 \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$. Поскольку $\xi \in \bigcap\limits_{\tau \geq 0} \overline{A_\tau}$, то $\lim\limits_{\tau \to \infty} \xi_\tau(x_0) = \lim\limits_{\tau \to \infty} x_0(\tau) = 0$, а значит $\xi(x_0) = 0$. В силу произвольности выбора функции $x_0 \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ получаем, что $\xi \in C_0(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})^\perp$, т.е $\xi \in \mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}))$ (см. замечание 4.2) и, следовательно, $\widetilde{\xi} \in \mathcal{BL}(\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K}))$.

Покажем теперь, что других банаховых пределов на алгебре $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K})$ нет. Возьмем произвольный функционал $\widetilde{\xi} \in \mathcal{BL}(\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K}))$. Рассмотрим произвольный элемент $\widetilde{x} \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K})$. Обозначим $\widetilde{\xi}(\widetilde{x}) = a$. Тогда $a \in \mathrm{Im}_\infty(x)$, где $x \in C_*(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ – произвольный представитель класса $\widetilde{x}$. Следовательно, существует последовательность вещественных чисел $\{\tau_n\}$, $\tau_n \geq 0$, $\tau_n \to \infty$ при $n \to \infty$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x(\tau_n) = a$, где x - произвольный представитель класса $\widetilde{x}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{\xi}_{\tau_n}(\widetilde{x}) = a = \widetilde{\xi}(\widetilde{x})$. Из определения множества $\widetilde{\mathcal{B}_0}$ следует, что $\widetilde{\xi} \in \widetilde{\mathcal{B}_0}$. $\square$

Следствие 4.2. *Справедливо равенство* $\mathcal{B}_0 = \mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}))$.

Теорема 4.3. *Спектр алгебры* $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K})$ *совпадает с множеством* $\mathcal{BL}(\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K}))$.

Доказательство. Множество $\mathcal{BL}(\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K}))$ замкнуто (по построению) и состоит из банаховых пределов (которые в силу леммы 4.2 являются характерами), поэтому $\mathcal{BL}(\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K})) \subseteq \mathrm{Sp}\ \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K})$. Покажем, что $\mathcal{BL}(\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K})) = \mathrm{Sp}\, \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K})$.

Предположим противное: пусть существует характер $\widetilde{\xi}_0 \in \mathrm{Sp}\ \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K}) \backslash \mathcal{BL}(\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K}))$. Тогда существует элемент $\widetilde{x}_0 \in \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K})$, $\widetilde{x}_0 \neq \widetilde{0}$, такой, что $\widetilde{\xi}_0(\widetilde{x}_0) \neq 0$ и $\widetilde{\xi}(\widetilde{x}_0) = 0$ для всех $\widetilde{\xi} \in \mathcal{BL}(\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K}))$. Но множество $\mathcal{BL}(\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K}))$ состоит из банаховых пределов на алгебре $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K})$, которые заполняют все множество $\mathrm{Im}_\infty(x_0)$, где x_0 – произвольный представитель класса $\widetilde{x}_0$, откуда следует, что $\widetilde{x}_0 = \widetilde{0}$. А это противоречит тому, что $\widetilde{\xi}_0(\widetilde{x}_0) \neq 0$. $\square$

Теорема 4.4. *Спектр алгебры* $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ *представим в виде*

$\mathcal{B}_0 \bigcup \{\xi_\tau; \tau \geq 0\}$, *где функционалы* ξ_τ, $\tau \geq 0$, *определяются формулой (4.2).*

Доказательство. Введем обозначение $M = \mathcal{B}_0 \bigcup \{\xi_\tau; \tau \geq 0\}$. Из следствия 4.2 и определения множества M вытекает, что M - замкнутое подмножество Sp $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$, обладающее свойством: если $\xi(x) = 0$ для всех $\xi \in M$ и для некоторой функции $x \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$, то $x \equiv 0$. Покажем, что Sp $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K}) = M$.

Предположим противное: пусть существует характер $\xi_0 \in \mathrm{Sp}\ \mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{K}) \backslash M$. Тогда существует функция $x_0 \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$, $x_0 \not\equiv 0$ такая, что $\xi_0(x_0) \neq 0$ и $\xi(x_0) = 0$ для всех $\xi \in M$. Непосредственно из определения множества M получаем противоречие. □

5. Спектры банаховых алгебр $\mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{K})$ и $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$

Напомним, что символом $A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ обозначена подалгебра функций из $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье, символом $A_\omega(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ обозначена подалгебра функций из $C_\omega(\mathbb{R}_+, \mathbb{K})$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье.

Пусть $\xi_0 \in \mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}))$. По нему построим отображение $T_{\xi_0} : A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) \to A_\omega(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, положив для каждого $x \in A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$

$$(T_{\xi_0}(x))(\gamma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_0(x_k)\gamma^k,\ x \in A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}),\ \gamma \in \mathbb{T}. \qquad (4.3)$$

Лемма 4.3. *Отображение* T_{ξ_0}, $\xi_0 \in \mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}))$, *является гомоморфизмом алгебры* $A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ *в алгебру* $A_\omega(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$.

Доказательство. Рассмотрим две произвольные функции

$x, y \in A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}):$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k(t) e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t},\ t \geq 0, \quad x_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}),$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t) e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t},\ t \geq 0, \quad y_k \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}).$$

Покажем, что $T_{\xi_0}(xy) = T_{\xi_0}(x)T_{\xi_0}(y)$. Поскольку функционал ξ_0 является характером алгебры $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, то справедливы равенства

$$T_{\xi_0}(xy) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k+j=n} \xi_0(x_k y_j)\gamma^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k+j=n} \xi_0(x_k)\xi_0(y_j)\gamma^n.$$

С другой стороны,

$$T_{\xi_0}(x)T_{\xi_0}(y) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_0(x_k)\gamma^k\right)\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} \xi_0(y_j)\gamma^j\right) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k+j=n} \xi_0(x_k)\xi_0(y_j)\right)\gamma^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k+j=n} \xi_0(x_k)\xi_0(y_j)\gamma^n = T_{\xi_0}(xy).$$

Таким образом, мы показали, что T_{ξ_0} – гомоморфизм алгебры $A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ в алгебру $A_\omega(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$. □

Лемма 4.4. *Гомоморфизм T_{ξ_0}, определяемый формулой (4.3), обладает следующими свойствами:*

1. $T_{\xi_0}(e) = e$;
2. *для любой вещественной функции $x \in A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ для всех $\gamma \in \mathbb{T}$ выполнено условие $(T_{\xi_0}(x))(\gamma) \in \mathbb{R}$;*
3. $|(T_{\xi_0}(x))(\gamma)| \leq \|x\|_\infty$, $\gamma \in \mathbb{T}$, *для любой функции* $x \in A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$.

Доказательство. Свойство (1) вытекает из [14, лемма 2.3.26]. Свойство (2) следует из вида гомоморфизма T_{ξ_0}, и его можно проверить непосредственно. Свойство (3) вытекает из определения 2.3.9 и предложения 2.3.27 в [14]. □

Зафиксируем $\gamma_0 \in \mathbb{T}$ и рассмотрим характер $T_{\xi_0,\gamma_0} : A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, действующий по правилу

$$T_{\xi_0,\gamma_0}(x) = (T_{\xi_0}(x))(\gamma_0),\ x \in A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}). \tag{4.4}$$

Отметим, что подалгебра $A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ плотна в $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$, а $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ - есть C^*-алгебра и для гомоморфизма T_{ξ_0} выполняется свойство (3) леммы 4.4 (а значит, для характера T_{ξ_0,γ_0} выполняется свойство $|T_{\xi_0,\gamma_0}(x)| \le \|x\|_\infty$, $\gamma_0 \in \mathbb{T}$). Поэтому характеры T_{ξ_0,γ_0} допускают расширение на все пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$. Это расширение мы также будем обозначать через $T_{\xi_0,\gamma_0} : C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$.

Наряду с характерами $T_{\xi_0,\gamma_0} : C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ рассмотрим характеры $\widetilde{T}_{\xi_0,\gamma_0} : \mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, определяемые равенством $\widetilde{T}_{\xi_0,\gamma_0}(\widetilde{x}) = T_{\xi_0,\gamma_0}(x)$, $\gamma_0 \in \mathbb{T}$, где x - произвольный представитель класса $\widetilde{x} \in \mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{C})$.

