ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

на правах рукописи

Гресь Иван Павлович

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УЛУЧШЕННОГО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ОБНАРУЖЕНИЯ СИГНАЛОВ В НЕГАУССОВСКОМ ШУМЕ

01.04.03 – «Радиофизика»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Костылев В.И.

Воронеж – 2017

Оглавление

Введение 5

Глава 1. Улучшенное энергетическое обнаружение в аддитивном полигауссовском шуме 13

1.1. Полигауссовская модель шума 13

1.2. Оптимальное обнаружение сигналов в аддитивном полигауссовском шуме 19

1.3. Вероятность ошибки первого рода при улучшенном энергетическом обнаружении сигнала в аддитивном полигауссовском шуме 25

1.4. Вероятность правильного обнаружения при улучшенном энергетическом обнаружении гауссовского сигнала в аддитивном полигауссовском шуме 36

1.5. Вероятность правильного обнаружения при улучшенном энергетическом обнаружении неизвестного детерминированного сигнала в аддитивном полигауссовском шуме 53

Основные результаты и выводы 61

Глава 2. Улучшенное энергетическое обнаружение в аддитивном обобщенном гауссовском шуме 62

2.1. Обобщенный гауссовский шум 62

2.2. Оптимальное обнаружение сигналов в аддитивном обобщенном гауссовском шуме 66

2.3. Вероятность ошибки первого рода при улучшенном энергетическом обнаружении сигнала в аддитивном обобщенном гауссовском шуме 68

2.4. Вероятность правильного обнаружения при улучшенном энергетическом обнаружении случайного гауссовского сигнала в аддитивном обобщенном гауссовском шуме 73

2.5. Вероятность правильного обнаружения при улучшенном энергетическом обнаружении детерминированного неизвестного сигнала в аддитивном обобщенном гауссовском шуме 91

Основные результаты и выводы 97

Глава 3. Улучшенное энергетическое обнаружение случайных сигналов при наличии замираний отношения сигнал-шум 98

3.1. Модели замираний отношения сигнал-шум 100

3.2. Вероятность правильного обнаружения случайного сигнала на фоне полигауссовского шума при наличии замираний отношения сигнал-шум 105

3.3. Анализ схем разнесенного приема при обнаружении случайного гауссовского сигнала в полигауссовском шуме при наличии замираний отношения сигнал-шум 114

3.4. Вероятность правильного обнаружения случайного гауссовского сигнала в обобщенном гауссовском шуме при наличии замираний отношения сигнал-шум 121

Основные результаты и выводы 126

Глава 4. Адаптивное улучшенное энергетическое обнаружение 127

4.1. Характеристики адаптивного энергоподобного обнаружения случайного гауссовского сигнала на фоне полигауссовского шума 128

4.2. Вероятность правильного обнаружения адаптивного энергоподобного обнаружителя случайного гауссовского сигнала на фоне полигауссовского шума при наличии замираний отношения сигнал-шум 137

4.3. Вероятность правильного обнаружения адаптивного улучшенного энергетического обнаружителя случайного гауссовского сигнала на фоне обобщенного гауссовского шума 146

Основные результаты и выводы 149

Заключение 151

Библиографический список использованной литературы 154

Введение

В современном мире наблюдается развитие существующих и появление новых радиофизических систем. Каждая из них использует некоторый выделенный ей диапазон частот. Увеличение количества таких систем приводит к повышенному спросу на спектр. Перспективным решением этой проблемы является применение когнитивного радио [47, 61], которое предполагает использование временно незанятых диапазонов частот других радиофизических систем. Эффективность работы когнитивного радио зависит от того, насколько точно определена занятость того или иного частотного диапазона [47, 86]. Сложность определения занятости диапазона заключается в отсутствии априорной информации об обнаруживаемом сигнале и параметрах шумов, что приводит к невозможности синтеза оптимальных обнаружителей. Кроме того, шумовой фон, обусловленный атмосферными [7, 25, 27], индустриальными [28] и преднамеренными [4] помехами, может быть негауссовским. Поэтому во многих работах, посвященных когнитивному радио, применяется энергетический обнаружитель [47, 53, 59, 82, 87], привлекательный простой структурой и отсутствием требований к наличию априорной информации о сигналах и шумах. Такой обнаружитель представляет собой последовательно соединенные полосовой фильтр, безынерционный квадратичный детектор и пороговое устройство.

Повышение эффективности определения занятости того или иного диапазона частот может быть достигнуто изменением структуры энергетического обнаружителя без увеличения ее сложности и привлечения дополнительной информации. Одним из перспективных и активно исследуемых подходов в этом направлении является замена безынерционного квадратичного детектора на устройство, возводящее отсчеты аддитивной смеси сигнала и шума в некоторую произвольную положительную степень. Обнаружитель, осуществляющий такую операцию, назван улучшенным энергетическим [54].

Вышесказанное определяет актуальность диссертации, посвященной анализу улучшенного энергетического обнаружения сигналов в негауссовских шумах при условии замираний отношения сигнал-шум и наличия априорной неопределенности относительно интенсивности шума.

Исследованию энергетического обнаружения сигналов посвящены отечественные и зарубежные работы [8-22, 32, 55, 62, 66, 71, 73, 77]. В последнее время в связи с развитием когнитивного радио появилось большое количество статей [44-49, 52-54, 58, 63, 70, 79-82, 87] зарубежных авторов (S. Attaputu, Y. Chen, V. R. S. Banjade, C. Tellambura, H. Jiang, F. Moghimi, S. P. Herath, P. Sofotasios, E. Rebeiz, L. Zhang) на тему энергетическому обнаружения сигналов на фоне гауссовского шума. В 2010 году Y. Chen [54] ввел понятие улучшенного энергетического обнаружителя и рассмотрел улучшенное энергетическое обнаружение случайных сигналов на фоне гауссовского шума. V. R. S. Banjade, C. Tellambura и H. Jiang в 2014 году исследовали улучшенное энергетическое обнаружение сигналов [52] при наличии замираний отношения сигнал-шум на фоне гауссовского шума и получили аналитические выражения для характеристик обнаружения. При этом исследование улучшенного энергетического обнаружения сигналов на фоне негауссовских шумов не проводилось.

Тема диссертации связана с планом научно-исследовательских работ ФГБОУ ВО «ВГУ».

Объектом исследования является улучшенный энергетический обнаружитель.

Предметом исследования являются характеристики обнаружения замирающих сигналов в негауссовском шуме.

Целью работы является анализ улучшенного энергетического обнаружения сигналов в негауссовском шуме.

Для достижения цели в работе рассматриваются и решаются следующие задачи:

1. Определить характеристики улучшенного энергетического обнаружения сигналов в негауссовском шуме.

2. Найти значение оптимального показателя степени улучшенного энергетического обнаружителя для заданных параметров полигауссовского и обобщенного гауссовского шума.
3. Оценить влияние замираний в канале распространения сигнала на характеристики улучшенного энергетического обнаружения сигналов в негауссовских шумах. Исследовать характеристики обнаружения схем разнесенного приема.
4. Определить характеристики адаптивного улучшенного энергетического обнаружения сигналов в полигауссовском шуме и обобщенном гауссовском шуме. Исследовать характеристики адаптивного улучшенного энергетического обнаружения сигналов при замираниях отношения сигнал-шум в негауссовских шумах.

Методы исследования. При решении поставленных в диссертации задач использовались методы математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, теории статистических решений, а также статистического моделирования на ЭВМ.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Результаты анализа улучшенного энергетического обнаружения сигналов в полигауссовском и обобщенном гауссовском шумах.
2. Зависимость оптимального значения показателя степени улучшенного энергетического обнаружителя от модели и параметров негауссовского шума, а также от обнаруживаемого сигнала и объема выборки обнаружения.
3. Результаты анализа эффективности улучшенного энергетического обнаружения случайных гауссовских сигналов в полигауссовском и обобщенном гауссовском шумах при наличии замираний отношения сигнал-шум. Результаты анализа эффективности схем разнесенного приема.

4. Результаты анализа эффективности адаптивного улучшенного энергетического обнаружения сигналов в полигауссовском и обобщенном гауссовском шумах неизвестной интенсивности.

Научная новизна. В работе впервые получены аналитические выражения для вероятностей ошибки первого рода и правильного обнаружения улучшенного энергетического обнаружителя случайного гауссовского сигнала в полигауссовском шуме при отсутствии и наличии замираний в канале распространения сигнала. Впервые получены аналитические выражения для вероятности ошибки первого рода улучшенного энергетического обнаружителя случайного гауссовского сигнала в обобщенном гауссовском шуме. Применен метод аппроксимации плотности вероятности суммы гауссовской и обобщенной гауссовской случайных величин с помощью полигауссовской плотности вероятности, с использованием которого найдена вероятность правильного обнаружения улучшенного энергетического обнаружения случайного гауссовского сигнала в обобщенном гауссовском шуме. Проведено статистическое моделирование характеристик улучшенного энергетического обнаружения детерминированных и случайного полезных сигналов в полигауссовском и обобщенном гауссовском шумах. Впервые рассмотрено адаптивное улучшенное энергетическое обнаружение случайного гауссовского сигнала в полигауссовском шуме при отсутствии и наличии замираний в канале распространения сигнала, аналитически определены характеристики адаптивного энергоподобного обнаружения.

Достоверность результатов диссертации обусловлена корректным применением математического аппарата, совпадением теоретически рассчитанных характеристик с результатами, полученными в ходе статистического моделирования, а также совпадением в частных случаях новых результатов с уже известными.

Личный вклад автора. Научным руководителем поставлена задача и определены направления исследований. Лично автором выполнено проведение

рассуждений, аналитических и численных расчетов, а также статистическое моделирование на ЭВМ.

Теоретическая и практическая ценность. В работе проведен статистический анализ улучшенного энергетического обнаружения сигналов на фоне негауссовских шумов, в условиях априорной неопределенности относительно интенсивности шума и наличия замираний отношения сигнал-шум. Характеристики улучшенного энергетического обнаружения, полученные в диссертации, могут быть использованы для определения требуемых отношений сигнал-шум в условиях наличия негауссовских шумов, замираний и неопределенности относительно дисперсии шума для достижения требуемой эффективности обнаружения. Результаты диссертационной работы могут применяться при проектировании эффективных систем обнаружения сигналов в локации и связи, а также в разработке математического и программного обеспечения систем обработки сигналов.

Внедрение научных результатов. Результаты, полученные в диссертации, нашли свое применение в учебном процессе и научно-исследовательской работе в Воронежском государственном университете. Результаты, полученные в работе, использованы при выполнении гранта РФФИ (13-01-00773 А).

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на XIX и XX Международных научно-технических конференциях «Радиолокация, навигация, связь» (г. Воронеж, 2013-2014) [89, 92], 14-й и 15-й Международных научно-методических конференциях «Информатика: проблемы, методология, технологии» (г. Воронеж, 2014-2015) [91, 95], 2-й межвузовской научно-практической конференции курсантов и слушателей "Молодежные чтения памяти Ю.А. Гагарина" (г. Воронеж, 2015) [88] и X Всероссийской научно-технической конференции «Радиолокация и радиосвязь» (г. Москва, 2016) [99].

Публикации. По теме диссертации опубликовано 14 работ, из них 7 [90, 93, 94, 97, 98, 100, 101] – в изданиях, рекомендованных ВАК для публикации основных результатов диссертаций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 101 наименований. Объем диссертации составляет 164 страницы текста, содержащего 47 рисунков, 14 таблиц и 11 страниц списка литературы.

Во введении обоснована актуальность темы исследования, приведено определение улучшенного энергетического обнаружителя. Сформулирована цель работы, в аннотированном виде изложены основные результаты.

В первой главе проведен статистический анализ эффективности улучшенного энергетического обнаружения случайного гауссовского и детерминированных сигналов на фоне полигауссовского шума. Подробно рассмотрена полигауссовская модель шума. Получены аналитические выражения для вероятностей ошибки первого рода и правильного обнаружения случайного гауссовского сигнала в полигауссовском шуме. Определены оптимальные значения показателя степени улучшенного энергетического обнаружителя при заданных параметрах шума, определена зависимость оптимального показателя степени обнаружителя от параметров двухкомпонентного полигауссовского шума. Введено понятие энергоподобного обнаружения. Проведено статистическое моделирование характеристик улучшенного энергетического обнаружения детерминированных сигналов в полигауссовском шуме. Показано, что улучшенный энергетический обнаружитель может быть эффективнее традиционного энергетического обнаружителя при некоторых параметрах сигналов и полигауссовского шума. Произведено сравнение эффективности улучшенного энергетического обнаружителя с оптимальным обнаружителем.

Во второй главе проведен статистический анализ эффективности улучшенного энергетического обнаружения случайного гауссовского и детерминированных сигналов в обобщенном гауссовском шуме. Рассмотрена модель обобщенного гауссовского шума. Получены аналитические выражения для вероятности ошибки первого рода улучшенного энергетического обнаружения в обобщенном гауссовском шуме. С помощью аппроксимации плотности вероятности суммы гауссовской и обобщенной гауссовской случайных

величин определены оптимальные значения показателя степени улучшенного энергетического обнаружителя при различных значениях параметров обобщенного гауссовского шума. Проведено статистическое моделирование характеристик обнаружения случайного гауссовского и детерминированных сигналов в обобщенном гауссовском шуме. Показано, что улучшенный энергетический обнаружитель может быть эффективнее традиционного энергетического обнаружителя при некоторых параметрах сигналов и обобщенного гауссовского шума. Произведено сравнение характеристик улучшенного энергетического обнаружителя с оптимальным обнаружителем.

В третьей главе проведен статистический анализ эффективности улучшенного энергетического обнаружения случайного гауссовского сигнала на фоне полигауссовского и обобщенного гауссовского шума при замираниях отношения сигнал-шум. Подробно рассмотрены новые модели замираний отношения сигнал-шум: модель k-μ и модель η-μ. Получены аналитические выражения для вероятности правильного обнаружения случайного гауссовского сигнала на фоне полигауссовского шума при наличии замираний отношения сигнал-шум, подчиняющихся распределениям Накагами, k-μ и η-μ. Проведено статистическое моделирование вероятности правильного обнаружения случайного гауссовского сигнала на фоне полигауссовского и обобщенного гауссовского шумов при наличии замираний, описываемых моделями Накагами, k-μ и η-μ. Получены аналитические выражения для характеристик обнаружения разнесенного приема случайного гауссовского сигнала с замираниями отношения сигнал-шум.

В четвертой главе рассмотрено адаптивное улучшенное энергетическое обнаружение случайного гауссовского сигнала при априорной неопределенности относительно интенсивности полигауссовского и обобщенного гауссовского шумов. Получены аналитические выражения для вероятности правильного обнаружения адаптивного энергоподобного обнаружителя при отсутствии и наличии замираний отношения сигнал-шум. Произведено статистическое моделирование характеристик адаптивного улучшенного энергетического

обнаружения в полигауссовском и обобщенном гауссовском шумах. Проанализирована зависимость эффективности адаптивного улучшенного энергетического обнаружения от длины обучающей последовательности.

В заключении сформулированы основные результаты и сделаны общие выводы по диссертационной работе.

Глава 1. Улучшенное энергетическое обнаружение в аддитивном полигауссовском шуме

1.1. Полигауссовская модель шума

Случайный сигнал (шум) называют полигауссовским [3], если его одномерная плотность вероятности $g(x)$ представима смесью гауссовских плотностей вероятности в виде

$$g(x)=\sum_{v=1}^{V} b_v g_v(x), \qquad (1.1.1)$$

где V – количество компонент полигауссовского сигнала, $g_v(x)$ – гауссовские плотности вероятности, отличающиеся дисперсиями, b_v – взвешивающие сомножители, имеющие смысл вероятности и удовлетворяющие условию нормировки

$$\sum_{v=1}^{V} b_v = 1. \qquad (1.1.2)$$

Плотность вероятности (1.1.1) полигауссовского сигнала называется полигауссовской плотностью вероятности.

Полигауссовкий сигнал в простейшем случае имеет две компоненты и следующую плотность вероятности

$$g(x)=(1-\alpha)g_0(x)+\alpha g_1(x), \qquad (1.1.3)$$

где α – некоторая положительная константа, принимающая значения от 0 до 1.

Пусть каждая из компонент полигауссовского сигнала имеет дисперсию σ_v^2 и нулевое математическое ожидание, тогда плотность вероятности (1.1.1) запишем в следующем виде

$$g(x)=\sum_{v=1}^{V}\frac{b_v}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_v^2}\right). \qquad (1.1.4)$$

Дисперсия полигауссовского сигнала σ_n^2 зависит от дисперсий компонент σ_v^2 и их весов и определяется следующим образом [64]

$$\sigma_n^2 = \sum_{v=1}^{V} b_v \sigma_v^2 . \qquad (1.1.5)$$

Полигауссовская плотность вероятности является аппроксимацией модели импульсных помех класса А [64], предложенной Миддлтоном [67-69]. Миддлтон показал, что одномерная плотность вероятности $f(x)$ шума, включающего гауссовскую компоненту и аддитивные независимые импульсные помехи, может быть определена как бесконечная сумма гауссовских плотностей вероятности, веса и дисперсии которых уменьшаются и увеличиваются соответственно с ростом номера компоненты. Плотность вероятности $f(x)$ определяется следующим образом

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-A} A^i}{i!} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_i^2} \right), \qquad (1.1.6)$$

где A – параметр модели, называемый индексом импульса, σ_i^2 – параметр модели, определяемый следующим образом

$$\sigma_i^2 = \frac{(i / A) + G}{1 + G}, \qquad (1.1.7)$$

где G – отношение мощности гауссовской компоненты шума к мощности импульсной компоненты.

Если ограничить бесконечную сумму в (1.1.6) первыми V слагаемыми и разделить ее на сумму первых V коэффициентов для сохранения нормировки, получим приведенное выше выражение (1.1.4). В показано [72], что даже небольшое количество слагаемых V обеспечивает отличное согласование аппроксимации (1.1.4) с экспериментальными данными. Поэтому для представления негауссовского шума нередко используется полигауссовская модель всего лишь с двумя слагаемыми.

Примером полигауссовского шума с двумя компонентами является модель шума Лихтера [25], которая была предложена для описания атмосферных шумов в диапазоне 50кГц-10МГц. В работе [25] предполагается, что поле атмосферных шумов состоит из двух компонент: шумового фона и отдельных редких случайно

распределенных во времени импульсов. В импульсной компоненте содержится значительная часть энергии, поэтому она оказывает существенное влияние на обнаружение и обработку сигналов. Причиной атмосферных шумов являются местные и удалённые грозы [43]. Традиционное энергетическое обнаружение сигналов в шуме Лихтера рассмотрено в работах [17-21].

Полигауссовская модель шума с двумя компонентами также может иметь следующую физическую интерпретацию. Рассмотрим импульсный шум, представляющий собой последовательность импульсов со случайной амплитудой и случайным временем появления на фоне гауссовского шума. Импульсная компонента такого шума может быть представлена в виде [64]

$$I(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k p(t - t_k), \qquad (1.1.8)$$

где A_k – независимые и одинаково распределенные случайные амплитуды импульсов, t_k – отсчеты времени, представляющие собой пуассоновский процесс, а $p(t)$ определяется параметрами входного фильтра приемника. Пусть λ – интенсивность пуассоновского процесса, а τ – средняя длительность импульса. Можно показать [76], что при $\lambda\tau << 1$ плотность вероятности отсчета $I(t)$ может быть аппроксимирована следующим выражением

$$f_I(x) = (1 - \lambda\tau)\delta(x) + \lambda\tau h_I(x), \qquad (1.1.9)$$

где $h_I(x)$ – плотность вероятности, зависящая от $p(t)$ и плотности вероятности A_k, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака [1]. Величина $(1-\lambda\tau)$ представляет собой вероятность отсутствия импульсной составляющей. Для получения плотности вероятности импульсного шума $f_N(x)$ найдем свертку плотности вероятности (1.1.9) и гауссовской плотности вероятности $f_G(x)$ в следующем виде

$$f_N(x) = (1 - \lambda\tau) f_G(x) + \lambda\tau (f_G * h_I)(x), \qquad (1.1.10)$$

где $f_G * h_I(x)$ – свертка гауссовской плотности вероятности $f_G(x)$ и $h_I(x)$. Если предположить, что $h_I(x)$ – тоже гауссовская, то $f_{GI} = f_G * h_I(x)$ также представляет собой гауссовскую плотность вероятности и (1.1.10) запишется в виде

$$f_N(x) = (1 - \lambda\tau) f_G(x) + \lambda\tau f_{GI}(x). \qquad (1.1.11)$$

Выражение (1.1.11) с точностью до обозначений совпадает с (1.1.3): $\alpha = \lambda\tau$, $g_0(x)=f_G(x)$ и $g_I(x)=f_{GI}(x)$. Таким образом, показано, что импульсный шум может быть описан с помощью полигауссовской модели шума с двумя компонентами.

На рис. 1.1. представлена полигауссовская плотность вероятности для следующих значений параметров:

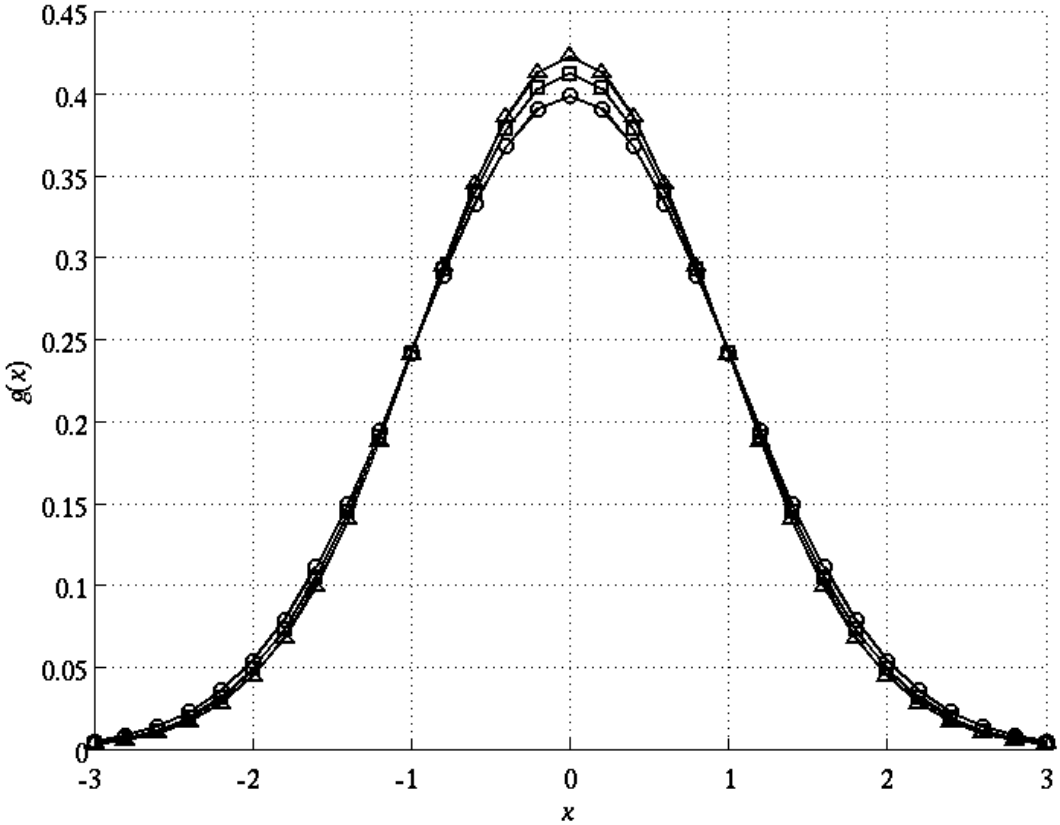
1. Кривая с треугольными маркерами: $V = 1$ – гауссовская плотность вероятности.

2. Кривая с квадратными маркерами: $V = 2$, $b_1 = 0{,}9985$, $b_2 = 0{,}0015$, $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 100$.

3. Кривая с круглыми маркерами:: $V = 3$, $b_1 = 0{,}9965$, $b_2 = 0{,}02$, $b_3 = 0{,}0015$, $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 30$, $\sigma_3^2 / \sigma_1^2 = 50$.

Из хода кривых на рис. 1.1 видно, что полигауссовская плотность вероятности имеет более тяжелые хвосты по сравнению с гауссовской, что объясняется наличием мощной импульсной компоненты. Под тяжелыми хвостами понимается более медленное убывание плотности вероятности при удалении от начала координат по сравнению с гауссовской плотностью вероятности [42].

На рис. 1.2 представлена выборка размером 5000 отсчетов полигауссовского шума с параметрами $V = 2$, $b_1 = 0{,}9985$, $b_2 = 0{,}0015$, $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 100$.



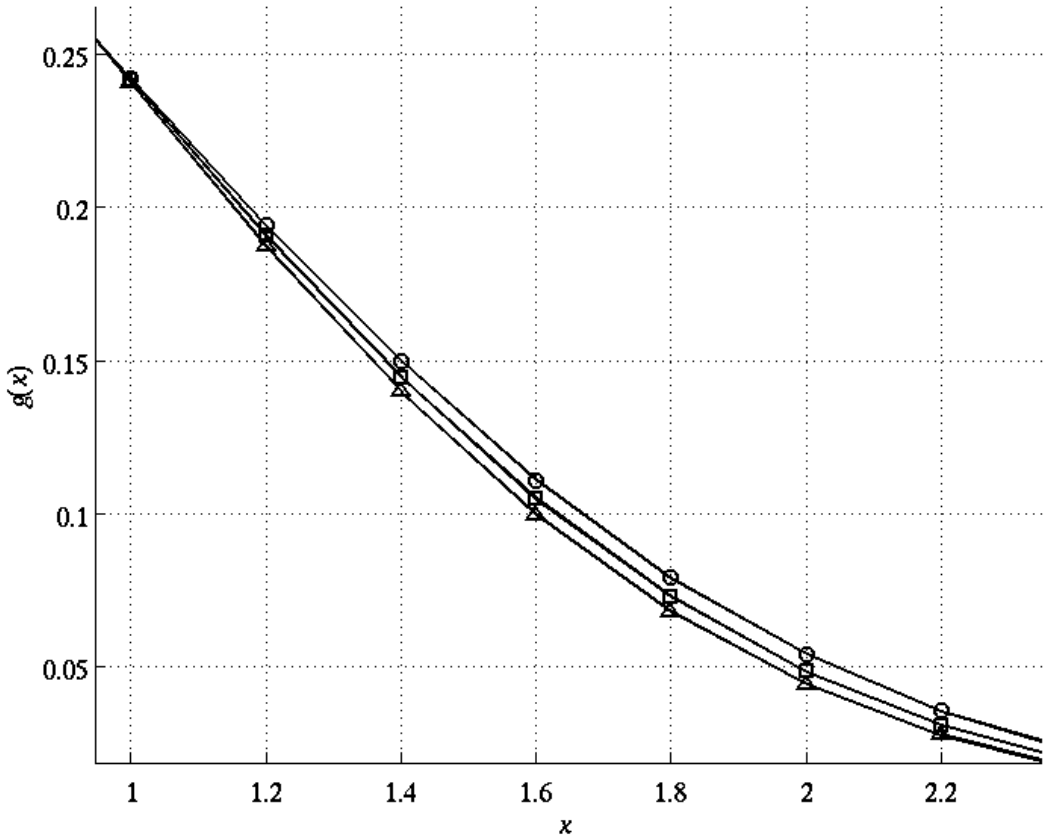


Рис. 1.1. Плотность вероятности полигауссовского шума при различных значениях параметров.

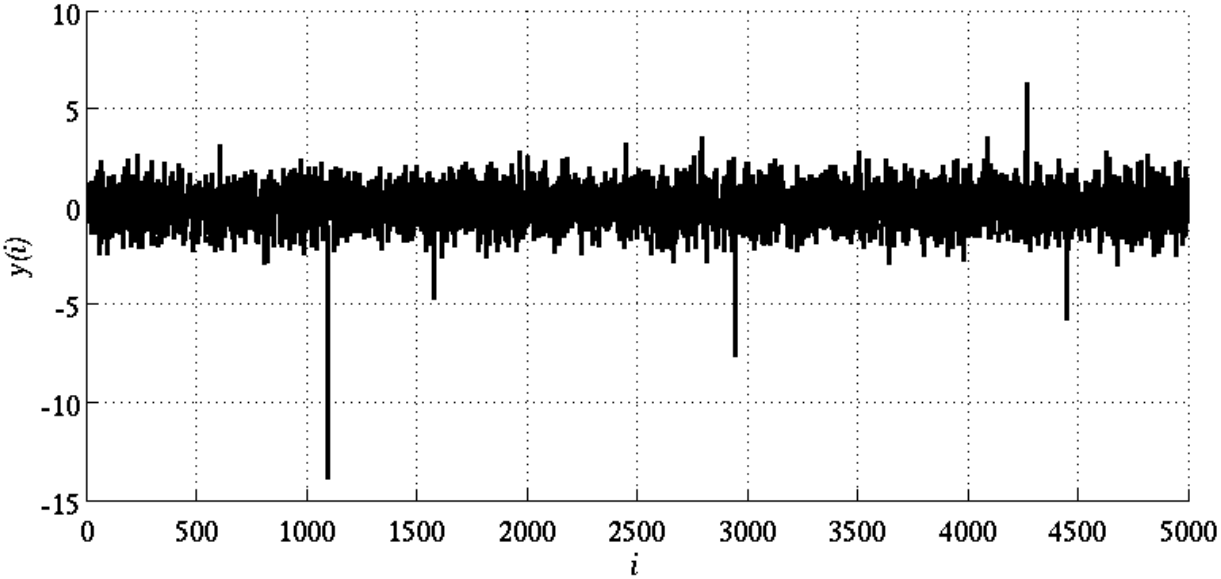


Рис. 1.2. Выборка размером 5000 отсчетов полигауссовского шума с параметрами $V = 2$, $b_1 = 0{,}9985$, $b_2 = 0{,}0015$, $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 100$.

1.2. Оптимальное обнаружение сигналов в аддитивном полигауссовском шуме

Пусть имеется случайный n-мерный вектор Y, который представим в виде $Y = N + \lambda S$, где N – случайный вектор длиной n, компоненты которого являются независимыми отсчётами полигауссовского шума, S – полезный сигнал, λ – случайный параметр, принимающий одно из двух значений: $\lambda = 1$ – полезный сигнал присутствует, $\lambda = 0$ – сигнал отсутствует.

Задача обнаружения сводится к задаче проверки статистических гипотез [2, 31, 35, 42]. В качестве гипотезы H_0 примем гипотезу об отсутствии полезного сигнала ($\lambda = 0$), а в качестве конкурирующей гипотезы H_1 – гипотезу о его наличии ($\lambda = 1$).

Для синтеза оптимального алгоритма обнаружения воспользуемся методом максимального правдоподобия [5, 34]. Решающая статистика оптимального обнаружителя сигналов в полигауссовском шуме Ξ_{op} может быть представлена в следующем виде

$$\Xi_{op} = \frac{P(y_1, y_2, ..., y_n \mid H_1)}{P(y_1, y_2, ..., y_n \mid H_0)}, \tag{1.2.1}$$

где $P(y_1, y_2, \ldots, y_n \mid H_0)$ и $P(y_1, y_2, \ldots, y_n \mid H_1)$ – условные плотности вероятности вектора Y с компонентами $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Учитывая статистическую независимость величин y_i и вид одномерной плотности вероятности полигауссовского шума (1.1.4), запишем n-мерную условную плотность вероятности вектора Y для случая отсутствия полезного сигнала в виде

$$P(y_1, y_2, ..., y_n \mid H_0) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma_v^2} \right). \tag{1.2.2}$$

Плотность вероятности одного отсчета аддитивной смеси сигнала и шума является сверткой их одномерных плотностей вероятности [26]:

$$f(x) = (f_s * g)(x), \tag{1.2.3}$$

где $f_s(x)$ – одномерная плотность вероятности полезного сигнала, $g(x)$ – одномерная плотность вероятности полигауссовского шума. Для нахождения $P(y_1, y_2,\ldots, y_n \mid H_1)$ необходимо определить модель полезного сигнала. Рассмотрим два вида модели полезного сигнала, а именно:

I. Случайный гауссовский с некоррелированными отсчетами и дисперсией σ_s^2.

II. Неизвестный детерминированный с отсчетами s_i.

Используя выражение (1.2.3), нетрудно показать, что в случае, когда полезный сигнал является гауссовским с дисперсией σ_s^2, а шум – полигауссовским с дисперсиями компонент σ_v^2, аддитивная смесь сигнала и шума также является полигауссовской с дисперсиями компонент $\sigma_s^2 + \sigma_v^2$:

$$f(x) = \sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\sqrt{2\pi(\sigma_v{}^2 + \sigma_s{}^2)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma_v{}^2 + \sigma_s{}^2)}\right). \qquad (1.2.4)$$

В случае, когда полезный сигнал является неизвестным детерминированным с отсчетами s_i, его плотность вероятности одного отсчета представляет собой дельта-функцию Дирака:

$$f_{s_i}(x) = \delta(x - s_i). \qquad (1.2.5)$$

Принимая во внимание вид плотности вероятности полезного сигнала $f_{s_i}(x)$ (1.2.5), результат ее свертки и плотности вероятности полигауссовского шума $g(x)$ запишется в следующем виде

$$f(x) = \sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\sqrt{2\pi\sigma_v{}^2}} \exp\left(-\frac{(x - s_i)^2}{2\sigma_v{}^2}\right). \qquad (1.2.6)$$

Учитывая статистическую независимость случайных величин y_i и вид одномерных плотностей вероятности аддитивной смеси сигнала и полигауссовского шума (1.2.4) и (1.2.6), запишем n-мерную условную плотность вероятности вектора Y для случая наличия полезного сигнала в виде

$$P^{I}(y_1, y_2, ..., y_n \mid H_1) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\sqrt{2\pi(\sigma_v{}^2 + \sigma_s{}^2)}} \exp\left(-\frac{y_i^2}{2(\sigma_v{}^2 + \sigma_s{}^2)} \right) \qquad (1.2.7)$$

и

$$P^{II}(y_1, y_2, ..., y_n \mid H_1) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\sqrt{2\pi\sigma_v{}^2}} \exp\left(-\frac{(y_i - s_i)^2}{2\sigma_v{}^2} \right) \qquad (1.2.8)$$

для первой и второй моделей полезного сигнала соответственно.

Непосредственной подстановкой (1.2.2), (1.2.7) и (1.2.8) в (1.2.1) получим выражения для решающих статистик Ξ_{opI} и Ξ_{opII} оптимального обнаружителя сигналов в аддитивном полигауссовском шуме для двух моделей полезного сигнала в следующем виде

$$\Xi_{opI} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\sqrt{2\pi(\sigma_v{}^2 + \sigma_s{}^2)}} \exp\left(-\frac{y_i^2}{2(\sigma_v{}^2 + \sigma_s{}^2)} \right)}{\prod_{i=1}^{n} \sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma_v^2} \right)}, \qquad (1.2.9)$$

$$\Xi_{opII} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\sqrt{2\pi\sigma_v{}^2}} \exp\left(-\frac{(y_i - s_i)^2}{2\sigma_v{}^2} \right)}{\prod_{i=1}^{n} \sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} \exp\left(-\frac{y_i^2}{2\sigma_v^2} \right)}. \qquad (1.2.10)$$

Характеристики оптимальных обнаружителей устанавливают верхнюю границу эффективности для заданных сигналов и шумов. Наряду с этим, очевидно, что решающие статистики оптимальных обнаружителей (1.2.9) и (1.2.10) имеют ряд существенных недостатков. Во-первых, выражения (1.2.9) и (1.2.10) имеют достаточно громоздкий вид, что приводит к ресурсозатратным вычислениям и трудностям при определении аналитического вида их характеристик. Во-вторых, для построения решающей статистики необходима априорная информация относительно параметров сигнала и шума, которые сложно измерить. Локально оптимальный обнаружитель случайного гауссовского сигнала [65, 75], решающая статистика которого может быть найдена в следующем виде

$$\Xi_{lo} = \sigma_n^4 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\sum_{\nu=1}^{V} \frac{b_\nu}{\sigma_\nu^3} e^{-\frac{y_i}{2\sigma_\nu^2}} \left(\frac{y_i^2}{\sigma_\nu^2} - 1 \right) - \sum_{\nu=1}^{V} \frac{b_\nu}{\sigma_\nu^3} e^{-\frac{y_i}{2\sigma_\nu^2}}}{\sum_{\nu=1}^{V} \frac{b_\nu}{\sigma_\nu} e^{-\frac{y_i}{2\sigma_\nu^2}}} + \frac{2\sum_{\nu=1}^{V} \frac{b_\nu}{\sigma_\nu^3}}{\sum_{\nu=1}^{V} \frac{b_\nu}{\sigma_\nu}} \right), \qquad (1.2.11)$$

где σ_n – среднеквадратическое отклонение полигауссовского шума, не требует информации о параметрах сигнала и его энергии. Тем не менее, (1.2.11) имеет такой же сложный вид, как и (1.2.9). Поэтому на практике часто используют более простые (но и менее эффективные) квазиоптимальные обнаружители, лишенные указанных недостатков, например, энергетический обнаружитель.

Решающая статистика традиционного энергетического обнаружителя (ТЭО) может быть определена следующим образом

$$\Xi_E = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{\sigma_n} \right)^2 . \qquad (1.2.12)$$

Как было сказано выше, улучшенный энергетический обнаружитель (УЭО) может быть получен путем замены операции возведения в квадрат на операцию возведения в произвольную положительную степень p, т.е. его решающая статистика определяется так:

$$\Xi_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i}{\sigma_n} \right)^p . \qquad (1.2.13)$$

Для вынесения решения о наличии или отсутствии сигнала необходимо сравнить решающую статистику с некоторым порогом. Например, порог может быть выбран в соответствии с критерием Неймана-Пирсона, обеспечивающим некоторую заданную вероятность ошибки первого рода.

С помощью статистического моделирования определим характеристики оптимального и локально оптимального обнаружителей. Зафиксируем вероятность ошибки первого рода на уровне 0,01 и определим отношения сигнал-шум в следующем виде

$$q^2 = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \qquad (1.2.14)$$

и

$$q^2 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} s_i}{\sigma_n^2} \qquad (1.2.15)$$

при обнаружении случайного и детерминированного сигнала соответственно. При моделировании использовалось 10^6 реализаций суммы сигнала и шума. Объем выборки n = 15.

На рис. 1.3 представлены зависимости вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум $P_D(q^2)$ оптимального (кривая 1), локально оптимального (кривая 2) и энергетического (кривая 3) обнаружителей. Параметры полигауссовского шума использовались следующие: $V = 2$, $b_1 = 0{,}9985$, $b_2 = 0{,}0015$, $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 100$.

Из хода кривых на рис. 1.3 очевидно, что энергетический обнаружитель существенно проигрывает в эффективности оптимальному и локально оптимальному обнаружителям. Представляется интересным найти такое значение показателя степени УЭО, которое позволит получить более высокую вероятность правильного обнаружения при фиксированной вероятности ошибки первого рода. В следующих нескольких параграфах рассмотрим улучшенное энергетическое обнаружение сигналов, найдем его характеристики и сравним с рассмотренными в настоящем параграфе обнаружителями.

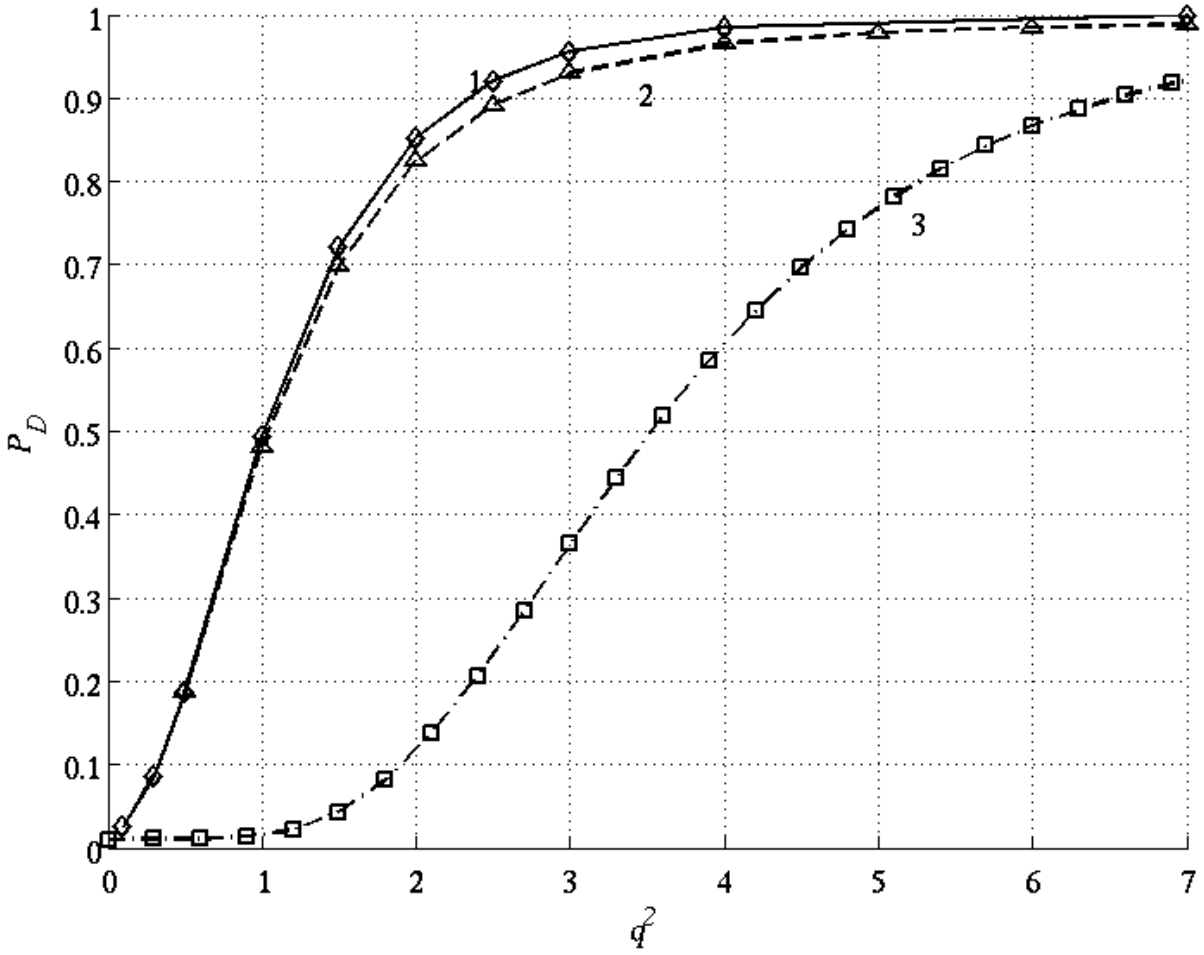


Рис. 1.3. Зависимость вероятность правильного обнаружения от отношения сигнал-шум $P_D(q^2)$ оптимального, локально оптимального и энергетического обнаружителей.

1.3. Вероятность ошибки первого рода при улучшенном энергетическом обнаружении сигнала в аддитивном полигауссовском шуме

Вероятность ошибки первого рода [2] P_{E1} определяется следующим образом

$$P_{E1}(T) = 1 - F_{\Xi_p}(T \mid H_0), \tag{1.3.1}$$

где Ξ_p – решающая статистика УЭО, T – порог обнаружения, $F_{\Xi_p}(T \mid H_0)$ – условная функция распределения решающей статистики УЭО в случае отсутствия полезного сигнала, которая может быть найдена так:

$$F_{\Xi_p}(T \mid H_0) = \ell^{-1}\left\{\frac{M_{\Xi_p}(s \mid H_0)}{s}\right\}, \tag{1.3.2}$$

где $\ell^{-1}\{s\}$ – операция применения обратного преобразования Лапласа [1], $M_{\Xi_p}(s \mid H_0)$ – условная производящая функция моментов (ПФМ) решающей статистики УЭО в случае отсутствия полезного сигнала. ПФМ неотрицательной случайной величины X с плотностью вероятности $f(x)$ по определению [74] запишется следующим образом

$$M_X(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx. \tag{1.3.3}$$

Значит ПФМ случайной величины $|X/\sigma|^p$ (p – произвольное положительное действительное число) запишется в виде

$$M_{|X/\sigma|^p}(s) = \int_0^\infty e^{-sx^p} f_{abs}(x)dx, \tag{1.3.4}$$

где $f_{abs}(x)$ – плотность вероятности модуля случайной величины X/σ.