Справедлива следующая

Теорема 4.5. *Спектр алгебры $\mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{C})$ совпадает с множеством функционалов*

$$\{\widetilde{T}_{\xi_0,\gamma_0}; \gamma_0 \in \mathbb{T}, \xi_0 \in \mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}))\}.$$

Доказательство. Возьмем произвольный характер $\widetilde{\xi} \in \operatorname{Sp} \mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{C})$. Символом $\widetilde{\xi}_0$ обозначим его сужение на $\mathcal{C}_{sl,\infty}(\mathbb{C})$. Поскольку $\widetilde{\xi}(\widetilde{x}) = \xi(x)$ для любого представителя x класса $\widetilde{x} \in \mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{C})$, то вместо характеров $\widetilde{\xi}$ и $\widetilde{\xi}_0$ можно рассматривать характеры ξ и ξ_0 на пространствах $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$, $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ соответственно. Рассмотрим функции $e_k \in C_\omega(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$ вида $e_k(t) = e^{i\frac{2\pi k}{\omega}t}$, $t \ge 0$, $k \in \mathbb{Z}$, и отметим, что $\widetilde{\xi}(\widetilde{e_k}) = \xi(e_k) = \gamma_0^k$, $k \in \mathbb{Z}$, для некоторого $\gamma_0 \in \mathbb{T}$. Тогда для любого $\widetilde{x} \in \mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{C})$ справедлива цепочка равенств

$$\widetilde{\xi}(\widetilde{x}) = \xi(x) = \xi\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e_k\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_0(x_k)\gamma_0^k = T_{\xi_0,\gamma_0}(x) = \widetilde{T}_{\xi_0,\gamma_0}(\widetilde{x}),$$

где x - произвольный представитель класса $\widetilde{x}$. $\square$

Рассмотрим множество функционалов вида

$$M = \{T_{\xi_0,\gamma_0}; \gamma_0 \in \mathbb{T}, \xi_0 \in \mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}))\} \bigcup \{\xi_\tau; \tau \geq 0\},$$

где функционалы $\xi_\tau,\ \tau \geq 0$, определяются формулой (4.2), а функционалы T_{ξ_0,γ_0} – формулой (4.4).

Теорема 4.6. *Спектр алгебры* $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ *совпадает с множеством* M.

Доказательство. Из формулы (4.3) и леммы 4.3 вытекает, что M - замкнутое подмножество Sp $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, обладающее свойством: если для некоторой функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ равенство $\eta(x) = 0$ выполяется сразу для всех $\eta \in M$, то $x \equiv 0$. Покажем, что Sp $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) = M$.

Предположим противное: пусть существует характер $\eta_0 \in$ Sp $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})\backslash M$. Тогда существует функция $x_0 \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, $x_0 \not\equiv 0$ такая, что $\eta_0(x_0) \neq 0$ и $\eta(x_0) = 0$ для всех $\eta \in M$. Непосредственно из определения множества M получаем противоречие. $\square$

Поскольку $T_{\xi_0,\gamma_0}(x) \in \mathbb{R}$ для любой функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ (и, соответственно, $\widetilde{T}_{\xi_0,\gamma_0}(\widetilde{x}) \in \mathbb{R}$ для любого класса $\widetilde{x} \in \mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{R})$), то их сужения $P_{\xi_0,\gamma_0}(x)$ и $\widetilde{P}_{\xi_0,\gamma_0}(\widetilde{x})$ на алгебры $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ и $\mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{R})$ соответственно также являются банаховыми пределами и характерами этих алгебр. Аналогично, поскольку $\xi_\tau(x) \in \mathbb{R},\ \tau \geq 0$, для любой функции $x \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, то его сужение $\xi_{\tau,0},\ \tau \geq 0$, на алгебру $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ также является характером этой алгебры. Отсюда получаем описание спектров соответствующих алгебр.

Теорема 4.7. *Спектр алгебры $\mathcal{C}_{\omega,\infty}(\mathbb{R})$ совпадает с множеством функционалов*

$$\{\widetilde{P}_{\xi_0,\gamma_0}; \gamma_0 \in \mathbb{T}, \xi_0 \in \mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}))\}.$$

Теорема 4.8. *Спектр алгебры $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ совпадает с множеством функционалов*

$$\{P_{\xi_0,\gamma_0}; \gamma_0 \in \mathbb{T},\ \xi_0 \in \mathcal{BL}(C_{sl,\infty}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}))\} \bigcup \{\xi_{\tau,0}; \tau \geq 0\}.$$

Глава 5

Вопросы теории рядов Фурье периодических на бесконечности функций на $\mathbb{R}^N$

1. Основные обозначения и определения

Пусть X – комплексное банахово пространство, $End X$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов (эндоморфизмов), действующих в X.

Рассмотрим N-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, элементы которого будем обозначать $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$, и положим $|x| = \max\limits_{i=\overline{1,N}} |x_i|$.

Множество $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$ всех векторов с целочисленными координатами будем называть *целочисленной решеткой* в $\mathbb{R}^N$, элементы $\mathbb{Z}^N$ будем обозначать через $n = (n_1, n_2, ..., n_N)$ и положим $|n| = \max\limits_{i=\overline{1,N}} |n_i|$.

Символом $C_b = C_b(\mathbb{R}^N, X)$ обозначим банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^N$ функций с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^N} \|f(x)\|_X$, $C_{b,u} = C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ – замкнутое подпространство равномерно непрерывных функций из C_b, $C_0 = C_0(\mathbb{R}^N, X)$ – замкнутое подпространство убывающих на бесконечности функций, т.е. таких, что $\lim\limits_{|x|\to\infty} \|f(x)\|_X = 0$.

В банаховом пространстве $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ рассмотрим группу $S : \mathbb{R}^N \to End\, C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ операторов, действующих по правилу

$$(S(h)f)(x) = f(x+h) = f(x_1+h_1, ..., x_N+h_N), \quad x, h \in \mathbb{R}^N. \quad (5.1)$$

Наряду с группой сдвигов S рассмотрим группы сдвигов

$S_i : \mathbb{R} \to End\, C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$, $i = \overline{1, N}$, определенные формулой

$$(S_i(h)f)(x) = f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, ..., x_N),\ x \in \mathbb{R}^N,\ h \in \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Определение 5.1. Функция $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если

$$(S(h)f - f) \in C_0(\mathbb{R}^N, X) \text{ для любого } h \in \mathbb{R}^N.$$

Примером таких функций являются:

1) $f_1(x) = \prod\limits_{i=1}^{N} \sin \ln(1 + x_i^2),\ x \in \mathbb{R}^N$;

2) $f_2 : \mathbb{R}^N \to X,\ \ f_2(x) = c + f_0(x), x \in \mathbb{R}^N$, где c – вектор из банахова пространства X и f_0 – любая функция из $C_0(\mathbb{R}^N, X)$.

Пусть $\omega = (\omega_1, ..., \omega_N) \in \mathbb{R}^N_+$. Тогда символом Ω^N обозначим N-мерный параллелепипед

$$\Omega^N = \{x \in \mathbb{R}^N : -\omega_i/2 < x_i \leq \omega_i/2,\ i = 1, 2, ..., N\}.$$

Символом $\omega\mathbb{Z}^N$ обозначим подгруппу $\mathbb{R}^N$, состоящую из элементов вида $(n_1\omega_1, ..., n_N\omega_N)$, где $\omega \in \mathbb{R}^N_+$, $n \in \mathbb{Z}^N$.

Определение 5.2. Функцию $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ будем называть *периодической* периода $\omega = (\omega_1, ..., \omega_N) \in \mathbb{R}^N_+$ (или ω-периодической), если для любого $\alpha \in \omega\mathbb{Z}^N$ выполнено условие

$$S(\alpha)f = f.$$

Отметим, что это эквивалентно периодичности функции по каждому аргументу, независимо от остальных, т.е. $S_i(\omega_i)f = f$ для всех $i = \overline{1, N}$.

Определение 5.3. Функция $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ называется *периодической на бесконечности периода* $\omega = (\omega_1, ..., \omega_N) \in \mathbb{R}^N_+$

($\omega-$периодической на бесконечности), если для любого $\alpha \in \omega\mathbb{Z}^N$ выполнено условие

$$(S(\alpha)f - f) \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$$

(или, что эквивалентно, $\lim\limits_{|x|\to\infty} \|f(x+\alpha) - f(x)\|_X = 0.$)

Таким образом, каждая $\omega-$периодическая на бесконечности функция f является решением разностного уравнения вида $f(x+\omega) - f(x) = y(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$, где $y \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$, а каждая медленно меняющаяся на бесконечности функция является периодической на бесконечности любого периода.

Множество медленно меняющихся на бесконечности функций обозначим символом $C_{sl,\infty} = C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$, а множество $\omega-$периодических на бесконечности функций – символом $C_{\omega,\infty} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$. Оба множества образуют линейные замкнутые подпространства из банахова пространства $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$. Банахово пространство $C_\omega = C_\omega(\mathbb{R}^N, X)$ непрерывных $\omega-$периодических функций, определенных на $\mathbb{R}^N$ со значениями в X, образует замкнутое подпространство в $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$. Таким образом, имеют место включения $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N, X) \subset C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X) \subset C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$, при этом все они инвариантны относительно операторов $S(h),\ h \in \mathbb{R}^N$.

Если $X = \mathbb{C}$, то в обозначениях рассматриваемых функциональных пространств опускается символ X, например, $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N)$ обозначает пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.

Если X – банахова алгебра, то все введенные в рассмотрение функциональные пространства являются банаховыми алгебрами (с операцией поточечного умножения $(fg)(x) = f(x)g(x),\ x \in \mathbb{R}^N$, для функций f, g из рассматриваемого пространства). Каждая из таких алгебр коммутативна, если коммутативна алгебра X, и является C^*-алгеброй, если X – C^*-алгебра. В частности, коммутативными C^*-алгебрами являются алгебры $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N)$ и $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N)$.

Далее введем определение ряда Фурье периодической на бесконечности функции. Для этого введем в рассмотрение функции $e_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ следующего вида $e_n(x) = e^{i2\pi(\frac{n_1}{\omega_1}x_1+\ldots+\frac{n_N}{\omega_N}x_N)},\ n \in \mathbb{Z}^N,\ x \in \mathbb{R}^N$.

Определение 5.4. *Каноническим рядом Фурье* функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ будем называть ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^N} f_n(x)e_n(x),\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.3}$$

где функции $f_n : \mathbb{R}^N \to X,\ n \in \mathbb{Z}^N$, определяются формулами

$$f_n(x) = \frac{1}{\omega_1\ldots\omega_N}\int\limits_{\Omega^N} f(x+\tau)e_{-n}(x+\tau)d\tau,\ x \in \mathbb{R}^N,\ n \in \mathbb{Z}^N, \tag{5.4}$$

и называются *каноническими коэффициентами Фурье* функции f.

Ясно, что если $f \in C_\omega(\mathbb{R}^N, X)$, то $f_n(x) \equiv f_n = \frac{1}{\omega_1\ldots\omega_N}\int\limits_{\Omega^N} f(x)e_{-n}(x)dx,\ x \in \mathbb{R}^N,\ n \in \mathbb{Z}^N$, – обычные коэффициенты Фурье функции f.

Определение 5.5. *Обобщенным рядом Фурье* функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ называется любой ряд вида

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^N} y_n(x)e_n(x),\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.5}$$

где $y_n,\ n \in \mathbb{Z}^N$, – такие функции из $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$, для которых $y_n - f_n \in C_0(\mathbb{R}^N, X),\ n \in \mathbb{Z}^N$, а функции $f_n,\ n \in \mathbb{Z}^N$, определяются формулой (5.4).

Лемма 5.1. *Канонические коэффициенты Фурье $f_n,\ n \in \mathbb{Z}^N$, (определенные формулой (5.4)) являются медленно меняющимися на бесконечности функциями, т.е. $f_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N, X),\ n \in \mathbb{Z}^N$.*

Доказательство. Возьмем произвольный вектор $\alpha \in \omega\mathbb{Z}^N$. Утверждение леммы напрямую следует из равенств $f_n(x+\alpha) - f_n(x) = \frac{1}{\omega_1 \ldots \omega_N} \int\limits_{\Omega^N} (S(\alpha)f - f)(x+\tau)e_{-n}(x+\tau)d\tau,\ x \in \mathbb{R}^N,\ n \in \mathbb{Z}^N$. $\square$

Непосредственно из определения 5.5 и леммы 5.1 следует, что коэффициенты любого обобщенного ряда Фурье обладают свойством: $y_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N, X),\ n \in \mathbb{Z}^N$.

Теорема 5.1. *(теорема аппроксимации) Для любой функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ существует последовательность функций (f_n^0) из $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \|f(x) - \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}^N} \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{|k_i|}{n+1}\right) f_k(x)e_k(x) - f_n^0(x)\|_X = 0,$$

где $f_k,\ k \in \mathbb{Z}^N$, – канонические коэффициенты Фурье функции f.

Уточнением теоремы 5.1 является следующая

Теорема 5.2. *(теорема аппроксимации) Для любой функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует последовательность функций (f_n^0) из $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ и последовательность функций (y_n) из $C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ такие, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \|f(x) - \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}^N} \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{|k_i|}{n+1}\right) y_k(x)e_k(x) - f_n^0(x)\|_X = 0.$$

При этом каждая из функций y_k ($k \in \mathbb{Z}^N$) эквивалентна функции f_k, определяемой формулой (5.4), и допускает продолжение на всю комплексную плоскость до целой функции экспоненциального типа не выше ε.

Определение 5.6. Будем говорить, что обобщенный ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n(x)e_n(x),\ x \in \mathbb{R}^N,$$

периодической на бесконечности функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ *сходится к* f *относительно подпространства* $C_0(\mathbb{R}^N, X)$, если существует последовательность функций (f_n^0) из $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \|f(x) - \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}^N} y_k(x)e_k(x) + f_n^0(x)\|_X = 0.$$

Важно отметить, что данное определение корректно, т.е. сходимость не зависит от выбора обобщенного ряда Фурье функции f. Это объясняется тем, что $y_n - f_n \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$, где f_n, $n \in \mathbb{Z}^N$, – канонические коэффициенты Фурье функции f, определяемые по формуле (5.4).

Определение 5.7. *Модулем непрерывности на бесконечности* функции $f \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ называется функция $\omega_\infty(\cdot, f) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, определенная формулой

$$\omega_\infty(\delta, f) = \lim_{\mu\to\infty} \sup_{|t|\le\delta, |\tau|\ge\mu} \|f(t+\tau) - f(\tau)\|_X, \ \delta \in \mathbb{R}_+.$$

Справедлива следующая

Теорема 5.3. *Любой обобщенный ряд Фурье функции* $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ *сходится к* f *относительно подпространства* $C_0(\mathbb{R}^N, X)$, *если* $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_\infty(\frac{1}{n}, f) \ln^N n = 0$.

Определение 5.8. Будем говорить, что функция $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ имеет *абсолютно сходящийся ряд Фурье,* если существует обобщенный ряд Фурье (5.5) этой функции такой, что $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^N} \|y_n\|_\infty < \infty$.

Отметим также, что если функция f имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то ее канонический ряд Фурье сходится к f относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}^N, X)$. Однако канонический ряд Фурье функции f может не быть абсолютно сходящимся, хотя функция имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье в смысле определения 5.8.

Если X – банахова алгебра, то функции из $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$, имеющие абсолютно сходящийся ряд Фурье, образуют замкнутую подалгебру в $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$, обозначаемую символом $A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ (символом $A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N)$, если $X = \mathbb{C}$).

Одним из основных результатов диссертации является теорема 5.4, в которой теорема 2.5 (теорема Винера) распространяется на функции из $A_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$.

Пусть X – банахова алгебра с единицей e.

Определение 5.9. Функцию $f \in C_b(\mathbb{R}^N, X)$ назовем *обратимой относительно подпространства* $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ (или *обратимой на бесконечности*), если существует функция $g \in C_b(\mathbb{R}^N, X)$ такая, что $fg - e, gf - e \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$, где $e(x) \equiv e,\ x \in \mathbb{R}^N$. Функцию g будем называть *обратной к f относительно подпространства* $C_0(\mathbb{R}^N, X)$.

Отметим, что если g_1, g_2 – обратные к $f \in C_b(\mathbb{R}^N, X)$ относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ функции, то $g_1 - g_2 \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$.

Теорема 5.4. *Пусть X – банахова алгебра с единицей. Если функция $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ обратима относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ и имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье, то любая обратная к ней относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}^N, X)$ функция имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье.*

Для каждого $i \in \{1, ..., N\}$ рассмотрим последовательность операторов $(A_n^{(i)})$ из $End\ C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ следующего вида

$$A_n^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_i(k\omega_i),\ n \geq 1,$$

где операторы $S_i,\ i = \overline{1, N}$ определяются формулой (5.2). Отметим, что $\|A_n^{(i)}\| = 1,\ n \geq 1,\ i = \overline{1, N}$.

Далее, рассмотрим последовательность операторов (A_n) из $End\ C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ вида $A_n = A_n^{(1)} \cdot ... \cdot A_n^{(N)},\ n \geq 1$. Отметим, что $\|A_n\| = 1,\ n \geq 1$.

Получен следующий критерий представимости периодической на бесконечности функции в виде суммы периодической и убывающей на бесконечности функций:

Теорема 5.5. *Для того, чтобы функция* $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ *была представима в виде* $f = f_1 + f_0$, *где* $f_1 \in C_\omega(\mathbb{R}^N, X)$, $f_0 \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$, *необходимо и достаточно, чтобы в* $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ *существовал* $\lim\limits_{n\to\infty} A_n f$.

2. О гармоническом анализе периодических векторов и операторов

Пусть $\mathcal{X}$ – комплексное банахово пространство и $T : \mathbb{R}^N \to End\, \mathcal{X}$ – сильно непрерывное изометрическое представление.

Пусть $L^1(\mathbb{R}^N)$ – банахова алгебра определенных на $\mathbb{R}^N$ измеримых по Лебегу и суммируемых комплекснозначных функций со сверткой функций в качестве умножения

$$(f * g)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(t-\tau)g(\tau)d\tau,\ t \in \mathbb{R}^N,\ f, g \in L^1(\mathbb{R}^N).$$

Банахово пространство $\mathcal{X}$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R}^N)-$модуля с помощью формулы

$$fx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(s)T(-s)xds,\ x \in \mathcal{X},\ f \in L^1(\mathbb{R}^N). \tag{5.6}$$

Используемые далее понятия из спектральной теории модулей можно найти в работах [1, 2, 10, 13, 26].

Преобразование Фурье $\widehat{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ функции $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ задается формулой

$$\widehat{f}(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-i(\lambda,x)}dx,\ \lambda \in \mathbb{R}^N. \tag{5.7}$$

Определение 5.10. *Спектром Бёрлинга* вектора $x \in \mathcal{X}$ называется множество чисел $\Lambda(x)$ из $\mathbb{R}^N$ вида
$\Lambda(x) = \{\lambda_0 \in \mathbb{R}^N : fx \neq 0$ для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$,
для которой $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0\}$.