Условная ПФМ решающей статистики УЭО в случае отсутствия полезного сигнала и при условии, что отсчеты полигауссовского шума независимы, определяется так:

$$M_{\Xi_p}(s \mid H_0) = \left(\int_0^\infty e^{-sx^p} f_{abs}(x)dx\right)^n, \tag{1.3.5}$$

где n – объем выборки обнаружения. Нетрудно получить выражение для плотности вероятности $f_{abs}(x)$ в следующем виде

$$f_{abs}(x) = 2\sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2 / \sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_v^2 / \sigma^2} \right). \qquad (1.3.6)$$

Далее будем придерживаться следующих обозначений $\sigma_v^2 = \sigma_v^2 / \sigma^2$.

Подставив (1.3.6) в (1.3.5), получим следующее выражение для условной ПФМ решающей статистики УЭО в случае реализации гипотезы H_0

$$M_{\Xi_p}(s \mid H_0) = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-sx^p} \sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\sigma_v} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_v^2} \right) dx \right)^n. \qquad (1.3.7)$$

Далее, разложив экспоненту под знаком суммы в ряд [60]

$$\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_v^2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k \sigma_v^{2k} k!}$$

и подставив в (1.3.7), получим $M_{\Xi_p}(s \mid H_0)$ в следующем виде

$$M_{\Xi_p}(s \mid H_0) = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\sigma_v} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k \sigma_v^{2k} k!} \int_0^{\infty} x^{2k} e^{-sx^p} dx \right)^n. \qquad (1.3.8)$$

Для вычисления интеграла воспользуемся соотношением [60]:

$$\int_0^{\infty} x^m \, \mathrm{e}^{-\beta x^l} \, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{l} \right)}{l \beta^{\frac{m+1}{l}}}, \qquad (1.3.9)$$

где $\Gamma(t)$ – гамма-функция [60].

С учетом (1.3.9) запишем (1.3.8) в следующем виде

$$M_{\Xi_p}(s \mid H_0) = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma\left((2k+1)/p \right)}{2^k k! s^{(2k+1)/p}} \sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\sigma_v^{2k+1}} \right)^n. \qquad (1.3.10)$$

Используя следующее выражение для возведения степенного ряда в степень [60]

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \qquad (1.3.11)$$

где $c_0 = a_0{}^n$, $c_m = \dfrac{1}{ma_0}\sum_{k=1}^{m}(kn - m + k)a_k c_{m-k}$, запишем выражение для условной ПФМ решающей статистики УЭО в случае реализации гипотезы H_0 в виде степенного ряда в следующем виде

$$M_{\Xi_p}(s \mid H_0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} C_k s^{-\frac{2k+n}{p}}, \tag{1.3.12}$$

где

$$C_0 = a_0{}^n, \tag{1.3.13}$$

$$a_0 = \frac{\Gamma(1/p)}{p}\sum_{v=1}^{V}\frac{b_v}{\sigma_v}, \tag{1.3.14}$$

$$C_j = \frac{1}{ja_0}\sum_{k=1}^{j}(kn - j + k)\frac{(-1)^k \Gamma\big((2k+1)/p\big)}{p2^k k!} C_{j-k}\sum_{v=1}^{V}\frac{b_v}{\sigma_v^{2k+1}}. \tag{1.3.15}$$

Для нахождения функции распределения решающей статистики УЭО в случае отсутствия полезного сигнала $F_{\Xi_p}(T \mid H_0)$ воспользуемся (1.3.2) и следующим выражением

$$\ell^{-1}\left\{\frac{1}{s^{q+1}}\right\} = \frac{t^q}{\Gamma(q+1)}, \tag{1.3.16}$$

в результате функция распределения $F_{\Xi_p}(T \mid H_0)$ запишется в виде

$$F_{\Xi_p}(T \mid H_0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k T^{(2k+n)/p}}{\Gamma\big((2k+n)/p + 1\big)}. \tag{1.3.17}$$

И, наконец, используя (1.3.1) и (1.3.17), получим выражение для вероятности ошибки первого рода УЭО в полигауссовском шуме P_{E1} в следующем виде

$$P_{E1}(T) = 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k T^{(2k+n)/p}}{\Gamma\big((2k+n)/p + 1\big)}. \tag{1.3.18}$$

Из выражения (1.3.18) видно, что переменная T возводится в степень, содержащую в себе индекс суммирования k, объем выборки n и показатель

степени обнаружителя p. При больших n и малых p $T^{(2k+n)/p}$ растет очень быстро и поэтому требуется применение библиотек, обеспечивающих высокоточные вычисления, например mpmath для Python версии 2.7.

Зависимости вероятности ошибки первого рода от порога обнаружения $P_{E1}(T)$ представлены на рис. 1.4 для различных значений показателя степени УЭО p и следующих параметрах полигауссовского шума: $V = 2$, $b_1 = 0{,}9985$, $b_2 = 0{,}0015$, $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 100$ и $n = 20$. Линиями на рисунке показаны результаты вычислений по формуле (1.3.18), а круглыми маркерами – результаты статистического моделирования вероятности ошибки первого рода. Кривые 1-4 соответствуют значениям параметра p 0,5, 1, 2 и 3 соответственно. Из хода кривых на рисунке видно, что с ростом порога обнаружения T вероятность ошибки первого рода уменьшается и стремится к нулю при $T \to \infty$. Уменьшение показателя степени p ведет к более крутому убыванию P_{E1} при увеличении порога обнаружения. Так, значения порога обнаружения для P_{E1} =0,01 равны 19,662, 23,926, 98,631 и 768,435 для показателей степени 0,5, 1, 2 и 3 соответственно.

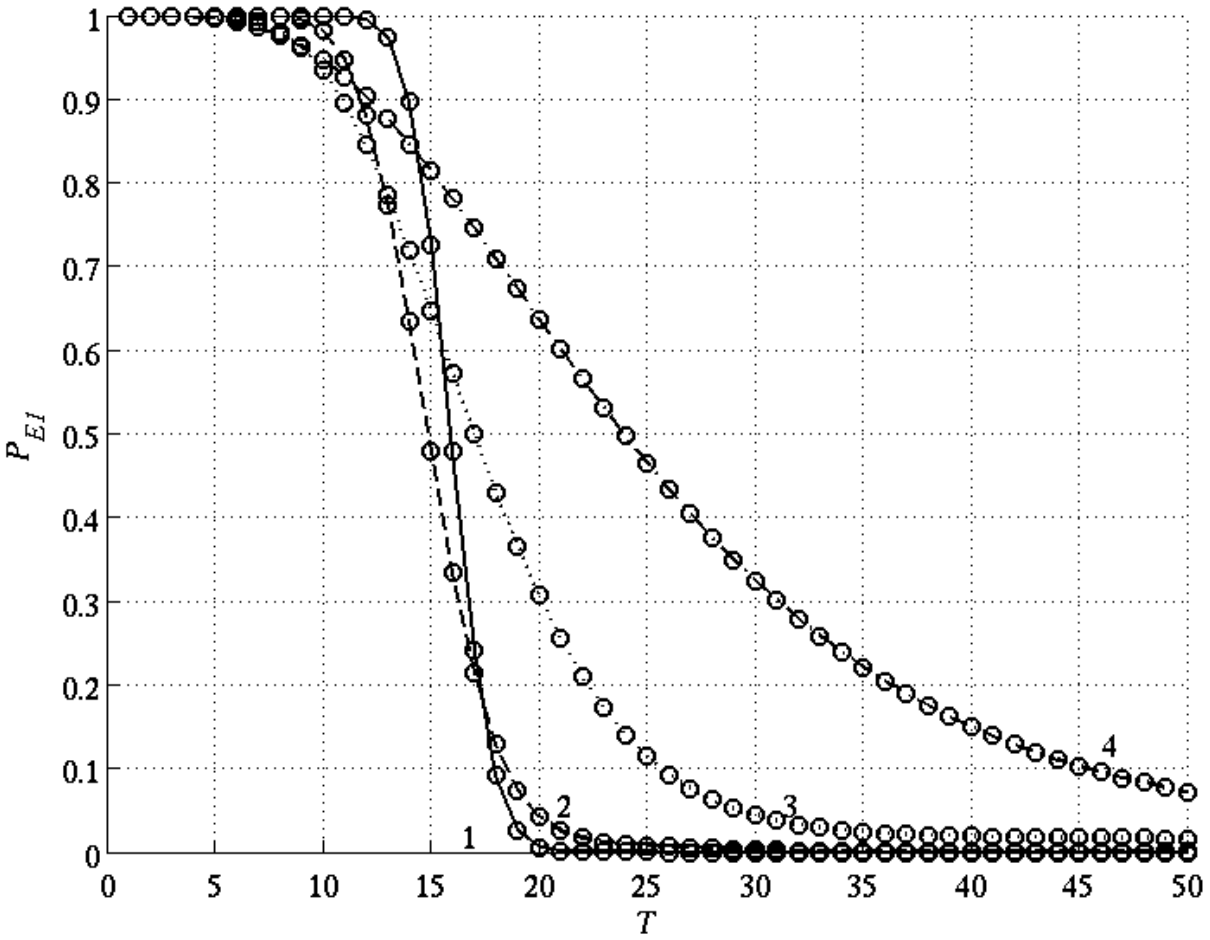


Рис. 1.4. Зависимость вероятности ошибки первого рода от порога обнаружения.

Рассмотрим зависимость порога обнаружения от показателя степени более подробно. На рис. 1.5 представлена зависимость порога обнаружения от показателя степени $T(p)$ при фиксированной вероятности ошибки первого рода $P_{E1}(T) = 0{,}01$ для двух видов шума и различных значений объема выборки n: 5, 10, 15 и 20. Маркерами на рисунке обозначены результаты статистического моделирования. Круглые маркеры соответствуют гауссовскому шуму, а квадратные – полигауссовскому, параметры которого следующие: $V = 2$, $b_1 = 0{,}9985$, $b_2 = 0{,}0015$, $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 100$. Из хода кривых на рис. 1.5 видно, что при увеличении показателя степени p УЭО значения порога обнаружения для полигауссовского шума растут быстрее, чем для гауссовского при $p > 1$. Полигауссовский шум содержит редкие мощные импульсы, амплитуда которых увеличивается при возведении ее в степень, большую единицы. Это ведет к резкому росту порога обнаружения УЭО с $p > 1$. Кроме того, из хода кривых видно, что значения порога обнаружения растут тем быстрее, чем больше объем выборки. Для объемов выборки $n = 5$ и $n = 10$ отличия кривых $T(p)$ для гауссовского шума и полигауссовского шумов невелики, тогда как при $n > 10$ они отличаются значительно.

Исследуем зависимость порога обнаружения от объема выборки. На рис. 1.6 представлена зависимость порога обнаружения от объема выборки $T(n)$ при фиксированной вероятности ошибки первого рода $P_{E1} = 0{,}01$ для двух видов шума и различных значений показателя степени p: 0,5, 1, 2 и 3. Маркерами на рисунке обозначены результаты статистического моделирования. Круглые маркеры соответствуют гауссовскому шуму, а квадратные – полигауссовскому, параметры последнего следующие: $V = 2$, $b_1 = 0{,}9985$, $b_2 = 0{,}0015$, $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 100$.

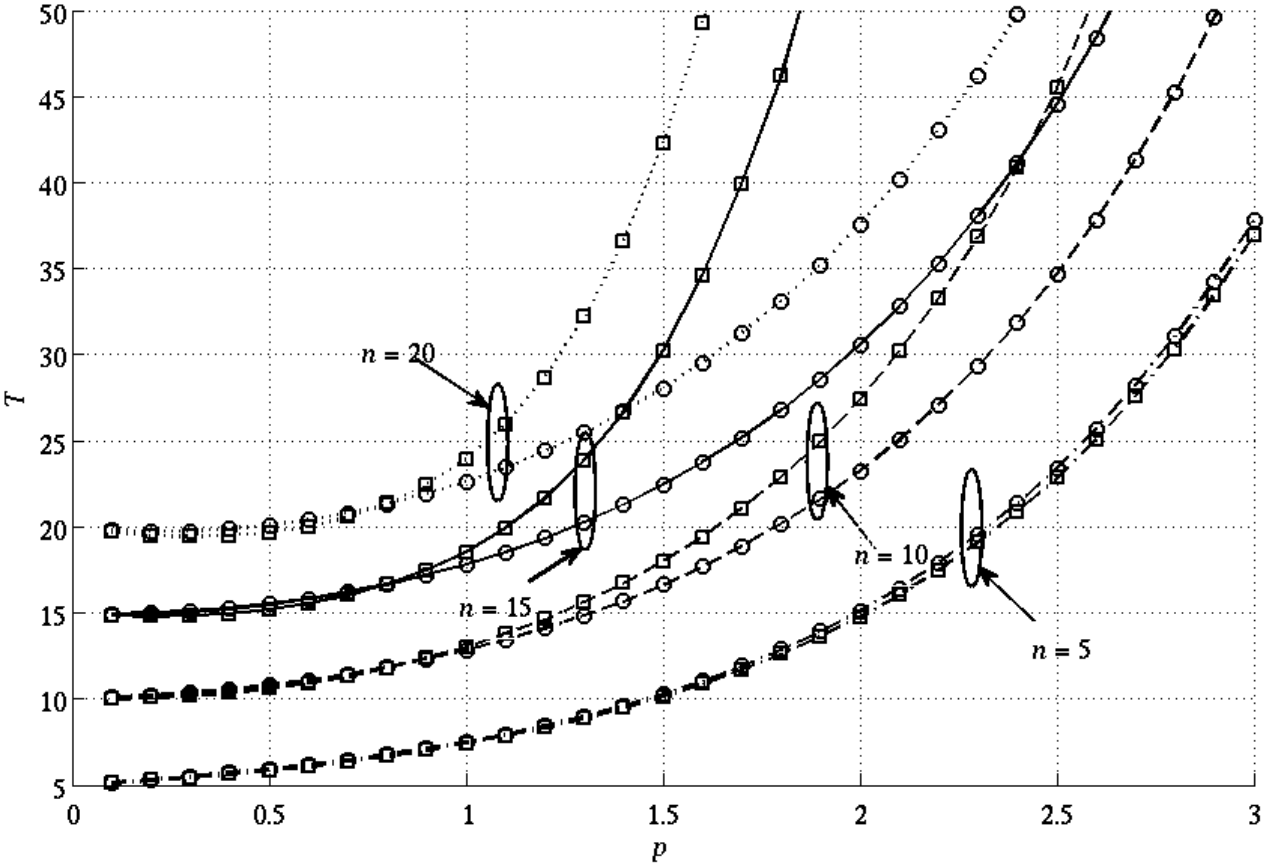


Рис. 1.5. Зависимость вероятности ошибки первого рода от показателя степени.

Из хода кривых на рисунке видно, что для значений показателя степени $p > 1$ ($p = 2$ и $p = 3$) существует некоторое значение объема выборки n, при котором начинается резкий рост порога обнаружения для шума с заданными параметрами ($n = 10$ и $n = 7$ соответственно). Увеличение объема выборки ведет к увеличению вероятности попадания мощного импульса в рассматриваемую выборку. Наличие большего числа выборок с мощным импульсом приводит к резкому росту порога обнаружения. Чем выше значение показателя степени обнаружителя, тем быстрее рост зависимости $T(n)$.

Для иллюстрации влияния мощных импульсов на скорость роста порога обнаружения рассмотрим выборку выходных отсчетов решающей статистики $\Xi_p(i)$ обнаружителя для шумов с теми же параметрами. При этом сгенерируем полигауссовский шум с двумя компонентами так, чтобы его шумовая компонента в точности повторяла рассматриваемый гауссовский шум. В силу того, что дисперсии шумов одинаковые, дисперсия шумовой компоненты полигауссовского шума будет меньше дисперсии гауссовского шума. На рис. 1.7 изображены выборки выходных сигналов решающей статистики УЭО для различных значений показателя степени. Сплошная линия соответствует полигауссовскому шуму, а пунктирная – гауссовскому. В приведенных выборках полигауссовского шума присутствуют мощные импульсы, отсутствующие в гауссовском шуме. Видно, что выходные отсчеты решающей статистики обнаружителя с $p = 0{,}5$ (рис. 1.7.а) практически не отличаются для гауссовского и полигауссовского шумов. Импульсная компонента не демонстрирует сильного роста после возведения в степень p. Выходные отсчеты обнаружителя, на вход которого подан гауссовский шум, немного больше аналогичных отсчетов для полигауссовского шума. Это объясняется тем, что, как уже было сказано выше, дисперсия шумовой компоненты полигауссовского шума ниже дисперсии гауссовского шума.

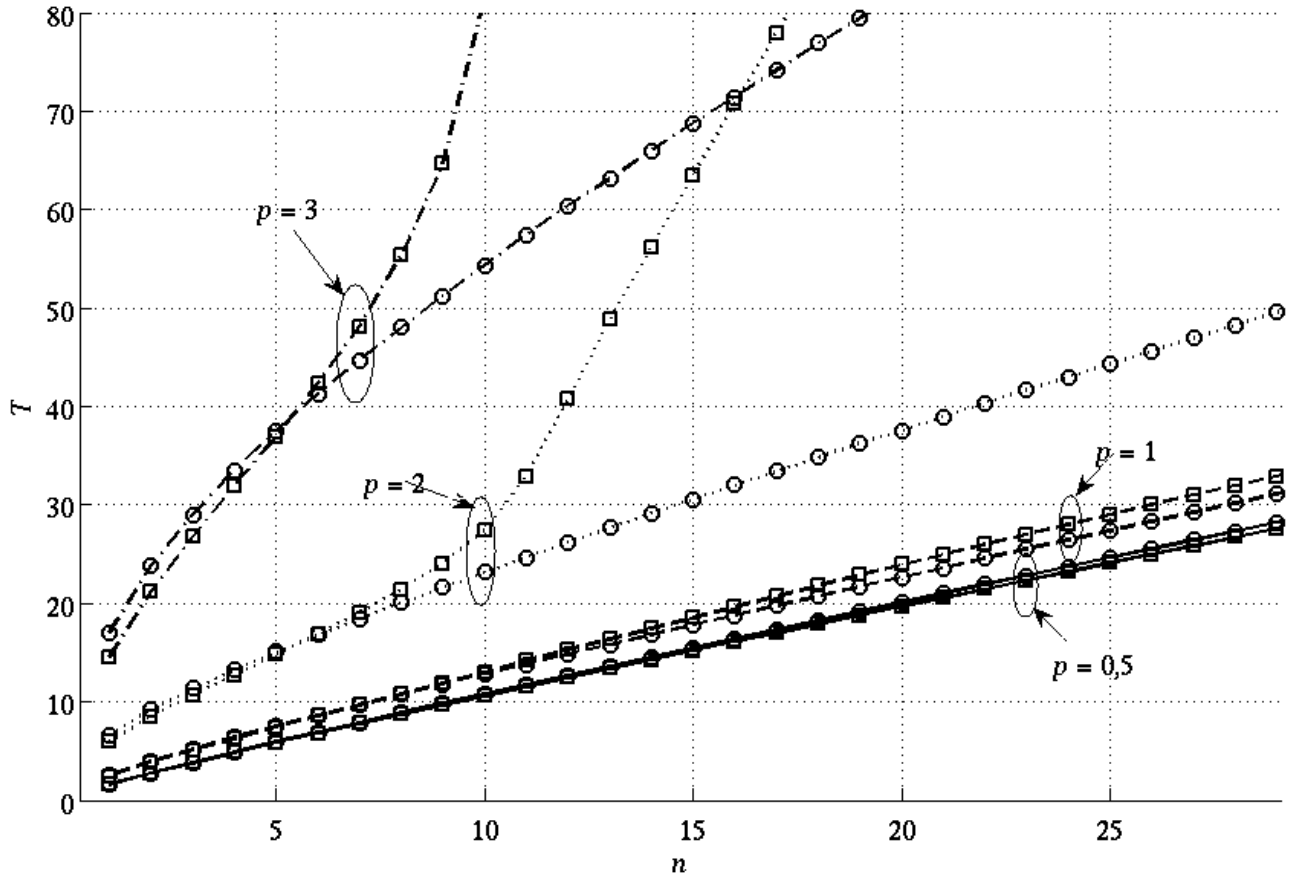
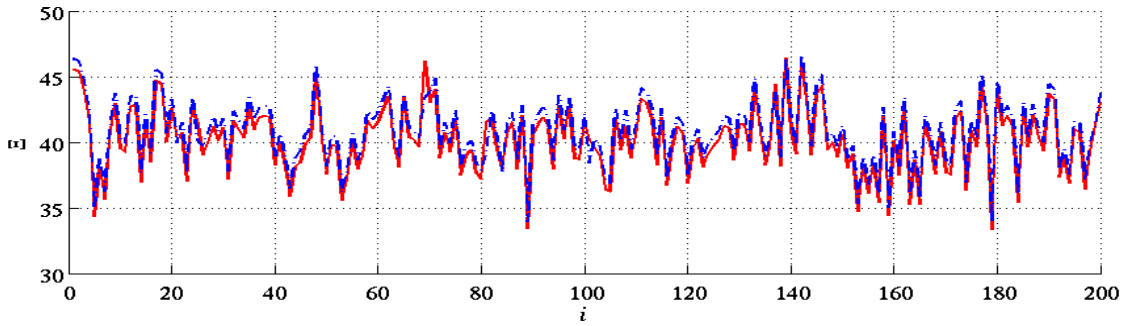
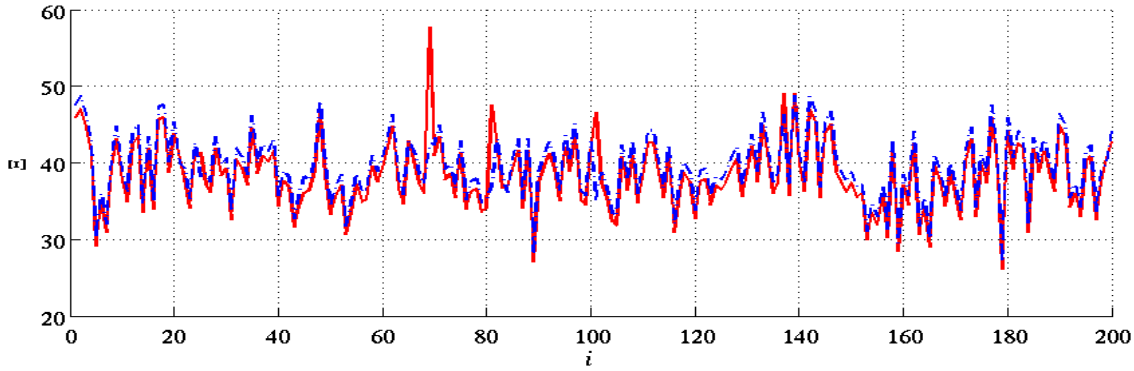


Рис. 1.6. Зависимость вероятности ошибки первого рода от объема выборки.

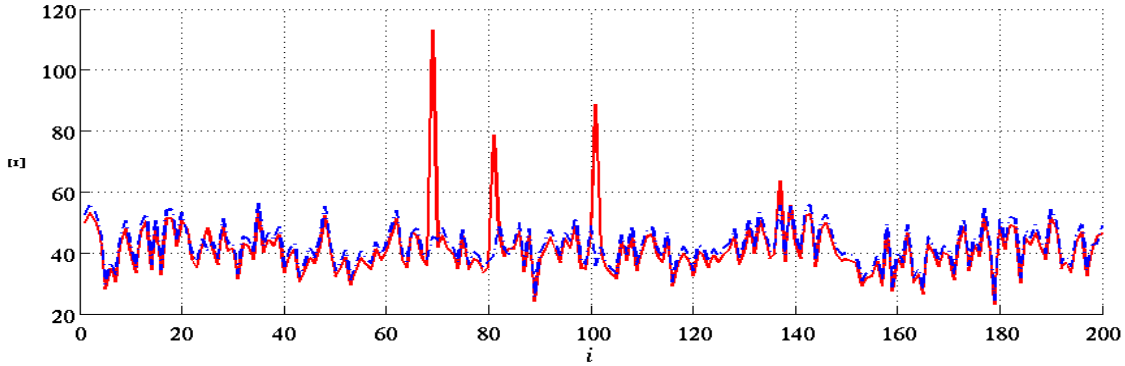
При $p = 1$ (рис. 1.7б) становятся заметными выходные отсчеты обнаружителя, в которые попали мощные импульсы, однако их амплитуда несильно превышает среднее значение выходных отсчетов обнаружителя. Их вклад невелик, и они не оказывают существенного влияния на порог обнаружения, что иллюстрируют соответствующие кривые на рис. 1.5 и 1.6. С ростом показателя степени p (рис. 1.7в и 1.7г) выходные отсчеты обнаружителя с мощными импульсами становятся все более заметными и превышают среднее значение выхода обнаружителя в несколько раз. Вклад подобных выходных отсчетов приводит к резкому увеличению порога обнаружения с ростом показателя степени p для заданных параметров шума и вероятности ошибки первого рода.



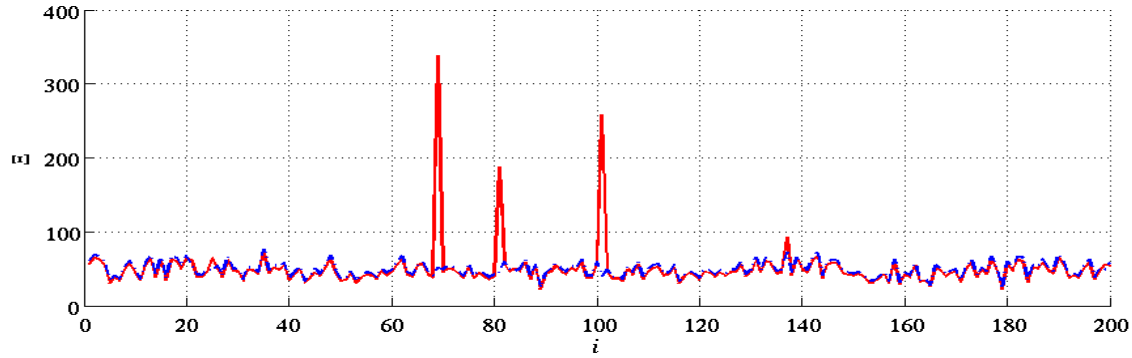
а) p = 0,5.



б) p = 1.



в) p = 2.



г) p = 2,5.

Рис. 1.7. Выборка выходных отсчетов улучшенного энергетического обнаружителя при различных шумовых воздействиях на входе.

1.4. Вероятность правильного обнаружения при улучшенном энергетическом обнаружении гауссовского сигнала в аддитивном полигауссовском шуме

Вероятность ошибки второго рода P_{E2} и вероятность правильного обнаружения [24] P_D определяются следующим образом

$$P_{E2}(T,q^2)=F_{\Xi_p}(T,q^2\,|\,H_1)\,, \tag{1.4.1}$$

$$P_D(T,q^2)=1-F_{\Xi_p}(T,q^2\,|\,H_1)\,, \tag{1.4.2}$$

где $F_{\Xi_p}(T,q^2\,|\,H_1)$ – условная функция распределения решающей статистики УЭО в случае наличия полезного сигнала, q^2 – отношение сигнал-шум, T – порог обнаружения.

В отличие от вероятности ошибки первого рода, вероятность ошибки второго рода и вероятность правильного обнаружения зависят от вида обнаруживаемого полезного сигнала. В данном параграфе рассмотрим в качестве полезного сигнала гауссовский случайный сигнал с дисперсией σ_s^2, нулевым математическим ожиданием и некоррелированными отсчетами.

Как было отмечено в параграфе 1.2, в случае, когда полезный сигнал является гауссовским с дисперсией σ_s^2, а шум – полигауссовским с дисперсиями компонент σ_v^2, аддитивная смесь сигнала и шума также является полигауссовской с дисперсиями компонент $\sigma_s^2+\sigma_v^2$:

$$f(x)=\sum_{v=1}^{V}\frac{b_v}{\sqrt{2\pi(\sigma_v{}^2+\sigma_s{}^2)}}\exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma_v{}^2+\sigma_s{}^2)}\right). \tag{1.4.3}$$

Поэтому с помощью (1.3.13)-(1.3.15) и (1.3.17) нетрудно записать выражение для функции распределения решающей статистики УЭО в случае наличия полезного сигнала $F_{\Xi_p}(T,q^2\,|\,H_1)$ в следующем виде

$$F_{\Xi_p}(T,q^2\,|\,H_1)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D_k(q^2)T^{(2k+n)/p}}{\Gamma\big((2k+n)/\,p+1\big)}, \tag{1.4.4}$$

где

$$D_0(q^2) = \left(a_0(q^2)\right)^n, \tag{1.4.5}$$

$$a_0(q^2) = \frac{\Gamma(1/p)}{p}\sum_{v=1}^{V}\frac{b_v}{\sigma_v\sqrt{1+q^2}}, \tag{1.4.6}$$

$$D_j(q^2) = \frac{1}{ja_0}\sum_{k=1}^{j}(kn-j+k)\frac{(-1)^k\Gamma\left((2k+1)/p\right)}{p2^k k!}D_{j-k}\times$$
$$\times\sum_{v=1}^{V}\frac{b_v}{\left(\sigma_v\sqrt{1+q^2}\right)^{2k+1}}, \tag{1.4.7}$$

$$q^2 = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}. \tag{1.4.8}$$

Используя (1.3.1) и (1.3.2), запишем выражения для вероятности ошибки второго рода P_{E2} и вероятности правильного обнаружения P_D в следующем виде

$$P_{E2}(T,q^2) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D_k(q^2)T^{(2k+n)/p}}{\Gamma\left((2k+n)/p+1\right)}, \tag{1.4.9}$$

$$P_D(T,q^2) = 1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{D_k(q^2)T^{(2k+n)/p}}{\Gamma\left((2k+n)/p+1\right)}. \tag{1.4.10}$$

Расчет вероятностей ошибки второго рода P_{E2} и правильного обнаружения P_D по формулам (1.4.9) и (1.4.10) производился в программе на языке Python версии 2.7 с использованием библиотеки mpmath.

Зависимости вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум $P_D(q^2)$ представлены на рис. 1.8 для различных значений показателя степени p УЭО и следующих параметрах полигауссовского шума: $V = 2$, $b_1 = 0{,}9985$, $b_2 = 0{,}0015$, $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = 100$. Порог обнаружения выбран в соответствии с критерием Неймана-Пирсона [5] и обеспечивает заданную вероятность ошибки первого рода $P_{E1} = 0{,}01$ (по стандарту 802.22 для когнитивного радио $P_{E1} < 0{,}1$ [83]). Объем выборки $n = 15$. Линиями на рисунке показаны результаты вычислений по формуле (1.4.10), а круглыми маркерами – результаты статистического моделирования вероятности правильного обнаружения [96]. Видно, что

результаты расчета по аналитическим формулам хорошо согласуются с результатами статистического моделирования характеристик УЭО. Кривые 1-4 соответствуют значениям параметра p 0,5, 1, 2 и 3 соответственно. Из хода кривых на рисунке видно, что с ростом отношения сигнал-шум q^2 вероятность правильного обнаружения увеличивается и стремится к единице при $q^2 \to \infty$. Уменьшение показателя степени p ведет к более резкому росту P_D при увеличении отношения сигнал-шум. Из рассмотренных обнаружителей наиболее эффективным (в смысле максимума вероятности правильного обнаружения при фиксированной вероятности ошибки первого рода) оказался обнаружитель со значением показателя степени p равным 0,5.

Рассмотрим зависимость вероятности ошибки второго рода от показателя степени УЭО. На рис. 1.9 представлены кривые $P_{E2}(p)$, рассчитанные аналитически, для различных значений отношения сигнал-шум q^2: 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5 и 3 (кривые 1-6 соответственно). Результаты статистического моделирования отображены на рис. 1.9 квадратными, треугольными и круглыми маркерами. Кривые, соответствующие отношениям сигнал-шум 0,5-3 имеют выраженный минимум при некотором значении p. Значение показателя степени p, при котором достигается минимальная вероятность ошибки второго рода при фиксированной вероятности ошибки первого рода, назовем оптимальным p_{opt} для заданных параметров сигнала и шума.

В табл. 1.1 представлены оптимальные значения p_{opt} для различных значений отношения сигнал-шум. В этой же таблице представлены значения вероятности ошибки второго рода P_{E2}, достигаемой при $p = p_{opt}$ и для сравнения значения вероятности ошибки второго рода P_{E2}^{EnDet} энергетического обнаружителя при тех же отношениях сигнал-шум. Из рис. 1.9 и табл. 1.1 видно, что УЭО с $p = p_{opt}$ существенно эффективнее ТЭО.

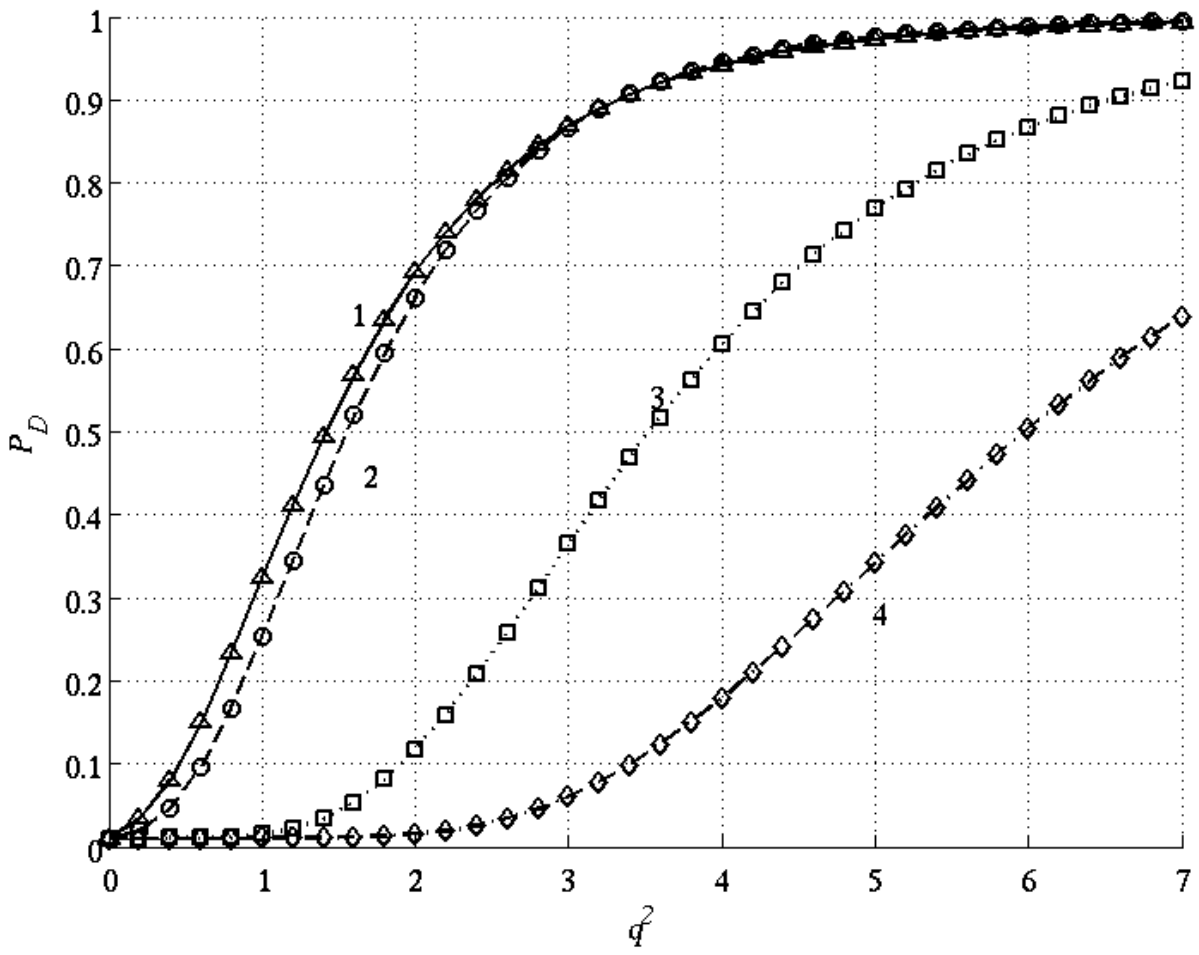


Рис. 1.8. Зависимость вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум УЭО для различных значений показателя степени.

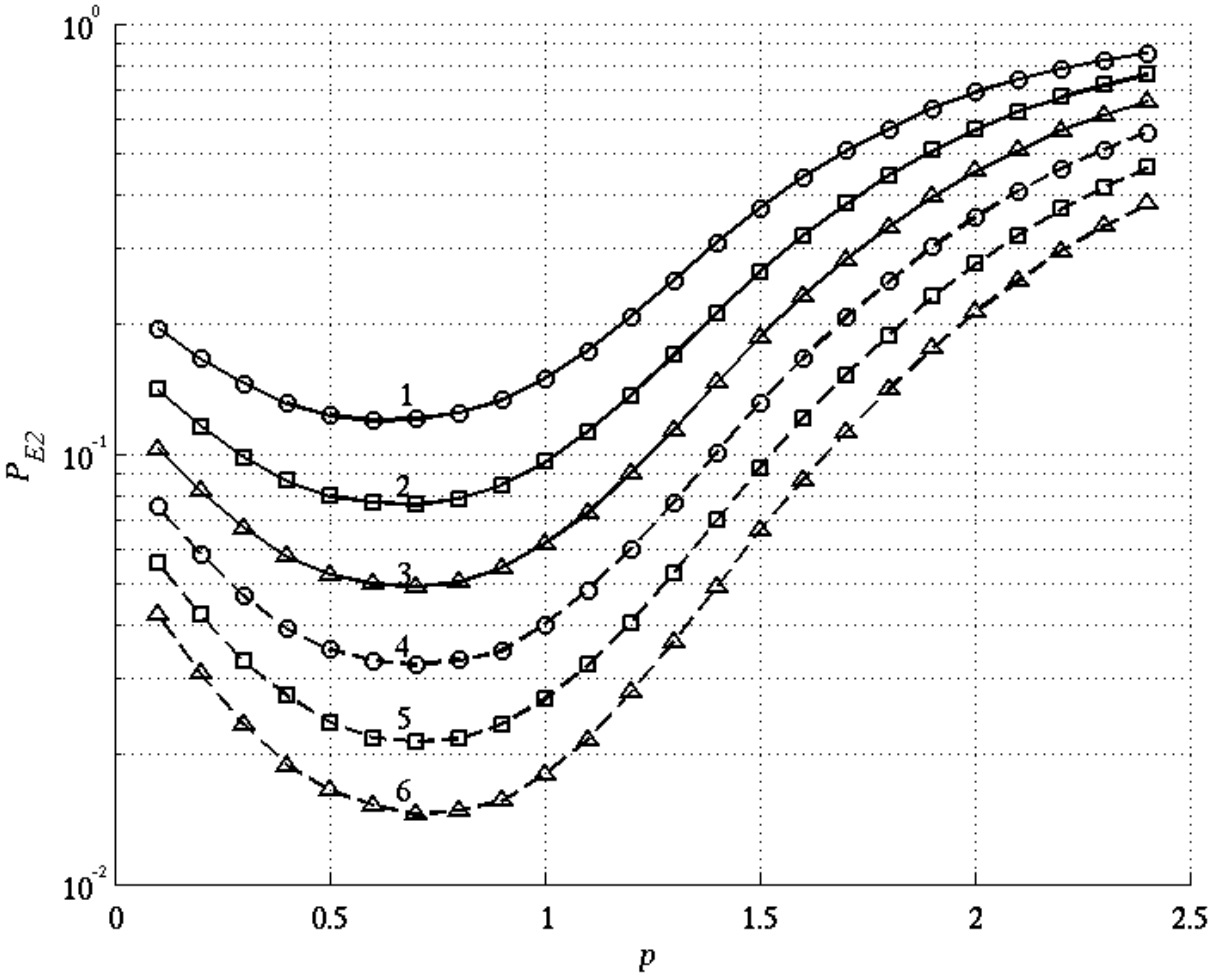


Рис. 1.9. Зависимость вероятности ошибки второго рода от показателя степени при различных значениях отношения сигнал-шум.

Табл. 1.1. Значения оптимального показателя степени p_{opt} и соответствующие им значения вероятности ошибки второго рода P_{E2} для различных отношений сигнал-шум и заданных параметрах сигнала и шума. Для сравнения в таблице представлены значения вероятности ошибки второго рода энергетического обнаружителя при указанном отношении сигнал-шум P_{E2}^{EnDet}.

q^2	p_{opt}	P_{E2}	P_{E2}^{EnDet}
3	0,6	0,119	0,693
3,5	0,7	0,076	0,567
4	0,7	0,049	0,453
4,5	0,7	0,032	0,354
5	0,7	0,021	0, 276
5,5	0,7	0,014	0,213

В предыдущем параграфе было установлено, что при $p > 1$ происходит резкий рост порога обнаружения сигнала на фоне полигауссовского шума для больших выборок (см. рис. 1.6). Из рис. 1.9 видно, что эффективность УЭО значительно снижается также при $p > 1$. Можно сделать вывод о том, что высокий порог обнаружения, обусловленный мощной импульсной составляющей, препятствует достижению высокой вероятности правильного обнаружения при $p > 1$ и рассмотренных параметрах сигнала и шума. В предыдущем параграфе также было показано, что резкого роста порога обнаружения не происходит для малых выборок (n = 5-10). Исследуем зависимость вероятности правильного обнаружения от объема выборки $P_D(n)$. На рис. 1.10 представлены зависимости вероятности правильного обнаружения от объема выборки $P_D(n)$ УЭО с показателем степени p равным единице (кривые 1 и 3) и двум (кривые 2 и 4), отношения сигнал-шум выбраны равные шести (1 и 2) и трем (кривые 3 и 4). Указанные характеристики рассчитаны по формуле (1.4.10), маркерами на кривых 1-4 отмечены результаты статистического моделирования. Параметры шума выбраны следующие: $V = 2$, $b_1 = 0{,}9985$, $b_2 = 0{,}0015$, $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 100$. В предыдущем параграфе установлено, что для полигауссовского шума с параметрами $V = 2$, $b_1 = 0{,}9985$, $b_2 = 0{,}0015$, $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 100$ порог обнаружения энергетического обнаружителя (показатель степени $p = 2$) резко возрастает при объеме выборки $n > 10$ (см. рис. 1.6.). Влияние этого резкого роста порога можно наблюдать и на рис. 1.10 (кривые 2 и 4). Из хода указанных кривых видно, что при увеличении объема выборки от единицы до десяти наблюдается рост вероятности правильного обнаружения, однако при переходе через точку $n = 10$ рост останавливается, и начинается резкое убывание вероятности правильного обнаружения: завышенный порог обнаружения, обусловленный мощной импульсной составляющей шума, существенно снижает эффективность традиционного энергетического обнаружителя. Можно наблюдать, что после достижения некоторого минимального значения вероятности правильного обнаружения присутствует ее слабый рост с увеличением объема выборки. Это

объясняется тем, что вклад редких мощных импульсов в общую энергию выборки уменьшается с увеличением ее объема. Как видно из рис. 1.6, резкого роста порога обнаружения для УЭО с $p = 1$ не наблюдается, как и не наблюдается убывания вероятности правильного обнаружения при росте объема выборки на рис. 1.10 (кривые 1 и 3). Несмотря на то, что УЭО с $p = 1$ несколько проигрывает ТЭО при объеме выборки $1 < n \leq 10$, первый заметно превосходит второй при $n > 10$.

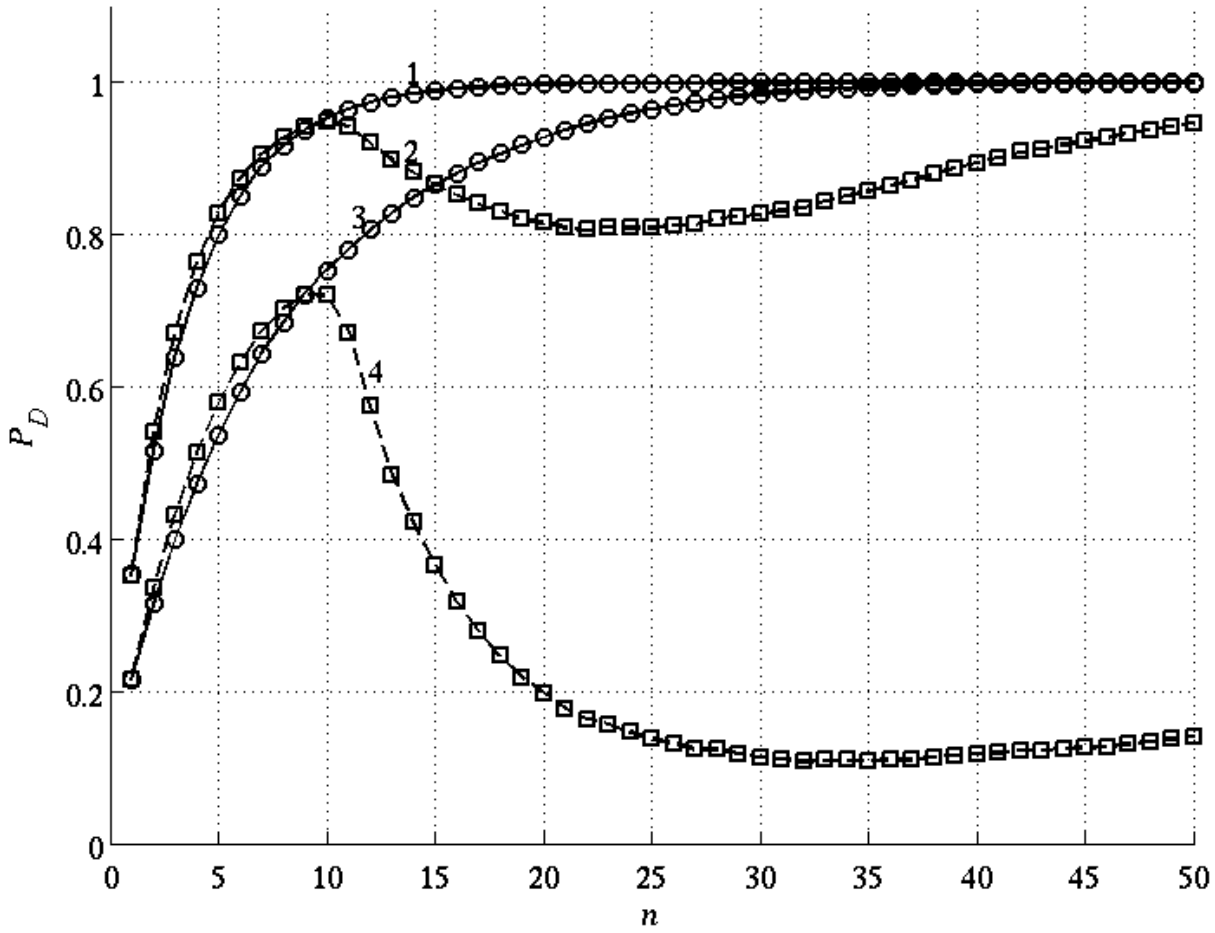


Рис. 1.10. Зависимость вероятности правильного обнаружения от объема выборки $P_D(n)$ при различных значениях отношения сигнал-шум q^2 и показателя степени p.

Сравним эффективность оптимального обнаружителя и УЭО. На рис. 1.11 представлены зависимости вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум для оптимального обнаружителя (кривая 1), УЭО с показателями степени $p = 0{,}7$ и $p = 1$ (кривые 2 и 3 соответственно) и ТЭО (кривая 4). Статистическое моделирование характеристик оптимального обнаружителя осуществлялось с помощью выражения (1.2.9). Параметры шума выбраны следующие: $V = 2$, $b_1 = 0{,}9985$, $b_2 = 0{,}0015$, $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 100$, объем выборки обнаружения $n = 15$. Указанные показатели степени улучшенного энергетического обнаружителя выбраны такими, поскольку $p = 0{,}7$ является оптимальным для заданных параметров шума в достаточно широком диапазоне значений отношения сигнал-шум (см. рис. 1.9 и табл. 1.1), а $p = 1$ обеспечивает наиболее простой вид решающей статистики (не требуется операция возведения в степень). Назовем улучшенный энергетический обнаружитель с показателем $p = 1$ энергоподобным [98, 100]. В таблице 1.2 представлены значения выигрыша оптимального обнаружителя над другими рассмотренными обнаружителями, рассчитанные по следующей формуле

$$G = \frac{q_0^2 - q_{0,opt}^2}{q_{0,opt}^2} \times 100\%, \qquad (1.4.11)$$

где q_0^2 и $q_{0,opt}^2$ – отношения сигнал-шум, при которых достигается заданная вероятность правильного обнаружения для неоптимального и оптимального обнаружителей соответственно. Из табл. 1.2 и рис. 1.11 видно, что ТЭО существенно проигрывает оптимальному обнаружителю, выигрыш которого равен 183% в отношении сигнал-шум для вероятности правильного обнаружения $P_D = 0{,}9$ при фиксированной вероятности ошибки первого рода $P_{E1} = 0{,}01$. При этом выигрыш оптимального обнаружителя в отношении сигнал-шум над УЭО равен 39% и 43% для показателей степени $p = 0{,}7$ и $p = 1$ соответственно и $P_D = 0{,}9$ при $P_{E1} = 0{,}01$. Таким образом, небольшое изменение структуры энергетического обнаружителя позволило достичь заданной вероятности

правильного обнаружения случайного сигнала на фоне полигауссовского шума при меньшем отношении сигнал-шум.

В табл. 1.3 приведены значения выигрыша УЭО с оптимальным значением показателя степени над УЭО с другими значениями показателя степени. Выигрыш рассчитывается по следующей формуле

$$G = \frac{q_p^2 - q_{p_{opt}}^2}{q_{p_{opt}}^2} \times 100\%, \qquad (1.4.12)$$

где q_p^2 и $q_{p_{opt}}^2$ – отношения сигнал-шум, при которых достигается заданная вероятность правильного обнаружения для обнаружителей с неоптимальным значением показателя степени и с оптимальным соответственно. Из табл. 1.3 и рис. 1.11 видно, что УЭО с оптимальным показателем степени превосходит энергоподобный обнаружитель. Однако выигрыш первого не превышает 9%, при этом второй обладает заметно более простой структурой, так как не требует операции возведения входных отсчетов в степень. Кроме того, из табл. 1.3 видно, что выигрыш в отношении сигнал-шум УЭО с оптимальным значением показателя степени над ТЭО равен 103% для вероятности правильного обнаружения $P_D = 0{,}9$ при фиксированной вероятности ошибки первого рода $P_{E1} = 0{,}01$. Как уже отмечалось выше, причиной такой низкой эффективности энергетического обнаружителя является высокий порог обнаружения, обусловленный мощной импульсной составляющей шума.

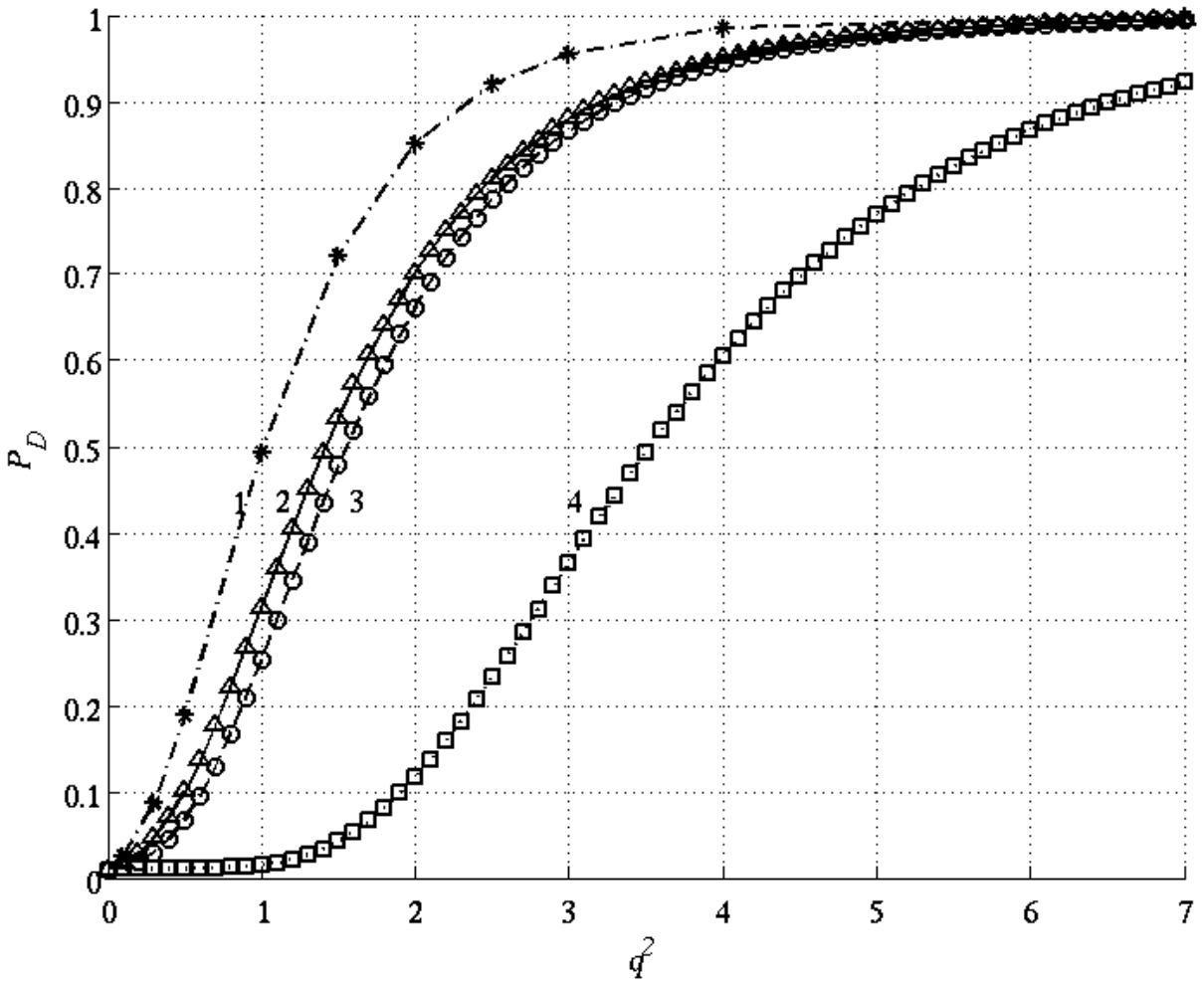


Рис. 1.11. Сравнение эффективности оптимального, улучшенного энергетического и традиционного энергетического обнаружителей.

Табл. 1.2. Значения выигрыша оптимального обнаружителя над УЭО и ТЭО.

P_D	p = 0,7	p = 1	p = 2
0,5	41%	53%	249%
0,6	39%	50%	229%
0,7	39%	48%	214%
0,8	39%	46%	199%
0,9	39%	43%	183%

Табл. 1.3. Значения выигрыша УЭО с оптимальным показателем степени на ТЭО и энергоподобным.

P_D	p = 1	p = 2
0,5	9%	148%
0,6	8%	136%
0,7	6%	126%
0,8	5%	116%
0,9	3%	103%

Исследуем зависимость оптимального значения показателя степени УЭО от параметров шума b_1 и b_2 при фиксированном объеме выборки n = 20 и отношении сигнал-шум q^2 = 1. Параметры шума выбраны следующими: V = 2, $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 100$, вероятность ошибки первого рода фиксирована и равна 0,01. Кривая $p_{opt}(b_2)$ представлена на рис. 1.12. Параметр b_2 характеризуют частоту появления мощных импульсов, при $b_2 = 0$ полигауссовская модель шума с $V = 2$ переходит в гауссовскую (т.е. импульсы отсутствуют). Из хода кривой на рис. 1.12 видно, что при небольших значениях параметра b_2 оптимальное значение показателя степени близко к 2. С ростом b_2 оптимальный показатель степени p_{opt} уменьшается и становится равным 0,6 при b_2 > 0,0011.

На рис. 1.13 представлена зависимость оптимального значения показателя степени УЭО от отношения дисперсий компонент шума $p_{opt}(R)$, $R = \sigma_2^2 / \sigma_1^2$, при этом остальные параметры шума остаются фиксированными: V = 2, b_1 = 0,9985, b_2 = 0,0015, а объем выборки n = 20. Из хода кривой на рис. 1.13 видно, что с ростом мощности импульсной компоненты шума оптимальное значение показателя степени уменьшается и достигает 0,6 при R = 150.

На рис. 1.14 представлена зависимость оптимального показателя степени УЭО от объема выборки обнаружения $p_{opt}(n)$. Параметры шума выбраны следующими: V = 2, b_1 = 0,9985, b_2 = 0,0015, $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 100$. Из хода кривой видно, что с ростом объема выборки обнаружения n с 5 до 15 значение оптимального показателя степени улучшенного энергетического обнаружителя p_{opt} уменьшается с 2 до 0,6. При дальнейшем росте n с 15 до 25 оптимальный показатель степени остается неизменным.

Таким образом, согласно представленным зависимостям на рис 1.12-1.14 можно сделать вывод о том, что оптимальное значение показателя степени УЭО зависит от параметров полигауссовского шума и объема выборки обнаружения n и лежит в пределах от 0,6 до 2.

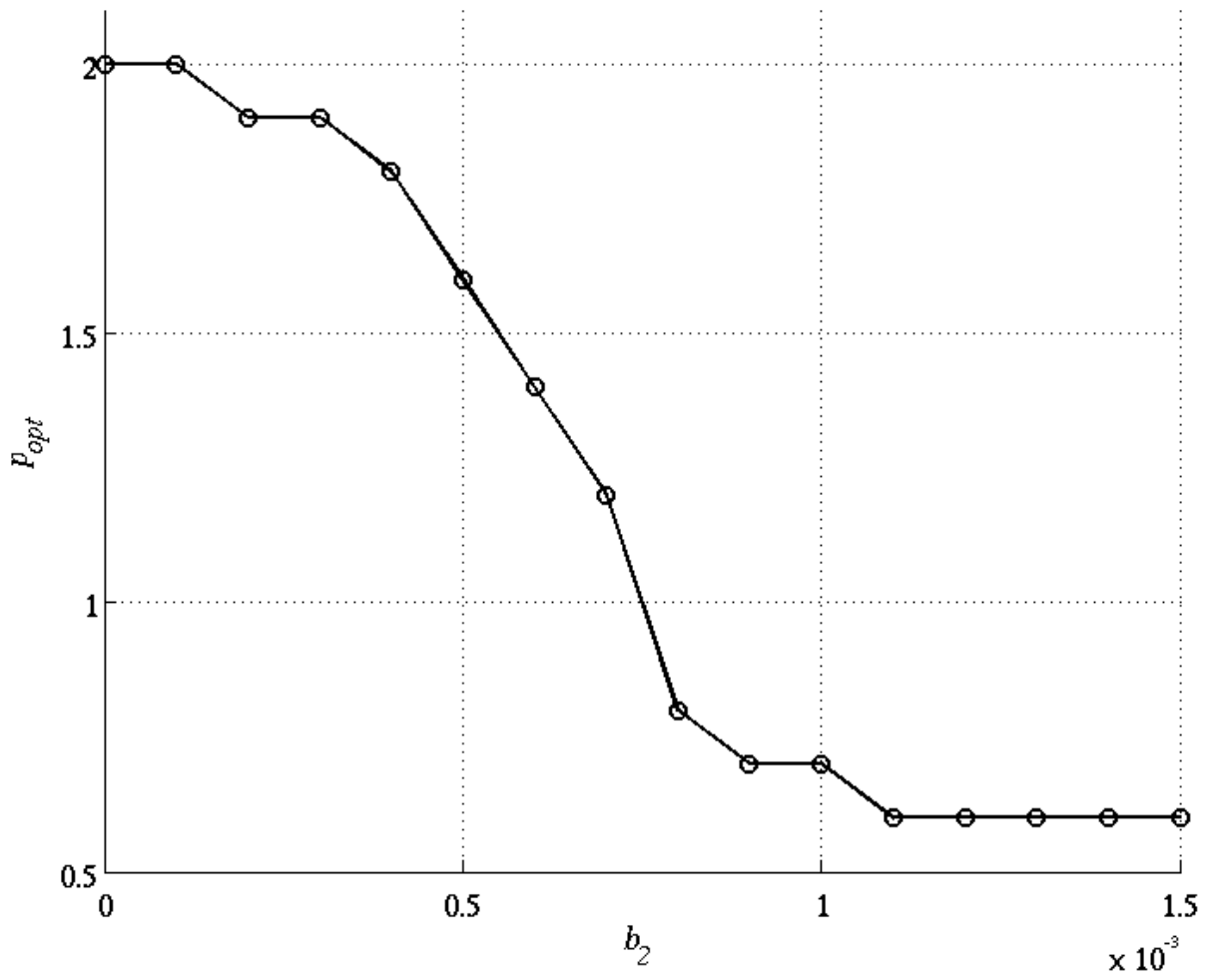


Рис. 1.12. Зависимость оптимального показателя степени от параметра полигауссовского шума b_2.

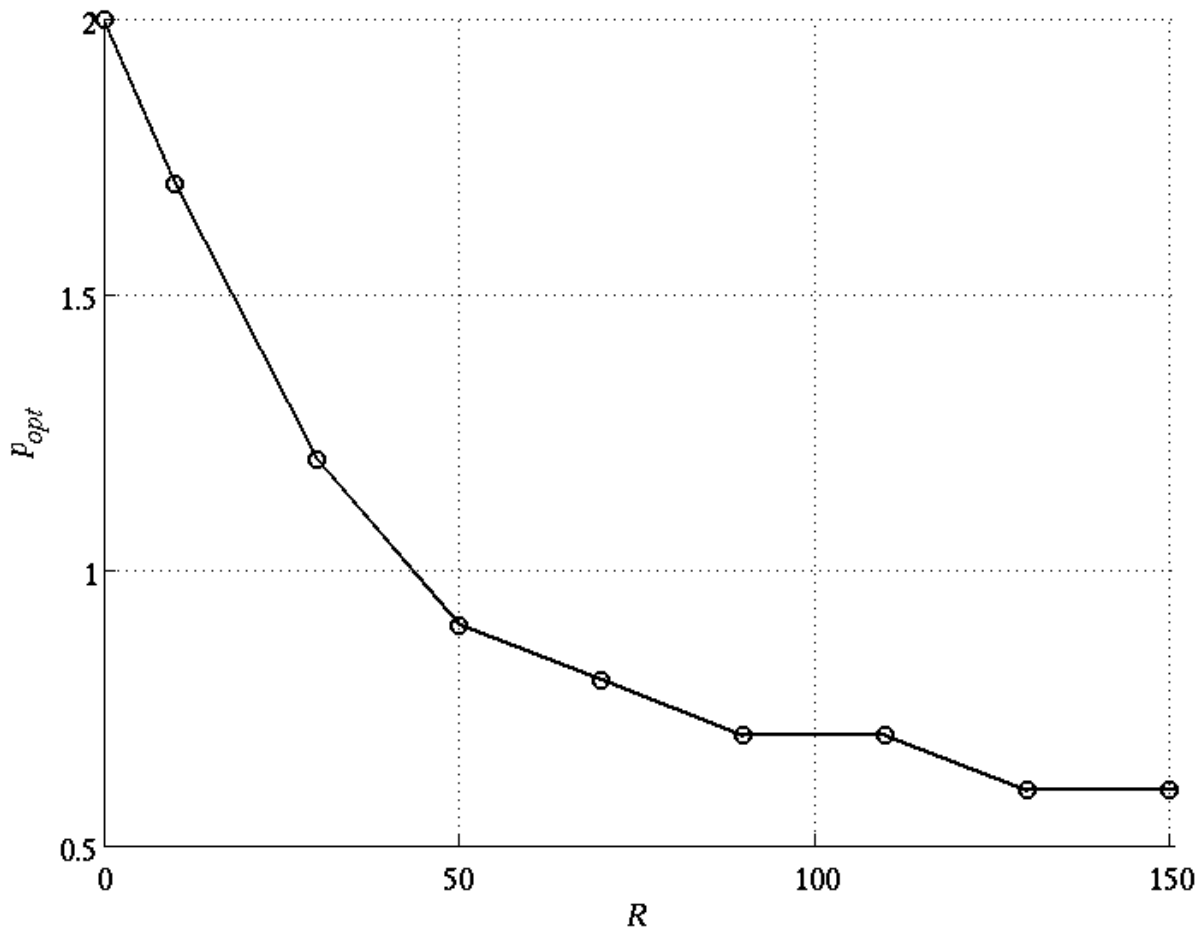


Рис. 1.13. Зависимость оптимального показателя степени от отношения дисперсий двухкомпонентного полигауссовского шума.

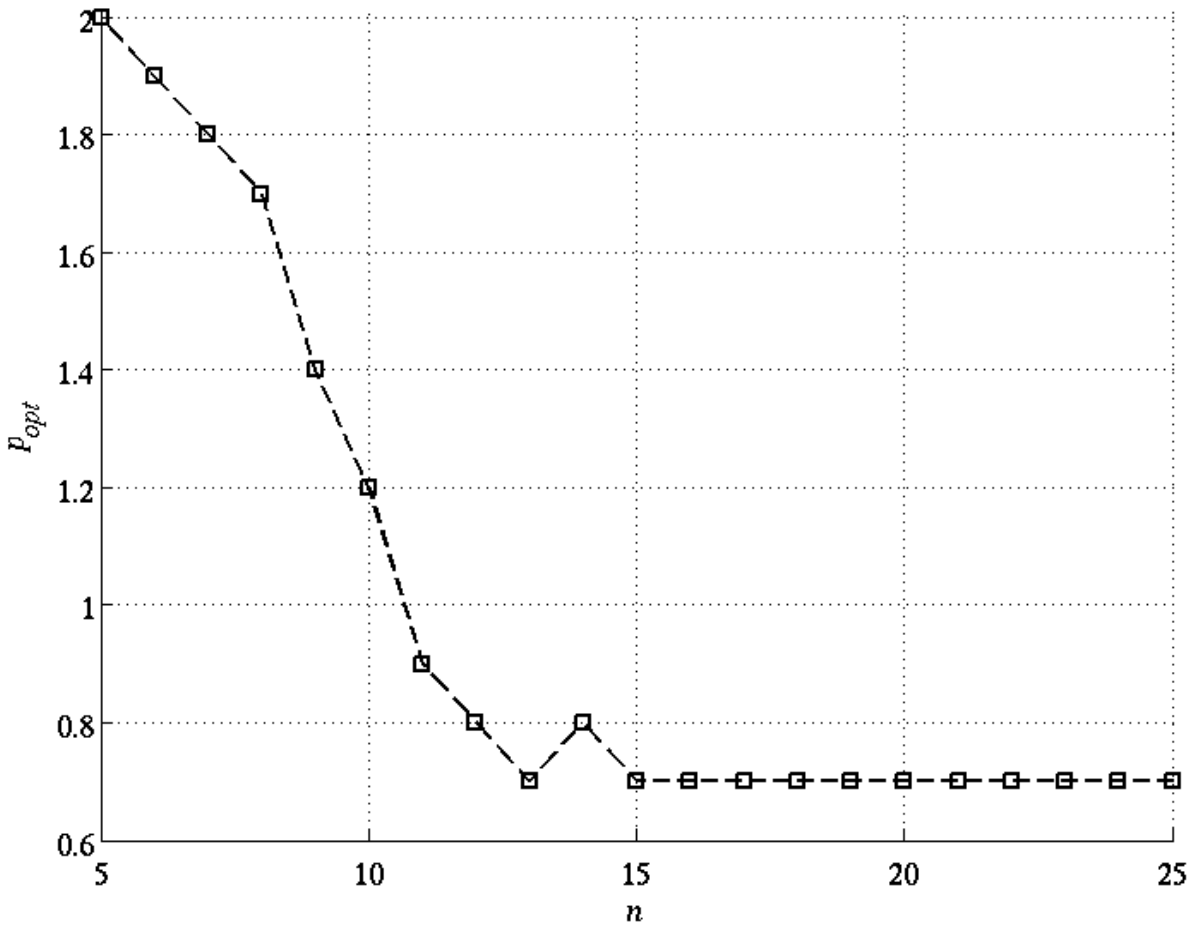


Рис. 1.14. Зависимость оптимального показателя степени от объема выборки.

1.5. Вероятность правильного обнаружения при улучшенном энергетическом обнаружении неизвестного детерминированного сигнала в аддитивном полигауссовском шуме

В предыдущих параграфах исследованы характеристики улучшенного энергетического обнаружения случайного гауссовского сигнала на фоне полигауссовского шума. Установлено, что наличие мощных редких импульсов в шуме существенно влияет на характеристики обнаружения, а параметры шума и объем выборки обнаружения во многом определяют значение оптимального показателя степени обнаружителя. Представляется интересным определить характеристики УЭО при другом виде полезного сигнала.

В настоящем параграфе рассмотрим улучшенное энергетическое обнаружение детерминированного сигнала на фоне полигауссовского шума [97]. Очевидно, что при $p \neq 2$ форма полезного детерминированного сигнала будет оказывать влияние на характеристики обобщенного энергетического обнаружителя [95]. Поэтому для сравнения выбраны два различных детерминированных сигнала (сигнал 1 и сигнал 2), представленных на рис. 1.15. Характеристики обнаружения детерминированных сигналов не удалось представить в аналитическом виде, поэтому для их определения воспользуемся статистическим моделированием. При моделировании использовалось 10^6 выборок шума, вероятность ошибки первого рода зафиксирована на уровне 0,01, отношение сигнал-шум определяется выражением (1.2.15).

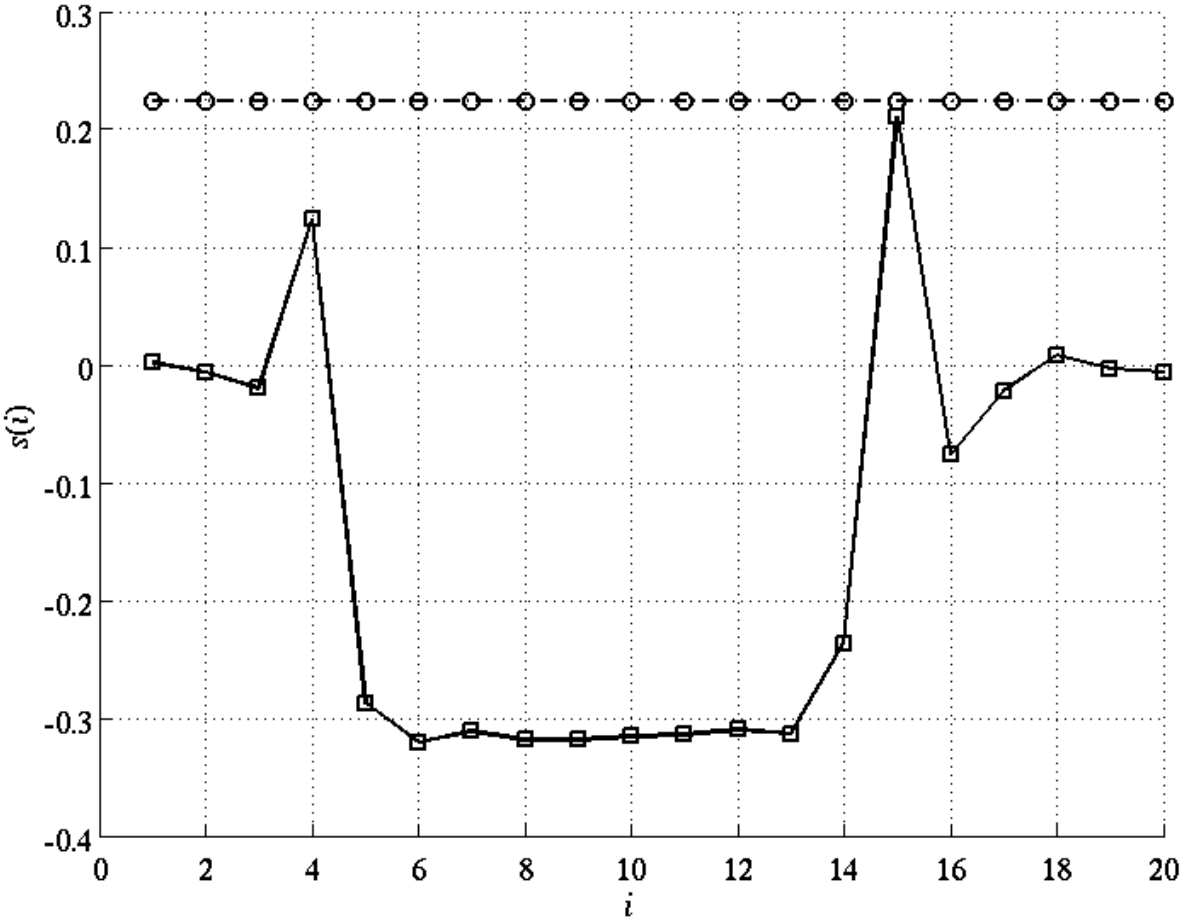


Рис. 1.15. Форма обнаруживаемых сигналов.

На рис. 1.16 представлены зависимости вероятности ошибки второго рода от показателя степени $P_{E2}(p)$ УЭО детерминированных сигналов на фоне полигауссовского шума. Штрихпунктирными линиями с круглыми маркерами показаны кривые, соответствующие сигналу 1, а сплошными линиями с квадратными маркерами – кривые, соответствующие сигналу 2. Кривые 1-6 соответствуют отношениям сигнал-шум q^2 = 1, 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5. Параметры шума выбрана следующими: $V = 2$, $b_1 = 0{,}9985$, $b_2 = 0{,}0015$, $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 100$, объем выборки обнаружения $n = 20$. Из хода кривых на рис. 1.16 видно, что

1) Форма сигнала влияет на величину вероятности правильного обнаружения, которая немного больше для константного сигнала.
2) В точке $p = 2$ кривые, соответствующие различным сигналам совпадают, т.е. в частном случае энергетического обнаружения отсутствует зависимость от формы сигнала, играет роль только его энергия.
3) Оптимальное значение показателя степени при обнаружении детерминированного сигнала, слабо отличается от полученного ранее для случайного гауссовского полезного сигнала. Оптимальные значения показателей степени представлены в таблицах 1.4 и 1.5 для двух обнаруживаемых сигналов и различных отношений сигнал-шум.
4) При $p > p_{opt}$ происходит резкое уменьшение вероятности правильного обнаружения, а значит и эффективности УЭО. Так, энергетический обнаружитель существенно проигрывает в эффективности УЭО с оптимальным значением показателя степени.

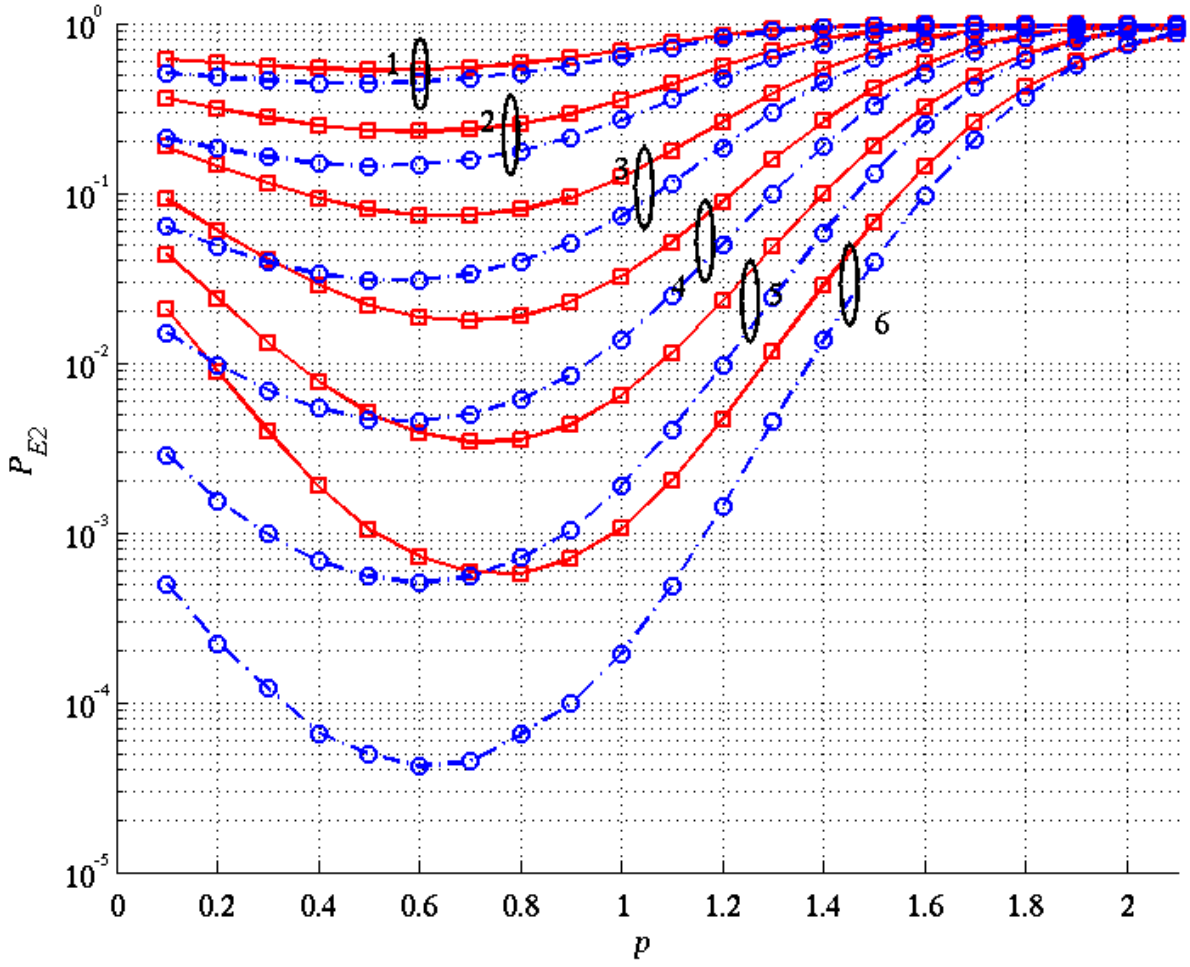


Рис. 1.16. Зависимость вероятности ошибки второго рода от показателя степени при различных значениях отношения сигнал-шум.

Табл. 1.4. Значения оптимального показателя степени p_{opt} для детерминированного сигнала 1 и соответствующие им значения вероятности ошибки второго рода P_{E2} для различных отношений сигнал-шум и заданных параметрах сигнала и шума. Для сравнения в таблице представлены значения вероятности ошибки второго рода энергетического обнаружителя при указанном отношении сигнал-шум P_{E2}^{EnDet}.

q^2	p_{opt}	P_{E2}	P_{E2}^{EnDet}
1	0,5	0,442	0,988
1,5	0,5	0,144	0,987
2	0,5	0,031	0,982
2,5	0,6	0,005	0,962
3	0,6	0,0005	0,893
3,5	0,6	0,00004	0,745

Табл. 1.5. Значения оптимального показателя степени p_{opt} для детерминированного сигнала 2 и соответствующие им значения вероятности ошибки второго рода P_{E2} для различных отношений сигнал-шум и заданных параметрах сигнала и шума. Для сравнения в таблице представлены значения вероятности ошибки второго рода энергетического обнаружителя при указанном отношении сигнал-шум P_{E2}^{EnDet}.

q^2	p_{opt}	P_{E2}	P_{E2}^{EnDet}
1	0,5	0,528	0,988
1,5	0,6	0,223	0,987
2	0,7	0,073	0,982
2,5	0,7	0,017	0,962
3	0,7	0,003	0,893
3,5	0,7	0,0005	0,745

Используя найденные оптимальные значения показателя степени УЭО, сравним эффективность оптимального обнаружителя и УЭО. На рис. 1.17 изображены кривые, представляющие собой зависимости вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум для оптимального обнаружителя (черная кривая с ромбовидными маркерами), УЭО с оптимальным показателем степени (кривая 2), энергоподобного обнаружителя (кривая 3) и ТЭО (кривые 4). Штрихпунктирные кривые соответствуют сигналу 1, а сплошные кривые – сигналу 2. Статистическое моделирование характеристик оптимального обнаружителя осуществлялось с помощью выражения (1.2.10). Параметры шума выбраны следующими: $V = 2$, $b_1 = 0{,}9985$, $b_2 = 0{,}0015$, $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 100$.

В таблице 1.6 представлены значения выигрышей оптимального обнаружителя над УЭО и ТЭО, рассчитанные по формуле (1.4.11) для детерминированного сигнала 2. Из табл. 1.6 и рис. 1.15 видно, что ТЭО существенно проигрывает оптимальному обнаружителю, выигрыш последнего достигает 831% в отношении сигнал-шум при вероятности правильного обнаружения $P_D = 0{,}9$ и фиксированной вероятности ошибки первого рода $P_{E1} = 0{,}01$. При этом выигрыш оптимального обнаружителя в отношении сигнал-шум над УЭО равен 229% и 267% для показателей степени $p = 0{,}6$ и $p = 1$ соответственно при $P_D = 0{,}9$ и $P_{E1} = 0{,}01$.

В табл. 1.7 приведены значения выигрыша УЭО с оптимальным значением показателя степени над УЭО с другими значениями показателя степени для детерминированного сигнала 2. Выигрыш рассчитывается по формуле (1.4.12). Из табл. 1.7 и рис. 1.15 видно, что УЭО с оптимальным значением показателя степени превосходит энергоподобный обнаружитель и его выигрыш в отношении сигнал-шум равен 22% для вероятности правильного обнаружения $P_D = 0{,}9$ при фиксированной вероятности ошибки первого рода $P_{E1} = 0{,}01$. Кроме того, из табл. 1.7 видно, что выигрыш в отношении сигнал-шум УЭО с оптимальным значением показателя степени над ТЭО достигает 171% при $P_D = 0{,}9$ и $P_{E1} = 0{,}01$.

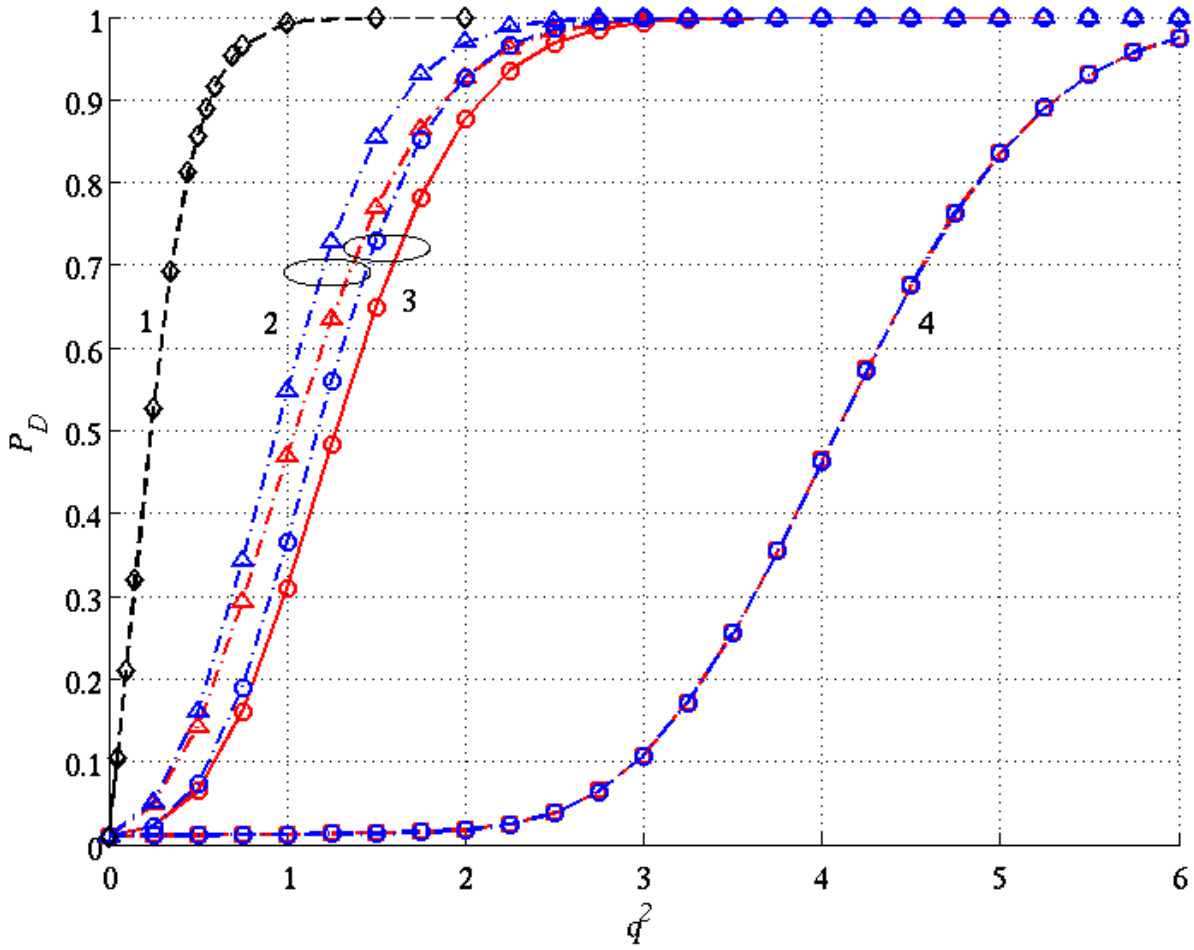


Рис. 1.17. Зависимость вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум оптимального и УЭО детерминированных сигналов.

Табл. 1.6. Значения выигрыша оптимального обнаружителя над УЭО, ТЭО и энергоподобным обнаружителем.

P_D	p = 0,6	p = 1	p = 2
0,5	344%	443%	1636%
0,6	310%	391%	1386%
0,7	285%	347%	1186%
0,8	257%	307%	1007%
0,9	229%	267%	831%

Табл. 1.7. Значения выигрыша УЭО с оптимальным значением показателя степени над энергподобным обнаружителем и ТЭО.

P_D	p = 1	p = 2
0,5	22%	290%
0,6	20%	262%
0,7	16%	234%
0,8	14%	210%
0,9	11%	171%

Основные результаты и выводы

1) Получены аналитические выражения для вероятности ошибки первого рода УЭО, с их помощью рассмотрено влияние импульсной составляющей шума на порог обнаружения при различных значениях показателя степени обнаружителя и объема выборки обнаружения. Величина порога обнаружения зависит от параметров полигауссовского шума, объема выборки обнаружения и показателя степени УЭО.
2) Получены аналитические выражения для вероятности правильного обнаружения УЭО случайного гауссовского сигнала на фоне полигауссовского шума, с их помощью найдены оптимальные показатели степени УЭО. Оптимальное значение показателя степени УЭО зависит от параметров полигауссовского шума, объема выборки обнаружения и вида обнаруживаемого сигнала.
3) С помощью полученных аналитических выражений для вероятности правильного обнаружения проведен сравнительный анализ эффективности УЭО с ТЭО и оптимальным обнаружителем. УЭО с оптимальным показателем степени обладает большей вероятностью правильного обнаружения при фиксированной вероятности ошибки первого рода, чем ТЭО. Выигрыш в отношении сигнал-шум первого над последним достигает 103% для $P_D = 0{,}9$ и рассмотренных параметров шума.
4) С помощью статистического моделирования исследована зависимость оптимального показателя степени обнаружителя от формы детерминированного сигнала, определены значения оптимального показателя степени для рассмотренных сигналов.
5) Проведено сравнение вероятности правильного обнаружения при фиксированной вероятности ошибки первого рода УЭО, ТЭО и оптимального обнаружителей детерминированного сигнала. Выигрыш УЭО в отношении сигнал-шум над ТЭО достигает 171% для $P_D = 0{,}9$ и рассмотренных параметров шума.

Глава 2. Улучшенное энергетическое обнаружение в аддитивном обобщенном гауссовском шуме

2.1. Обобщенный гауссовский шум

В настоящей главе рассмотрено улучшенное энергетическое обнаружение гауссовского сигнала на фоне негауссовского шума, описываемого другой распространенной [29, 42, 50, 51, 56, 64] моделью, а именно моделью обобщенного гауссовского шума. Представляется интересным сравнить эффективность традиционного энергетического обнаружения и улучшенного энергетического, определить оптимальное значение показателя степени УЭО. Кроме того, рассчитать, насколько оптимальный обнаружитель сигналов на фоне обобщенного гауссовского шума превосходит УЭО.

Одномерная плотность вероятности обобщенного гауссовского шума с нулевым математическим ожиданием задается в виде [29, 42, 64]

$$g(x) = \frac{\beta}{2\alpha\Gamma(1/\beta)} \exp\left(-\left(\frac{|x|}{\alpha} \right)^{\beta} \right), \qquad (2.1.1)$$

где α и β – параметры распределения, $\alpha = \sigma_n \sqrt{\Gamma(1/\beta)/\Gamma(3/\beta)}$, σ_n^2 – дисперсия шума. Как частные случаи (2.1.1) содержит в себе плотности вероятности Лапласа (β = 1) и гауссовскую (β = 2).