Из определения следует, что $\Lambda(x) = \mathbb{R}^N \backslash \{\mu_0 \in \mathbb{R}^N :$ существует функция $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ такая, что $\widehat{f}(\mu_0) \neq 0$ и $fx = 0\}$.

В [21] была установлена связь между структурными свойствами векторов из банаховых пространств и последовательностью их приближений.

Банахово пространство $C_b(\mathbb{R}^N, X)$ наделяется структурой банахова $L^1(\mathbb{R}^N)-$ модуля (см. [1], [13]) с помощью операции свертки

$$(f * x)(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\tau)\,(S(-\tau)x)\,(t)d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\tau)x(t-\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(t-\tau)x(\tau)d\tau,\ t \in \mathbb{R}^N, \tag{5.8}$$

где $f \in L^1(\mathbb{R}^N),\ x \in C_b(\mathbb{R}^N, X)$.

Отметим, что $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ является замкнутым подмодулем $C_b(\mathbb{R}^N, X)$, а структура банахова $L^1(\mathbb{R}^N)-$модуля на нем задается формулой (5.6), где $\mathcal{X} = C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ и $T(t) = S(t),\ t \in \mathbb{R}^N$.

Определение 5.11. Число $\lambda_0 \in \Lambda(x)$ отнесем к *несущественному спектру* $\Lambda_0(x)$ функции $x \in C_b(\mathbb{R}^N, X)$, если существует функция $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ такая, что $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ и $f*x \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$. Множество $\Lambda_{ess}(x) = \Lambda(x)\backslash\Lambda_0(x)$ назовем *существенным спектром* функции x.

Определение 5.12. Вектор $x_0 \in \mathcal{X}$ назовем *периодическим вектором* периода $\omega \in \mathbb{R}^N_+$ (относительно представления T), если для любого $\alpha \in \omega\mathbb{Z}^N$ справедливо равенство $T(\alpha)x_0 = x_0$.

Множество периодических (периода ω) векторов обозначим через $\mathcal{X}_\omega = \mathcal{X}_\omega(T)$. Оно образует замкнутое подпространство в $\mathcal{X}$, инвариантное относительно операторов $T(t),\ t \in \mathbb{R}^N$.

Теорема 5.6. *Для того, чтобы вектор $x_0 \in \mathcal{X}$ был периодическим периода $\omega \in \mathbb{R}_+^N$ (т.е. $x_0 \in \mathcal{X}_\omega$), необходимо и достаточно, чтобы имело место включение*

$$\Lambda(x_0) \subset \left(\frac{2\pi}{\omega_1}n_1, ..., \frac{2\pi}{\omega_N}n_N\right),\ n \in \mathbb{Z}^N. \tag{5.9}$$

Доказательство. Необходимость. Если $x_0 \in \mathcal{X}_\omega$, то по определению $T(\alpha)x_0 - x_0 = 0$ для любого $\alpha \in \omega\mathbb{Z}^N$. Тогда для любой функции $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ из формулы (5.6) получаем, что для любого $\alpha \in \omega\mathbb{Z}^N$

$$f(T(\alpha)x_0 - x_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\tau)T(-\tau)(T(\alpha)x_0 - x_0)d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\tau)T(-\tau+\alpha)x_0 d\tau - fx_0 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(T(\alpha)f\right)(u)T(-u)x_0 du - fx_0 = (T(\alpha)f - f)x_0 = 0.$$

Если $\lambda_0 \notin \left(\frac{2\pi}{\omega_1}n_1, ..., \frac{2\pi}{\omega_N}n_N\right)$, $n \in \mathbb{Z}^N$, то рассмотрим функцию $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ такую, что $\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$. Тогда $\widehat{g}(\lambda_0) = (e^{i(\lambda_0,\omega)} - 1)\widehat{f}(\lambda_0) \neq 0$ для $g = S(\alpha)f - f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\alpha \in \omega\mathbb{Z}^N$. Отсюда получаем, что найдена функция $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ такая, что $gx = (S(\alpha)f - f)x = 0$ и $\widehat{g}(\lambda_0) \neq 0$. Из определения 5.10 следует, что $\lambda_0 \notin \Lambda(x_0)$. Таким образом, доказано включение (5.9).

Достаточность. Пусть теперь для $\Lambda(x_0)$ выполнено (5.9). Возьмем произвольный вектор $\alpha \in \omega\mathbb{Z}^N$ и рассмотрим вектор $y_0 = T(\alpha)x_0 - x_0$. Если функция $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ такова, что $\mathrm{supp}\widehat{f}$ – компакт, то из свойства 3 леммы 1.1 следует, что $\Lambda(fy_0) \subset \mathrm{s}upp\widehat{f} \cap \Lambda(y_0) \subset \mathrm{s}upp\widehat{f} \cap \Lambda(x_0) \subset \mathrm{s}upp\widehat{f} \cap \left(\frac{2\pi}{\omega_1}n_1, ..., \frac{2\pi}{\omega_N}n_N\right)$, $n \in \mathbb{Z}^N$.

Из доказательства теоремы 1 в [1] и теоремы 3.2.7 в [10] следует, что вектор fx_0 представим в виде

$$fx_0 = x_1 + ... + x_N,$$

где $\Lambda(x_j) = \left\{\frac{2\pi}{\omega_j}k_j\right\}$, $T(t)x_j = e_k(t)x_j = e^{i2\pi(\frac{k_1}{\omega_1}t_1+...+\frac{k_N}{\omega_N}t_N)}x_j$, $k \in \mathbb{Z}^N$, $t \in \mathbb{R}^N$, $1 \le j \le N$.

Тогда $fy_0 = f(T(\alpha)x_0 - x_0) = (T(\alpha) - I)fx_0 = 0$.

Отметим, что поскольку множество функций из $L^1(\mathbb{R}^N)$, имеющих преобразование Фурье с компактным носителем, плотно в $\mathcal{X}$, и $L^1(\mathbb{R}^N)-$модуль $\mathcal{X}$ невырожден (см. свойство 1 в лемме 1.1), то $T(\omega)x_0 - x_0 = 0$. Следовательно, $x_0 \in \mathcal{X}_\omega$. $\square$

Из равенств $T(t+\omega)x - T(t)x = T(t)(T(\omega)x - x) = 0$, $t \in \mathbb{R}^N$, справедливых для любого $x \in \mathcal{X}_\omega$, следует, что функция $\varphi_x : \mathbb{R}^N \to \mathcal{X}$, $\varphi_x(t) = T(t)x$, является непрерывной периодической функцией. Рассмотрим ее ряд Фурье

$$\varphi_x(t) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} x_n e_n(t),\ t \in \mathbb{R}^N,$$

где

$$x_n = \frac{1}{\omega_1...\omega_N}\int\limits_{\Omega^N} T(\tau)xe_{-n}(\tau)d\tau,\ n \in \mathbb{Z}^N. \tag{5.10}$$

Определение 5.13. Ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^N} x_n \tag{5.11}$$

назовем *рядом Фурье* вектора $x \in \mathcal{X}_\omega$, а векторы x_n, $n \in \mathbb{Z}^N$, – *коэффициентами Фурье* вектора x.

Если ряд Фурье вектора $x \in \mathcal{X}$ абсолютно сходится, т.е. выполнено условие $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^N} \|x_n\| < \infty$, то справедливо равенство $x = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^N} x_n$.

Лемма 5.2. *Для любой функции* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *и* $x \in \mathcal{X}_\omega$ *вектор* $fx \in \mathcal{X}_\omega$ *и имеет ряд Фурье вида* $fx \sim \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^N} \widehat{f}\left(\frac{2\pi k_1}{\omega_1}, ..., \frac{2\pi k_N}{\omega_N}\right)x_k$.

Доказательство. Непосредственно из формулы (5.6) следует, что $fx \in \mathcal{X}_\omega$. Далее вектор fx обозначим через y. Для коэффициентов Фурье периодического вектора y из формулы (5.10) имеем

$y_k = \frac{1}{\omega_1 ... \omega_N} \int\limits_{\Omega^N} T(\tau)(fx)e_{-k}(\tau)d\tau$. Используя формулы (5.6) и (5.7) и меняя порядок интегрирования, получаем следующую цепочку равенств:

$$y_k = \frac{1}{\omega_1 ... \omega_N} \int\limits_{\Omega^N} T(\tau) \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(s)T(-s)xds \right) e_{-k}(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\omega_1 ... \omega_N} \int\limits_{\Omega^N} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(s)T(\tau - s)xds \right) e_{-k}(\tau)d\tau =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(s) \left(\frac{1}{\omega_1 ... \omega_N} \int\limits_{\Omega^N} T(\tau - s)xe_{-k}(\tau)d\tau \right) ds =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(s) \left(\frac{e_{-k}(s)}{\omega_1 ... \omega_N} \int\limits_{\Omega^N} T(t)xe_{-k}(t)dt \right) ds = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(s)x_k e_{-k}(s)ds =$$

$$= \widehat{f} \left(\frac{2\pi k_1}{\omega_1}, ..., \frac{2\pi k_N}{\omega_N} \right) x_k.$$

□

Отметим работы [1] и [2], в которых многие классические результаты теории рядов Фурье для периодических функций обобщались на векторы из банаховых пространств, в которых действует однопараметрическая группа операторов.