Модель обобщенного гауссовского шума используется для описания импульсных помех [29, 42] и может быть использована для описания шума с тяжелыми (при $\beta < 2$) и легкими хвостами распределения по сравнению с гауссовским (при $\beta > 2$) [42].

На рис. 2.1 представлены плотности вероятности обобщенного гауссовского шума при β = 1, 2 и 5 (кривые 1-3 соответственно), а на рис. 2.2 и 2.3 выборки обобщенного полигауссовского шума длиной 5000 отсчетов.

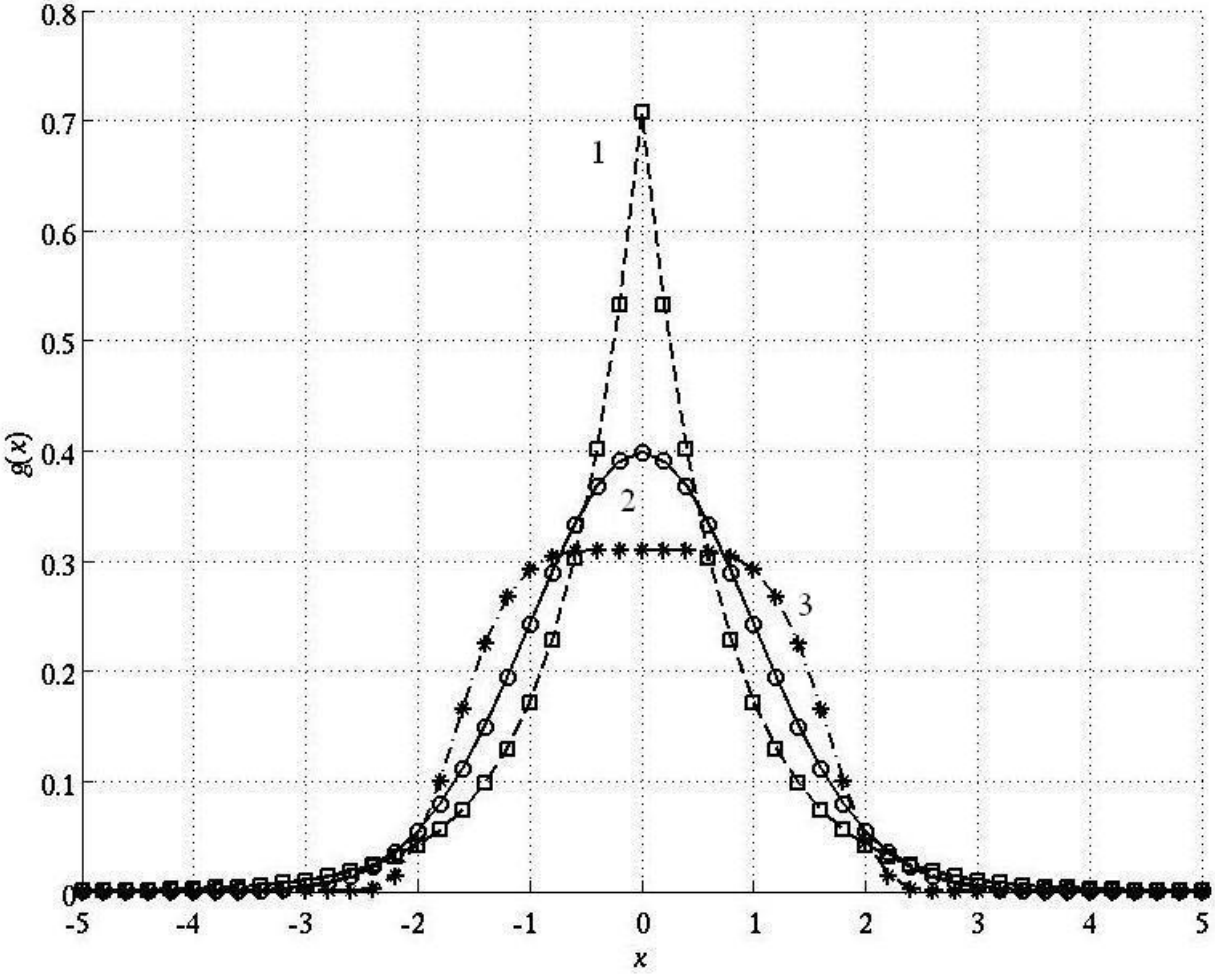


Рис. 2.1. Плотность вероятности обобщенного гауссовского шума при различных значениях параметра β.

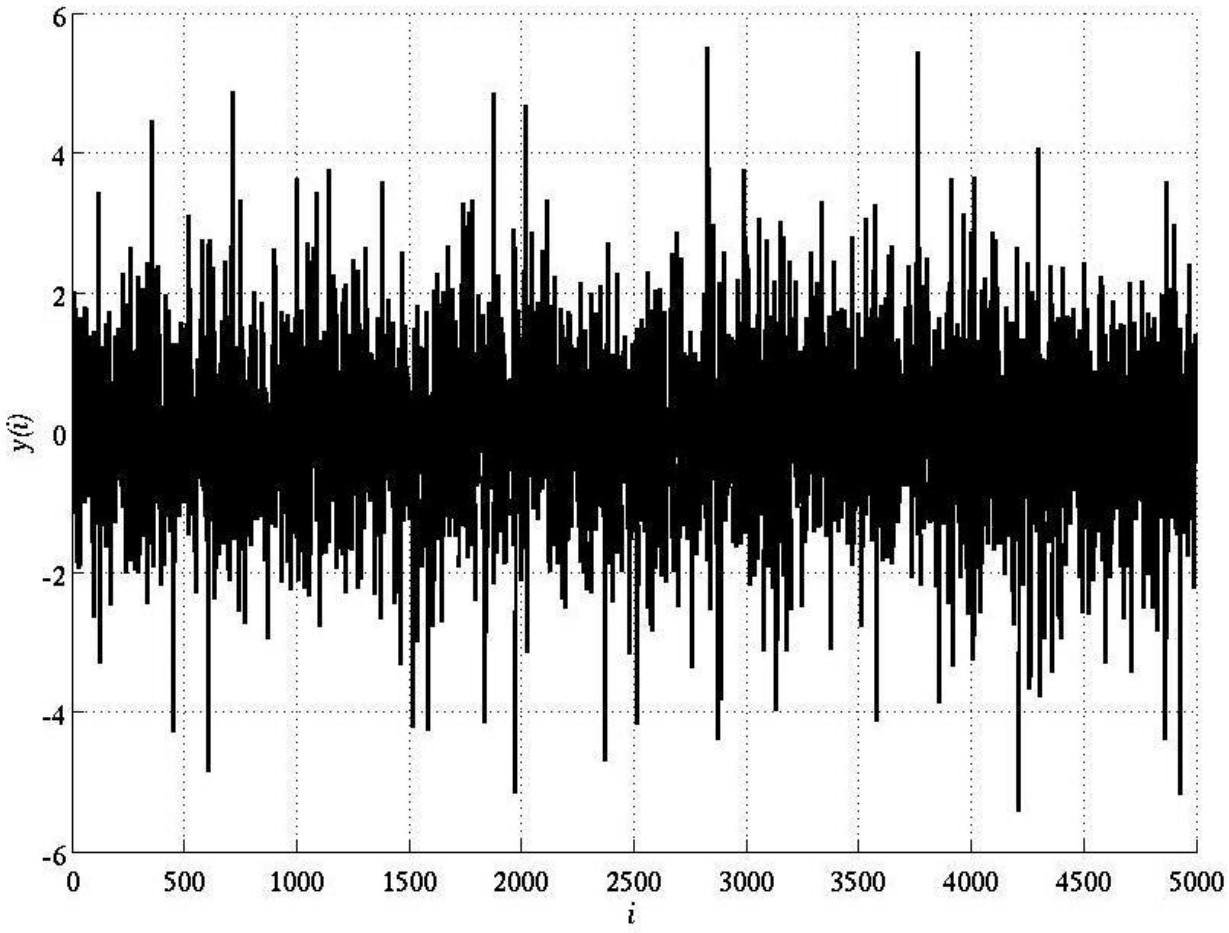


Рис. 2.2. Выборка обобщенного гауссовского шума при $\beta = 1$.

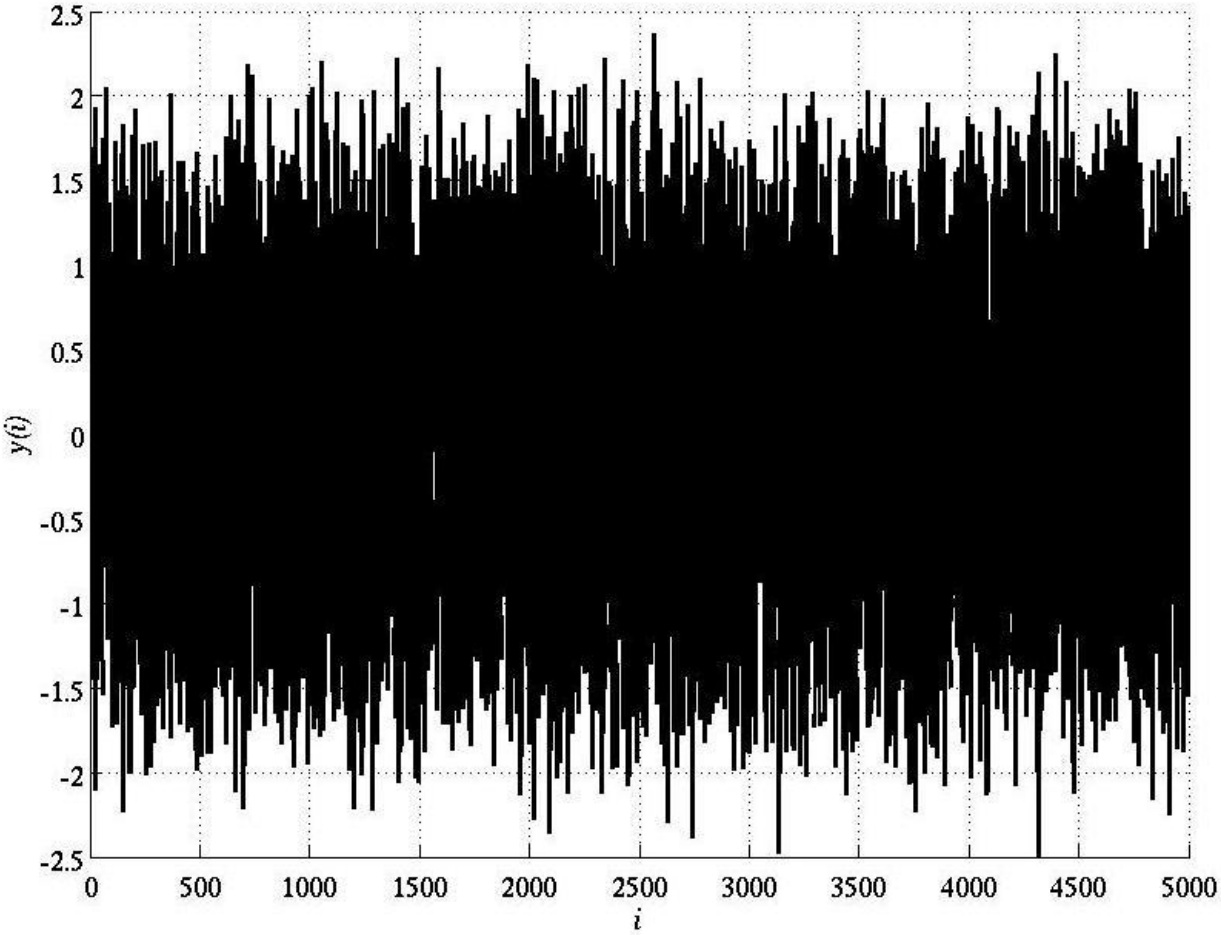


Рис. 2.3. Выборка 2 обобщенного гауссовского шума β = 5.

2.2. Оптимальное обнаружение сигналов в аддитивном обобщенном гауссовском шуме

Вывод решающей статистики оптимального обнаружителя сигналов в обобщенном гауссовском шуме аналогичен проведенному в параграфе 1.2. Рассматривая те же модели полезного сигнала и принимая во внимание вид плотности вероятности обобщенного гауссовского шума (2.1.1), получим следующие выражения для решающих статистик обнаружителей случайного гауссовского и детерминированного сигналов соответственно

$$\Xi_{opI} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{|x|}{\alpha} \right)^{\beta} - \left(\frac{y_i - x}{2\sigma_s^2} \right)^2 \right) dx}{\prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\left(\frac{|y_i|}{\alpha} \right)^{\beta} \right)}, \qquad (2.2.1)$$

$$\Xi_{opII} = \exp\left(\frac{1}{\alpha^{\beta}} \sum_{i=1}^{n} \left(\left(|y_i| \right)^{\beta} - \left(|y_i - s_i| \right)^{\beta} \right) \right). \qquad (2.2.2)$$

Будем использовать характеристики полученных оптимальных обнаружителей для сравнения с характеристиками УЭО сигналов в обобщенном гауссовском шуме. Найти характеристики данных оптимальных обнаружителей в аналитическом виде затруднительно, поэтому получим их с помощью статистического моделирования. В моделировании использовалось 10^6 реализаций сигнала и шума, порог обнаружения выбран в соответствии с вероятностью ошибки первого рода 0,01. Отношения сигнал-шум определяются выражениями (1.2.14) и (1.2.15).

На рис. 2.4 представлены зависимости вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум $P_D(q^2)$ оптимального обнаружителя гауссовского случайного сигнала в обобщенном гауссовском шуме при следующих параметрах: β = 1,5 (кривая 1), β = 3 (кривая 2).

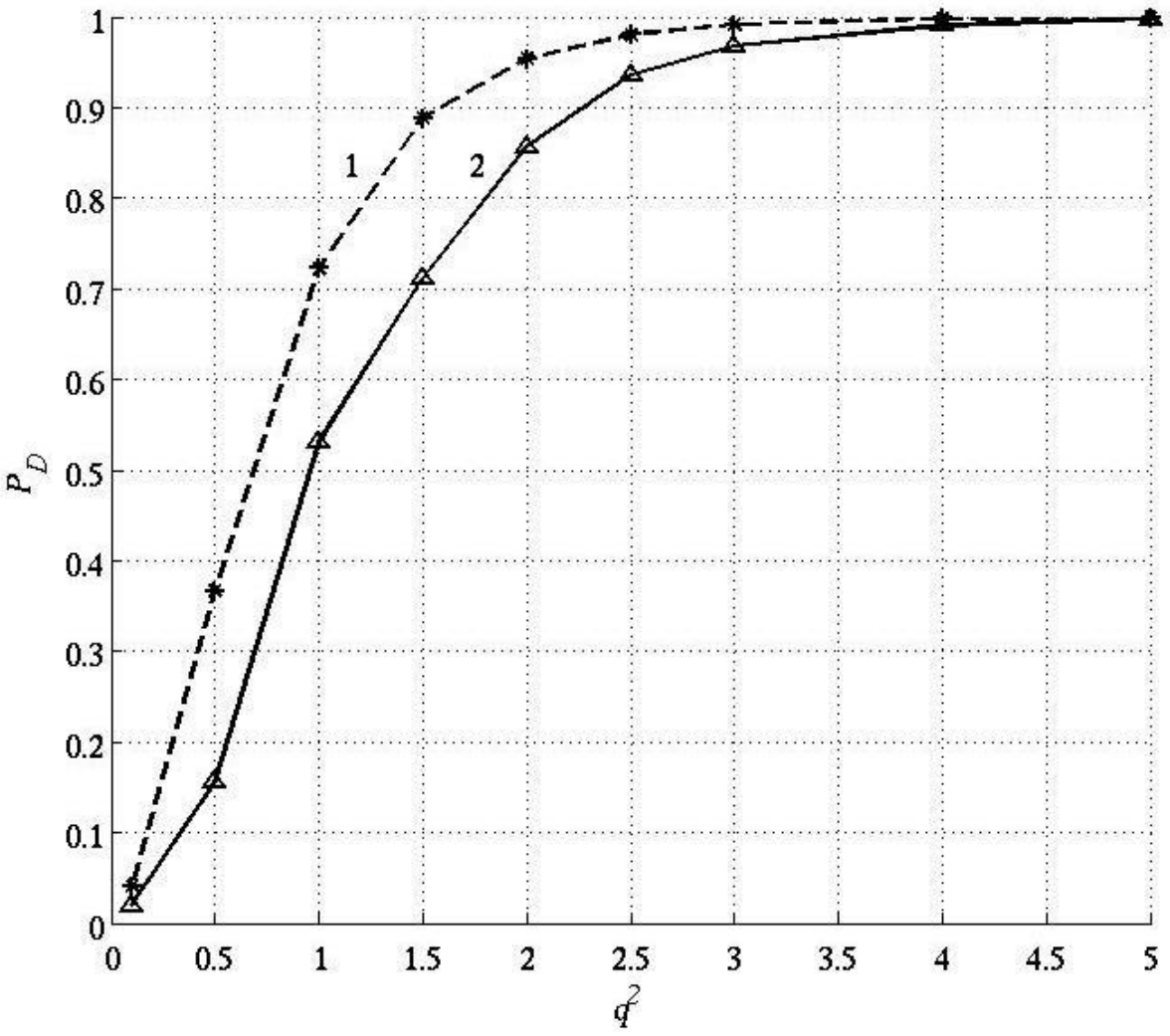


Рис. 2.4. Зависимость вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум оптимального обнаружителя.

2.3. Вероятность ошибки первого рода при улучшенном энергетическом обнаружении сигнала в аддитивном обобщенном гауссовском шуме

Для нахождения вероятности ошибки первого рода P_{E1} по формуле (1.3.1) найдем условную функцию распределения решающей статистики УЭО сигналов на фоне обобщенного гауссовского шума в случае отсутствия полезного сигнала $F_{\Xi_p}(T\,|\,H_0)$, которую получим по формуле (1.3.2), используя условную ПФМ $M_{\Xi_p}(s\,|\,H_0)$.

Как было показано в параграфе 1.3, условная ПФМ решающей статистики УЭО в случае отсутствия полезного сигнала может быть записана в следующем виде

$$M_{\Xi_p}(s\,|\,H_0)=\left(\int_0^\infty e^{-sx^p} f_{abs}(x)dx\right)^n, \qquad (2.3.1)$$

где $f_{abs}(x)$ – одномерная плотность вероятности модуля обобщенной гауссовской случайной величины, деленной на среднеквадратичное отклонение шума, которая может быть найдена с помощью свойства инвариантности дифференциала вероятности [33] в следующем виде

$$f_{abs}(x)=\frac{\beta}{(\alpha/\sigma)\Gamma(1/\beta)}\exp\left(-\left(\frac{|x|}{\alpha/\sigma}\right)^\beta\right). \qquad (2.3.2)$$

Далее будем придерживаться следующих обозначений $\alpha=\alpha/\sigma$.

Непосредственной подстановкой (2.3.2) в (2.3.1) получим следующее выражение для условной ПФМ:

$$M_{\Xi_p}(s\,|\,H_0)=\left(\frac{\beta}{\alpha\Gamma(1/\beta)}\int_0^\infty e^{-sx^p}\exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right)dx\right)^n. \qquad (2.3.3)$$

Разложив вторую экспоненту под знаком интеграла в ряд [60]

$$\exp\left(-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right)=\sum_{k=0}^\infty\frac{(-1)^k x^{\beta k}}{\alpha^{\beta k}k!}, \qquad (2.3.4)$$

подставив в (2.3.3), после изменения порядка интегрирования и суммирования получим следующее выражение:

$$M_{\Xi_p}(s\,|\,H_0)=\left(\frac{\beta}{\alpha\Gamma(1/\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\alpha^{\beta k}k!}\int_0^{\infty}x^{\beta k}e^{-sx^p}dx\right)^n. \qquad (2.3.5)$$

Для вычисления интеграла воспользуемся (1.3.9) и представим (2.3.5) как

$$M_{\Xi_p}(s\,|\,H_0)=\left(\frac{\beta}{\alpha\Gamma(1/\beta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma\left((\beta k+1)/p\right)}{p\alpha^{\beta k}k!s^{(\beta k+1)/p}}\right)^n. \qquad (2.3.6)$$

Запишем (2.3.6) в виде степенного ряда, используя (1.3.11):

$$M_{\Xi_p}(s\,|\,H_0)=\left(\frac{\beta}{\alpha\Gamma(1/\beta)}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}G_k s^{\frac{-\beta k+n}{p}}, \qquad (2.3.7)$$

где коэффициенты ряда G_k определяются следующим образом

$$a_0=\frac{\Gamma(1/p)}{p}, \qquad (2.3.8)$$

$$G_0=a_0^n, \qquad (2.3.9)$$

$$G_j=\frac{1}{ja_0}\sum_{k=1}^{j}(kn-j+k)\frac{(-1)^k\Gamma\left((\beta k+1)/p\right)}{p\alpha^{\beta k}k!}G_{j-k}. \qquad (2.3.10)$$

Для нахождения функции распределения решающей статистики УЭО в случае отсутствия полезного сигнала $F_{\Xi_p}(T\,|\,H_0)$ воспользуемся (1.3.2) и (1.3.16):

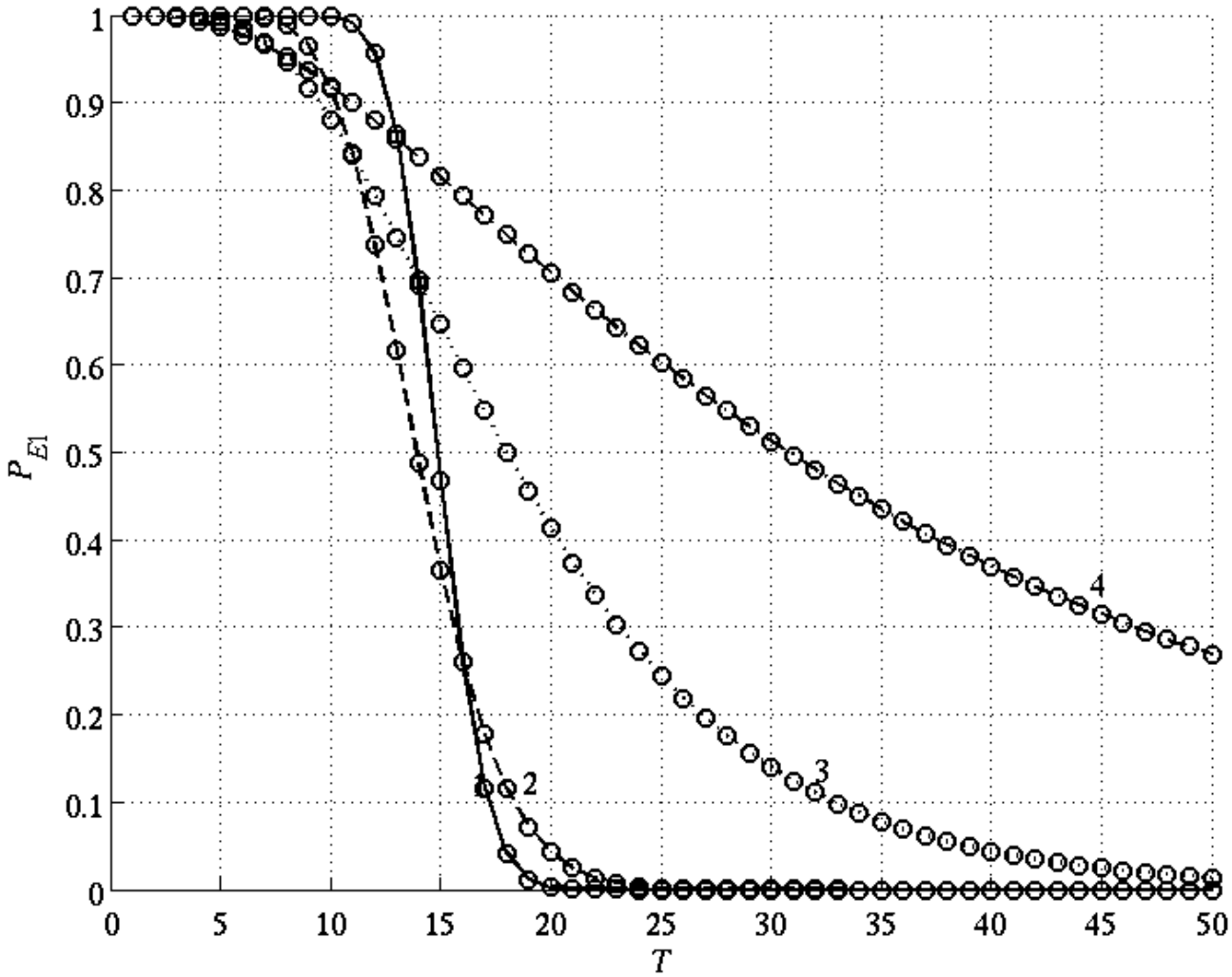
$$F_{\Xi_p}(x\,|\,H_0)=\left(\frac{\beta}{\alpha\Gamma(1/\beta)}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{G_k x^{\frac{\beta k+n}{p}}}{\Gamma\left((\beta k+n)/p+1\right)}. \qquad (2.3.11)$$

Используя (1.3.1) и (2.3.11), получим выражение для вероятности ошибки первого рода УЭО в обобщенном гауссовском шуме P_{E1}:

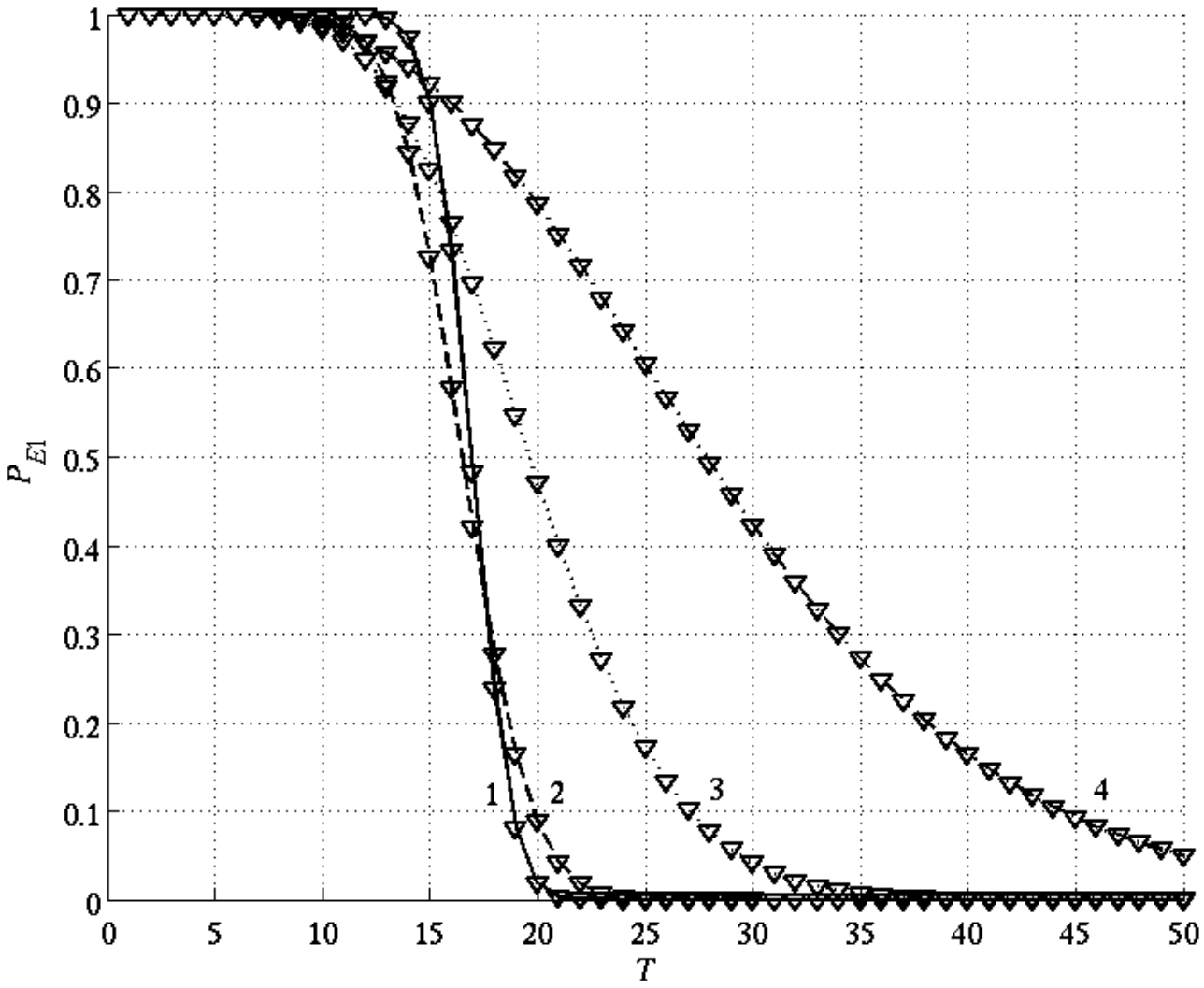
$$P_{E1}(T)=1-\left(\frac{\beta}{\alpha\Gamma(1/\beta)}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{G_k T^{\frac{\beta k+n}{p}}}{\Gamma\left((\beta k+n)/p+1\right)}. \qquad (2.3.12)$$

На рис. 2.5 представлены зависимости вероятности ошибки первого рода от порога обнаружения $P_{E1}(T)$ при различных значениях показателя степени p УЭО, объеме выборки $n = 20$ и следующих параметрах обобщенного гауссовского шума: а) $\beta = 1$ и б) $\beta = 3$. Кривые, изображенные на рисунке, получены с помощью вычислений по формуле (2.3.12), результаты статистического моделирования

вероятности ошибки первого рода отмечены круглыми и треугольными маркерами. Кривые 1-4 соответствуют значениям параметра p 0,5; 1; 2 и 3. Из хода кривых на рисунке видно, что, во-первых, результаты расчета по аналитическим формулам хорошо согласуются с результатами статистического моделирования, во-вторых, вероятность ошибки первого рода уменьшается с ростом порога обнаружения T и стремится к нулю при $T \to \infty$ и, в-третьих, уменьшение показателя степени p ведет к более крутому убыванию P_{E1} при увеличении порога обнаружения.



a) $\beta = 1$.



б) $\beta = 3$.

Рис. 2.5. Зависимость вероятности ошибки первого рода от порога обнаружения.

2.4. Вероятность правильного обнаружения при улучшенном энергетическом обнаружении случайного гауссовского сигнала в аддитивном обобщенном гауссовском шуме

Для нахождения таких характеристик, как вероятность ошибки второго рода P_{E2} и вероятность правильного обнаружения P_D, необходимо определить модели полезных сигналов. Рассмотрим в качестве полезного сигнала гауссовский случайный сигнал с дисперсией σ_s^2 нулевым математическим ожиданием и некоррелированными отсчетами. Плотность вероятности аддитивной смеси гауссовского сигнала и обобщенного гауссовского шума может быть получена в следующем виде

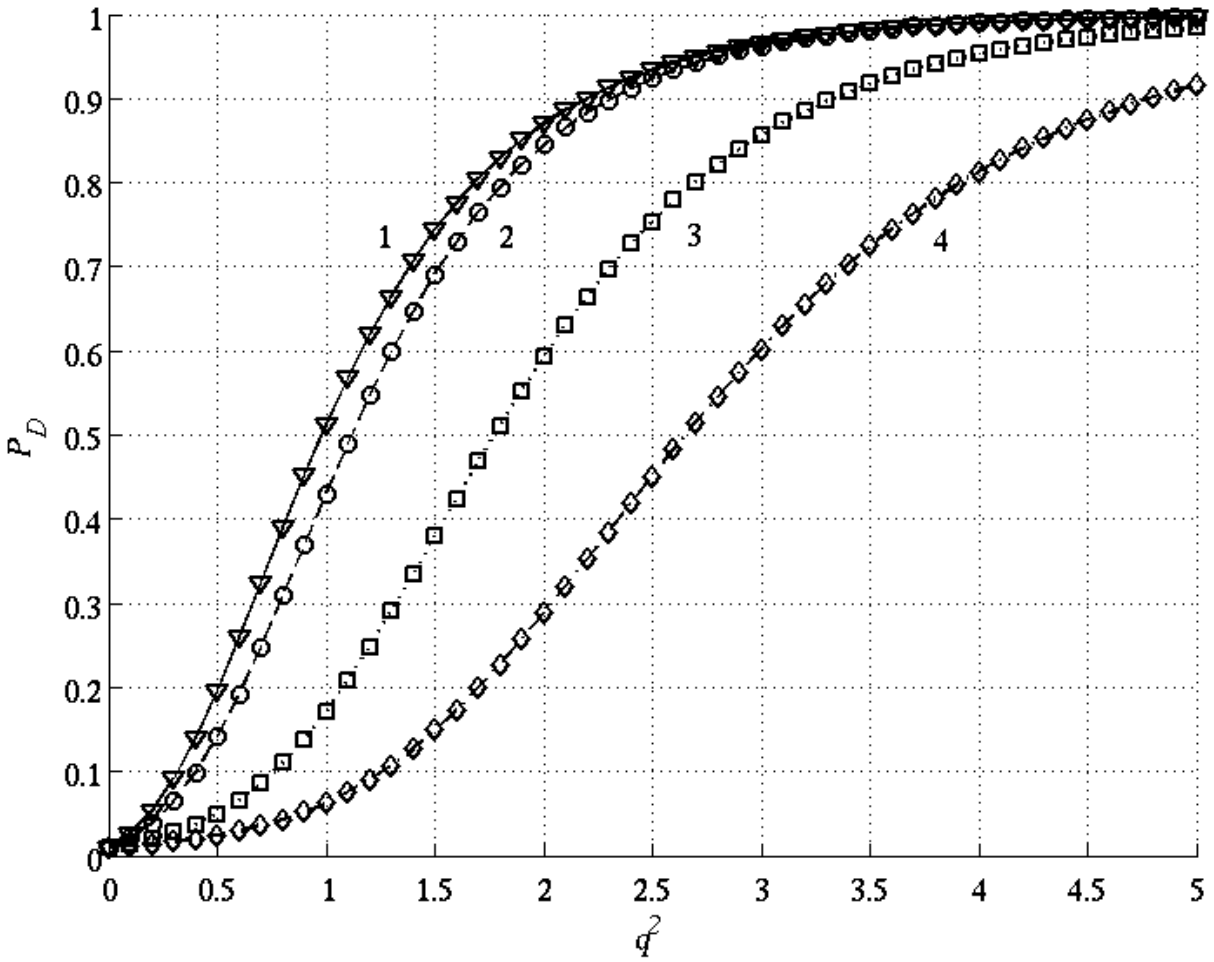
$$f(x) = \frac{\beta}{2\alpha\Gamma(1/\beta)\sqrt{2\pi\sigma_s^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{|y|}{\alpha} \right)^{\beta} - \left(\frac{x-y}{2\sigma_s^2} \right)^2 \right) dy. \qquad (2.4.1)$$

Интеграл в формуле (2.4.1) не выражается в аналитическом виде для произвольного β, а для $\beta = 1$ (шум подчиняется распределению Лапласа) имеет громоздкий вид:

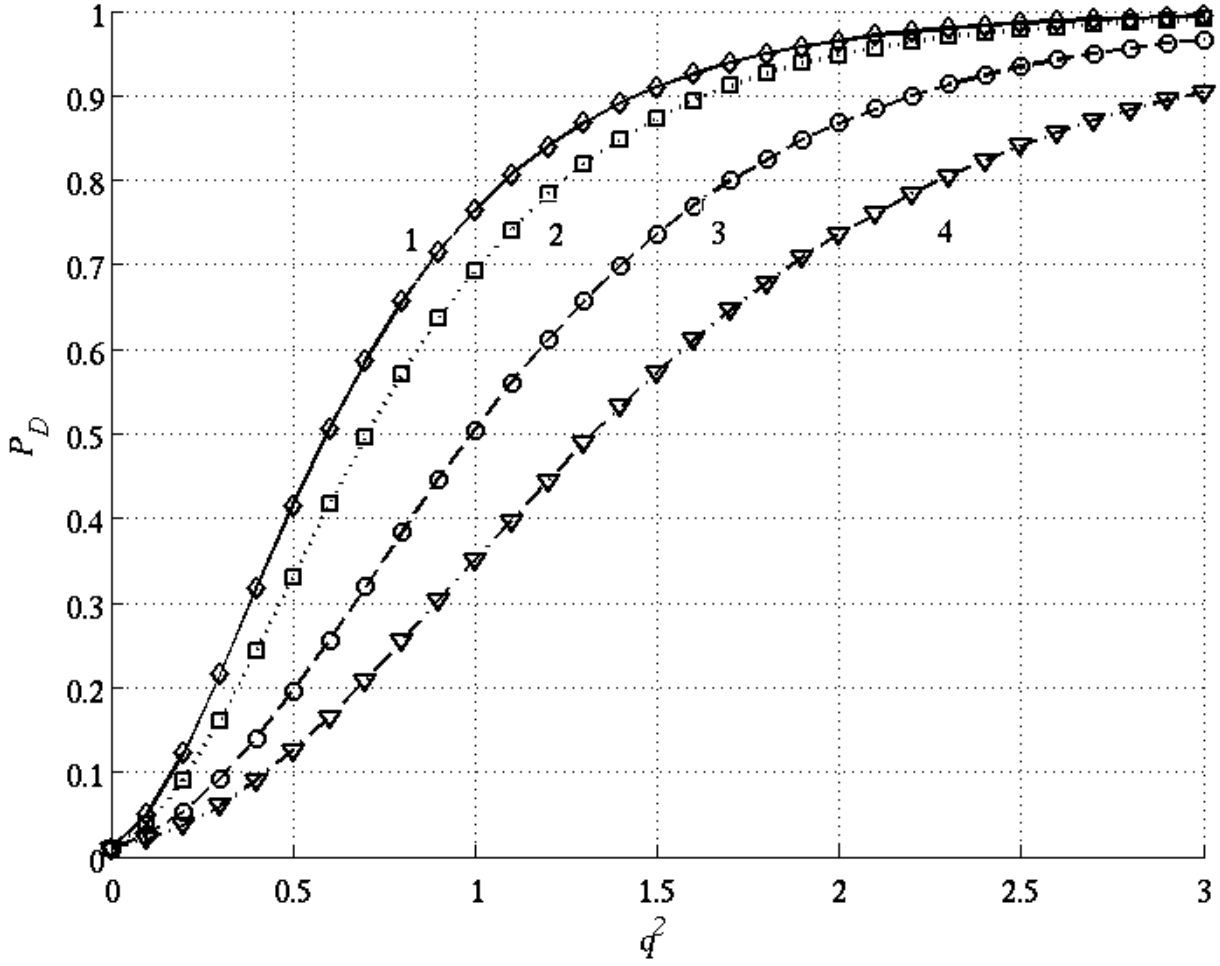
$$f(x) = \frac{1}{4\alpha} e^{\frac{\sigma_s^2}{2}\left(\frac{x}{\sigma_s^2} - \frac{1}{\alpha}\right)^2 - \frac{x^2}{2\sigma_s^2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{x}{\sigma_s^2} \right) \right) \right)$$
$$+ \frac{1}{4\alpha} e^{\frac{\sigma_s^2}{2}\left(\frac{x}{\sigma_s^2} + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - \frac{x^2}{2\sigma_s^2}} \left(1 - \Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{x}{\sigma_s^2} \right) \right) \right), \qquad (2.4.2)$$

где $\Phi(x)$ – интеграл вероятности [1].

Громоздкое выражение (2.4.2) неудобно для дальнейшего анализа и применимо только в частном случае, когда обобщенный гауссовский шум переходит в лапласовский. Поэтому найдем вероятность правильного обнаружения P_D с помощью статистического моделирования, в котором используется 10^6 реализаций сигнала и шума, выберем порог обнаружения с помощью (2.3.12), соответствующий вероятности ошибки первого рода 0,01. Параметры обобщенного гауссовского шума положим равными $\beta = 1$ и $\beta = 3{,}5$.



a) $\beta = 1$



б) β = 3,5.

Рис. 2.6. Зависимость вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум $P_D(q)$ при различных значениях показателя степени p.

На рис. 2.6 представлены зависимости вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум $P_D(q^2)$ для различных значений показателя степени обнаружителя p, фиксированной вероятности ошибки первого рода P_{E1} = 0,01 и объема выборки n = 20 при следующих параметрах обобщенного гауссовского шума: а) $\beta = 1$ и б) $\beta = 3{,}5$. Кривые 1-4 соответствуют значениям параметра p 0,5, 1, 2 и 3 соответственно. Из хода кривых на рисунке видно, что, во-первых, имеется зависимость вероятности правильного обнаружения от показателя степени p, во-вторых, с ростом отношения сигнал-шум q^2 вероятность правильного обнаружения увеличивается и стремится к единице при $q^2 \to \infty$. Из рассмотренных обнаружителей наиболее эффективным оказался обнаружитель со значением показателя степени p равным 0,5 и 3 для $\beta = 1$ и $\beta = 3{,}5$ соответственно.

Для анализа зависимости вероятности правильного обнаружения от показателя степени и последующего определения оптимального значения p_{opt} найдем приближенные аналитические выражения для $P_D(p)$. Для этого аппроксимируем плотность вероятности суммы гауссовской и обобщенной гауссовской случайных величин с помощью плотности вероятности полигауссовской случайной величины [3, 38-40], определяемой выражением (1.1.4). Пусть обобщенный гауссовский шум и полезный сигнал имеют следующие параметры

1) $\beta = 3{,}5$, $\sigma_n^2 = 1$, $\sigma_s^2 = 1$,

2) $\beta = 1$, $\sigma_n^2 = 1$, $\sigma_s^2 = 3$.

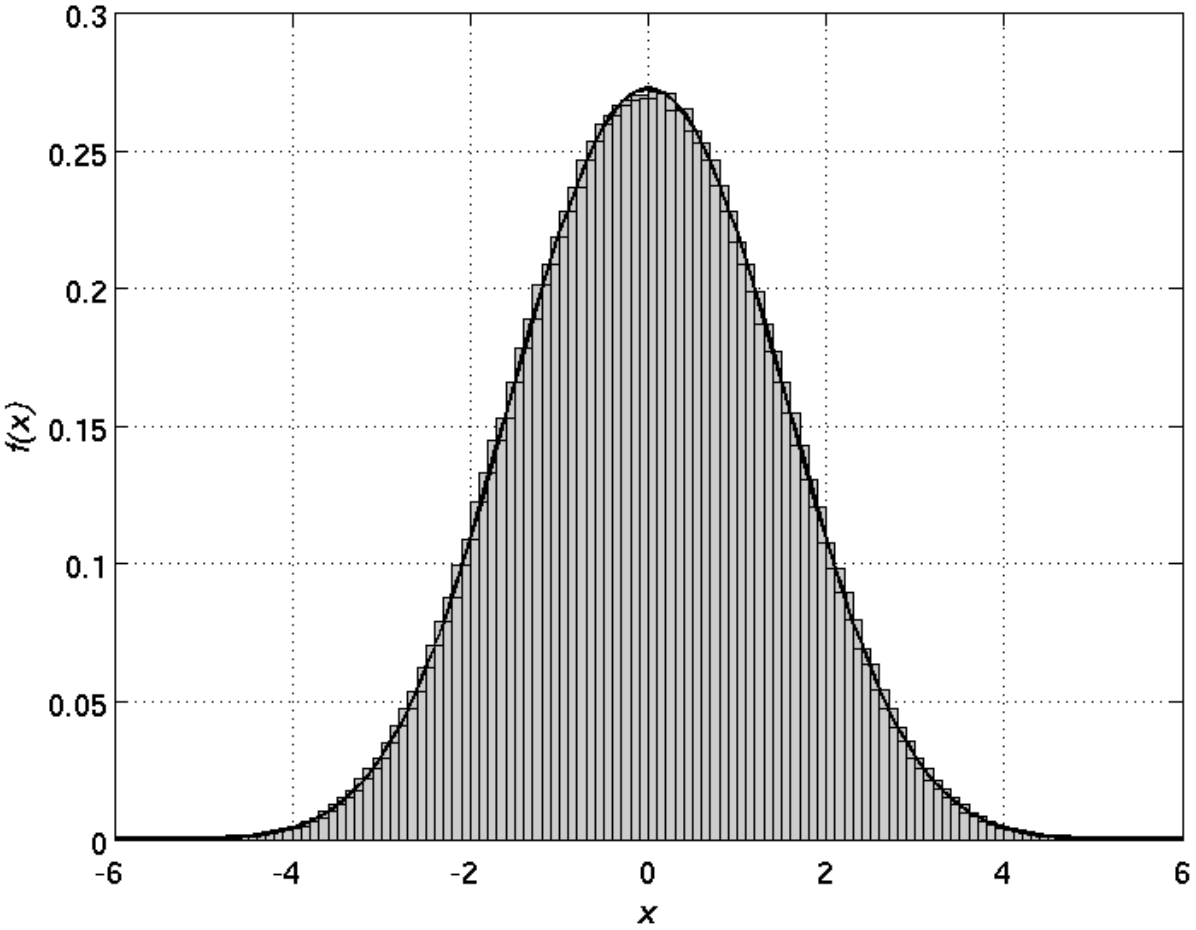
В табл. 2.1 представлены параметры аппроксимирующей полигауссовской плотности вероятности для заданных сигнала и шума. Среднеквадратические ошибки, характеризующие точность аппроксимации, равны 1,291e-04 и 1,645e-04 для $\beta = 3{,}5$ и $\beta = 1$ соответственно.

На рис. 2.7 представлена гистограмма выборки случайной величины, представляющей собой сумму гауссовской и обобщенной гауссовской ($\beta = 3{,}5$ – рис. 2.7 а) и $\beta = 1$ – рис. 2.7 б)) случайных величин. На этом же рисунке

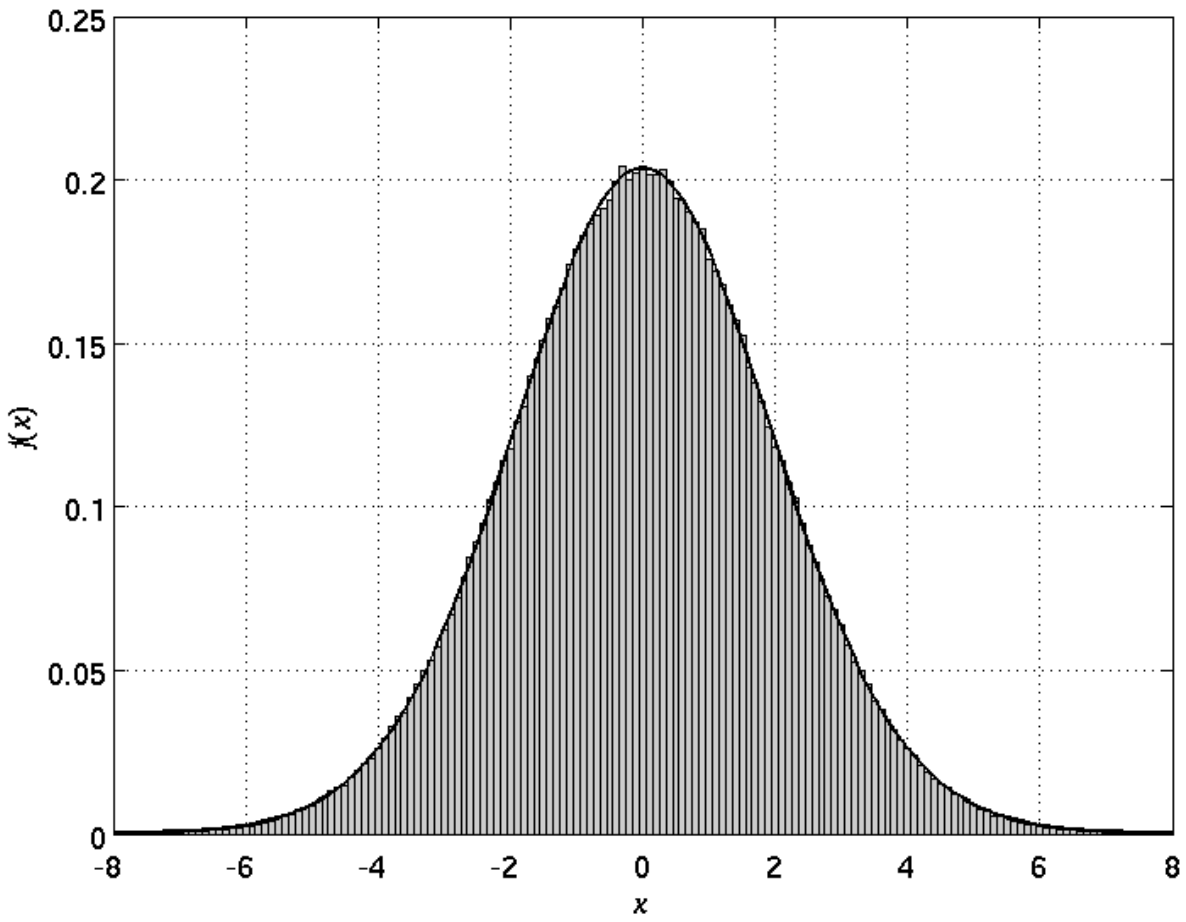
представлена аппроксимирующая полигауссовская плотность вероятности с параметрами, указанными в табл. 2.1. Видно, что указанные гистограммы и плотности вероятности хорошо согласуются.

Табл. 2.1. Параметры аппроксимирующей полигауссовской плотности вероятности.

	$\beta = 3{,}5,\ \sigma_s^2 = 1,\ \sigma_n^2 = 1$	$\beta = 1,\ \sigma_s^2 = 3,\ \sigma_n^2 = 1$
n	2	2
σ_0	1,116	2,033
σ_1	1,324	1,579
b_0	-0,502	0,871
b_1	1,502	0,129



a) $\beta = 3{,}5$.



б) $\beta = 1$.

Рис. 2.7. Гистограмма выборки случайной величины, представляющей собой сумму гауссовской и обобщенной гауссовской случайных величин, а также плотность вероятности аппроксимирующей полигауссовской случайной величины с параметрами из таблицы 2.1.

Учитывая вид аппроксимирующей функции (1.1.4) и полученные в предыдущей главе выражения для вероятностей ошибки второго рода P_{E2} и правильного обнаружения P_D УЭО сигналов на фоне полигауссовского шума (1.4.9) и (1.4.10), можно проанализировать зависимость $P_D(p)$ для заданных параметров шума и отношения сигнал-шум. Кроме того, рассмотренная аппроксимация удобна для исследования зависимости вероятности правильного обнаружения от объема выборки и порога обнаружения (или соответствующей ему вероятности ошибки первого рода).

Зависимость вероятности правильного обнаружения от показателя степени $P_D(p)$ представлена на рис. 2.8 для фиксированной вероятности ошибки первого рода $P_{E1} = 0{,}01$, объема выборки $n = 20$ и следующих параметров шума: $\beta = 3{,}5$ (кривая 2) и $\beta = 1$ (кривая 1). Кривые на рис. 2.8 рассчитаны по формуле (1.4.10) с использованием параметров аппроксимирующей плотности вероятности, указанных в табл. 2.1, маркерами на кривых отмечены промоделированные значения вероятности правильного обнаружения. Из хода кривых, видно, что, во-первых, результаты расчета хорошо согласуются с результатами статистического моделирования, во-вторых, зависимость $P_D(p)$ имеет один максимум, а оптимальные значения показателя степени УЭО равны $p_{opt} = 4{,}5$ и $p_{opt} = 0{,}5$ для $\beta = 3{,}5$ и $\beta = 1$ соответственно.

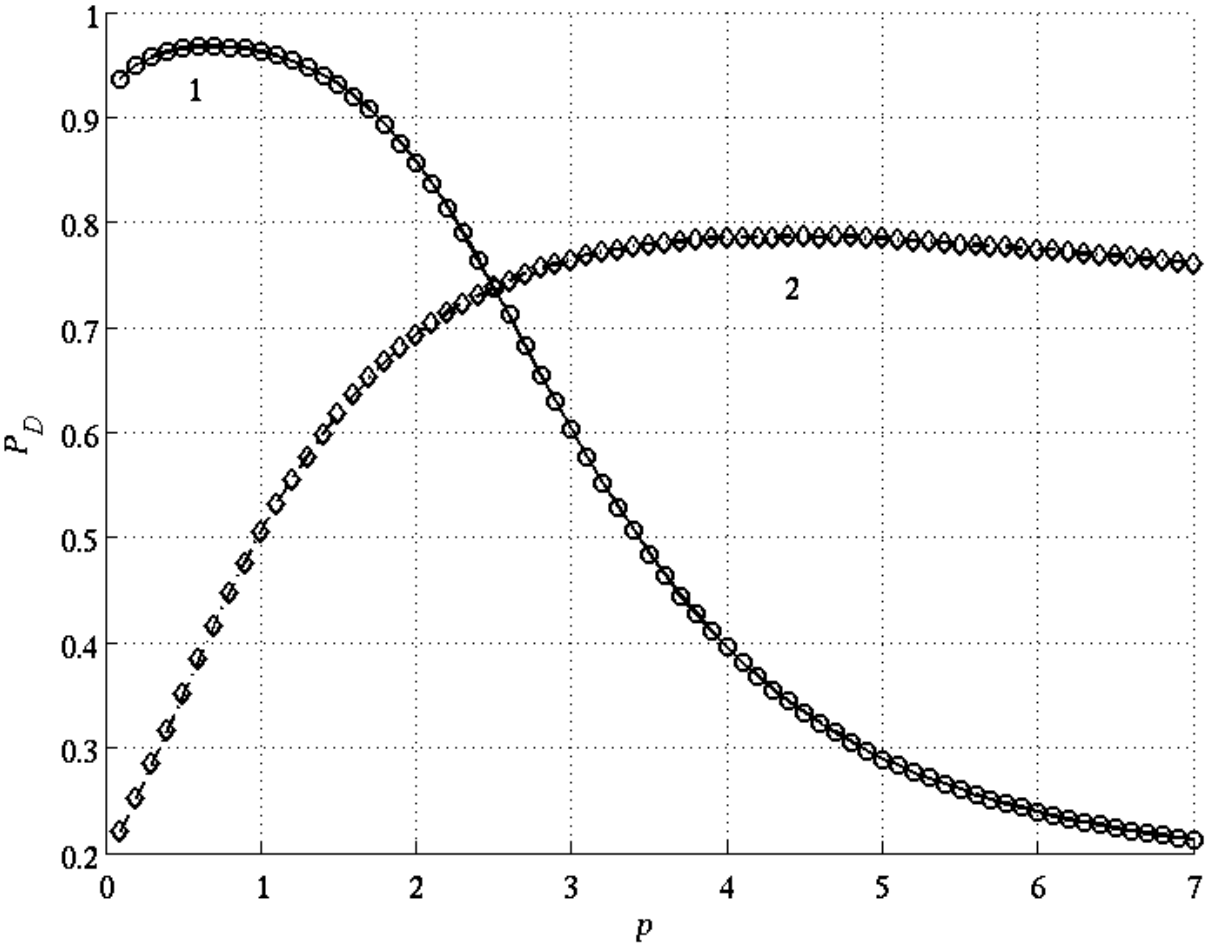
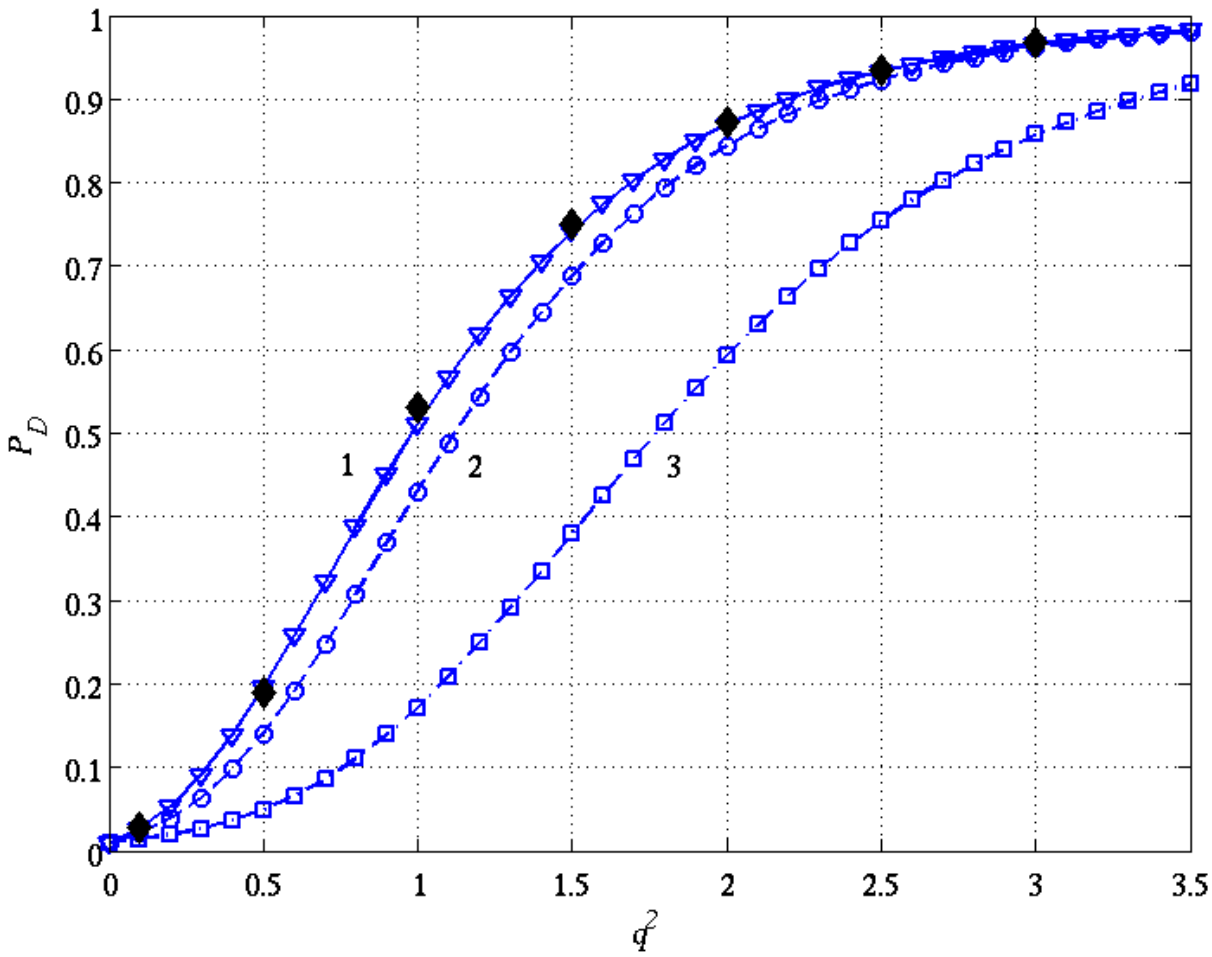


Рис. 2.8. Зависимость вероятности правильного обнаружения от показателя степени.

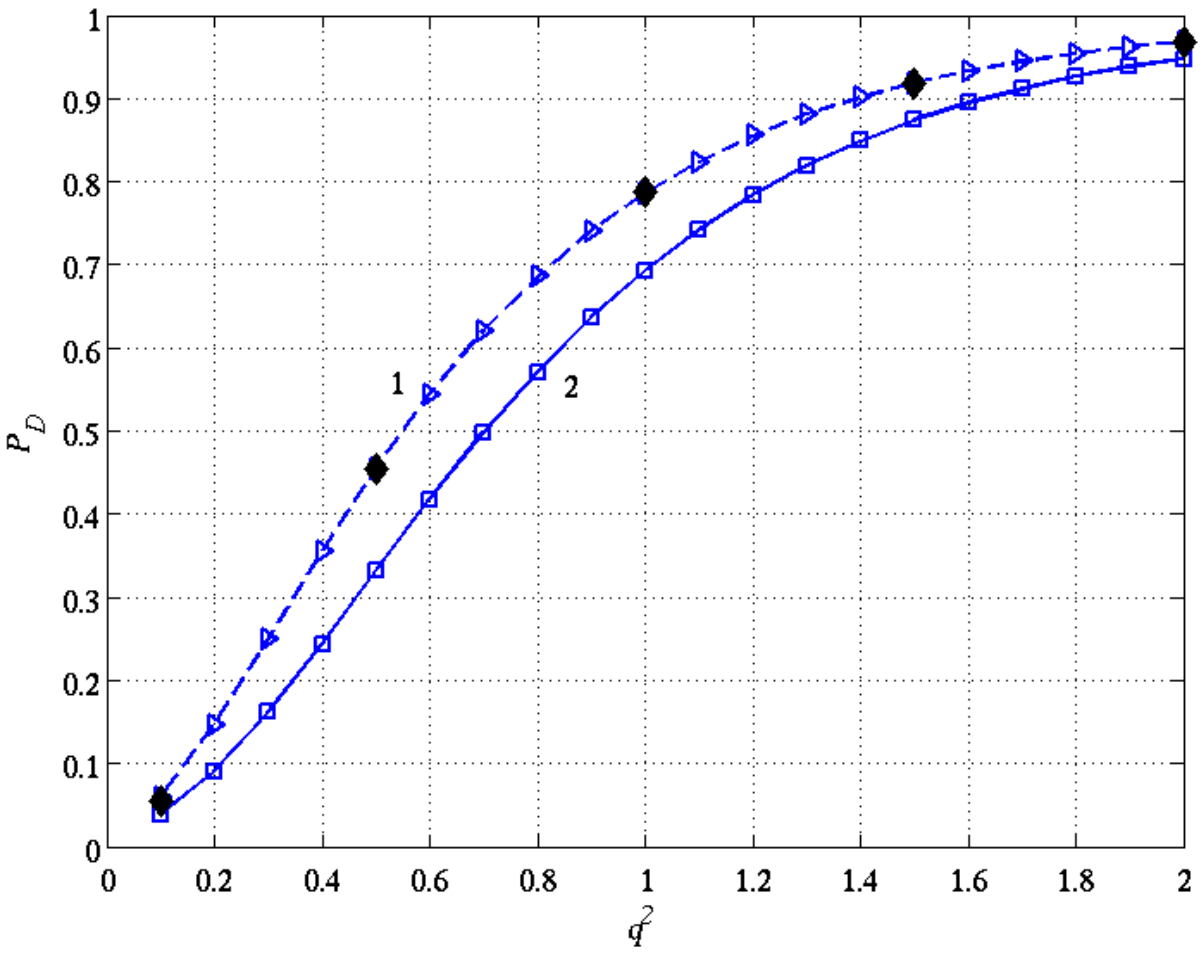
Сравним эффективность УЭО и оптимального обнаружителя, решающая статистика которого определяется выражением (2.2.1). На рис. 2.9 представлены зависимости вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум $P_D(q^2)$ при фиксированной вероятности ошибки первого рода $P_{E1} = 0{,}01$, объеме выборки $n = 20$ и следующих параметрах обобщенного гауссовского шума: а) $\beta = 1$ и б) $\beta = 3{,}5$. Кривые 1-3 на рис. 2.9 а) соответствуют УЭО с показателями степени p, равными 0,5 (оптимальное значение), 1 (энергоподобный обнаружитель) и 2 (ТЭО), а ромбовидными маркерами отмечены результаты статистического моделирования оптимального обнаружителя. Кривые 1 и 2 на рис. 2.9 б) соответствуют УЭО с показателями степени 4,5 (оптимальное значение) и 2 (ТЭО), а ромбовидными маркерами отмечены результаты статистического моделирования оптимального обнаружителя. Из хода кривых на рис. 2.9 видно, что УЭО с оптимальными значениями показателя степени лишь немногим уступает оптимальному обнаружителю и превосходит ТЭО для рассмотренных параметров сигнала и шума. В табл. 2.2 представлены значения выигрыша в отношении сигнал-шум оптимального обнаружителя над УЭО с оптимальным показателем степени, энергоподобным обнаружителем и ТЭО. Выигрыш рассчитан по формуле (1.4.11). По результатам, представленным в табл. 2.2, и кривым на рис. 2.9 можно сделать вывод о том, что оптимальный обнаружитель заметно эффективнее ТЭО, так для обобщенного гауссовского шума с параметром $\beta = 1$ (табл. 2.2а) выигрыш в отношении сигнал-шум оптимального обнаружителя равен 53% для вероятности правильного обнаружения $P_D = 0{,}9$ при фиксированной вероятности ошибки первого рода $P_{E1} = 0{,}01$. При этом выигрыш оптимального обнаружителя над УЭО с оптимальным значением показателя степени не превышает нескольких процентов. Из представленных данных можно сделать вывод о том, что УЭО гауссовского случайного сигнала на фоне обобщенного гауссовского шума близок по эффективности к оптимальному и заметно превосходит ТЭО.

В табл. 2.3 представлены значения выигрыша УЭО с оптимальным показателем степени над ТЭО и энергоподобным обнаружителем. Выигрыш

рассчитан по формуле (1.4.12). Из табл. 2.3 видно, что выигрыш УЭО с оптимальным показателем степени над ТЭО равен 51% и 17% (для $P_D = 0{,}9$ при $P_{E1} = 0{,}01$) для параметров обобщенного гауссовского шума $\beta = 1$ и $\beta = 3{,}5$. Кроме того, при обнаружении на фоне обобщенного гауссовского шума с $\beta = 1$ целесообразным может оказаться применение энергоподобного обнаружителя ($p = 1$), так как его проигрыш УЭО с оптимальным показателем степени равен 5% для $P_D = 0{,}9$ при $P_{E1} = 0{,}01$.



a) $\beta = 1$.



б) β = 3,5.

Рис. 2.9. Зависимость вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум.

Табл. 2.2. Значения выигрыша оптимального обнаружителя над УЭО с оптимальным показателем степени, энергоподобным обнаружителем и ТЭО.

а) $\beta = 1$.

P_D	p = 0,5	p = 1	p = 2
0,5	4%	18%	86%
0,6	4%	18%	80%
0,7	3%	13%	71%
0,8	2%	10%	63%
0,9	1%	6%	53%

б) $\beta = 3{,}5$.

P_D	p = 2	p = 4,5
0,5	35%	5%
0,6	29%	3%
0,7	27%	3%
0,8	24%	3%
0,9	21%	3%

Табл. 2.3. Значения выигрыша в отношении сигнал-шум УЭО с оптимальным значением показателя степени над энергоподобным и обнаружителем и ТЭО.

а) $\beta = 1$.

P_D	$p = 1$	$p = 2$
0,5	18%	79%
0,6	11%	73%
0,7	10%	66%
0,8	8%	59%
0,9	5%	51%

б) $\beta = 3{,}5$.

P_D	$p = 2$
0,5	27%
0,6	25%
0,7	24%
0,8	20%
0,9	17%

Рассмотрим зависимость оптимального показателя степени УЭО гауссовского случайного сигнала от параметров обобщенного гауссовского шума. На рис. 2.10 представлена зависимость оптимального показателя степени УЭО от параметра обобщенного гауссовского шума $p_{opt}(\beta)$, полученная с помощью статистического моделирования. Из хода кривой на рис. 2.10 видно, что с ростом β значение p_{opt} также увеличивается. При $\beta = 2$ (значение, при котором обобщенный гауссовский шум переходит в гауссовский) оптимальное значение показателя степени улучшенного энергетического обнаружителя равно двум, т.е. в частном случае гауссовского шума оптимальным является традиционный энергетический обнаружитель.

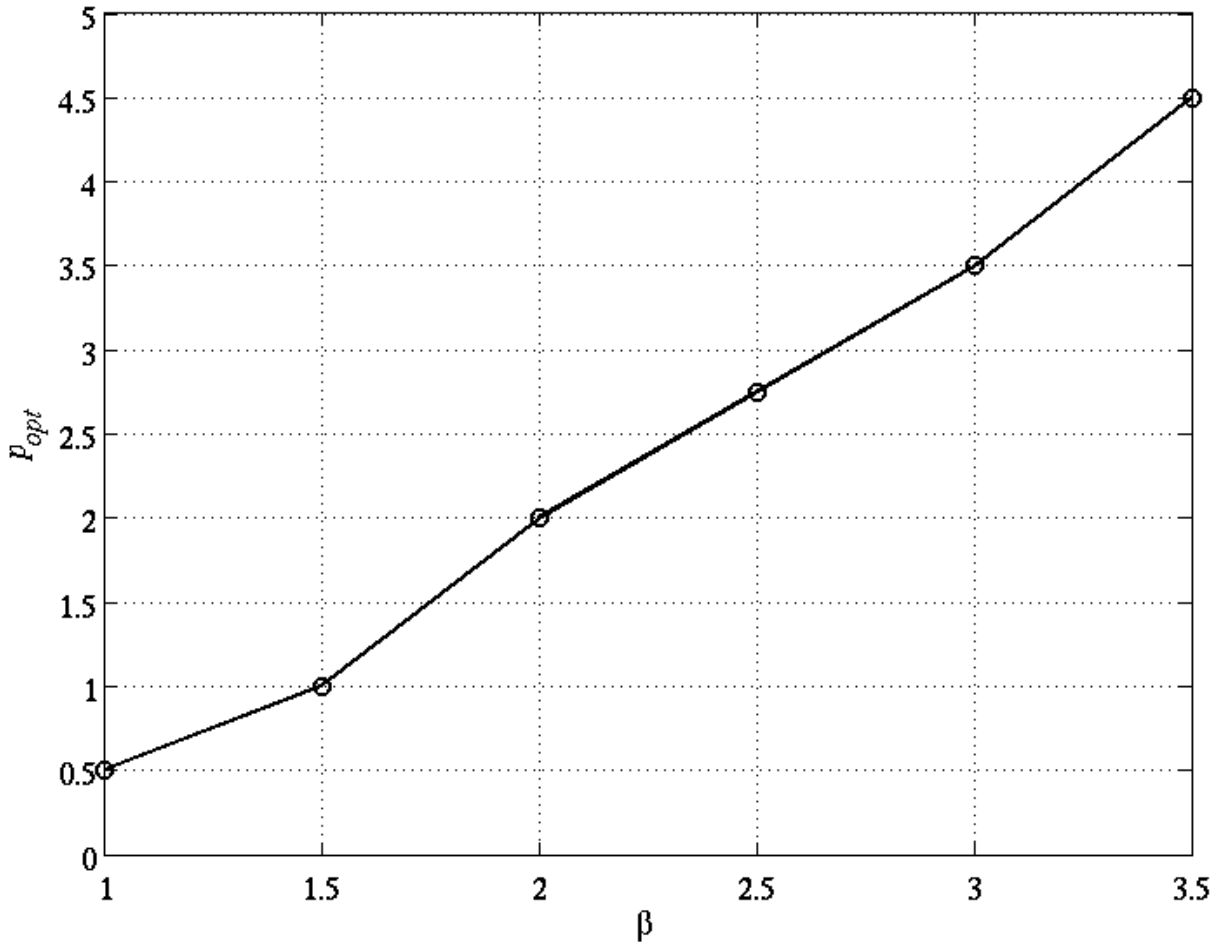


Рис. 2.10. Зависимость оптимального значения показателя степени УЭО от параметра шума β.

2.5. Вероятность правильного обнаружения при улучшенном энергетическом обнаружении детерминированного неизвестного сигнала в аддитивном обобщенном гауссовском шуме

В настоящем параграфе рассмотрим улучшенное энергетическое обнаружение неизвестного детерминированного сигнала на фоне обобщенного гауссовского шума и исследуем зависимость оптимального значения показателя степени УЭО от типа и параметров полезного сигнала. Как и в параграфе 1.5, в качестве обнаруживаемых сигналов выбраны два детерминированных сигнала, представленных на рис. 1.15.

Вероятность правильного обнаружения УЭО детерминированных сигналов не удалось представить в аналитическом виде, поэтому для ее определения воспользуемся статистическим моделированием, при котором использовалось 10^6 реализаций сигнала и шума, порог обнаружения выбран в соответствии с вероятностью ошибки первого рода равной 0,01. Отношение сигнал-шум определим с помощью выражения (1.2.15).

Зависимости вероятности ошибки второго рода от показателя степени $P_{E2}(p)$ УЭО детерминированных сигналов в обобщенном гауссовском шуме при $\beta = 3{,}5$ и $n = 20$ представлены на рис. 2.11. Линиями с круглыми маркерами показаны кривые, соответствующие сигналу 1, а линиями с квадратными маркерами – кривые, соответствующие сигналу 2. Кривые 1-6 соответствуют отношениям сигнал-шум $q^2 = 0{,}5$, 0,75, 1, 1,25, 1,5 и 1,75. Из хода кривых на рис. 2.11 видно, что присутствует зависимость вероятности ошибки второго рода от формы обнаруживаемого сигнала, однако в точке $p = 2$ кривые, соответствующие различным сигналам совпадают, т.е. в частном случае энергетического обнаружения отсутствует зависимость от формы сигнала, играет роль только его энергия. Кроме того, оптимальное значение показателя степени при обнаружении детерминированного сигнала почти не отличается от полученного ранее для случайного гауссовского полезного сигнала. Оптимальные значения показателей степени представлены в таблицах 2.4 и 2.5 для двух обнаруживаемых сигналов и различных отношений сигнал-шум.

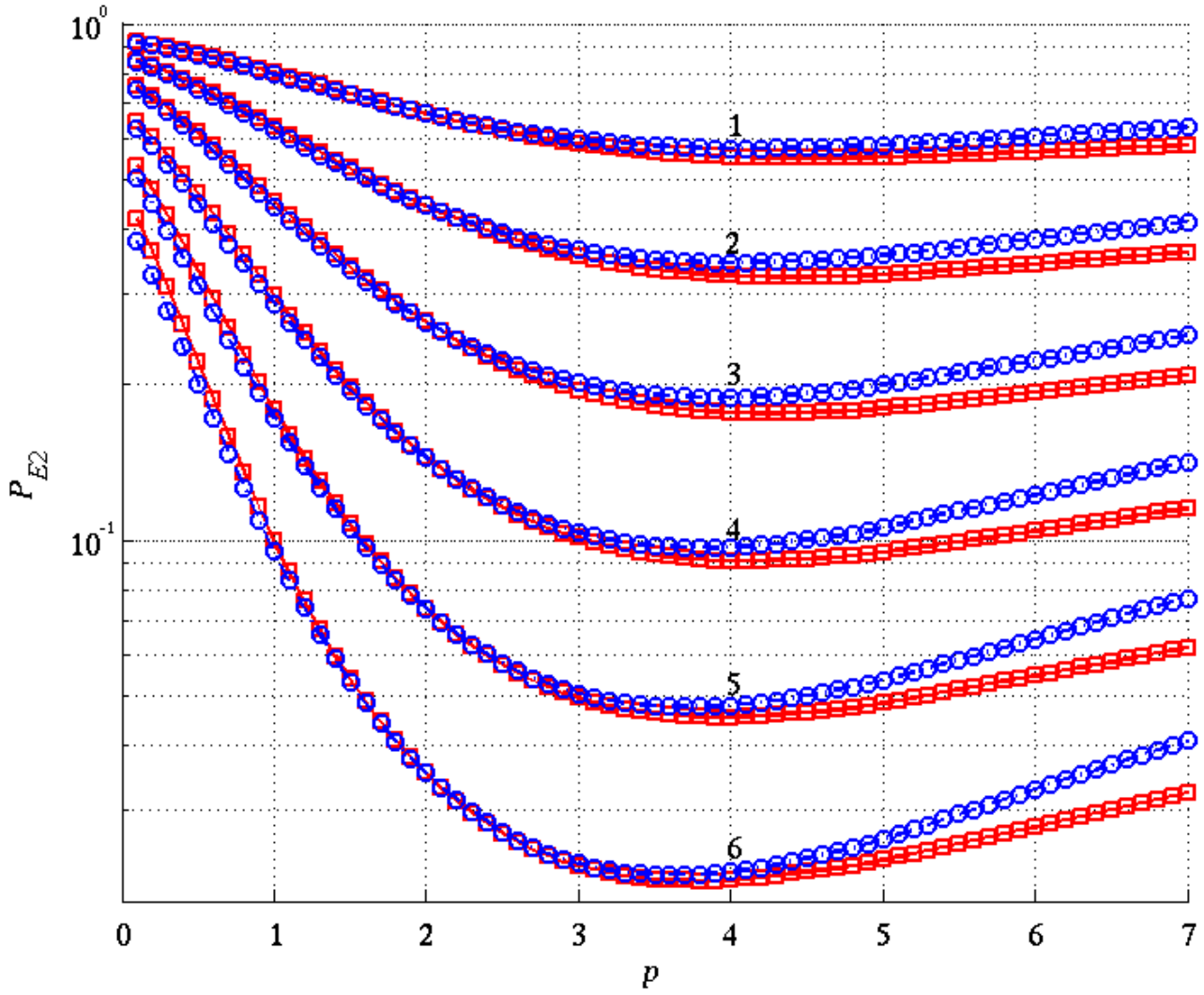


Рис. 2.11. Зависимость вероятности ошибки второго рода от показателя степени.

Табл. 2.4. Значения оптимального показателя степени p_{opt} для детерминированного сигнала 1 и соответствующие им значения вероятности ошибки второго рода P_{E2} для различных отношений сигнал-шум и заданных параметрах сигнала и шума. Для сравнения в таблице представлены значения вероятности ошибки второго рода энергетического обнаружителя при указанном отношении сигнал-шум P_{E2}^{EnDet}.

q^2	p_{opt}	P_{E2}	P_{E2}^{EnDet}
0,5	4,6	0,549	0,671
0,75	4,4	0,323	0,444
1	4,2	0,176	0,264
1,25	4,1	0,091	0,144
1,5	3,9	0,045	0,07
1,75	3,9	0,021	0,04

Табл. 2.5. Значения оптимального показателя степени p_{opt} для детерминированного сигнала 2 и соответствующие им значения вероятности ошибки второго рода P_{E2} для различных отношений сигнал-шум и заданных параметрах сигнала и шума. Для сравнения в таблице представлены значения вероятности ошибки второго рода энергетического обнаружителя при указанном отношении сигнал-шум P_{E2}^{EnDet}.

q^2	p_{opt}	P_{E2}	P_{E2}^{EnDet}
0,5	4,1	0,574	0,671
0,75	4,0	0,345	0,444
1	3,9	0,189	0,264
1,25	3,9	0,096	0,144
1,5	3,9	0,048	0,07
1,75	3,8	0,022	0,04

Сравним эффективность УЭО с оптимальным значением показателя степени с оптимальным обнаружителем. На рис. 2.12 изображены кривые, представляющие собой зависимости вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум $P_D(q^2)$ для оптимального обнаружителя (черная сплошная кривая), УЭО с показателем степени $p = 4$ (кривые с треугольными маркерами) и ТЭО (кривая с квадратными маркерами). Пунктирные кривые соответствуют сигналу 1, а точечные кривые – сигналу 2. Статистическое моделирование характеристик оптимального обнаружителя осуществлялось с помощью выражения (2.2.2). Параметр обобщенного гауссовского шума $\beta = 3{,}5$. При моделировании использовалось 10^6 реализаций сигнала и шума, порог обнаружения выбран в соответствии с вероятностью ошибки первого рода 0,01.

В таблице 2.6 представлены значения выигрышей в отношении сигнал-шум оптимального обнаружителя над УЭО, рассчитанные по формуле (1.4.11) для детерминированного сигнала 2. Из данных, представленных в табл. 2.6, и хода кривых рис. 2.11 видно, что ТЭО существенно проигрывает в эффективности оптимальному, выигрыш последнего равен 157% в отношении сигнал-шум для вероятности правильного обнаружения $P_D = 0{,}9$ при фиксированной вероятности ошибки первого рода $P_{E1} = 0{,}01$. При этом выигрыш оптимального обнаружителя в отношении сигнал-шум над УЭО не превышает 154% для представленных в таблице значений вероятности правильного обнаружения.

В табл. 2.7 приведены значения выигрыша УЭО с оптимальным значением показателя степени ТЭО. Выигрыш рассчитывается по формуле (1.4.12). Из данных, представленных в табл. 2.7, хода кривых на рис. 1.15 видно, что выигрыш в отношении сигнал-шум УЭО с оптимальным значением показателя степени над ТЭО равен 15% для $P_D = 0{,}9$.

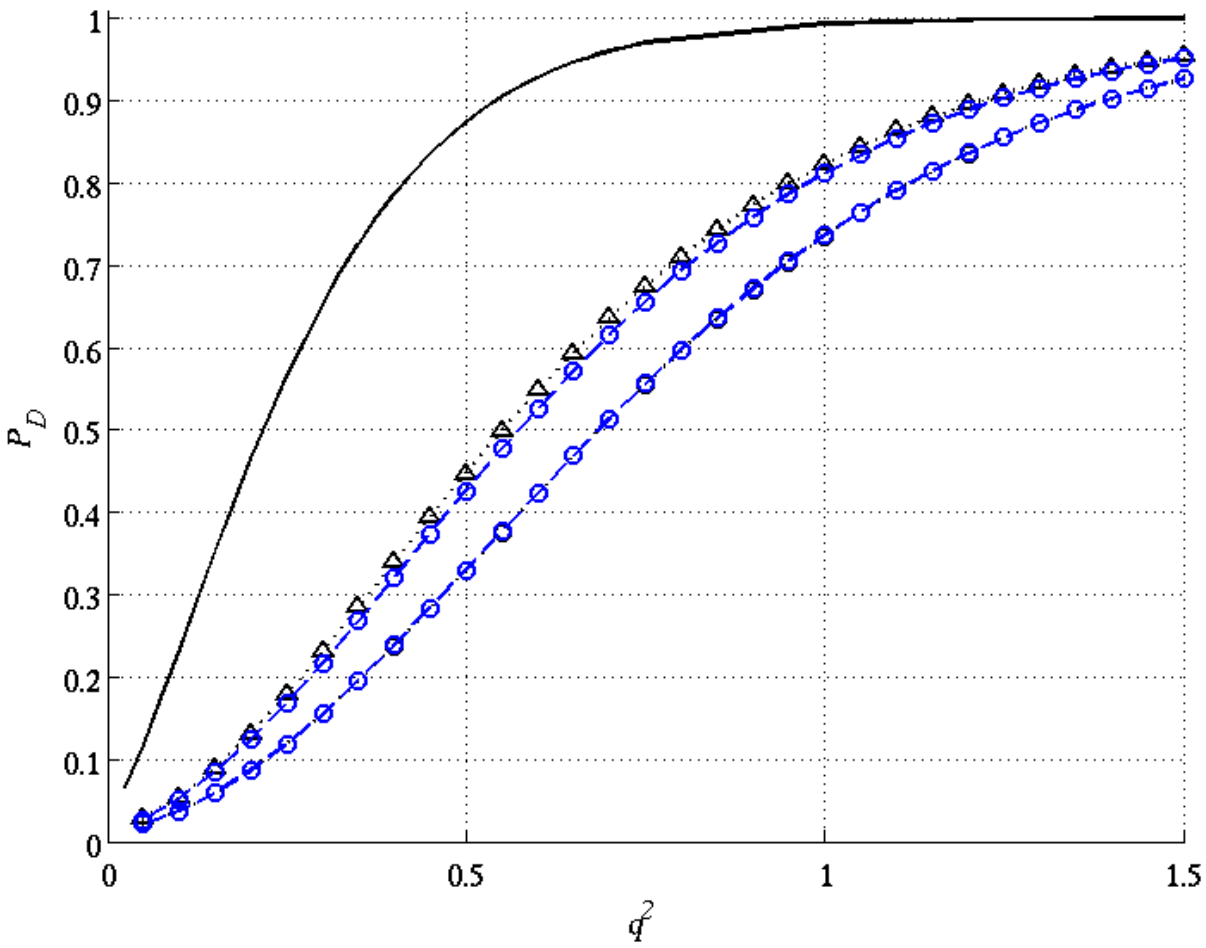


Рис. 2.12. Зависимость вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум оптимального обнаружителя и УЭО детерминированных сигналов.

Табл. 2.6. Значения выигрыша оптимального обнаружителя над УЭО и ТЭО (сигнал 2).

P_D	$p = 2$	$p = 4$
0,5	216%	153%
0,6	199%	154%
0,7	185%	137%
0,8	172%	130%
0,9	157%	125%

Табл. 2.7. Значения выигрыша УЭО с оптимальным значением показателя степени над ТЭО (сигнал 2).

P_D	$p = 2$
0,5	25%
0,6	22%
0,7	20%
0,8	18%
0,9	15%

Основные результаты и выводы

1) Получены аналитические выражения для вероятности ошибки первого рода УЭО случайного гауссовского сигнала в обобщенном гауссовском шуме. Вероятность ошибки первого рода зависит от параметров обобщенного гауссовского шума, показателя степени УЭО и порога обнаружения.
2) Используя аппроксимацию плотности вероятности суммы гауссовской и обобщенной гауссовской случайных величин с помощью полигауссовской плотности вероятности, аналитически рассчитана вероятность правильного обнаружения случайного гауссовского сигнала. Найдены значения оптимального показателя степени УЭО случайного гауссовского сигнала в обобщенном гауссовском шуме, которые могут быть как меньше, так и больше двух.
3) Исследована зависимость оптимального значения показателя степени УЭО случайного гауссовского сигнала от параметра обобщенного гауссовского шума, показано, что с его ростом оптимальное значение показателя степени также увеличивается.
4) С помощью статистического моделирования найдена вероятность правильного обнаружения детерминированных сигналов на фоне полигауссовского шума. Найдено оптимальное значение показателя степени обнаружителя для заданных параметров шума и сигналов.
5) С использованием найденных характеристик улучшенного энергетического обнаружения детерминированных и случайного полезных сигналов установлено, что УЭО с оптимальным показателем степени может быть эффективнее ТЭО.

Глава 3. Улучшенное энергетическое обнаружение случайных сигналов при наличии замираний отношения сигнал-шум

Распространение радиосигналов в атмосфере всегда связано с их взаимодействием с пространственными неоднородностями [37]. Прохождение пучка волн через неоднородную среду характеризуется наличием таких явлений как преломление, рассеяние и поглощение. В условиях плотной городской застройки и сложного рельефа местности к указанным явлениям добавляется многолучевое распространение. Указанные явления обуславливают наличие замираний [78] в каналах распространения радиосигналов. Каналы с замираниями характеризуются случайными отношениями сигнал-шум γ_i, мгновенные значения которого определяются следующим выражением [52]:

$$\gamma_i = h_i^2 \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2}, \qquad (3.1)$$

где σ_s^2 – дисперсия обнаруживаемого полезного сигнала, σ_n^2 – дисперсия шума, h_i – случайный коэффициент усиления, распределение которого зависит от характеристик канала с замираниями, $i = 1..n$, n – объем выборки обнаружения. Так как отношения сигнал-шум являются случайной величиной, в случае обнаружения замирающего сигнала плотность вероятности решающей статистики $f_{\Xi_p}(T, q^2 \mid H_1)$ будем считать условной относительно отношения сигнал-шум $f_{\Xi_p|\gamma}(T \mid H_1)$. Безусловная плотность вероятности решающей статистики может быть найдена путем усреднения решающей статистики по случайному отношению сигнал-шум так:

$$f_{\Xi_p}(T \mid H_1) = \int_0^\infty f_{\Xi_p|\gamma}(T \mid H_1) f(\gamma) d\gamma, \qquad (3.2)$$

где $f(\gamma)$ – плотность вероятности отношения сигнал-шум в канале с замираниями.

Плотность вероятности решающей статистики УЭО замирающих сигналов можно найти по-другому, с использованием ПФМ. ПФМ решающей статистики $M_{\Xi_p}(s \mid H_1)$ будем считать условной относительно отношения сигнал-шум

$M_{\Xi_p|\gamma}(s\,|\,H_1)$. ПФМ $M_{\Xi_p}(s\,|\,H_1)$ можно найти путем усреднения по случайному отношению сигнал-шум так:

$$M_{\Xi_p}(s\,|\,H_1) = \int_{-\infty}^{\infty} M_{\Xi_p|\gamma}(s,|\,H_1) f(\gamma) d\gamma\,. \qquad (3.3)$$

Тогда вероятность правильного обнаружения с использованием ПФМ сигнала найдем следующим образом

$$P_D = 1 - \ell^{-1}\left\{\frac{M_{\Xi_p}(s\,|\,H_1)}{s}\right\}. \qquad (3.4)$$

Отметим, что в зарубежной литературе вероятность правильного обнаружения замирающего сигнала принято называть средней вероятностью правильного обнаружения (average detection probability, англ.) [46, 47, 49, 52, 55]. Традиционное энергетическое обнаружение замирающих сигналов рассмотрено в [55, 66]. Улучшенное энергетическое обнаружение случайного гауссовского сигнала с замираниями в гауссовском шуме рассмотрено в [52].