Подпространство $\mathcal{X}_\omega$ периодических векторов и утверждения следующей леммы фактически рассматривались в [46, теорема 16.7.2]. Из указанных источников следует

Лемма 5.3. *Пусть $x \in \mathcal{X}_\omega$. Тогда операторы*

$$P_n x = \frac{1}{\omega_1 ... \omega_N} \int\limits_{\Omega^N} T(\tau)xe_{-n}(\tau)d\tau, \ n \in \mathbb{Z}^N,$$

являются проекторами, $x_n = P_n x$, $n \in \mathbb{Z}^N$, – коэффициенты Фурье вектора x, $T(t)P_n = e_n(t)P_n$, $t \in \mathbb{R}^N$, $n \in \mathbb{Z}^N$, и $\|P_n\| = 1$, если $P_n \neq 0$.

Лемма 5.4. *Для любого $x \in \mathcal{X}_\omega$ справедливо соотношение*

$$\lim_{|n|\to\infty} \|x_n\| = 0,$$

где $x_n,\ n \in \mathbb{Z}^N$, – коэффициенты Фурье вектора x.

Доказательство. Возьмем произвольный вектор x из множества $D = D(A_1^2...A_N^2)$, где $A_i,\ \ i = \overline{1,N}$, - генератор ("infinitesimal generator"в [54]) полугруппы операторов $T_i : \mathbb{R} \to End\ \mathcal{X},\ i = \overline{1,N}$. Тогда для коэффициентов Фурье $x_n,\ n \in \mathbb{Z}^N$, вектора x, для которых $n_1...n_N \neq 0$, имеют место следующие оценки:

$$\|x_n\| = \|\frac{1}{\omega_1...\omega_N}\int\limits_{\Omega_N} T(\tau)xe_{-n}(\tau)d\tau\| =$$

$$= \|\frac{1}{\omega_1...\omega_N}\int\limits_0^{\omega_1}...\int\limits_0^{\omega_N} T_1(\tau_1)...T_N(\tau_N)xe^{-i\frac{2\pi n_1}{\omega_1}\tau_1}...e^{-i\frac{2\pi n_N}{\omega_N}\tau_N}d\tau_1...d\tau_N\| =$$

$$= \|\frac{1}{\omega_1...\omega_N}\int\limits_0^{\omega_1}...\int\limits_0^{\omega_N} T_1(\tau_1)...T_N(\tau_N)A_N^2x\frac{\omega_N^2}{4\pi^2n_N^2}e^{-i\frac{2\pi n_1}{\omega_1}\tau_1}...e^{-i\frac{2\pi n_N}{\omega_N}\tau_N}d\tau_1...d\tau_N\| =$$

$$= \|\frac{\omega_1...\omega_N}{4^N\pi^{2N}n_1^2...n_N^2}\int\limits_0^{\omega_1}...\int\limits_0^{\omega_N} T_1(\tau_1)...T_N(\tau_N)A_1^2...A_N^2xe^{-i\frac{2\pi n_1}{\omega_1}\tau_1}...e^{-i\frac{2\pi n_N}{\omega_N}\tau_N}d\tau_1...d\tau_N\| \leq$$

$$\leq \frac{\omega_1...\omega_N}{(4\pi^2)^N}\frac{\|A_1^2...A_N^2x\|}{n_1^2...n_N^2},$$

т.е. $\lim\limits_{|n|\to\infty}\|x_n\| = 0$. Поскольку D плотно в $\mathcal{X}_\omega$, то свойство $\lim\limits_{|n|\to\infty}\|x_n\| = 0$ верно для любого $x \in \mathcal{X}_\omega$. □

Определение 5.14. Функция $\omega(\cdot,x)\ :\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\omega(\delta,x) = \sup\limits_{|t|\leq\delta}\|T(t)x - x\|$, $x \in \mathcal{X}$, называется *модулем непрерывности* вектора x.

Теорема 5.7. *Для любого $x \in \mathcal{X}_\omega$ с рядом Фурье вида (5.11) справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}^N} \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{|k_i|}{n+1}\right) x_k\| = 0.$$

Доказательство. Возьмем произвольный периодический вектор $x \in \mathcal{X}_\omega$. Рассмотрим функции $f_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$ следующего вида:

$$f_n(h) = \prod_{i=1}^{N} f_n^{(i)}(h_i),\ h \in \mathbb{R}^N,\ n \in \mathbb{N},$$

где

$$f_n^{(i)}(t) = \frac{\omega_i}{4\pi^4 t^2 (n+1)} \sin^2 \frac{(n+1)\pi t}{\omega_i},\ t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ i = \overline{1, N}.$$

Отметим, что преобразование Фурье данных функций имеет вид

$$\widehat{f}_n^{(i)}(\lambda) = \begin{cases} 1 - \frac{\omega_i |\lambda|}{2\pi(n+1)} &, \ |\lambda| \le \frac{2\pi(n+1)}{\omega_i}, \\ 0 &, \ |\lambda| > \frac{2\pi(n+1)}{\omega_i}, \quad \lambda \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ i = \overline{1, N}. \end{cases}$$

Тогда

$$\widehat{f}_n^{(i)}\left(\frac{2\pi k_i}{\omega_i}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{|k_i|}{n+1} &, \ |k_i| \le n+1, \\ 0 &, \ |k_i| > n+1, \quad k_i \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ i = \overline{1, N}. \end{cases}$$

Из леммы 5.2 следует, что свертка функции f_n с вектором x определяется равенством

$$f_n x = \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}^N} \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{|k_i|}{n+1}\right) x_k,\ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда имеет место оценка

$$\|x - \sum_{|k|\le n, k\in\mathbb{Z}^N} \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \frac{|k_i|}{n+1}\right) x_k\| = \|x - f_n x\| =$$

$$= \| \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_n(\tau) x d\tau - \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_n(\tau) T(-\tau) x d\tau \| = \| \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_n(\tau) \left(x - T(-\tau) x \right) d\tau \| \leq$$

$$\leq \| \int\limits_{\Delta_n} f_n(\tau) \omega(\delta_n, x) d\tau \| + 2\|x\| \| \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus \Delta_n} f_n(\tau) d\tau \| \leq$$

$$\leq \omega(\delta_n, x) \int\limits_{\Delta_n} f_n(\tau) d\tau + 2\|x\| \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus \Delta_n} f_n(\tau) d\tau \leq$$

$$\leq \omega(\delta_n, x) \int\limits_{\mathbb{R}^N} f_n(\tau) d\tau + \frac{2\|x\|}{(4\pi^4(n+1))^N} \int\limits_{\mathbb{R}^N \setminus \Delta_n} \prod_{i=1}^{N} \frac{\omega_i}{\tau_i^2} \sin^2 \frac{(n+1)\pi\tau_i}{\omega_i} d\tau \leq$$

$$\leq \omega(\delta_n, x) + \frac{2\|x\|}{(4\pi^4(n+1))^N} \prod_{i=1}^{N} \int\limits_{|\tau_i| \geq \delta_n} \frac{\omega_i d\tau_i}{\tau_i^2} \leq$$

$$\leq \omega(\delta_n, x) + \frac{2^{N+1} \omega_1 \cdot \ldots \cdot \omega_N \|x\|}{(4\pi^4(n+1)\delta_n)^N} \to 0, \ n \to \infty,$$

где $\Delta_n = \{t \in \mathbb{R}^N : |t| \leq \delta_n\}$, для любой последовательности $\{\delta_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющей условиям $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\delta_n = \infty$. □

Теорема 5.8. *Если $x \in \mathcal{X}_\omega$, то*

$$\|x - \sum_{|k| \leq n, k \in \mathbb{Z}^N} x_k\| \leq Const\, \omega(\frac{1}{n}, x) \ln^N n, n \in \mathbb{N}. \qquad (5.12)$$

В частности, ряд Фурье вектора x сходится к x, если $\lim\limits_{n\to\infty} \omega(\frac{1}{n}, x) \ln^N n = 0$.

Доказательство. Из [18, стр.198] вытекает следующая оценка

$$\|x - \sum_{|k| \leq n, k \in \mathbb{Z}^N} x_k\| \leq (L_n + 1) E_n[x], \qquad (5.13)$$

где $L_n,\ n \geq 1$, - константы Лебега, для которых выполнено (см. [18, стр.115]) условие

$$L_n = 4\pi^{-2} \ln n + O(1) \simeq 4\pi^{-2} \ln n \text{ при } n \to \infty, \qquad (5.14)$$

а $E_n[x],\ n \geq 1$, - наилучшее приближение вектора x тригонометрическими полиномами порядка n.

Неравенство (5.13) показывает, что такое приближение вектора x не более чем в $L_n + 1$ раз хуже наилучшего.

Для дальнейших оценок требуются оценки для $E_n[x],\ n \geq 1$.