При нахождении характеристик УЭО при наличии замираний отношения сигнал-шум преследуются две цели:

1) Определить насколько снижается эффективность улучшенного энергетического обнаружения сигналов в реальных условиях при наличии замираний отношения сигнал-шум.
2) Определить необходимые значения отношения сигнал-шум и других параметров для достижения заданных характеристик эффективности в реалистичных условиях.

3.1. Модели замираний отношения сигнал-шум

В [57, 84, 85] предложены два новых обобщенных распределения, описывающих замирания отношения сигнал-шум – k-μ распределение и η-μ распределение.

1) k-μ распределение

k-μ распределение может использоваться для описания небольших флуктуаций замирающего сигнала в условиях прямой видимости [85]. Плотность вероятности k-μ распределения определяется следующим образом [85]

$$f_{k-\mu}(\gamma)=\frac{\mu(1+k)^{\frac{1+k}{2}}}{k^{\frac{\mu-1}{2}}\bar{\gamma}^{\frac{\mu+1}{2}}e^{\mu k}}\gamma^{\frac{\mu-1}{2}}e^{-\frac{\mu(1+k)}{\bar{\gamma}}\gamma}I_{\mu-1}\left(2\mu\sqrt{\frac{k(1+k)\gamma}{\bar{\gamma}}}\right), \qquad (3.1.1)$$

где I_v – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка v [1]. $\bar{\gamma}$ – среднее отношение сигнал-шум. На рис. 3.1 и 3.2 представлены плотности вероятности k-μ распределения при различных значениях параметров.

k-μ распределение включает в себя некоторые хорошо известные распределения замираний, а именно: Райса [78], Рэлея [78], одностороннее нормальное [78] и Накагами [78]. Распределение Райса может быть получено из k-μ, если положить $\mu = 1$. В этом случае параметр k совпадает с параметром распределения Райса. k-μ распределение переходит в распределение Накагами при $k \to 0$, в этом случае параметр μ совпадает с параметром m распределения Накагами. Распределения Рэлея и одностороннее нормальное содержатся в Накагами, поэтому они входят и в k-μ при $k \to 0$, $\mu = 1$ и $\mu = 0{,}5$ соответственно.

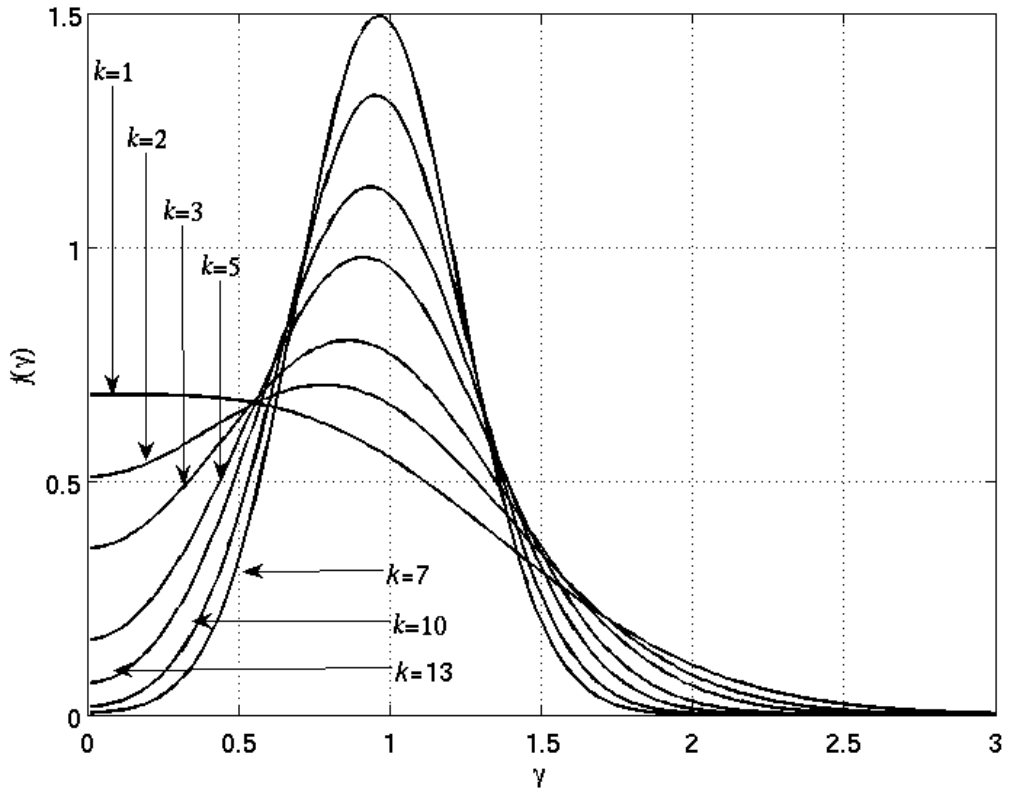


Рис. 3.1. Плотность вероятности k-μ распределения при фиксированном μ = 0,5.

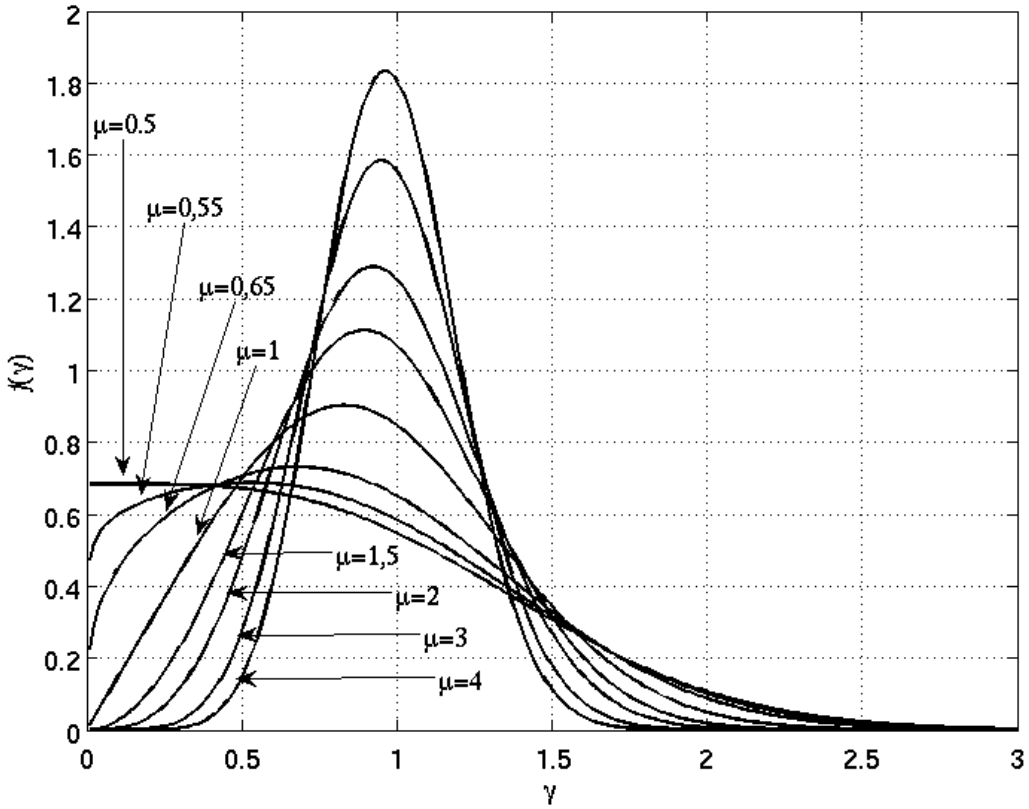


Рис. 3.2. Плотность вероятности k-μ распределения при фиксированном k = 1.

2) η-μ распределение

η-μ распределение может применяться для описания небольших флуктуаций замирающего сигнала в условиях непрямой видимости [85]. Существует две формы записи распределения, соответствующих двум различным физическим моделям. Перейти от одной формы записи к другой можно с помощью выражений $\eta_2 = \frac{1-\eta_1}{1+\eta_1}$ и $\eta_1 = \frac{1-\eta_2}{1+\eta_2}$, где $0 < \eta_1 < \infty$ и $-1 < \eta_2 < 1$. Для удобства записи плотности вероятности введем две переменные H и h, каждая из которых может быть определена через η_1 или η_2.

Плотность вероятности η-μ распределения определяется следующим образом [85]

$$f_{\eta-\mu}(\gamma) = \frac{2\sqrt{\pi}\mu^{\mu+0.5}h^{\mu}}{\Gamma(\mu)H^{\mu-0.5}\overline{\gamma}^{\mu+0.5}}\gamma^{\mu-0.5}e^{-\frac{2\mu h\gamma}{\overline{\gamma}}}I_{\mu-0.5}\left(2\mu H\frac{\gamma}{\overline{\gamma}}\right), \qquad (3.1.2)$$

где $\overline{\gamma}$ – среднее отношение сигнал-шум.

На рис. 3.3 и 3.4 представлены плотности вероятности η-μ распределения при различных значениях параметров.

Для первой формы записи функции h и H, входящие в формулы, представленные выше, определяются так: $h = \frac{2+\eta^{-1}+\eta}{4}$ и $H = \frac{\eta^{-1}-\eta}{4}$ при $0 < \eta < \infty$ и $h = \frac{1}{1-\eta^2}$ и $H = \frac{\eta}{1-\eta^2}$ при $-1 < \eta < 1$.

η-μ распределение включает в себя распределения Хойта [78], одностороннее нормальное, Рэлея и Накагами. Если задать $\mu = 0{,}5$, η-μ распределение переходит в распределение Хойта, параметр которого задается в виде $b = -\frac{1-\eta}{1+\eta}$ и $b = -\eta$ для первой и второй форм записи соответственно. η-μ распределение переходит в распределение Накагами при $\eta \to 0$ или $\eta \to \infty$ для первой формы записи и при $\eta \to \pm 1$ – для второй. При этом параметр распределения Накагами $m = \mu$. Распределения Рэлея и одностороннее

нормальное содержатся в распределении Накагами, поэтому они входят и в η-μ распределение.

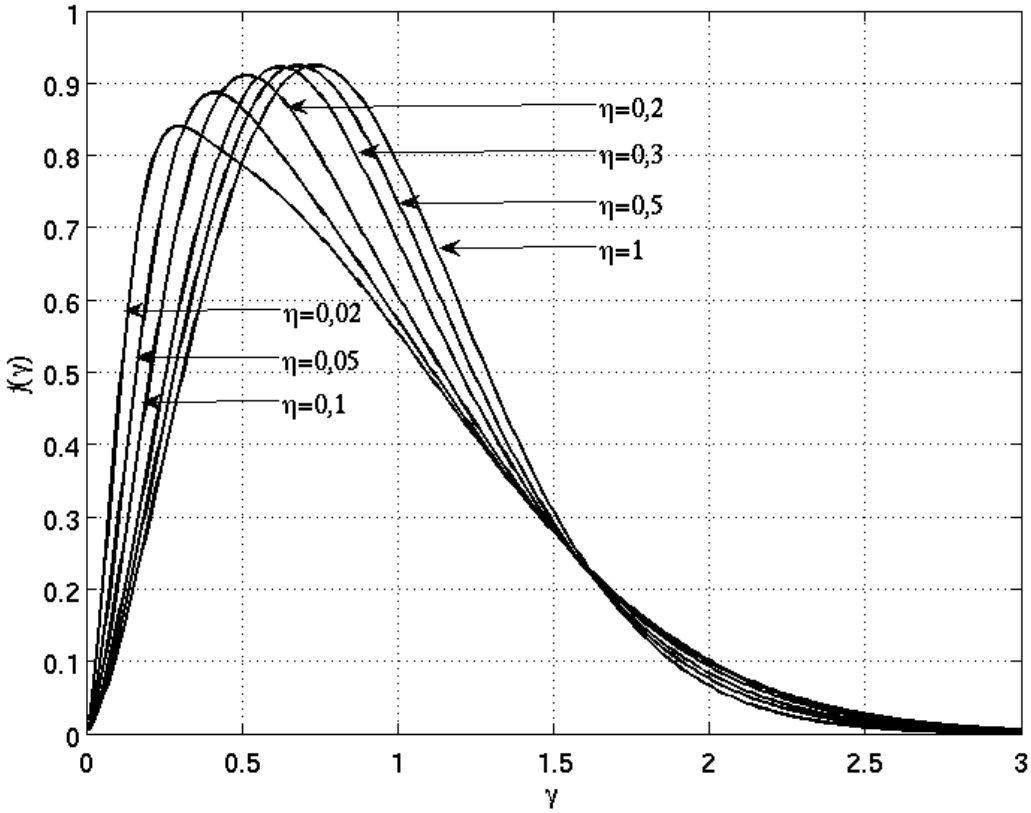


Рис. 3.3. Плотность вероятности η-μ распределения при фиксированном μ = 0,6.

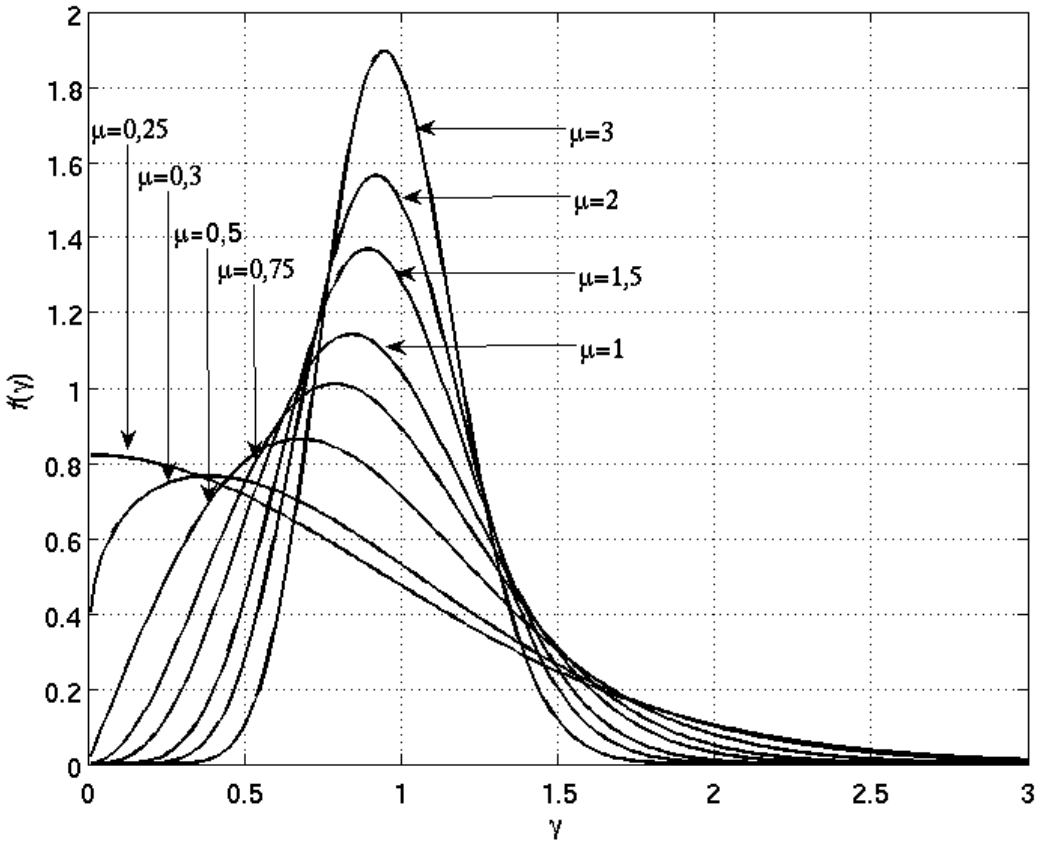


Рис. 3.4. Плотность вероятности η-μ распределения при фиксированном η = 0,5.

3.2. Вероятность правильного обнаружения случайного сигнала на фоне полигауссовского шума при наличии замираний отношения сигнал-шум

Условная ПФМ $M_{\Xi_p|\gamma}(s\,|\,H_1)$ может быть получена в следующем виде, проводя рассуждения, аналогичные проведенным в параграфах 1.3 и 1.4

$$M_{\Xi_p|\gamma}(s\,|\,H_1)=\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma\big((2k+1)/p\big)}{2^k k!s^{(2k+1)/p}}\sum_{v=1}^{V}\frac{b_v}{(\gamma\sigma_n^2+\sigma_v^2)^{k+0.5}}\right)^n. \qquad (3.2.1)$$

Усреднив по распределению отношения сигнал-шум выражение (3.2.1) с помощью (3.3), получим ПФМ $M_{\Xi_p}(s\,|\,H_1)$ в следующем виде

$$M_{\Xi_p}(s\,|\,H_1)=\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma\big((2k+1)/p\big)}{2^k k!s^{(2k+1)/p}\sigma_n^{2k+1}}\sum_{v=1}^{V}\int_0^{\infty}\frac{b_v f(\gamma)d\gamma}{(\gamma+\sigma_v^2/\sigma_n^2)^{k+0.5}}\right)^n \qquad (3.2.2)$$

1) Распределение Накагами

Плотность вероятности распределения Накагами определяется следующим выражением

$$f_{Nak}(\gamma)=\frac{1}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\bar{\gamma}}\right)^m\gamma^{m-1}e^{-\frac{m}{\bar{\gamma}}\gamma}, \qquad (3.2.3)$$

где m и $\bar{\gamma}$ – параметры распределения.

Подставив (3.2.3) в (3.2.2) и вычислив интеграл, получим следующее выражение для ПФМ УЭО замирающих по Накагами сигналов на фоне полигауссовского шума

$$M_{\Xi_p}^{Nak}(s\,|\,H_1)=\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{\bar{\gamma}}\right)^m\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\Gamma\big((2k+1)/p\big)}{2^k k!s^{(2k+1)/p}\sigma_n^{2k+1}}\right.$$
$$\left.\times\sum_{v=1}^{V}b_v\left(\frac{\sigma_v^2}{\sigma_n^2}\right)^{m-k-0.5}U\left(m,m-k+0.5,\frac{m\sigma_v^2}{\bar{\gamma}\sigma_n^2}\right)\right)^n, \qquad (3.2.4)$$

где $U(a,b,z)$ – конфлюэнтная гипергеометрическая функция второго рода [1].

Используя выражение для возведения степенного ряда в степень (1.3.11), запишем ПФМ $M_{\Xi_p}^{Nak}(s\,|\,H_1)$ в виде ряда так:

$$M_{\Xi_p}^{Nak}(s\,|\,H_1)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{m}{\bar{\gamma}}\right)^{mn}\sum_{k=0}^{\infty}C_k^{Nak}s^{-\frac{2k+n}{p}}\,, \qquad (3.2.5)$$

где

$$C_0^{Nak}=(a_0^{Nak})^n\,, \qquad (3.2.6)$$

$$C_j^{Nak}=\frac{1}{ja_0^{Nak}}\sum_{k=1}^{j}(kn-j+k)\frac{(-1)^k\Gamma\big((2k+1)/p\big)}{p2^k k!\sigma_n^{2k+1}}C_{j-k}^{Nak}$$
$$\times\sum_{v=1}^{V}b_v\left(\frac{\sigma_v^2}{\sigma_n^2}\right)^{m-k-0.5}U\left(m,m-k+0.5,\frac{m\sigma_v^2}{\bar{\gamma}\sigma_n^2}\right), \qquad (3.2.7)$$

$$a_0^{Nak}=\frac{\Gamma(1/p)}{p\sigma_n}\sum_{v=1}^{V}b_v\left(\frac{\sigma_v^2}{\sigma_n^2}\right)^{m-0.5}U\left(m,m+0.5,\frac{m\sigma_v^2}{\bar{\gamma}\sigma_n^2}\right). \qquad (3.2.8)$$

После подстановки (3.2.5) в (3.4) и вычисления обратного преобразования Лапласа с учетом (1.3.16) получим следующее выражение для вероятности правильного обнаружения случайного гауссовского сигнала на фоне полигауссовского шума при наличии замираний, описываемых моделью Накагами

$$P_D^{Nak}=1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{m}{\bar{\gamma}}\right)^{mn}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{Nak}T^{\frac{2k+n}{p}}}{\Gamma\big((2k+n)/p+1\big)} \qquad (3.2.9)$$

2) k-μ распределение

Плотность вероятности k-μ распределения определяется выражением (3.1.1). Представим модифицированную функцию Бесселя первого рода $I_t(x)$ в виде ряда [1]:

$$I_t(x)=\left(\frac{z}{2}\right)^t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z^2/4)^k}{k!\Gamma(t+k+1)}\ . \qquad (3.2.10)$$

Подставив (3.2.10) в (3.1.1) получим следующее выражение для плотности вероятности k-μ распределения

$$f_{k-\mu}(\gamma)=\frac{\mu^\mu(1+k)^\mu}{e^{\mu k}\bar{\gamma}^\mu}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\mu^2k(k+1))^i}{i!\Gamma(\mu+i)\bar{\gamma}^i}\gamma^{\mu-1+i}e^{-\frac{\mu(1+k)}{\bar{\gamma}}\gamma}\,. \qquad (3.2.11)$$

Далее, подставляя (3.2.11) в (3.2.2) и вычисляя интеграл, получим следующее выражение для ПФМ УЭО сигналов на фоне полигауссовского шума с замираниями отношения сигнал-шум, описываемыми k-μ распределением

$$M_{\Xi_p}^{k-\mu}(s\,|\,H_1)=\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\mu(1+k)}{e^k\overline{\gamma}}\right)^{\mu}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l\Gamma((2l+1)/p)}{2^l\,l!\,ps^{(2l+1)/p}}\Omega_l^{k-\mu}\right)^n, \qquad (3.2.12)$$

где

$$\Omega_l^{k-\mu}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\mu^2k(k+1))^i}{\overline{\gamma}^i i!}\sum_{v}^{V}b_v\left(\frac{\sigma_v^2}{\sigma_N^2}\right)^{\mu-l+i-0.5}\times$$
$$\times U\left(\mu+i,\mu+i-l+0,5,\frac{\mu(1+k)\sigma_v^2}{\overline{\gamma}\sigma_n^2}\right). \qquad (3.2.13)$$

Используя (1.3.11), запишем выражение для $M_{\Xi_p}^{k-\mu}(s\,|\,H_1)$ в виде ряда так:

$$M_{\Xi_p}^{k-\mu}(s\,|\,H_1)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\mu(1+k)}{\overline{\gamma}e^k}\right)^{\mu n}\sum_{l=0}^{\infty}C_l^{k-\mu}s^{-\frac{2l+n}{p}}, \qquad (3.2.14)$$

где

$$C_0^{k-\mu}=(a_0^{k-\mu})^n, \qquad (3.2.15)$$

$$C_j^{k-\mu}=\frac{1}{ja_0^{k-\mu}}\sum_{u=1}^{j}\frac{(-1)^u\Gamma((2u+1)/p)}{p2^u u!}(un-j+u)\Omega_u^{k-\mu}C_{j-u}^{k-\mu}, \qquad (3.2.16)$$

$$a_0^{k-\mu}=\frac{\Gamma(1/p)}{p\sigma_n}\Omega_0^{k-\mu}. \qquad (3.2.17)$$

После подстановки (3.2.14) в (3.4) и вычисления обратного преобразования Лапласа с учетом (1.3.16) получим следующее выражение для вероятности правильного обнаружения случайного гауссовского сигнала на фоне полигауссовского шума при наличии замираний отношения сигнал-шум, описываемых k-μ распределением,

$$P_D^{k-\mu}=1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\mu(1+k)}{e^k\overline{\gamma}}\right)^{\mu n}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_l^{k-\mu}T^{\frac{2l+n}{p}}}{\Gamma\left((2l+n)/p+1\right)}. \qquad (3.2.18)$$

2) η-μ распределение

Плотность вероятности η-μ распределения определяется выражением (3.1.2). Воспользуемся выражением (3.2.10) и представим плотность вероятности в следующем виде

$$f_{\eta-\mu}(\gamma)=\frac{2\sqrt{\pi}\mu^{2\mu}h^{\mu}}{\Gamma(\mu)\overline{\gamma}^{2\mu}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\mu H)^{2k}\gamma^{2m+2k-1}e^{-2\mu h\gamma/\overline{\gamma}}}{\overline{\gamma}^{2k}k!\Gamma(\mu+k+0{,}5)}. \qquad (3.2.19)$$

Выполняя такие же действия, как и при выводе $M_{\Xi_p}^{k-\mu}(s\,|\,H_1)$, и используя (3.2.19) вместо (3.2.11) получим ПФМ УЭО гауссовского сигнала на фоне полигауссовского шума при наличии замираний отношения сигнал-шум, описываемых η-μ распределением, в следующем виде

$$M_{\Xi_p}^{\eta-\mu}(s\,|\,H_1)=\left(2\sqrt{2}\right)^n\left(\frac{\mu^{2\mu}h^{\mu}}{\Gamma(\mu)\overline{\gamma}^{2\mu}}\right)^n\sum_{l=0}^{\infty}C_l^{k-\mu}s^{-\frac{2l+n}{p}}, \qquad (3.2.20)$$

где

$$C_0^{\eta-\mu}=(a_0^{\eta-\mu})^n, \qquad (3.2.21)$$

$$C_j^{\eta-\mu}=\frac{1}{ja_0^{\eta-\mu}}\sum_{u=1}^{j}(un-j+u)C_{j-u}^{\eta-\mu}\Omega_u^{\eta-\mu}\frac{(-1)^u\Gamma\left((2u+1)/p\right)}{p2^u u!\sigma_n^{2u+1}}, \qquad (3.2.22)$$

$$a_0^{\eta-\mu}=\frac{\Gamma(1/p)}{p\sigma_n}\Omega_0^{\eta-\mu}, \qquad (3.2.23)$$

$$\Omega_l^{\eta-\mu}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\mu H)^{2i}}{\overline{\gamma}^{2i}i!\Gamma(\mu+k+0.5)}\sum_{v=1}^{V}b_v\left(\frac{\sigma_v^2}{\sigma_n^2}\right)^{2\mu+2i-l-0.5}\times$$
$$\times\Gamma(2\mu+2i)U\left(2\mu+2i,2\mu+2i-l+0.5,2\frac{\mu h\sigma_v^2}{\overline{\gamma}\sigma_n^2}\right). \qquad (3.2.24)$$

Подставим (3.2.20) в (3.4) и вычислим обратное преобразование Лапласа с учетом (1.3.16). В результате получим следующее выражение для вероятности правильного обнаружения случайного гауссовского сигнала на фоне полигауссовского шума при наличии замираний отношения сигнал-шум, описываемых η-μ распределением

$$P_D^{\eta-\mu}=1-\left(2\sqrt{2}\right)^n\left(\frac{\mu^{2\mu}h^{\mu}}{\Gamma(\mu)\overline{\gamma}^{2\mu}}\right)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_l^{\eta-\mu}T^{\frac{2l+n}{p}}}{\Gamma\left((2l+n)/p+1\right)}. \qquad (3.2.25)$$

Выражения (3.2.9), (3.2.18) и (3.2.25) представляют собой ряды. При этом коэффициенты рядов (3.2.18) и (3.2.25), в отличие от (3.2.9) также вычисляются с помощью рядов (3.2.13) и (3.2.24), что увеличивает время расчета по указанным формулам, именно поэтому модель Накагами, которая хоть и содержится в моделях k-μ и η-μ, была рассмотрена отдельно. Как уже было отмечено в главе 2, для расчета по приведенным выше формулам требуются библиотеки высокой точности, например, mpmath для Python.

В первой и второй главах подробно описан поиск оптимального значения показателя степени УЭО, которое зависит не только от параметров шума, но и от вида полезного обнаруживаемого сигнала. В настоящей главе при сравнении эффективности УЭО с ТЭО будем использовать $p = 1$.

На рис. 3.5-3.7 представлены зависимости вероятности правильного обнаружения от среднего отношения сигнал-шум $P_D^{Nak}(\bar{\gamma})$, $P_D^{k-\mu}(\bar{\gamma})$ и $P_D^{\eta-\mu}(\bar{\gamma})$ для энергоподобного обнаружителя (сплошная кривая с маркерами) и ТЭО (пунктирная кривая с маркерами) обнаружителей. Квадратными и круглыми маркерами отмечены результаты статистического моделирования вероятности правильного обнаружения энергоподобного и энергетического обнаружителей соответственно. Моделирование осуществлялось в два этапа: на первом этапе проводилось усреднение решающей статистики по 10^3 реализаций отношения сигнал-шум, а на втором – по 10^6 реализаций сигнала и шума. Сплошная и пунктирная кривые без маркеров соответствуют вероятности правильного обнаружения случайного гауссовского сигнала при отсутствии замираний. Параметры шума при расчетах и моделировании выбраны следующими: $V = 2$, $b_1 = 0{,}9985$, $b_2 = 0{,}0015$, $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 100$, объем выборки $n = 15$, параметры моделей замираний: 1) рис. 3.5 – Накагами $m = 1$, 2) рис. 3.6 – k-μ, $k = 3$, $\mu = 1$ и 3) рис.3.7 – η-μ, $\eta = 0{,}99$, $\mu = 2{,}5$. Из хода кривых на рис. 3.5 можно сделать вывод о том, что, во-первых, результаты расчета по формулам (3.2.9), (3.2.18) и (3.2.25) хорошо согласуются с результатами статистического моделирования, во-вторых, замирание отношения сигнал-шум приводит к ухудшению характеристик

улучшенного энергетического обнаружения сигналов и, в-третьих, энергоподобный обнаружитель оказывается более эффективным по сравнению с ТЭО при рассмотренных параметрах шума, сигнала и моделей, описывающих замирания. Для достижения вероятности правильного обнаружения замирающего сигнала, равной 0,9, энергоподобному обнаружителю требуется на 50%, 52% и 51% меньшее отношение сигнал-шум, чем энергетическому для моделей Накагами, k-μ и η-μ с рассмотренными параметрами.

Для численной характеристики уменьшения эффективности обнаружения (которую оценим по уровню вероятности правильного обнаружения при фиксированной вероятности ошибки первого рода) рассмотрим величину D_{P_D}, характеризующую на сколько нужно увеличить отношение сигнал-шум при обнаружении замирающего сигнала для достижения эффективности обнаружения незамирающего сигнала. Определим эту величину так:

$$D_{P_D} = \frac{\overline{\gamma}_{fad} - \gamma_{nofad}}{\gamma_{nofad}}, \qquad (3.2.26)$$

где $\overline{\gamma}_{fad}$ – среднее отношение сигнал-шум, требуемое для достижения вероятности правильного обнаружения P_D при наличии замираний, а γ_{nofad} – отношение сигнал-шум, необходимое для получения такого же значения вероятности правильного обнаружения при условии отсутствия замираний.

Так, например, при наличии замираний, описываемых моделью Накагами с $m = 1$, для достижения $P_D = 0{,}9$ при $P_{E1} = 0{,}01$ энергоподобному обнаружителю необходимо отношение сигнал-шум на 85% большее, чем в случае отсутствия замираний. Аналогичные характеристики для моделей k-μ и η-μ замираний с рассмотренными параметрами равны 48% и 38% соответственно.

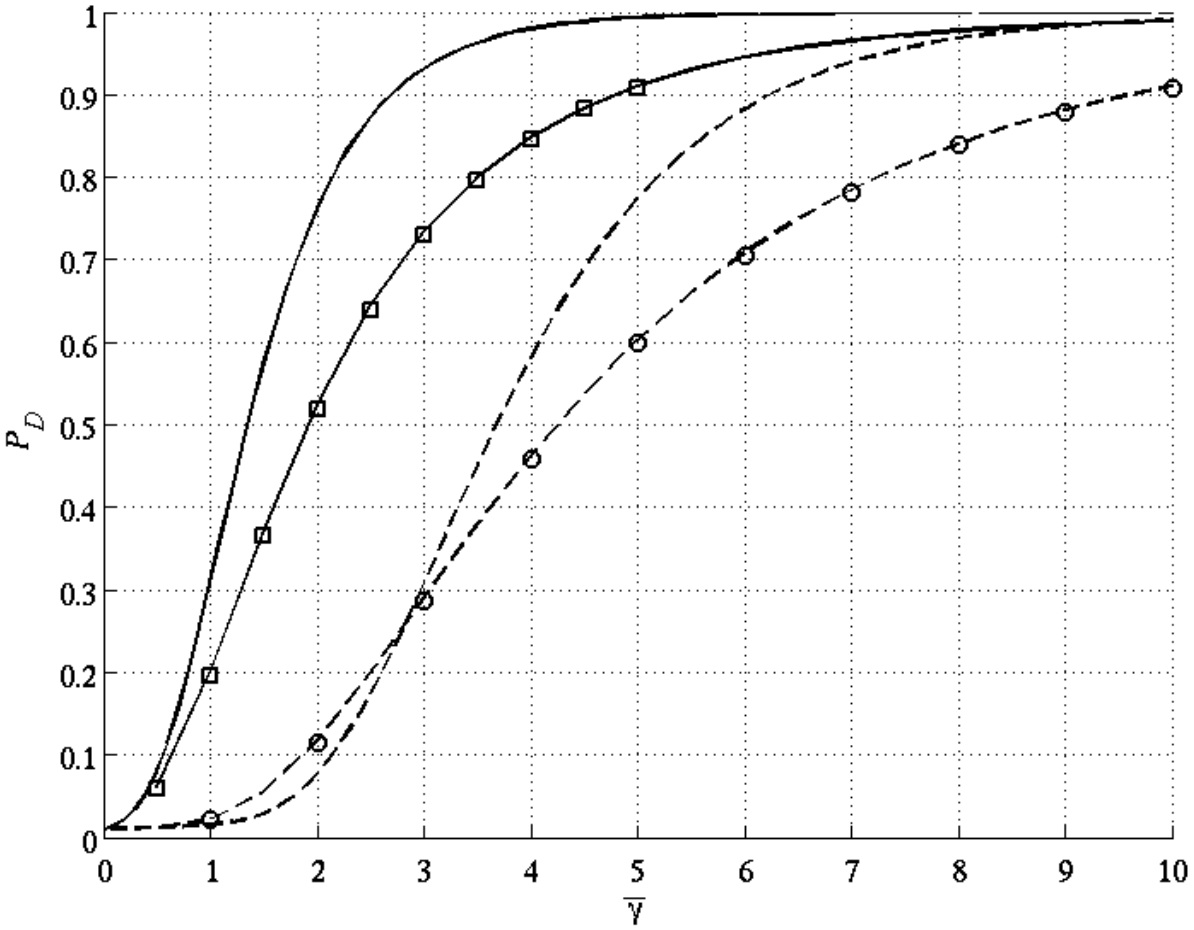


Рис. 3.5. Вероятность правильного обнаружения от отношения сигнал-шум при наличии замираний, описываемых с помощью распределения Накагами.

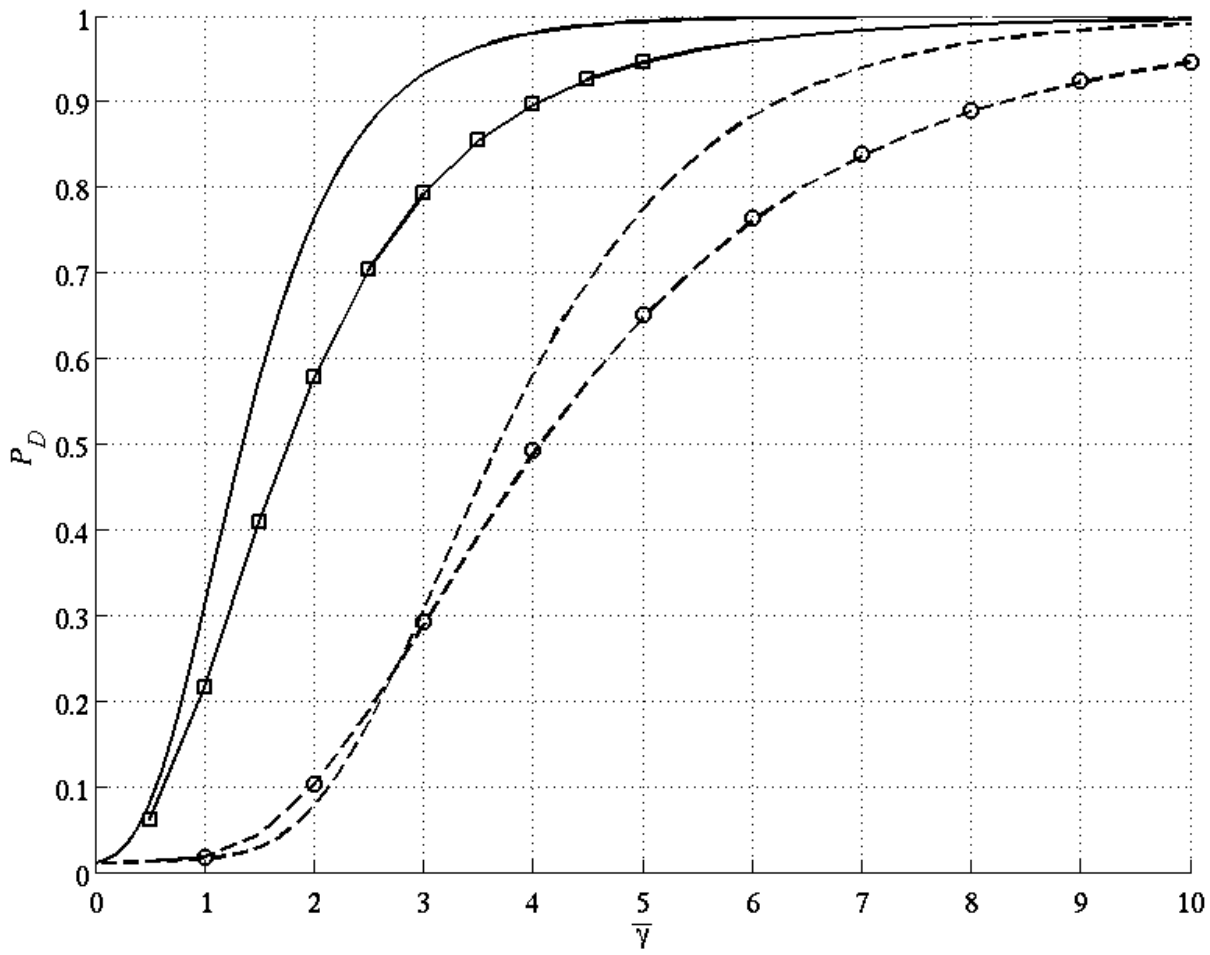


Рис. 3.6. Вероятность правильного обнаружения от отношения сигнал-шум при наличии замираний, описываемых с помощью k-μ распределения.

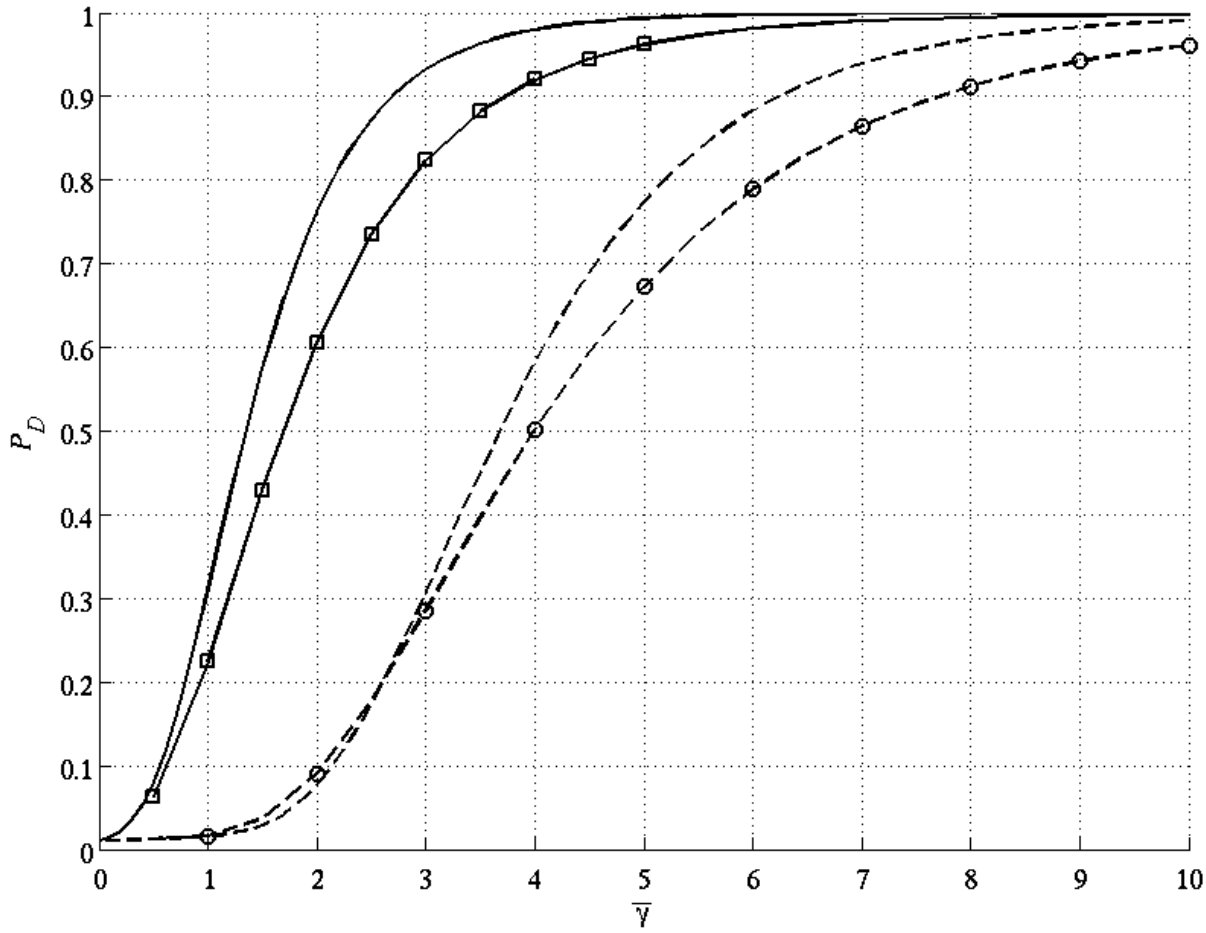
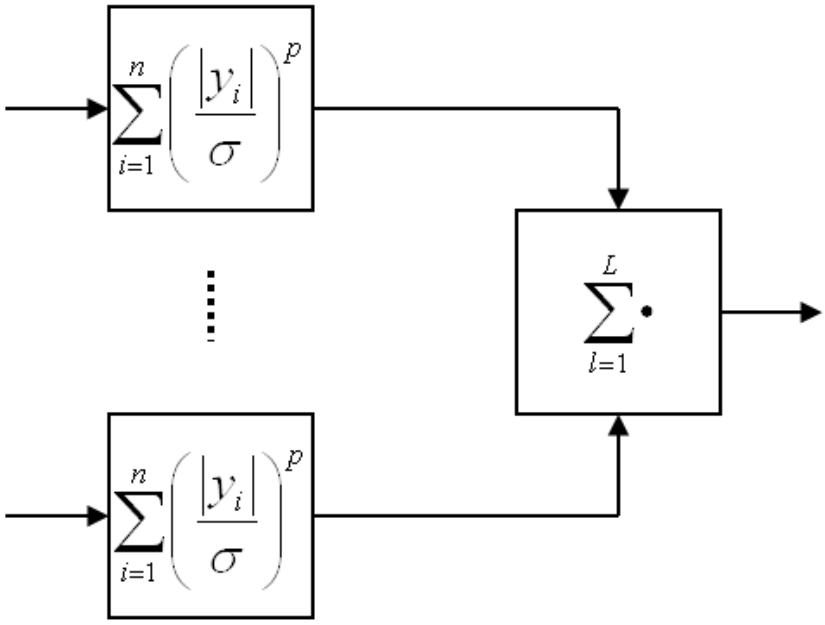


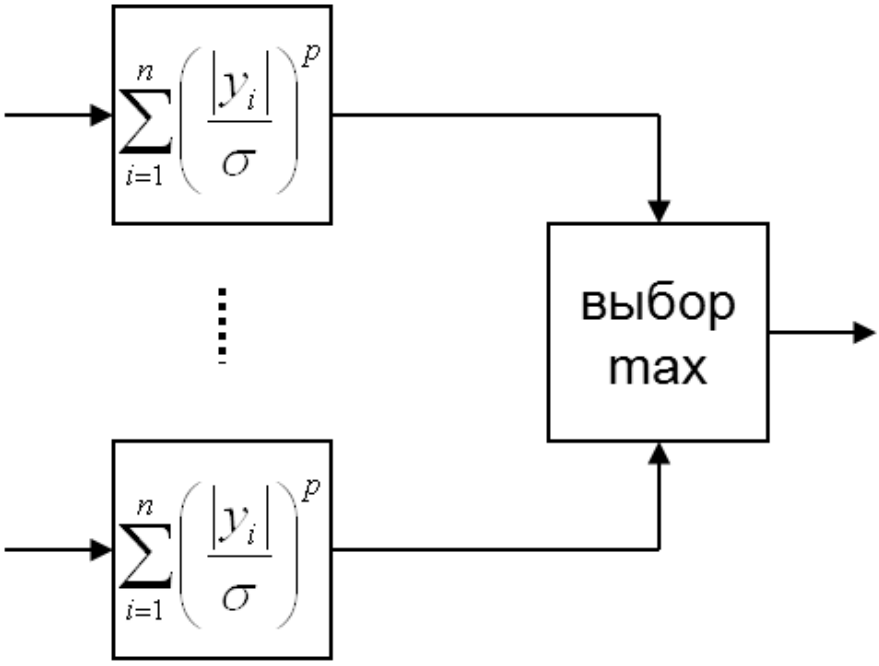
Рис. 3.7. Вероятность правильного обнаружения от отношения сигнал-шум при наличии замираний, описываемых с помощью η-μ распределения.