Рассмотрим функцию $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ вида $f(t) = \prod\limits_{i=1}^{N} f_i(t_i),\ t \in \mathbb{R}^N$, где функции $f_i \in L^1(\mathbb{R}),\ i = \overline{1, N}$, обладают следующими свойствами:

1) $\widehat{f}_i(0) = 1,\ \widehat{f}_i(\lambda) = \widehat{f}_i(-\lambda),\ \lambda \in \mathbb{R}$;

2) $\mathrm{supp}\widehat{f}_i \subset [-1, 1]$;

3) $f_i \geq 0$;

4) $\int\limits_{\mathbb{R}} |\tau| f_i(\tau) d\tau = M_i < \infty,\ i = \overline{1, N}$.

Отметим, что третье свойство нужно лишь для удобства доказательства, первое свойство позволяет обойтись и без него.

Пусть $M = \max\limits_{i=\overline{1,N}} M_i$. Возьмем произвольное $\alpha > 0$ и введем обозначение $f_\alpha(t) = \alpha^N \prod\limits_{i=1}^{N} f_i(\alpha t_i)$, $t \in \mathbb{R}^N$. Тогда имеет место следующая оценка

$$E_\alpha[x] \leq \|x - f_\alpha x\| = \|\int\limits_{\mathbb{R}^N} (T(-\tau)x - x) f_\alpha(\tau) d\tau\| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \|T(-\tau)x - x\| f_\alpha(\tau) d\tau = \int\limits_{|\tau| \leq \alpha} \|T(-\tau)x - x\| f_\alpha(\tau) d\tau +$$

$$+ \int\limits_{|\tau| \geq \alpha} \|T(-\tau)x - x\| f_\alpha(\tau) d\tau \leq \omega(\frac{1}{\alpha}, x) \int\limits_{|\tau| \leq \alpha} f_\alpha(\tau) d\tau +$$

$$+ \int\limits_{|\tau| \geq \alpha} \|T_1(-\tau_1)...T_N(-\tau_N)x - x\| f_\alpha(\tau) d\tau \leq \omega(\frac{1}{\alpha}, x) \int\limits_{|\tau| \leq \alpha} f_\alpha(\tau) d\tau +$$

$$+ \int\limits_{|\tau_1| \geq \alpha} ... \int\limits_{|\tau_N| \geq \alpha} (\|T_1(-\tau_1)...T_N(-\tau_N)x - T_1(-\tau_1)...T_{N-1}(-\tau_{N-1})x\| + ... +$$

$$+\|T_1(-\tau_1)T_2(-\tau_2)x - T_1(-\tau_1)x\| + \|T_1(-\tau_1)x - x\|) f_\alpha(\tau_1,...,\tau_N)d\tau_1...d\tau_N \le$$

$$\le \omega(\frac{1}{\alpha}, x)\left(N+1+\int\limits_{|\tau_1|\ge\alpha}...\int\limits_{|\tau_N|\ge\alpha}\alpha\left(|\tau_1|+...+|\tau_N|\right) f_\alpha(\tau_1,...,\tau_N)d\tau_1...d\tau_N\right) \le$$

$$\le \omega(\frac{1}{\alpha}, x)\left(N+1+\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{|\tau_1|\ge\alpha}...\int\limits_{|\tau_N|\ge\alpha}\alpha|\tau_k|\alpha^N\prod_{i=1}^{N} f_i(\alpha t_i)d\tau_1...d\tau_N\right) \le$$

$$\le \omega(\frac{1}{\alpha}, x)\left(N+1+\sum_{k=1}^{N} M_k \prod_{i=1, i\ne k}^{N}\int\limits_{|t|\ge\alpha} f_i(t)dt\right) \le Const\,\omega(\frac{1}{\alpha}, x).$$

Из последней оценки с использованием (5.13) и (5.14) получаем требуемую оценку (5.12). □

Наряду с изометрическим (не обязательно периодическим) представлением $T : \mathbb{R} \to End\ \mathcal{X}$ рассмотрим представление $\widetilde{T} : \mathbb{R}^N \to End\ (End\ \mathcal{X})$, $\widetilde{T}(t)A = T(t)AT(-t)$, $t \in \mathbb{R}^N$, $A \in End\ \mathcal{X}$.

Определение 5.15. Оператор $A \in End\ \mathcal{X}$ назовем *периодическим* (относительно представления $\widetilde{T}$) *периода* $\omega \in \mathbb{R}^N_+$, если

$$\widetilde{T}(\omega)A = T(-\omega)AT(\omega) = A,$$

(т.е. оператор A перестановочен с оператором $T(\omega)$) и функция $t \mapsto T(t)AT(-t) : \mathbb{R}^N \to End\ \mathcal{X}$ непрерывна в равномерной операторной топологии.

Множество $\omega-$периодических операторов образует замкнутую подалгебру $End_\omega\mathcal{X} = (End\ \mathcal{X})_\omega$ из алгебры $End\ \mathcal{X}$.

В соответствии с определением 5.12 рассмотрим ряд Фурье

$$A \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}^N} A_n \qquad (5.15)$$

оператора A относительно представления $\widetilde{T}$, где

$$A_n = \frac{1}{\omega_1...\omega_N}\int\limits_{\Omega^N} T(\tau)AT(-\tau)e_n(\tau)d\tau,\ n \in \mathbb{Z}^N.$$

В статье [53] было введено понятие ряда Фурье для операторов, действующих в алгебре периодических функций $C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Концепция рядов Фурье периодических операторов рассматривалась в [2, 7, 9, 10].

В работах [8, 50] была установлена

Теорема 5.9. *Пусть $A \in End_\omega \mathcal{X}$ – $\omega-$периодический непрерывно обратимый оператор с абсолютно сходящимся рядом Фурье (5.15). Тогда обратный оператор $B = A^{-1}$ также является $\omega-$периодическим и его ряд Фурье $A^{-1} \sim \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^N} B_n$ также абсолютно сходится.*

3. Доказательства основных теорем

В дальнейшем символом X обозначается банахова алгебра с единицей, символом $\mathcal{X}$ обозначается фактор-пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$, которое является банаховым пространством с нормой $\|\widetilde{x}\| = \inf\limits_{y\in x+C_0(\mathbb{R}^N,X)} \|y\|$, где $\widetilde{x} = x + C_0(\mathbb{R}^N, X)$ – класс эквивалентности, содержащий функцию x.

Отметим, что банахово пространство $\mathcal{X}$ становится банаховой алгеброй, если умножение вводится следующим образом

$$\widetilde{x}\widetilde{y} = \widetilde{xy}, \ \ \widetilde{x}, \widetilde{y} \in \mathcal{X}. \tag{5.16}$$

В фактор-пространстве $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$ корректно определяется сильно непрерывная группа изометрий $\widetilde{S} : \mathbb{R}^N \to End(C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X))$, действующая по правилу

$$\widetilde{S}(h)\widetilde{x} = \widetilde{S(h)x}, \ h \in \mathbb{R}^N, \ \widetilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X), \tag{5.17}$$

где $S(h)x$ – сдвиг функции x на вектор h, определяемый формулой (5.1).

Структура банахова $L^1(\mathbb{R}^N)-$модуля на $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$ $((C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$ в частности) наделяется формулой

$$f\widetilde{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} f(\tau)\widetilde{S}(-\tau)\widetilde{x}d\tau,\ f \in L^1(\mathbb{R}^N),\ \widetilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X). \tag{5.18}$$

Непосредственно из определения представления $\widetilde{S} : \mathbb{R}^N \to End\ C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$ следует, что $\widetilde{S}(\omega)\widetilde{x} = \widetilde{x}$, $\widetilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$. Таким образом, функция $t \mapsto \widetilde{S}(t)\widetilde{x} : \mathbb{R}^N \to \mathcal{X}$ является непрерывной и $\omega-$периодической, т.е. она принадлежит банахову пространству $C_\omega(\mathbb{R}^N, \mathcal{X})$. Следовательно, имеет место

Лемма 5.5. *Функция $x \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$ является $\omega-$периодической на бесконечности тогда и только тогда, когда класс эквивалентности $\widetilde{x} = x + C_0(\mathbb{R}^N, X)$ является $\omega-$периодическим вектором относительно представления $\widetilde{S} \in End\ C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$.*

Доказательства теорем 5.1, 5.2 и 5.3 следуют из леммы 5.5 и теорем 5.7 и 5.8, где в качестве пространства $\mathcal{X}_\omega$ взято пространство $C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$.

Доказательство теоремы 5.4. Пусть функция $a \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ обратима на бесконечности и $b \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ – одна из обратных к a (относительно подпространства $C_0(\mathbb{R}^N, X)$) функций. Следовательно, $\widetilde{a}\widetilde{b} = \widetilde{b}\widetilde{a} = \widetilde{e}$ – единица алгебры $C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$. Рассмотрим оператор $A \in End\ C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$ вида

$$A\widetilde{x} = \widetilde{a}\widetilde{x},\ \widetilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X).$$

Этот оператор является $\omega-$периодическим относительно представления $\widetilde{S} \in End\ C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$, и коэффициенты A_n, $n \in \mathbb{Z}^N$, его ряда Фурье $A \sim \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^N} A_n$ относительно представления $\widetilde{S}$ имеют вид $A_n\widetilde{x} = \widetilde{a_n}\widetilde{x}$, $\widetilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)$, где $a_n \in C_{sl,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$, $n \in \mathbb{Z}^N$, – канонические коэффициенты Фурье функции a. Поскольку $\|\widetilde{a_n}\| = \inf\limits_{x_0\in C_0(\mathbb{R}^N,X)} \|a_n + x_0\|$, то ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^N} \|A_n\| = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^N} \|\widetilde{a_n}\|$ абсолютно сходится. Оператор A непрерывно обратим, и обратный к нему оператор $B = A^{-1} \in End\ C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$, имеет вид $B\widetilde{x} = \widetilde{b}\widetilde{x}$. В силу теоремы 5.9 оператор B также является $\omega-$периодическим относительно представления $\widetilde{S}$ и его ряд Фурье $B \sim \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^N} B_n$ также абсолютно сходится.

Поскольку $B_n\widetilde{x} = \widetilde{b_n}\widetilde{x}$, $\widetilde{x} \in C_{b,u}(\mathbb{R}^N, X)/C_0(\mathbb{R}^N, X)$, где $\widetilde{b_n}$, $n \in \mathbb{Z}^N$, – коэффициенты Фурье класса $\widetilde{b}$, и $\|B_n\| = \|\widetilde{b_n}\|$, то $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^N} \|B_n\| = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^N} \|\widetilde{b_n}\| < \infty$. Откуда получаем абсолютную сходимость ряда Фурье функции b. $\square$

Доказательство теоремы 5.5. Необходимость. Пусть функция $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ представима в виде $f = f_1+f_0$, где $f_1 \in C_\omega(\mathbb{R}^N, X)$, $f_0 \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$. Тогда $A_n(f_1 + f_0) = f_1 + A_nf_0$, $n \geq 1$. Поскольку $f_0 \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} A_nf_0 = 0$, и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} A_nf = f_1$.
Достаточность. Пусть для некоторой функции $f \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_nf = y$. Покажем, что f представима в виде $f = f_1 + f_0$, где $f_1 \in C_\omega(\mathbb{R}^N, X)$, $f_0 \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$.

Покажем, что $y \in C_\omega(\mathbb{R}^N, X)$. Для этого возьмем произвольный вектор $\alpha \in \omega\mathbb{Z}^n$ и покажем, что $S(\alpha)y - y = 0$.

Отметим, что для любого $1 \leq i \leq N$ справедливы равенства

$$S_i(\omega_i)y - y = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} S_i(\omega_i) \sum_{k=0}^{n-1} S_i(k\omega_i)x - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_i(k\omega_i)x \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_i((k+1)\omega_i)x - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_i(k\omega_i)x \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} (S_i(n\omega_i)x - x) \right) = 0.$$

Отсюда получаем справедливость следующей цепочки равенств

$$S(\alpha)y - y = S(n_1\omega_1, n_2\omega_2, ..., n_N\omega_N)y - y =$$

$$= S(n_1\omega_1, n_2\omega_2, ..., n_N\omega_N)y \pm S(0, n_2\omega_2, ..., n_N\omega_N)y \pm$$

$$\pm S(0, 0, ..., n_N\omega_N)y \pm ... \pm S(0, ..., 0)y - y =$$

$$= (S(\alpha)y - S_1(-n_1\omega_1)S(\alpha)y) + (S_1(-n_1\omega_1)S(\alpha)y -$$

$$- S_2(-n_2\omega_2)S_1(-n_1\omega_1)S(\alpha)y) + ... + (S(0, ..., 0)y - y) = 0.$$

Итак, было доказано, что функция y является периодической, т.е. $y \in C_\omega(\mathbb{R}^N, X)$, откуда вытекает, что $A_n y = y$ для любого $n \geq 1$. Обозначив $f - y = f_0 \in C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X)$, получим следующую цепочку равенств:

$$\lim_{n\to\infty} A_n f_0 = \lim_{n\to\infty} A_n(f - y) = \lim_{n\to\infty} (A_n f - y) = \lim_{n\to\infty} A_n f - y = 0. \tag{5.19}$$

По функции f_0 построим класс $\widetilde{f_0} \in \mathcal{X}$, который в силу леммы 5.5 является $\omega-$периодическим вектором в пространстве $\mathcal{X} = C_{\omega,\infty}(\mathbb{R}^N, X) \backslash C_0(\mathbb{R}^N, X)$, т.е. $\widetilde{f_0} \in \mathcal{X}_\omega$. Наряду с операторами A_n, $n \geq 1$, рассмотрим последовательность операторов $(\widetilde{A_n})$, $n \geq 1$, из $End\ \mathcal{X}$ вида $\widetilde{A_n} = \widetilde{A_n^{(1)}} \cdot ... \cdot \widetilde{A_n^{(N)}}$, где $\widetilde{A_n^{(i)}} = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{N-1} \widetilde{S}_i(k\omega_i)$, $i = \overline{1, N}$, $n \geq 1$. Тогда $\widetilde{A_n}\widetilde{f_0} = \widetilde{f_0}$ для любого $n \geq 1$. С другой стороны, из (5.19) следует справедливость равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{A_n}\widetilde{f_0} = \widetilde{0}$, откуда непосредственно получаем, что $\widetilde{f_0} = \widetilde{0}$. А значит $f_0 \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$, т.е. функция f представима в виде $f = y + f_0$, где $y \in C_\omega(\mathbb{R}^N, X)$, $f_0 \in C_0(\mathbb{R}^N, X)$. □

Литература

1. Баскаков А.Г. Спектральные критерии почти периодичности решений функциональных уравнений / А.Г. Баскаков // Матем. заметки. – 1978. – Т. 24. – № 2. – С. 195–206.

2. Баскаков А.Г. Неравенства бернштейновского типа в абстрактном гармоническом анализе / А.Г. Баскаков // Сиб. матем. журн. – 1979. – Т. 20. – № 5. – С. 942–952.

3. Баскаков А.Г. О спектральном синтезе в банаховых модулях над коммутативными банаховыми алгебрами / А.Г. Баскаков // Матем. заметки. – 1983. – Т. 34. – № 4. – С. 573–585.

4. Баскаков А.Г. Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторных функций / А.Г. Баскаков // Матем. сб. – 1984. – Т. 124(166). – № 1(5). – С. 68–95.

5. Баскаков А.Г. Гармонический анализ линейных операторов / А.Г. Баскаков. – Воронеж : ВГУ, 1987. – 165 с.

6. Баскаков А.Г. Теорема Винера и асимптотические оценки элементов обратных матриц / А.Г. Баскаков // Функц. анализ и его прил. – 1990. – Т. 24. – № 3. – С. 64–65.

7. Баскаков А.Г. Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц / А.Г. Баскаков // Матем. заметки. – 1992. – Т. 52. – № 2. – С. 17–26.

8. Баскаков А.Г. Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ / А.Г. Баскаков // Сиб. матем. журн. – 1997. – Т. 38. – № 1. – С. 14–28.

9. Баскаков А.Г. Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов / А.Г. Баскаков // Изв. РАН. Сер. матем. – 1997. – Т. 61. – № 6. – С. 3–26.

10. Баскаков А.Г. Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов / А.Г. Баскаков // СМФН. – 2004. – Т. 9. – С. 3–151.

11. Баскаков А.Г. Теорема Берлинга для функций с существенным спектром из однородных пространств и стабилизация решений параболических уравнений / А.Г. Баскаков, Н.С. Калужина // Матем. заметки. – 2012. – Т. 92. – № 5. – С. 643–661.

12. Баскаков А.Г. Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений / А.Г. Баскаков // УМН. – 2013. – Т. 68. – № 1. – С. 77–128.

13. Баскаков А.Г. Гармонический анализ каузальных операторов и их спектральные свойства / А.Г. Баскаков, И.А. Криштал // Изв. РАН. Серия матем. – 2005. – Т. 69. – № 3. – С. 3–54.

14. Браттели У. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика / У. Браттели, Д. Робинсон. – М. : Мир, 1982. – 512 с.

15. Бредихина Е.А. К теореме С.Н. Бернштейна о наилучшем приближении непрерывных функций целыми функциями данной степени / Е.А. Бредихина // Изв. вузов. Матем. – 1961. – № 6. – С. 3–7.

16. Гельфанд И.М. Коммутативные нормированные кольца / И.М. Гельфанд, Д.А. Райков, Г.Е. Шилов. – М. : Физматгиз, 1960. – 315 с.

17. Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 535 с.

18. Зигмунд А. Тригонометрические ряды / А. Зигмунд. – М. : Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.

19. Кахан Ж.-П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье / Ж.-П. Кахан. – М. : Мир, 1985. – 264 с.

20. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 572 с.

21. Купцов Н. П. Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов / Н. П. Купцов // УМН. – 1968. – Т. 23. – № 4(142). – С. 117–178.

22. Курбатов В.Г. Об алгебрах разностных и интегральных операторов / В.Г. Курбатов // Функц. анализ и его прил. – 1990. – Т. 24. – № 2. – С. 87–88.

23. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций / Б.Я. Левин. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.

24. Моррис С. Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп / С. Моррис. – М. : Мир, 1980. – 102 с.