3.3. Анализ схем разнесенного приема при обнаружении случайного гауссовского сигнала в полигауссовском шуме при наличии замираний отношения сигнал-шум

Как было показано в предыдущих параграфах, замирания отношения сигнал-шум приводят к снижению эффективности улучшенного энергетического обнаружения (в смысле уменьшения вероятности правильного обнаружения при фиксированной вероятности ошибки первого рода), однако современные беспроводные системы связи требуют надежного обнаружения сигналов в любых условиях [83]. Для повышения эффективности обнаружения замирающих сигналов может применяться разнесенный прием [78]. В недавней работе [52] были предложены две новые схемы разнесенного приема: схема выбора с улучшенным энергетическим обнаружителем (англ., *p*-law selection, pLS) и схема объединения с улучшенным энергетическим обнаружителем (англ., *p*-law combining, pLC), которые продемонстрировали большую эффективность по сравнению с известными схемами MRC (maximum ratio combining) и SC (selection combining) [52]. В данном параграфе найдены характеристики обнаружения новых схем разнесенного приема при наличии замираний отношения сигнал-шум, описываемых рассмотренными выше моделями. Схемы представлены на рис. 3.8 а) схема объединения с улучшенным энергетическим обнаружителем и б) схема выбора с улучшенным энергетическим обнаружителем.



а) Схема объединения с улучшенным энергетическим обнаружителем.



б) Схема выбора с улучшенным энергетическим обнаружителем.

Рис. 3.8. Схемы разнесенного приема.

1) Схема объединения с улучшенным энергетическим обнаружителем (pLC)

Данная схема состоит из L ветвей, каждая из которых содержит УЭО. Выходы обнаружителей суммируются и формируют решающую статистику Ξ_{pLC} обнаружителя:

$$\Xi_{pLC} = \sum_{l=1}^{L}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|y_{i,l}|}{\sigma_n}\right)^p, \tag{3.3.1}$$

где $y_{i,l}$ – i-й отсчет, полученный из ветви l.

Вероятность ошибки первого рода можно получить заменой параметра n на Ln в выражениях (1.3.13-1.3.15) и (1.3.18):

$$P_{E1}^{pLC}(T) = 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{Ln}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k T^{(2k+Ln)/p}}{\Gamma\left((2k+Ln)/p+1\right)}. \tag{3.3.2}$$

$$C_0 = a_0^{Ln}, \tag{3.3.3}$$

$$C_j = \frac{1}{ja_0}\sum_{k=1}^{j}(kn-j+k)\frac{(-1)^k\Gamma\left((2k+1)/p\right)}{p2^k k!}C_{j-k}\sum_{v=1}^{V}\frac{b_v}{\sigma_v^{2k+1}}, \tag{3.3.4}$$

$$a_0 = \frac{\Gamma(1/p)}{p}\sum_{v=1}^{V}\frac{b_v}{\sigma_v}. \tag{3.3.5}$$

Вероятность правильного обнаружения P_D^{pLC} для схемы объединения с улучшенным энергетическим обнаружителем может быть найдена по следующей формуле

$$P_D^{pLC} = 1 - W^{fc}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{fc} T^{\frac{2k+Ln}{p}}}{\Gamma\left((2k+Ln)/p+1\right)}, \tag{3.3.6}$$

где W^{fc} и C_k^{fc} – коэффициенты, определяемые видом плотности вероятности замираний отношения сигнал-шум: W^{Nak} и C_k^{Nak} для плотности вероятности Накагами, $W^{k\text{-}\mu}$ и $C_k^{k-\mu}$ для плотности вероятности k-μ распределения и $W^{\eta\text{-}\mu}$ и $C_k^{\eta-\mu}$

для плотности вероятности η-μ распределения. Указанные коэффициенты определяются следующими выражениями

$$W^{Nak} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{Ln}{2}} \left(\frac{m}{\overline{\gamma}}\right)^{Lmn}, \tag{3.3.7}$$

$$W^{k-\mu} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{Ln}{2}} \left(\frac{\mu(1+k)}{e^k \overline{\gamma}}\right)^{L\mu n}, \tag{3.3.8}$$

$$W^{\eta-\mu} = \left(2\sqrt{2}\right)^{Ln} \left(\frac{\mu^{2\mu} h^{\mu}}{\Gamma(\mu)\overline{\gamma}^{2\mu}}\right)^{Ln}, \tag{3.3.9}$$

$$C_0^{Nak} = (a_0^{Nak})^{Ln}, \tag{3.3.10}$$

$$C_j^{Nak} = \frac{1}{j a_0^{Nak}} \sum_{k=1}^{j} (Lkn - j + k) \frac{(-1)^k \Gamma\left((2k+1)/p\right)}{p 2^k k! \sigma_n^{2k+1}} C_{j-k}^{Nak} \times$$
$$\times \sum_{v=1}^{V} b_v \left(\frac{\sigma_v^2}{\sigma_n^2}\right)^{m-k-0.5} U\left(m, m-k+0.5, \frac{m\sigma_v^2}{\gamma\sigma_n^2}\right), \tag{3.3.11}$$

$$C_0^{k-\mu} = (a_0^{k-\mu})^{Ln}, \tag{3.3.12}$$

$$C_j^{k-\mu} = \frac{1}{j a_0^{k-\mu}} \sum_{u=1}^{j} (Lun - j + u) C_{j-u}^{j-\mu} \Omega_u^{k-\mu} \frac{(-1)^u \Gamma\left((2u+1)/p\right)}{p 2^u u! \sigma_n^{2k+1}}, \tag{3.3.13}$$

$$C_0^{\eta-\mu} = (a_0^{\eta-\mu})^{Ln}, \tag{3.3.14}$$

$$C_j^{\eta-\mu} = \frac{1}{j a_0^{\eta-\mu}} \sum_{u=1}^{j} (Lun - j + u) C_{j-u}^{\eta-\mu} \Omega_u^{\eta-\mu} \frac{(-1)^u \Gamma\left((2u+1)/p\right)}{p 2^u u! \sigma_n^{2u+1}}, \tag{3.3.15}$$

где a_0^{Nak}, $\Omega_u^{k-\mu}$, $a_0^{k-\mu}$, $\Omega_u^{\eta-\mu}$, $a_0^{\eta-\mu}$ коэффициенты, определяемые выражениями (3.2.8), (3.2.13), (3.2.17), (3.2.24) и (3.2.23) соответственно.

2) Схема выбора с улучшенным энергетическим обнаружителем

Данная схема также состоит из L ветвей, но только выход наибольшей ветви используется в принятии решения. Решающая статистика этой схемы Ξ_{pLS} определяется следующим образом

$$\Xi_{pLS} = \max\left\{ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|y_{i,1}|}{\sigma_n}\right)^p, \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|y_{i,2}|}{\sigma_n}\right)^p, ..., \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|y_{i,L}|}{\sigma_n}\right)^p \right\}. \qquad (3.3.16)$$

Для получения характеристик обнаружения предположим, что вероятность превышения порога в одной из ветвей схемы равна P, а отсчеты на входе обнаружителей в каждой из ветвей статистически независимы. Тогда вероятность непревышения порога равна $(1 - P)$, а вероятность его непревышения в L ветвях равна $(1 - P)^L$. Поэтому вероятность превышения порога хотя бы в одной из ветвей – $1 - (1 - P)^L$. Таким образом, выражения для вероятности ошибки первого рода P_{E1}^{pLS} и вероятности правильного обнаружения определяются следующим образом

$$P_{E1}^{pLS} = 1 - (1 - P_{E1})^L, \qquad (3.3.17)$$

$$P_D^{pLS} = 1 - (1 - P_D^{fc})^L. \qquad (3.3.18)$$

где P_{E1} определяется выражением (1.3.18), а P_D^{fc} – вероятность правильного обнаружения замирающего сигнала, которая определяется (3.2.9) для распределения Накагами, (3.2.18) для k-μ распределения и (3.2.25) для η-μ распределения.

На рис. 3.9 представлены зависимости вероятности правильного обнаружения от среднего отношения сигнал-шум схемы объединения $P_D^{pLC}(\bar{\gamma})$ (пунктирная линия) и схемы выбора $P_D^{pLS}(\bar{\gamma})$ (штрихпунктирная линия) для показателей степени $p = 1$ (кривые с круглыми маркерами) и $p = 2$ (кривые с квадратными маркерами). Сплошными линиями показаны зависимости вероятности правильного обнаружения от среднего отношения сигнал-шум $P_D^{Nak}(\bar{\gamma})$ для случая, когда схемы разнесенного приема не используются. Параметры шума, используемого при расчете характеристик, приведенных на рис. 3.9, следующие: $V = 3$, $b_1 = 0{,}9965$, $b_2 = 0{,}002$, $b_3 = 0{,}0015$, $\sigma_3^2 / \sigma_1^2 = 100$ и $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 50$, объем выборки обнаружения $n = 15$, замирания описываются распределением Накагами с параметром $m = 1$, количество ветвей схем

разнесенного приема $L = 2$. Из хода кривых на рис. 3.9 видно, что применение любой из рассмотренных схем разнесенного приема существенно повышает вероятность правильного обнаружения как при $p = 1$, так и при $p = 2$. Кроме того, видно, что вероятность правильного обнаружения схем разнесенного приема при $p = 1$ значительно выше, чем при $p = 2$. Также можно сделать вывод о том, что схема объединения эффективнее схемы выбора для $p = 1$, тогда как схема выбора предпочтительнее схемы объединения при $p = 2$ для рассмотренных параметров шума и модели замираний.

При использовании схемы объединения с улучшенным энергетическим обнаружителем при $p = 1$ требуется на 51% меньшее среднее отношение сигнал-шум для достижения вероятности правильного обнаружения $P_D = 0{,}9$, по сравнению со случаем обнаружения замирающего сигнала (модель Накагами, $m = 1$) без использования схем разнесенного приема. При использовании схемы выбора с улучшенным энергетическим обнаружителем ($p = 1$) потребуется на 48% меньшее отношение сигнал-шум.

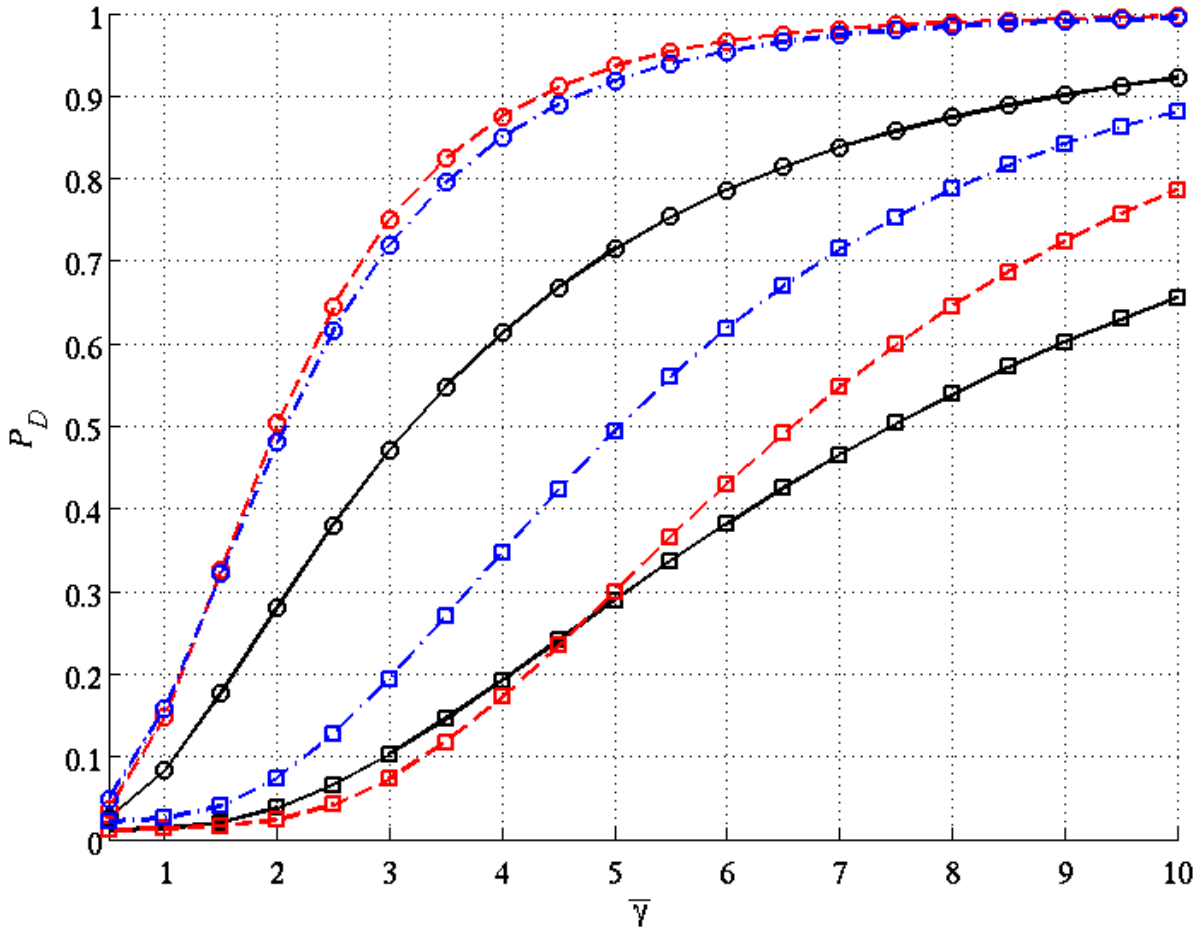


Рис. 3.9. Вероятность правильного обнаружения для различных схем разнесенного приема при замираниях отношения сигнал-шум, описываемых распределением Накагами.

3.4. Вероятность правильного обнаружения случайного гауссовского сигнала в обобщенном гауссовском шуме при наличии замираний отношения сигнал-шум

Рассмотрим улучшенное энергетического обнаружение случайного гауссовского сигнала в обобщенном гауссовском шуме при наличии замираний отношения сигнал-шум. Вероятность правильного обнаружения в данном случае не удалось выразить в аналитическом виде, однако она была получена с использованием статистического моделирования, в котором на первом этапе производилось усреднение решающей статистики по 10^3 реализаций отношения сигнал-шум, а затем – по 10^6 реализаций сигнала и шума. Порог обнаружения соответствует вероятности ошибки первого рода 0,01 и является решением уравнения

$$P_{E1}(T) = 0{,}01, \qquad (3.4.1)$$

где $P_{E1}(T)$ определяется выражением (2.3.12).

На рис. 3.10-3.12 представлены зависимости вероятности правильного обнаружения от среднего отношения сигнал-шум $P_D(\bar{\gamma})$ при $p = 2$ (ТЭО) и $p = 4{,}5$ (УЭО с оптимальным значением показателя степени), $n = 20$, $\beta = 3{,}5$ и со следующими параметрами распределений замираний 1) рис. 3.8: распределение Накагами с параметром $m = 1$, 2) рис. 3.9: η-μ распределение, $\eta = 0{,}99$ и $\mu = 2{,}5$, 3) рис. 3.10: k-μ распределение, $k = 3$, $\mu = 1$. Пунктирными кривыми с ромбовидными маркерами показаны зависимости $P_D(\bar{\gamma})$ для $p = 4{,}5$, а пунктирными кривыми с квадратными маркерами – $P_D(\bar{\gamma})$ при $p = 2$. На тех же рисунках для сравнения представлены зависимости вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум $P_D(\gamma)$ УЭО с $p = 4{,}5$ (сплошные кривые) и ТЭО (штрихпунктирные кривые) при условии отсутствия замираний. Из хода кривых на рисунках видно, что УЭО с оптимальным показателем степени обладает большей вероятностью правильного обнаружения при фиксированной вероятности ошибки первого рода по сравнению с ТЭО. Так, УЭО с $p = 4{,}5$ требуется на 18%, 15% и 17% меньшее среднее отношение сигнал-шум для

достижения $P_D = 0{,}9$ при $P_{E1} = 0{,}01$, чем ТЭО, при условии, что замирания описываются моделями Накагами, η-μ и k-μ с рассмотренными выше параметрами.

Кроме того, наличие замираний ведет к снижению эффективности обнаружения (в смысле уменьшения вероятности правильного обнаружения при фиксированной вероятности ошибки первого рода). Для достижения вероятности правильного обнаружения $P_D = 0{,}9$ требуется на 17%, 6% и 7% большее отношение сигнал-шум для моделей замираний Накагами, η-μ и k-μ соответственно, чем для достижения $P_D = 0{,}9$ при отсутствии замираний улучшенным энергетическим обнаружителем с оптимальным показателем степени.

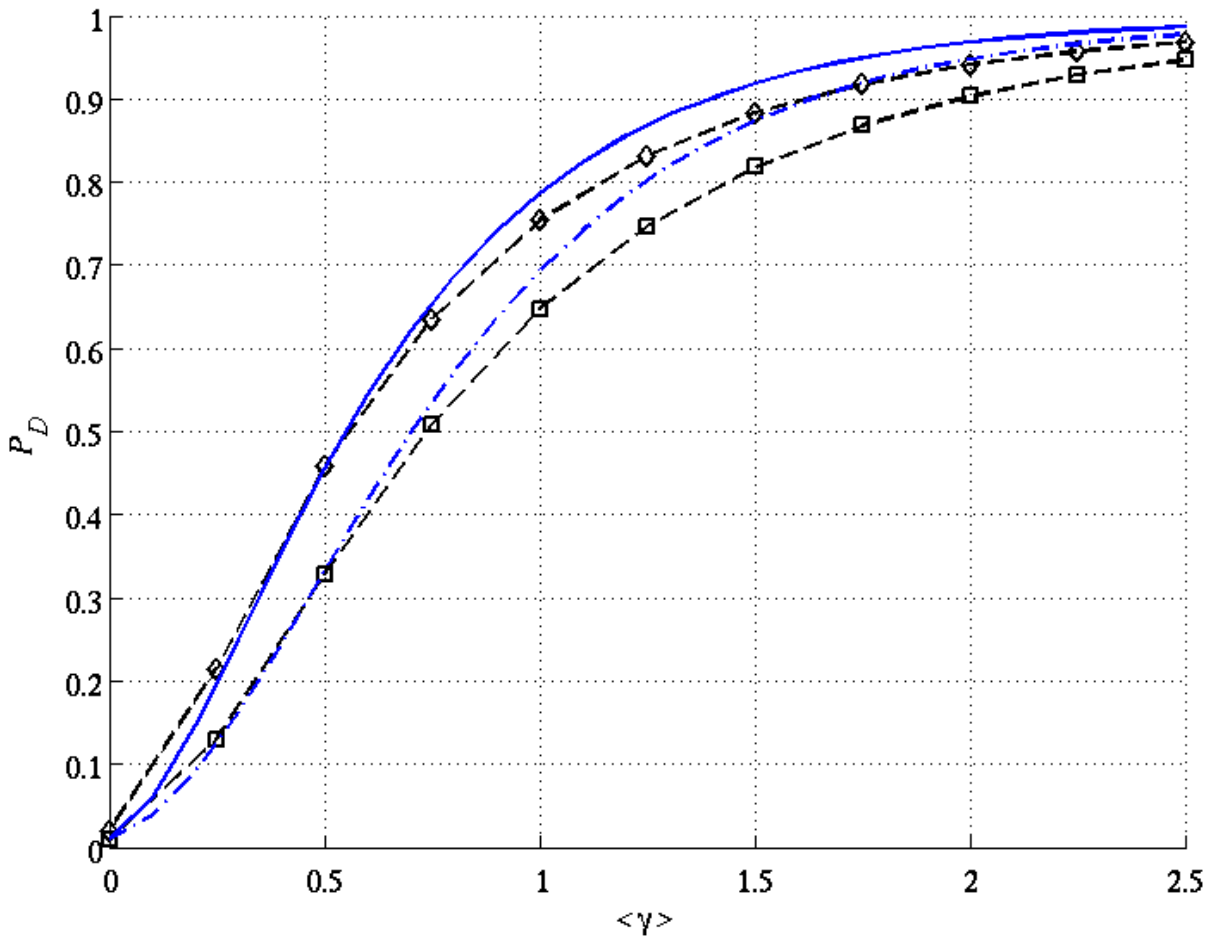


Рис. 3.10. Вероятность правильного обнаружения случайного гауссовского сигнала в обобщенном гауссовском шуме при наличии замираний, распределенных по закону Накагами.

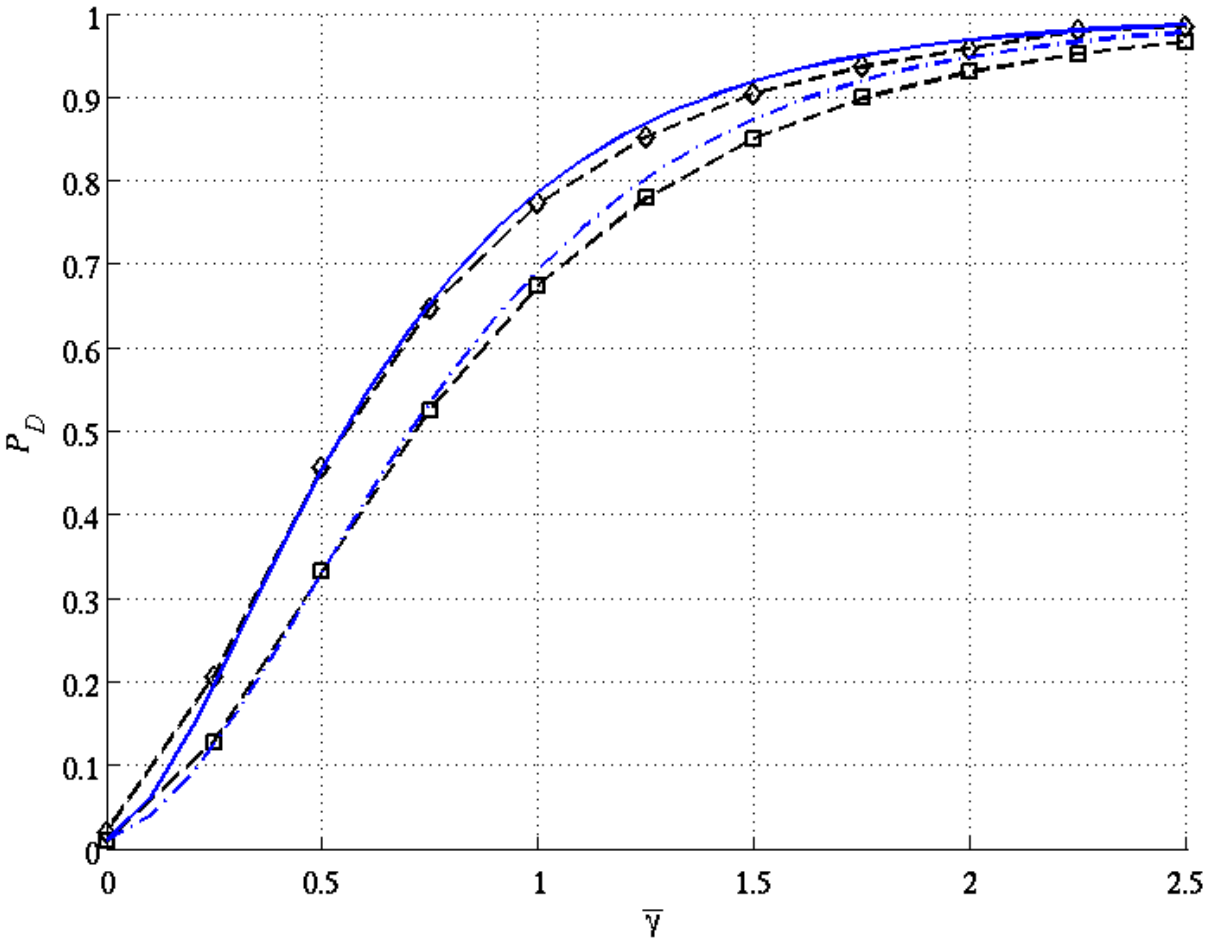


Рис. 3.11. Вероятность правильного обнаружения случайного гауссовского сигнала в обобщенном гауссовском шуме при наличии замираний, распределенных по закону η-μ.

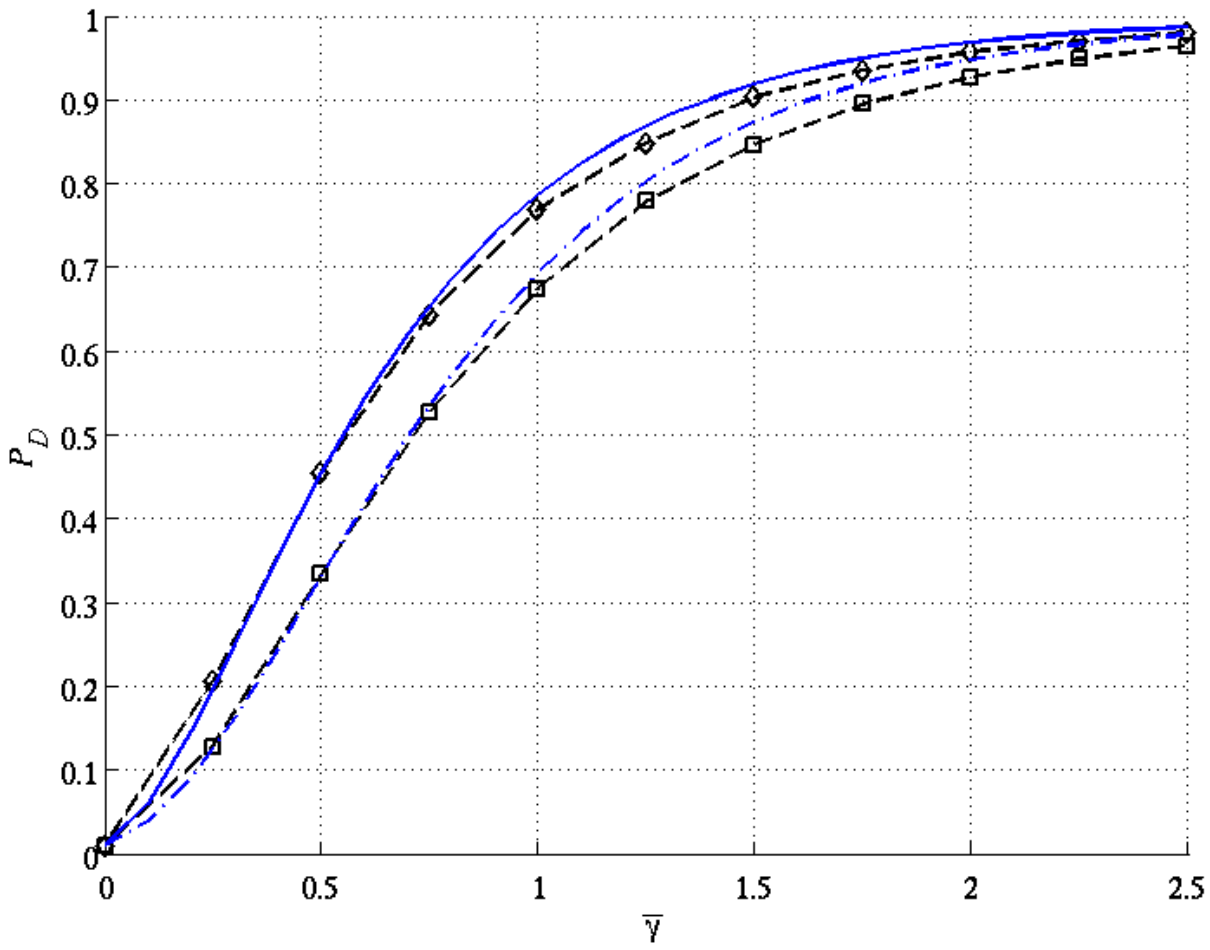


Рис. 3.12. Вероятность правильного обнаружения случайного гауссовского сигнала в обобщенном гауссовском шуме при наличии замираний, распределенных по закону k-μ.

Основные результаты и выводы

1. Получены аналитические выражения для вероятности правильного обнаружения УЭО случайного гауссовского сигнала в полигауссовском шуме при наличии замираний, описываемых моделями Накагами, k-μ и η-μ. Найденные выражения, как и в случае отсутствия замираний, представлены в виде рядов, наличие k-μ и η-μ замираний проявляется в усложнении выражений для коэффициентов ряда, так как они также выражаются в виде рядов.
2. Наличие замираний отношения сигнал-шум проявляется в увеличении требуемого среднего отношения сигнал-шум на 38-85% для достижения $P_D = 0{,}9$ при фиксированной вероятности ошибки первого рода на уровне 0,01 и рассмотренных параметрах моделей замираний.
3. Как при отсутствии, так и при наличии замираний значение показателя степени УЭО оказывает существенное влияние на характеристики обнаружения. При обнаружении сигнала в полигауссовском шуме и наличии замираний энерогоподобный обнаружитель оказался значительно эффективнее ТЭО (требует примерно на 50% меньшее отношение сигнал-шум для достижения $P_D = 0{,}9$). Тогда как в случае шумового фона в виде обобщенного гауссовского шума с параметром $\beta = 3{,}5$, УЭО с $p = 4{,}5$ оказался эффективнее традиционного энергетического (требует примерно на 15-18% меньшее отношение сигнал-шум для достижения $P_D = 0{,}9$ при $P_{E1} = 0{,}01$).
4. Применение схем объединения и выбора с улучшенным энергетическим обнаружителем при $p = 1$ снижает требуемое для достижения $P_D = 0{,}9$ при $P_{E1} = 0{,}01$ отношение сигнал-шум примерно на 50% в рассмотренном в этой главе примере.
5. Схемы разнесенного приема с УЭО при $p = 1$ обеспечивают большую вероятность правильного обнаружения при фиксированной вероятности ошибки первого рода, чем при $p = 2$.

Глава 4. Адаптивное улучшенное энергетическое обнаружение

В предыдущих главах предполагалось, что дисперсия шума является известной величиной. В случае, когда интенсивность шумового фона неизвестна, использование улучшенного энергетического обнаружителя невозможно. Для оценки среднеквадратического отклонения шума воспользуемся адаптивной процедурой [18, 23, 30, 32], которая позволяет зафиксировать порог обнаружения и, как следствие, вероятность ошибки первого рода. В течение всего времени обучения предполагается отсутствие полезного сигнала на входе, то есть реализация гипотезы H_0. Улучшенный энергетический и энергоподобный обнаружители, использующие такую процедуру обучения, назовем адаптивным улучшенным энергетическим и адаптивным энергоподобным соответственно.

Решающую статистику адаптивного УЭО запишем в виде

$$\Xi_{Ap} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|y_i|}{\hat{\sigma}} \right)^p , \tag{4.1}$$

где $\hat{\sigma}$ – оценка среднеквадратического отклонения шума, определяемая так:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m} y_i^2} , \tag{4.2}$$

где m – объем выборки обучения.

В параграфах 4.1 и 4.2 получены аналитические выражения для характеристик адаптивного энергоподобного обнаружения гауссовского случайного сигнала на фоне полигауссовского шума. Решающая статистика адаптивного энергоподобного обнаружителя определяется следующим выражением

$$\Xi_{A1} = \frac{S_1}{\hat{\sigma}} , \tag{4.3}$$

где

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} |y_i| . \tag{4.4}$$

В параграфе 4.3 найдены характеристики адаптивного улучшенного энергетического обнаружения случайного гауссовского сигнала в обобщенном гауссовском шуме с помощью статистического моделирования.

4.1. Характеристики адаптивного энергоподобного обнаружения случайного гауссовского сигнала на фоне полигауссовского шума

1) Вероятность ошибки первого рода P_{E1}

Решающая статистика адаптивного энергподобного обнаружителя представляет собой частное двух случайных величин: суммы модулей входных отсчетов S_1 и оценки среднеквадратического отклонения $\hat{\sigma}$. Так как плотность вероятности частного двух неотрицательных случайных величин с плотностями вероятности $l(x)$ и $m(x)$ может быть найдена так [36]:

$$f(x) = \int_0^\infty l(xy)m(y)ydy, \tag{4.1.1}$$

то условная плотность вероятности $f_{\Xi_{A1}}(\eta \mid H_0)$ решающей статистики (4.3) может быть записана в следующем виде

$$f_{\Xi_{A1}}(\eta \mid H_0) = \int_0^\infty X(\eta,\xi)d\xi, \tag{4.1.2}$$

$$X(\eta,\xi) = f_{S_1}(\eta\xi \mid H_0) f_{\hat{\sigma}}(\xi \mid H_0)\xi, \tag{4.1.3}$$

где $f_{S_1}(\xi \mid H_0)$ и $f_{\hat{\sigma}}(\zeta \mid H_0)$ – условные плотности вероятности случайных величин S_1 и $\hat{\sigma}$, формирующих решающую статистику (4.3).

Условная функция распределения случайной величины S_1, стоящей в числителе решающей статистики (4.3), может быть получена в следующем виде, если в выражении (1.3.17) положить $p = 1$

$$F_{S_1}(\xi \mid H_0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k^{H_0} \xi^{2k+n}}{(2k+n)!}, \tag{4.1.4}$$

где

$$E_0^{H_0} = a_0{}^n, \tag{4.1.5}$$

$$a_0 = \sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\sigma_v}, \tag{4.1.6}$$

$$E_j^{H_0} = \frac{1}{ja_0} \sum_{k=1}^{j} (kn - j + k) \frac{(-1)^k \Gamma(2k+1)}{2^k k!} E_{j-k}^{H_0} \sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\sigma_v^{2k+1}}. \tag{4.1.7}$$

Условную плотность вероятности $f_{S_1}(\xi \mid H_0)$ можно получить дифференцированием $F_{S_1}(\xi \mid H_0)$ следующим образом

$$f_{S_1}(\xi \mid H_0) = \frac{dF_{S_1}(\xi \mid H_0)}{d\xi}. \qquad (4.1.8)$$

Вычисляя производную, найдем $f_{S_1}(\xi \mid H_0)$ в следующем виде

$$f_{S_1}(\xi \mid H_0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k^{H_0} \xi^{2k+n-1}}{(2k+n-1)!}. \qquad (4.1.9)$$

Оценку среднеквадратического отклонения шума $\hat{\sigma}$ представим так:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m} y_i^2} = \sqrt{\frac{\Xi_2^{\sigma_n=1}}{m}}, \qquad (4.1.10)$$

где $\Xi_2^{\sigma=1}$ – решающая статистика энергетического обнаружителя при $\sigma_n = 1$, функция распределения которой может быть получена в следующем виде, если в выражении (1.3.17) положить $p = 2$

$$F_{\Xi_2^{\sigma_n=1}}(\zeta \mid H_0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k^{H_0} \zeta^{k+0,5m}}{(k+0,5m+1)!}, \qquad (4.1.11)$$

где

$$F_0^{H_0} = a_0{}^n, \qquad (4.1.12)$$

$$a_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\sigma_v}, \qquad (4.1.13)$$

$$F_j^{H_0} = \frac{1}{ja_0} \sum_{k=1}^{j} (km - j + k) \frac{(-1)^k \Gamma\left(k+0,5\right)}{2^{k+1} k!} F_{j-k}^{H_0} \sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\sigma_v^{2k+1}}. \qquad (4.1.14)$$

Условную плотность вероятности $f_{\Xi_2^{\sigma_n=1}}(\zeta \mid H_0)$ найдем с помощью (4.1.8) и (4.1.11):

$$f_{\Xi_2^{\sigma=1}}(\zeta \mid H_0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k^{H_0} \zeta^{k+0,5m-1}(k+0,5m)}{(k+0,5m+1)!}. \qquad (4.1.15)$$

Для нахождения плотности вероятности оценки среднеквадратического отклонения шума $f_{\hat{\sigma}}(\zeta \mid H_0)$ воспользуемся свойством инвариантности дифференциала [34] и получим:

$$f_{\hat{\sigma}}(\zeta \mid H_0) = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F_k^{H_0} \zeta^{2k+m-1} m^{k+0.5m} (k+0.5m)}{\Gamma(k+0.5m+1)}. \qquad (4.1.16)$$

Подставим (4.1.9) и (4.1.16) в выражение (4.1.3), которое после преобразований представимо в виде

$$X(\eta,\xi) = 2m^{\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}} \eta^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{H_0}(\eta) \xi^{2k} \sum_{k=0}^{\infty} B_k^{H_0} \xi^{2k}, \qquad (4.1.17)$$

где

$$A_k^{H_0}(\eta) = \frac{E_k^{H_0} \eta^{2k}}{(2k+n-1)!}, \qquad (4.1.18)$$

$$B_k^{H_0} = \frac{F_k^{H_0} m^k (k+0,5m)}{\Gamma(k+0,5m+1)}. \qquad (4.1.19)$$

Используя выражение для нахождения произведения рядов [60]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k, \qquad (4.1.20)$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}, \qquad (4.1.21)$$

перепишем (4.1.17) в виде

$$X(\eta,\xi) = 2m^{\frac{m}{2}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}} \eta^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{H_0}(\eta) \xi^{2k}, \qquad (4.1.22)$$

где

$$C_n^{H_0}(\eta) = \sum_{k=0}^{n} A_k(\eta) B_{n-k}. \qquad (4.1.23)$$

Условную функцию распределения $F_{\Xi_{A1}}(x \mid H_0)$ решающей статистики Ξ_{A1} можно найти так:

$$F_{\Xi_{A1}}(x\,|\,H_0)=\int_0^x f_{\Xi_{AQ}}(\eta\,|\,H_0)d\eta=\int_0^x d\eta\int_0^\infty X(\eta,\xi)d\xi\,. \qquad (4.1.24)$$

Подставив (4.1.22) в (4.1.24) и изменив порядок интегрирования, запишем последнее в виде

$$F_{\Xi_{A1}}(x\,|\,H_0)=2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}} m^{\frac{m}{2}}x^n\int_0^\infty \xi^{m+n-1}\sum_{k=0}^\infty D_k^{H_0}(x)\xi^{2k}d\xi\,, \qquad (4.1.25)$$

где

$$D_k^{H_0}(x)=\sum_{i=0}^k \frac{A_i^{H_0}(x)B_{k-i}^{H_0}}{2i+n}\,. \qquad (4.1.26)$$

Используя (1.3.1) и (4.1.25), получим окончательное выражение для вероятности ошибки первого рода P_{E1} в следующем виде

$$P_{E1}(T)=1-2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}} m^{\frac{m}{2}}T^n\int_0^\infty \xi^{m+n-1}\sum_{k=0}^\infty D_k^{H_0}(T)\xi^{2k}d\xi\,. \qquad (4.1.27)$$

На рис. 4.1 представлены зависимости вероятности ошибки первого рода от порога обнаружения $P_{E1}(T)$ адаптивного энергоподобного обнаружителя гауссовского случайного сигнала в полигауссовском шуме, рассчитанные для различных значений объема выборки обучения: m = 20 (кривая с треугольными маркерами, направленными влево), 50 (кривая с треугольными маркерами, направленными вправо), 100 (кривая с квадратными маркерами). Кроме того на рис. 4.1 помещена кривая $P_{E1}(T)$, соответствующая случаю известной интенсивности полигауссовского шума (кривая с круглыми маркерами). При построении графиков использовались следующие параметры шума: $V = 2$, $b_1 = 0{,}9985$, $b_2 = 0{,}0015$, $\sigma_2^2/\sigma_1^2=100$, а объем выборки обнаружения $n = 15$. Из хода кривых на рис. 4.1 видно, что с увеличением длины выборки обучения точность оценки интенсивности шума увеличивается (кривые, соответствующие адаптивному обнаружителю приближаются к кривой, соответствующей обнаружителю, работающему на фоне шума известной интенсивности). Пороги обнаружения, полученные с использованием оценки среднеквадратического отклонения шума и соответствующие объемам выборки обучения 15, 20, 50, 100,

200 и 300, равны 24.89, 23,50, 21,11, 20,24, 19,78 и 19,57 при рассмотренных параметрах шума и вероятности ошибки первого рода равной 0,01. При известной дисперсии шума порог обнаружения, соответствующий той же вероятности ошибки первого рода равен 18,49. Таким образом, ошибки вычисления порога для m = 20, 50, 100, 200 и 300 равны 35%, 27%, 14%, 9%, 7% и 6% соответственно.

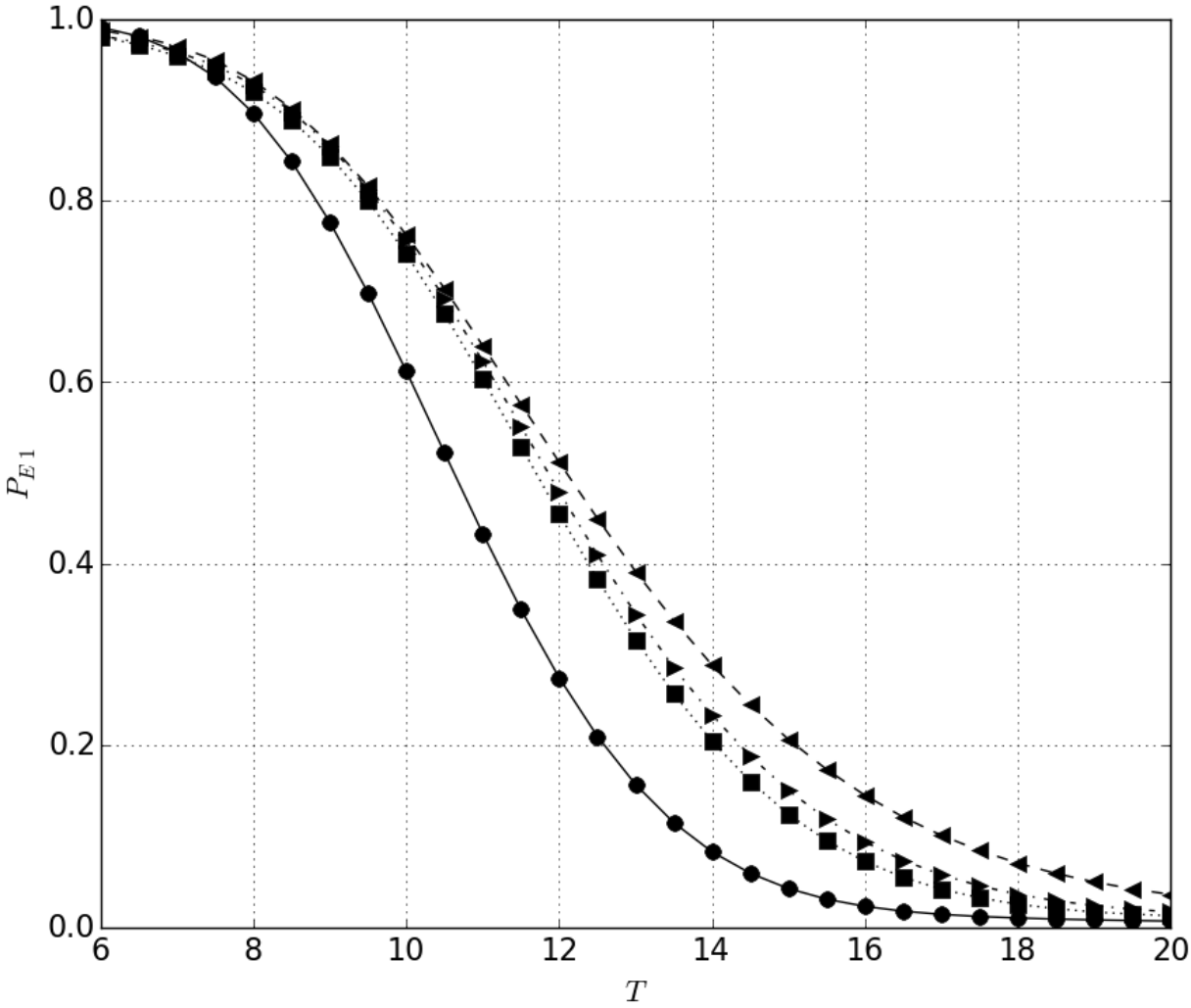


Рис. 4.1. Зависимость вероятности ошибки первого рода от порога обнаружения.