25. Пак И.Н. О суммах тригонометрических рядов / И.Н. Пак // Успехи математических наук. – 1980. – Т.35. – №2. – С. 91-140.

26. Росс К. Абстрактный гармонический анализ / К. Росс, Э. Хьюитт. – М. : Мир, 1975. – Т. 2. – 899 с.

27. Рудин У. Функциональный анализ / У. Рудин. – М. : Мир, 1975. – 444 с.

28. Сенета Е. Правильно меняющиеся функции / Е. Сенета. – М. : Наука, 1985. – 144 с.

29. Кудрявцева И. И. Оценки элементов матриц обратных операторов / И. И. Кудрявцева, В. Е. Струков // Вестник ПММ. – 2010. – № 8. – С. 243–252.

30. Кудрявцева И. И. Оценки элементов обратных матриц / И. И. Кудрявцева, В. Е. Струков // ВЗМШ С. Г. Крейна - 2010. Сборник тезисов. – 2010. – С. 88–91.

31. Кудрявцева И. И. Оценки элементов обратных матриц / И. И. Кудрявцева, В. Е. Струков // Труды ВЗМШ С. Г. Крейна. – 2010. – С. 104–110.

32. Струкова И. И. Оценки элементов матриц обратных операторов. Теорема Винера для периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // КРОМШ-2010. Сборник тезисов. – 2010. – С. 25.

33. Струкова И. И. Теорема Винера для периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы ВЗМШ С. Г. Крейна (дополнительный выпуск). – 2011. – С. 35–36.

34. Струкова И. И. Теорема Винера для периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // КРОМШ-2011. Сборник тезисов. – 2011. – С. 52.

35. Струкова И. И. Теорема Винера для периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2012. – Т. 12. – № 4. – С. 34–41.

36. Струкова И. И. О теореме Винера для периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Международный научный журнал "Спектральные и эволюционные задачи". – 2012. – Т. 22. – С. 181–186.

37. Струкова И. И. Теорема Винера для периодических на бесконечности функций с рядами Фурье, суммируемыми с весом / И. И. Струкова // КРОМШ-2012. Сборник тезисов. – 2012. – С. 66.

38. Струкова И. И. Теорема Винера для периодических на бесконечности функций с рядами Фурье, суммируемыми с весом / И. И. Струкова // Уфимск. матем. журн. – 2013. – Т. 5. – № 3. – С. 144–152.

39. Струкова И. И. О спектре алгебры периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Современные методы теории функций и смежные проблемы : материалы ВЗМШ С. Г. Крейна. – 2013. – С. 233.

40. Струкова И. И. О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14. – № 1. – С. 28–38.

41. Струкова И. И. Гармонический анализ периодических векторов и периодических на бесконечности функций / И. И. Струкова // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ. – 2014. – Т. 14. – № 1. – С. 98–111.

42. Струкова И. И. Спектр алгебры медленно меняющихся на бесконечности функций / И. И. Струкова // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. Сборник трудов. – 2014. – Т. 2. – № 4. – С. 459–462.

43. Струкова И. И. Спектр алгебры медленно меняющихся на бесконечности функций и банаховы пределы / И. И. Струкова // Международная конференция "Спектральная теория и дифференциальные уравнения посвященная 100-летию Б. М. Левитана: Тезисы докладов. – 2014. – С. 124–126.

44. Струкова И. И. О гармоническом анализе периодических на бесконечности функций нескольких переменных / И. И. Струкова // Материалы международной конференции ВЗМШ С. Г. Крейна-2014. – 2014. – С. 334–337.

45. Усачев А.С. Преобразования в пространстве почти сходящихся последовательностей / А.С. Усачев // Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49. – № 6. – С. 1427–1429.

46. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. – М. : ИЛ, 1962. – 829 с.

47. Шубин М.А. Почти-периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными / М.А. Шубин // УМН. – 1978. – Т. 33. – № 2(200). – С. 3–47.

48. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении / Р. Эдвардс. – М. : Мир, 1985. – Т. 1. – 264 с.

49. Aldroubi A. Slanted matrices, Banach frames, and sampling / A. Aldroubi, A.G. Baskakov, I.A. Krishtal // J. Funct. Anal. – 2008. – Vol. 255/7. – P. 1667–1691.

50. Balan R. An almost periodic noncommutative Wiener's Lemma / R. Balan, I. Krishtal // J. Math. Anal. Appl. – 2010. – Vol. 370. – № 2 . – P. 339–349.

51. Balan R. The noncommutative Wiener lemma, linear independence, and spectral properties of the algebra of time-frequency shift operators / R. Balan // Trans. Amer. Math. Soc. – 2008. – Vol. 360. – P. 3921–3941.

52. Chicone C. Evolution Semigroups in Dynamical Systems and Differential Equations / C. Chicone, Y. Latushkin. – Amer. Math. Soc., 1999. – Vol. 70. – 361 p.

53. de Leeuw K. Fourier series of operators and an extension of the F. and M. Riesz theorem / K. de Leeuw // Bull. Amer. Math. Soc. – 1973. – Vol. 79. – № 2. – P. 342–344.

54. Engel K.-J. A short course on operator semigroups / K.-J. Engel, R. Nagel. – Universitext, Springer, New York, 2006. – XI, 247 p.

55. Gohberg I. The band method for positive and strictly contractive extension problems: an alternative version and new applications / I. Gohberg, M.A. Kaashoek, H.J. Woerdeman // Integral Equations Operator Theory. – 1989. – Vol. 12. - № 3. – P. 343–382.

56. Gröchenig K. Wiener's lemma: theme and variations. An introduction to spectral invariance and its applications / K. Gröchenig. – Applied and Numerical Harmonic Analysis. Boston : Birkhäuser, 2010. – 63 p.

57. Gröchenig K. Noncommutative approximation: inverse-closed subalgebras and off-diagonal decay of matrices / K. Gröchenig, A. Klotz // Constr. Approx. – 2010. – Vol. 32. – № 3. – P. 429–466.

58. Gröchenig K. Wiener's lemma for twisted convolution and Gabor frames / K. Gröchenig, M. Leinert // J. Amer. Math. Soc. – 2004. – Vol. 17. – P. 1–18.

59. Gröchenig K. Symmetry and inverse-closedness of matrix algebras and functional calculus for infinite matrices / K. Gröchenig, M. Leinert // Trans. Amer. Math. Soc. – 2006. – Vol. 358. – № 3. – P. 2695–2711.

60. Hardy G.H. A theorem concerning trigonometrical series / G.H. Hardy // J. London Math. Soc. – 1928. – № 3. – P. 12–13.

61. Jackson D. Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung // Preisschrift und Dissertation, Universitat Gottingen, 1911. – 98 p.

62. Kaniuth E. A course in commutative Banach algebras / E. Kaniuth. – Springer, 2009. – 368 p.

63. Karamata M. Sur un mode de croissance reguliere theorems fundamentaux / M. Karamata // Bull. Soc. Math. de France. – 1933. – № 61. – P. 55–62.

64. Krishtal I. Wiener's lemma and memory localization / I. Krishtal // J. Fourier Anal. Appl. – 2011. – Vol. 17. – № 4. – P. 674–690.

65. Krishtal I.A. Wiener's lemma: pictures at an exhibition / I.A. Krishtal // Rev. Un. Mat. Argentina. – 2011. – Vol. 52. – P. 61–79.

66. Loomis L.H. An introduction to abstract harmonic analysis / L.H. Loomis // Bull. Amer. Math. Soc. – 1954. – Vol. 60. – № 3. – P. 279–281.

67. Schmidt M.R. Uber divergent Folgen und linear Mittelbildurgen / M.R. Schmidt // Math. Z. – 1925. – Vol 22. – № 1. – P. 89–152.

68. Strukova I. Harmonic analysis of periodic at infinity functions // Modern problems of Mathematics, Mechanics and Computer Science : To the 95th anniversary of Voronezh State University. – 2013. – P. 83–98.

69. Strukova I. Harmonic analysis of periodic at infinity functions / I. Strukova // CIMC-2013. Book of abstracts. – 2013. – Vol. 1. – P. 90.

70. Strukova I. Center-stable manifolds for standing waves of the Klein-Gordon equation / I. Strukova, K. Le, L. Ying // Operator semigroups and dispersive equations. Workshop of the 16th Internet Seminar on Evolution Equations. – 2013. – P. 24.

71. Strukova I. Harmonic analysis of periodic at infinity functions / I. Strukova // Intern. Scientific Journal "Spectral and Evolution Problems". – 2013. – Vol. 23. – P. 183–187.

72. Sucheston L. Banach limit / L. Sucheston // Amer. Math. Monthly. – 1967. – Vol. 74. – P. 308–311.

73. Sun Q. Wiener's lemma for infinite matrices with polynomial off-diagonal decay / Q. Sun // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. – 2005. – Vol. 340. – P. 567–570.

74. Sun Q. Wiener's lemma for infinite matrices / Q. Sun // Trans. Amer. Math. Soc. – 2007. – Vol. 359. – P. 3099–3123.

75. Wiener N. Tauberian theorems / N. Wiener // Ann. of Math. – 1932. – Vol. 33. – № 1. – P. 1–100.