2) Вероятность правильного обнаружения P_D

Для случая реализации гипотезы H_1 условная плотность вероятности $f_{S_1}(\xi \mid H_1)$ случайной величины S_1 определяется так:

$$f_{S_1}(\xi, q^2 \mid H_1) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k^{H_1}(q^2)\xi^{2k+n-1}}{(2k+n-1)!}, \tag{4.1.28}$$

где

$$E_0^{H_1}(q^2) = a_0(q^2)^n, \tag{4.1.29}$$

$$a_0(q^2) = \sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\sigma_v \sqrt{1+q^2}}, \tag{4.1.30}$$

$$E_j^{H_1}(q^2) = \frac{1}{ja_0(q^2)} \sum_{k=1}^{j} (kn - j + k) \frac{(-1)^k \Gamma(2k+1)}{2^k k!} E_{j-k}^{H_1} \times$$
$$\times \sum_{v=1}^{V} \frac{b_v}{\left(\sigma_v \sqrt{1+q^2}\right)^{2k+1}}. \tag{4.1.31}$$

Условная плотность вероятности оценки среднеквадратического отклонения шума в случае реализации гипотезы H_1 останется прежней, так как предполагается, что обучение обнаружителя происходит при отсутствии полезного сигнала.

Таким образом, используя (4.1.28) и (4.1.16), найдем условную функцию распределения $F_{\Xi_{A1}}(x, q^2 \mid H_1)$ решающей статистики Ξ_{A1} в следующем виде

$$F_{\Xi_{A1}}(x, q^2 \mid H_1) = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}} m^{\frac{m}{2}} x^n \int_0^{\infty} \xi^{m+n-1} \sum_{k=0}^{\infty} D_k^{H_1}(x, q^2)\xi^{2k} d\xi, \tag{4.1.32}$$

где

$$D_k^{H_1}(x, q^2) = \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i^{H_1}(x, q^2) B_{k-i}^{H_0}}{2i+n}, \tag{4.1.33}$$

$$A_k^{H_1}(x, q^2) = \frac{E_k^{H_1}(q^2) x^{2k}}{(2k+n-1)!}. \tag{4.1.34}$$

Используя (1.4.2) и (4.1.32), получим окончательное выражение для вероятности правильного обнаружения P_D в следующем виде

$$P_D(q^2) = 1 - 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{m}{2}} m^{\frac{m}{2}} T^n \int_0^\infty \xi^{m+n-1} \sum_{k=0}^{\infty} D_k^{H_1}(T, q^2) \xi^{2k} d\xi. \qquad (4.1.35)$$

На рис. 4.2 представлены зависимости вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум $P_D(q^2)$ адаптивного энергоподобного обнаружителя случайного гауссовского сигнала в полигауссовском шуме с объемами выборки обучения m = 5 (кривая 1), 10 (кривая 2), 15 (кривая 3), 20 (кривая 4), 50 (кривая 5), 100 (кривая 6) и 300 (кривая 7), рассчитанные по формуле (4.1.35). На этом же рисунке представлены зависимости вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум для энергетического (кривая 8) и энергподобного (кривая 9) обнаружителей сигналов в полигауссовском шуме с известной дисперсией. При построении графиков использовались следующие параметры шума: $V = 2$, $b_1 = 0{,}9985$, $b_2 = 0{,}0015$, $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 100$, а объем выборки обнаружения $n = 15$. Маркерами на рис. 4.2 отмечены результаты статистического моделирования. Из хода кривых на рис. 4.2 видно, что, во-первых, результаты статистического моделирования хорошо согласуются с расчетом по аналитической формуле (4.1.35), во-вторых, эффективность адаптивного энергоподобного обнаружителя увеличивается с ростом длины выборки обучения. При использовании объемов выборки обучения 10, 15, 20, 50, 100 и 300 требуется на 171%, 103%, 73%, 36%, 28% и 21% большее отношение сигнал-шум для достижения $P_D = 0{,}9$ по сравнению со случаем известного среднеквадратического отклонения шума. При этом согласно представленным зависимостям адаптивное энергоподобное обнаружение гауссовского сигнала на фоне полигауссовского шума неизвестной интенсивности с длиной выборки обучения всего в 15-20 отсчетов оказывается эффективнее, чем традиционное энергетическое обнаружение даже при условии известной интенсивности шума.

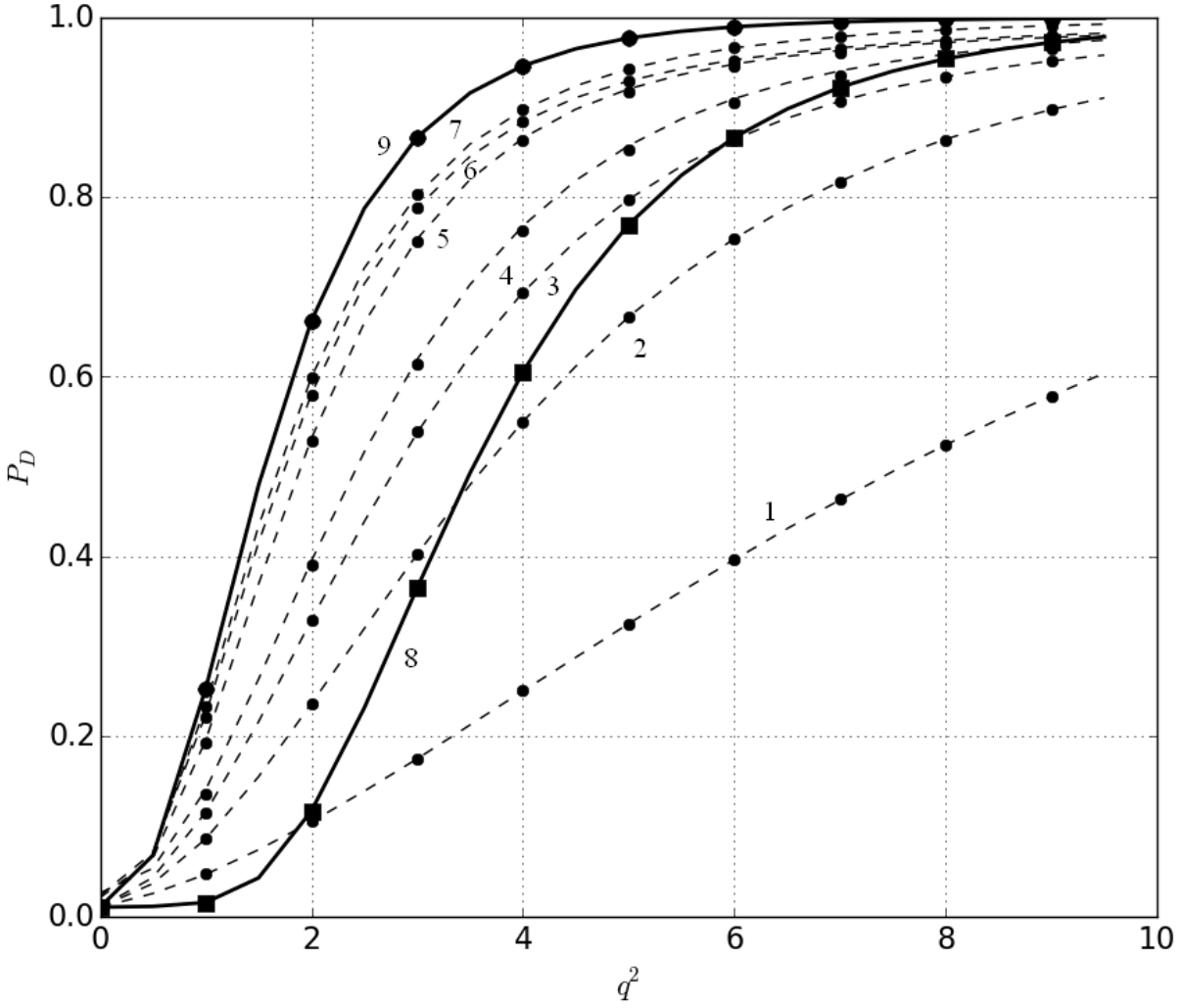


Рис. 4.2. Зависимость вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум при различных объемах выборки обучения *m*.

4.2. Вероятность правильного обнаружения адаптивного энергоподобного обнаружителя случайного гауссовского сигнала на фоне полигауссовского шума при наличии замираний отношения сигнал-шум

Рассмотрим адаптивное энергподобное обнаружение гауссовского сигнала при условии наличия замираний отношения сигнал-шум. В этом случае плотность вероятности случайной величины S_1 будет отличаться от рассмотренной в предыдущем параграфе, а плотность вероятности оценки среднеквадратического отклонения не изменится, так как обучение осуществляется при реализации гипотезы H_0. Будем считать, что замирания подчиняются рассмотренным выше распределениям Накагами, k-μ и η-μ.

Найдем ПФМ случайной величины S_1^{fad}, определяемой (4.4), положив $p = 1$ в выражениях (3.2.5)-(3.2.8), (3.2.13)-(3.2.17) и (3.2.20)-(3.2.24). Вычисляя обратное преобразование Лапласа найденных ПФМ $M_{S_1}^{Nak} s \mid H_1)$, $M_{S_1}^{k-\mu}(s \mid H_1)$ и $M_{S_1}^{\eta-\mu}(s \mid H_1)$, деленных на аргумент s, получим выражения для функций распределения $F_{S_1}^{fad}(x, \bar{\gamma} \mid H_1)$, соответствующих различным моделям замираний:

1) Распределение Накагами

$$F_{S_1}^{Nak}(x, \bar{\gamma} \mid H_1) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{m}{\bar{\gamma}}\right)^{mn} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k^{Nak}(\bar{\gamma}) x^{2k+n}}{(2k+n)!}, \tag{4.2.1}$$

где

$$C_0^{Nak}(\bar{\gamma}) = (a_0^{Nak}(\bar{\gamma}))^n, \tag{4.2.2}$$

$$a_0^{Nak}(\bar{\gamma}) = \frac{1}{\sigma_n} \sum_{v=1}^{V} b_v \left(\frac{\sigma_v^2}{\sigma_n^2}\right)^{m-0.5} U\left(m, m+0.5, \frac{m\sigma_v^2}{\bar{\gamma}\sigma_n^2}\right), \tag{4.2.3}$$

$$C_j^{Nak}(\bar{\gamma}) = \frac{1}{j a_0^{Nak}} \sum_{k=1}^{j} (kn - j + k) \frac{(-1)^k \Gamma\big((2k+1)/p\big)}{p 2^k k! \sigma_n^{2k+1}} C_{j-k}^{Nak}$$
$$\times \sum_{v=1}^{V} b_v \left(\frac{\sigma_v^2}{\sigma_n^2}\right)^{m-k-0.5} U\left(m, m-k+0.5, \frac{m\sigma_v^2}{\bar{\gamma}\sigma_n^2}\right). \tag{4.2.4}$$

2) k-μ распределение

$$F_{S_1}^{k-\mu}(x,\bar{\gamma}\,|\,H_1)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\mu(1+k)}{e^k\bar{\gamma}}\right)^{\mu n}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_l^{k-\mu}(\bar{\gamma})x^{2l+1}}{(2l+n)!}, \qquad (4.2.5)$$

где

$$C_0^{k-\mu}(\bar{\gamma})=(a_0^{k-\mu}(\bar{\gamma}))^n, \qquad (4.2.6)$$

$$a_0^{k-\mu}(\bar{\gamma})=\frac{\Omega_0^{k-\mu}(\bar{\gamma})}{\sigma_n}, \qquad (4.2.7)$$

$$C_j^{k-\mu}(\bar{\gamma})=\frac{1}{ja_0^{k-\mu}}\sum_{u=1}^{j}\frac{(-1)^u\Gamma(2u+1)}{2^u u!}(un-j+u)\Omega_u^{k-\mu}(\bar{\gamma})C_{j-u}^{k-\mu}, \qquad (4.2.8)$$

$$\Omega_l^{k-\mu}(\bar{\gamma})=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\mu^2k(k+1))^i}{\bar{\gamma}^i i!}\sum_{v}^{V}b_v\left(\frac{\sigma_v^2}{\sigma_N^2}\right)^{\mu-l+i-0.5}\times$$
$$\times U\left(\mu+i,\mu+i-l+0{,}5,\frac{\mu(1+k)\sigma_v^2}{\bar{\gamma}\sigma_n^2}\right). \qquad (4.2.9)$$

3) η-μ распределение

$$F_{S_1}^{\eta-\mu}(x,\bar{\gamma}\,|\,H_1)=\left(2\sqrt{2}\right)^n\left(\frac{\mu^{2\mu}h^{\mu}}{\Gamma(\mu)\bar{\gamma}^{2\mu}}\right)^n\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_l^{\eta-\mu}x^{2l+n}}{(2l+n)!}, \qquad (4.2.10)$$

где

$$C_0^{\eta-\mu}=(a_0^{\eta-\mu})^n, \qquad (4.2.11)$$

$$C_j^{\eta-\mu}=\frac{1}{ja_0^{\eta-\mu}}\sum_{u=1}^{j}(un-j+u)C_{j-u}^{\eta-\mu}\Omega_u^{\eta-\mu}\frac{(-1)^u\Gamma\left((2u+1)/p\right)}{p2^u u!\sigma_n^{2u+1}}, \qquad (4.2.12)$$

$$a_0^{\eta-\mu}=\frac{\Gamma(1/p)}{p\sigma_n}\Omega_0^{\eta-\mu}. \qquad (4.2.13)$$

$$\Omega_l^{\eta-\mu}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\mu H)^{2i}}{\bar{\gamma}^{2i}i!\Gamma(\mu+k+0.5)}\sum_{v=1}^{V}b_v\left(\frac{\sigma_v^2}{\sigma_n^2}\right)^{2\mu+2i-l-0.5}\times$$
$$\times\Gamma(2\mu+2i)U\left(2\mu+2i,2\mu+2i-l+0.5,2\frac{\mu h\sigma_v^2}{\bar{\gamma}\sigma_n^2}\right). \qquad (4.2.14)$$

Вычисляя первые производные функций распределения (4.2.1), (4.2.5) и (4.2.10), найдем плотности вероятности $f_{S_1}^{Nak}(x,\bar{\gamma}\,|\,H_1)$, $f_{S_1}^{k-\mu}(x,\bar{\gamma}\,|\,H_1)$ и $f_{S_1}^{\eta-\mu}(x,\bar{\gamma}\,|\,H_1)$ в следующем виде

1) Распределение Накагами

$$f_{S_1}^{Nak}(x,\overline{\gamma}\,|\,H_1)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{m}{\overline{\gamma}}\right)^{mn}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_k^{Nak}(\overline{\gamma})x^{2k+n-1}}{(2k+n-1)!}, \qquad (4.2.15)$$

2) k-μ распределение

$$f_{S_1}^{k-\mu}(x,\overline{\gamma}\,|\,H_1)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\mu(1+k)}{e^k\overline{\gamma}}\right)^{\mu n}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_l^{k-\mu}(\overline{\gamma})x^{2l+1-1}}{(2l+n-1)!}, \qquad (4.2.16)$$

3) η-μ распределение

$$f_{S_1}^{\eta-\mu}(x,\overline{\gamma}\,|\,H_1)=\left(2\sqrt{2}\right)^{n}\left(\frac{\mu^{2\mu}h^{\mu}}{\Gamma(\mu)\overline{\gamma}^{2\mu}}\right)^{n}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_l^{\eta-\mu}x^{2l+n-1}}{(2l+n-1)!}. \qquad (4.2.17)$$

Как и в предыдущем параграфе, найдем плотность вероятности $f_{\Xi_{A1}}(\eta\,|\,H_1)$ решающей статистики (4.3) с помощью (4.1.2), при этом выражение (4.1.3) перепишется в следующем виде

$$X(\eta,\xi)=f_{S_1}^{fad}(\eta\xi\,|\,H_1)\,f_{\hat{\sigma}}(\xi\,|\,H_1)\xi, \qquad (4.2.18)$$

где $f_{S_1}^{fad}(\xi\,|\,H_1)$ – условная плотности вероятности случайной величины S_1^{fad}, определяемая одним из выражений (4.2.15)-(4.2.17).

Используя выражения (4.1.2), (4.2.18) и (4.1.24), найдем функцию распределения решающей статистики адаптивного энергоподобного обнаружителя гауссовского случайного сигнала на фоне полигауссовского шума при наличии замираний отношения сигнал-шум в следующем виде

1) Распределение Накагами

$$F_{\Xi_{A1}^{Nak}}(x,\overline{\gamma}\,|\,H_1)=2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{u}{2}}\left(\frac{m}{\overline{\gamma}}\right)^{mn}u^{\frac{u}{2}}x^{n}\int_0^{\infty}\xi^{u+n-1}\sum_{k=0}^{\infty}D_k^{Nak}(x,\overline{\gamma})\xi^{2k}d\xi, \qquad (4.2.19)$$

2) k-μ распределение

$$F_{\Xi_{A1}^{k-\mu}}(x,\overline{\gamma}\,|\,H_1)=2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{u}{2}}\left(\frac{\mu(1+k)}{e^k\overline{\gamma}}\right)^{\mu n}u^{\frac{u}{2}}x^{n}\int_0^{\infty}\xi^{u+n-1}\sum_{k=0}^{\infty}D_k^{k-\mu}(x,\overline{\gamma})\xi^{2k}d\xi, \qquad (4.2.20)$$

3) η-μ распределение

$$F_{\Xi_{A1}^{\eta-\mu}}(x,\overline{\gamma}\,|\,H_1)=2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{u}{2}}\left(2\sqrt{2}\right)^{n}\left(\frac{\mu^{2\mu}h^{\mu}}{\Gamma(\mu)\overline{\gamma}^{2\mu}}\right)^{n}u^{\frac{u}{2}}x^{n}\times$$
$$\times\int_0^{\infty}\xi^{u+n-1}\sum_{k=0}^{\infty}D_k^{\eta-\mu}(x,\overline{\gamma})\xi^{2k}d\xi, \qquad (4.2.21)$$

где

$$D_k^{Nak}(x,\overline{\gamma})=\sum_{i=0}^{k}\frac{A_i^{Nak}(x,\overline{\gamma})B_{k-i}^{H_0}}{2i+n}, \qquad (4.2.22)$$

$$A_k^{Nak}(x,\overline{\gamma})=\frac{C_k^{Nak}(\overline{\gamma})x^{2k}}{(2k+n-1)!}, \qquad (4.2.23)$$

$$D_k^{k-\mu}(x,\overline{\gamma})=\sum_{i=0}^{k}\frac{A_i^{k-\mu}(x,\overline{\gamma})B_{k-i}^{H_0}}{2i+n}, \qquad (4.2.24)$$

$$A_k^{k-\mu}(x,\overline{\gamma})=\frac{C_k^{k-\mu}(\overline{\gamma})x^{2k}}{(2k+n-1)!}, \qquad (4.2.25)$$

$$D_k^{\eta-\mu}(x,\overline{\gamma})=\sum_{i=0}^{k}\frac{A_i^{\eta-\mu}(x,\overline{\gamma})B_{k-i}^{H_0}}{2i+n}, \qquad (4.2.26)$$

$$A_k^{\eta-\mu}(x,\overline{\gamma})=\frac{C_k^{\eta-\mu}(\overline{\gamma})x^{2k}}{(2k+n-1)!}, \qquad (4.2.27)$$

u – объем выборки обучения.

С помощью (1.4.2) найдем выражения для вероятности правильного обнаружения адаптивного энергоподобного обнаружителя случайного гауссовского сигнала на фоне полигауссовского шума при наличии замираний отношения сигнал-шум, которое описывается следующими распределениями

1) Распределение Накагами

$$P_D^{Nak}(\overline{\gamma})=1-2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{u}{2}}\left(\frac{m}{\overline{\gamma}}\right)^{mn}u^{\frac{u}{2}}T^{n}\int_0^{\infty}\xi^{u+n-1}\sum_{k=0}^{\infty}D_k^{Nak}(T,\overline{\gamma})\xi^{2k}d\xi, \qquad (4.2.28)$$

2) k-μ распределение

$$P_D^{k-\mu}(\overline{\gamma})=2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}+\frac{u}{2}}\left(\frac{\mu(1+k)}{e^{k}\overline{\gamma}}\right)^{\mu n}u^{\frac{u}{2}}T^{n}\int_0^{\infty}\xi^{u+n-1}\sum_{k=0}^{\infty}D_k^{k-\mu}(T,\overline{\gamma})\xi^{2k}d\xi, \qquad (4.2.29)$$

3) η-μ распределение

$$P_D^{\eta-\mu}(\bar{\gamma}) = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{u}{2}}\left(2\sqrt{2}\right)^n\left(\frac{\mu^{2\mu}h^{\mu}}{\Gamma(\mu)\bar{\gamma}^{2\mu}}\right)^n u^{\frac{u}{2}}T^n\int_0^{\infty}\xi^{u+n-1}\sum_{k=0}^{\infty}D_k^{\eta-\mu}(T,\bar{\gamma})\xi^{2k}d\xi \text{ ,(4.2.30)}$$

где T – фиксированный порог обнаружения, выбранный в соответствии с критерием Неймана-Пирсона и являющийся решением уравнения

$P_{E1}(T)$=0,01,

в котором $P_{E1}(T)$ определяется выражением (4.1.27).

На рис. 4.3-4.5 представлены зависимости вероятности правильного обнаружения адаптивного энергоподобного обнаружителя от среднего отношения сигнал-шум $P_D^{Nak}(\bar{\gamma})$, $P_D^{k-\mu}(\bar{\gamma})$ и $P_D^{\eta-\mu}(\bar{\gamma})$ для различных объемов выборки обучения u = 20 (кривая 5), 50 (кривая 4) и 100 (кривая 3). Также на рисунки помещены зависимости вероятности правильного обнаружения от среднего отношения сигнал-шум при отсутствии априорной неопределенности относительно интенсивности шума (кривая 2) и зависимости вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум при отсутствии замираний (кривая 1). При построении графиков использовались следующие параметры шума: V = 2, b_1 = 0,9985, b_2 = 0,0015, $\sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 100$, а объем выборки обнаружения n = 15. Параметры моделей замираний выбраны следующими: рис. 4.3 – Накагами m = 1, рис. 4.4 – k-μ, k = 3, μ = 1 и рис. 4.5 – η-μ, η = 0,99, μ = 2,5. Маркерами на соответствующих кривых отмечены результаты статистического моделирования. Из хода кривых на рисунках видно, что, во-первых, результаты статистического моделирования хорошо согласуются с результатами расчета по формулам (4.2.28)-(4.2.30), во-вторых, увеличение объема выборки обучения приводит к увеличению эффективности адаптивного энергоподобного обнаружителя. Так, например, при использовании объемов выборки обучения 20, 50 и 100 адаптивный энергоподобный обнаружитель при среднем отношении сигнал-шум равном 5 и фиксированной вероятности ошибки первого рода равной 0,01 достигает вероятностей правильного обнаружения 0,75, 084 и 0,86 соответственно при условии, что замирания описываются моделью Накагами с m = 1. При

известной интенсивности шума и тех же условиях энергоподобный обнаружитель имеет вероятность правильного обнаружения 0,91.

Кроме того, по представленным кривым можно судить о том, на сколько снижается вероятность правильного обнаружения в более реалистичных условиях, а именно: при наличии замираний отношения сигнал-шум и априорной неопределенности относительно интенсивности шума. Появление замираний отношения сигнал-шум, имеющих распределение k-μ с параметрами $k = 3$, $\mu = 1$, приводит к увеличению требуемого отношения сигнал-шум на 19% для достижения вероятности правильного обнаружения $P_D = 0{,}8$ при фиксированной вероятности ошибки первого рода $P_{E1} = 0{,}01$. Отсутствие априорной информации относительно интенсивности шума и применение адаптивной процедуры обучения с $u = 20$, 50 и 100 приводит к увеличению требуемого отношения сигнал-шум еще на 61%, 23% и 13% соответственно для достижения вероятности правильного обнаружения $P_D = 0{,}8$ при той же вероятности ошибки первого рода.

Основные результаты настоящего и предыдущего параграфов опубликованы в [99].

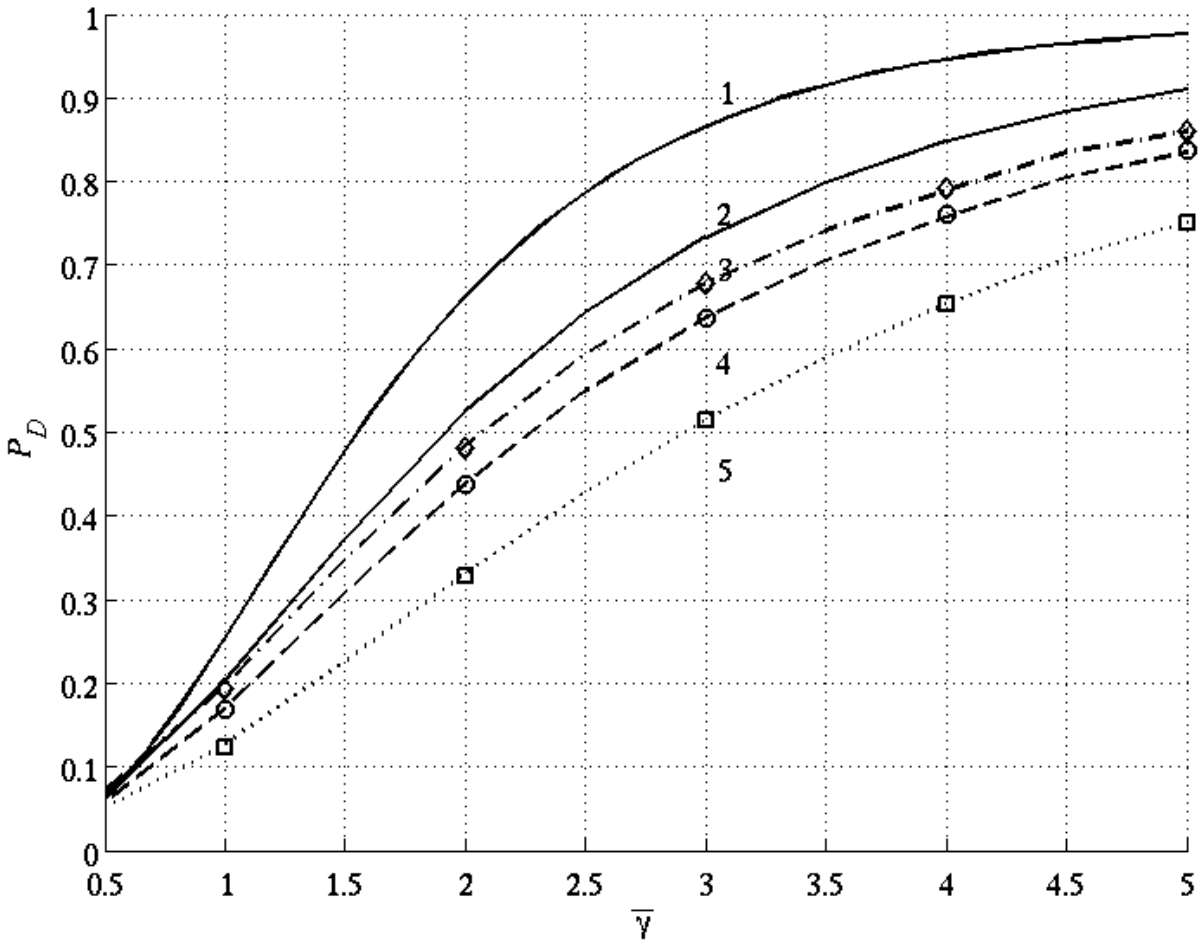


Рис. 4.3. Зависимость вероятности правильного обнаружения от среднего отношения сигнал-шум адаптивного энергоподобного обнаружителя при наличии замираний, описываемых моделью Накагами, при различных значениях объема выборки обучения.

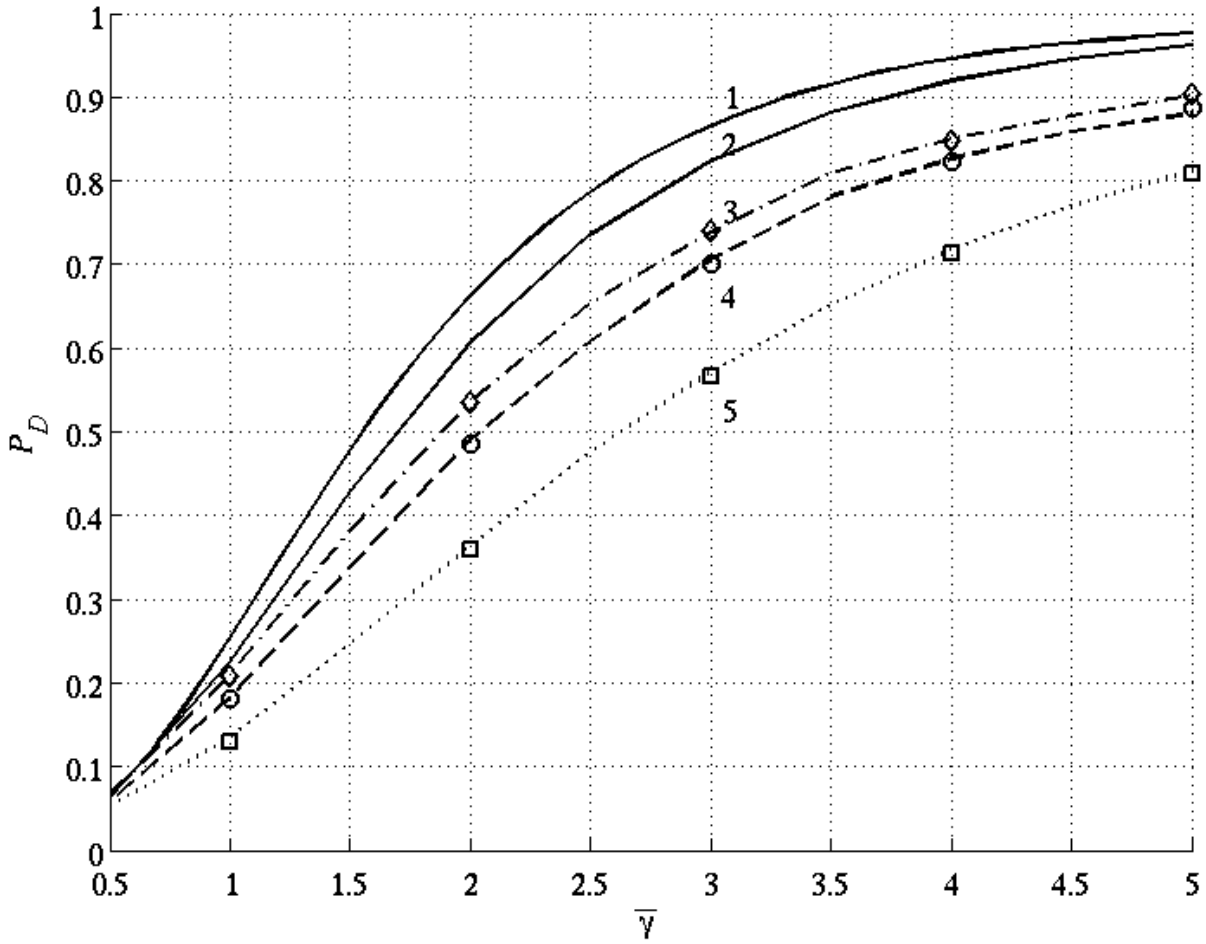


Рис. 4.4. Зависимость вероятности правильного обнаружения от среднего отношения сигнал-шум адаптивного энергоподобного обнаружителя при наличии замираний, описываемых моделью η-μ, при различных значениях объема выборки обучения.

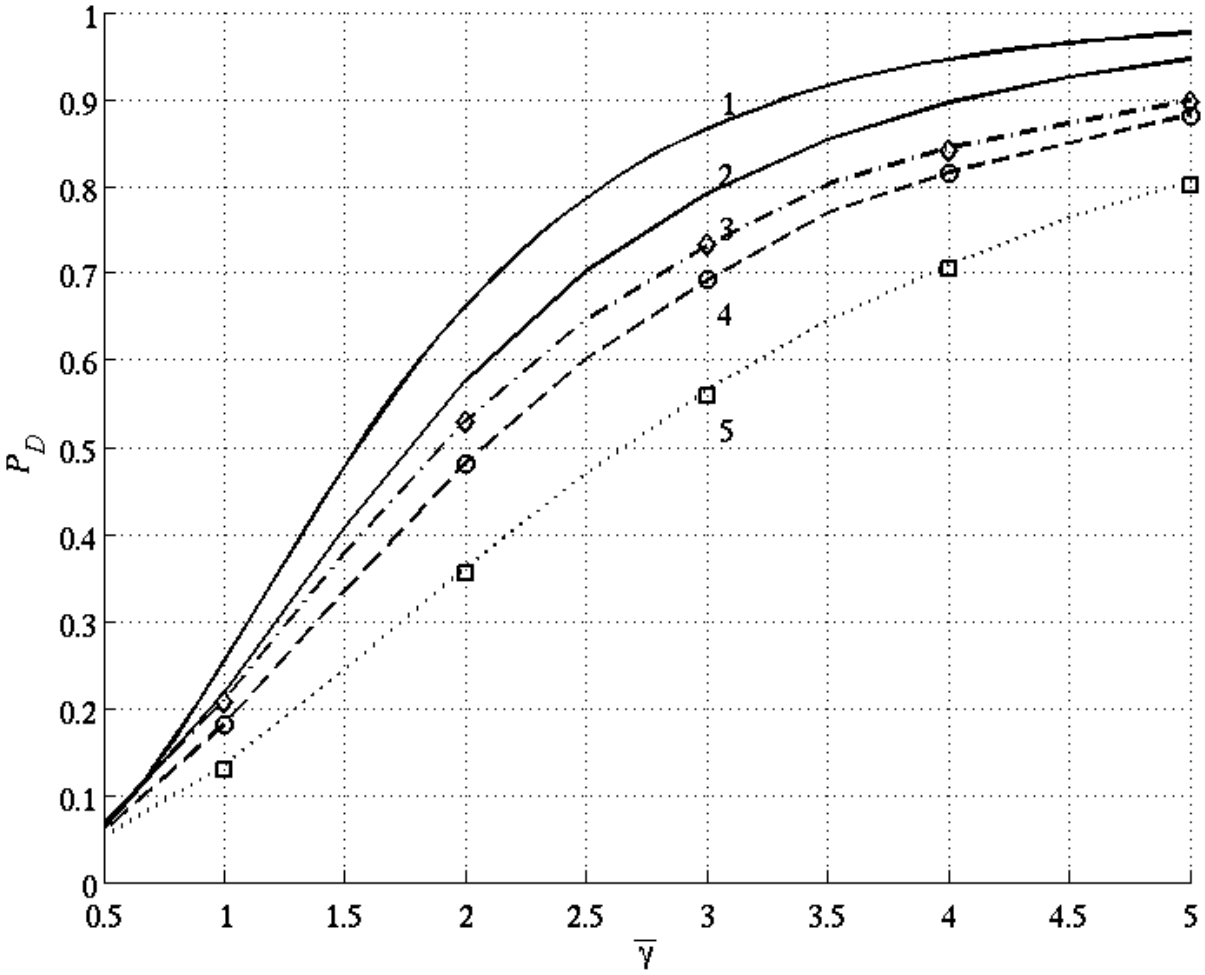
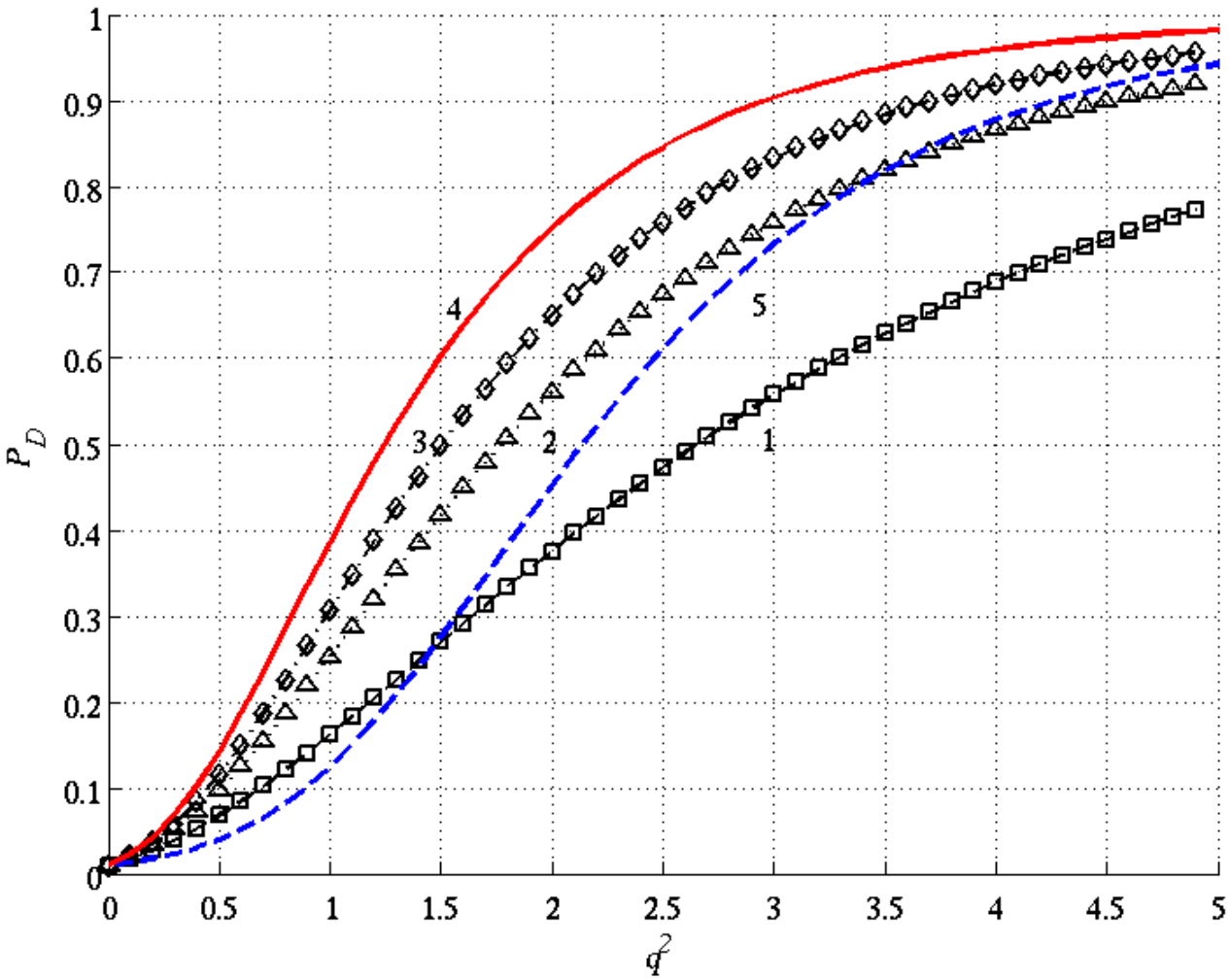


Рис. 4.5. Зависимость вероятности правильного обнаружения от среднего отношения сигнал-шум адаптивного энергоподобного обнаружителя при наличии замираний, описываемых моделью k-μ, при различных значениях объема выборки обучения.

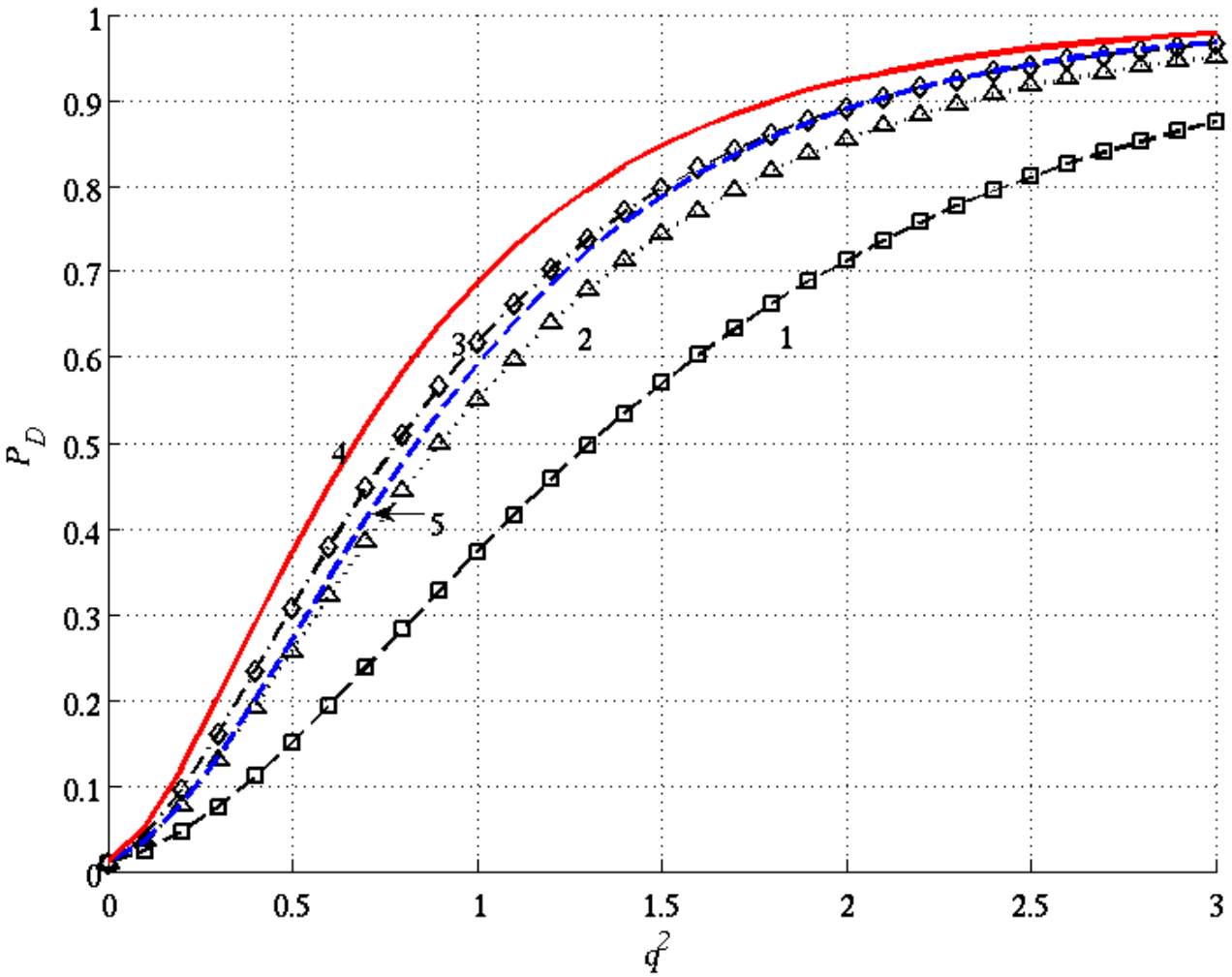
4.3. Вероятность правильного обнаружения адаптивного улучшенного энергетического обнаружителя случайного гауссовского сигнала на фоне обобщенного гауссовского шума

Рассмотрим адаптивное улучшенное энергетическое обнаружение гауссовского случайного сигнала в обобщенном гауссовском шуме неизвестной интенсивности. Вероятности ошибки первого рода и правильного обнаружения не удалось представить в аналитическом виде, поэтому для их определения воспользуемся статистическим моделированием, в котором использовалось 10^6 реализаций сигнала и шума, порог выбран в соответствии с вероятностью ошибки первого рода равной 0,01.

На рис. 4.6 а) и б) представлены зависимости вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум $P_D(q^2)$ адаптивного УЭО с оптимальным показателем степени (а) p = 0,5 и б) p = 4,5) для различных значений объема выборки обучения m = 20 (кривая 1), 50 (кривая 2) и 100 (кривая 3). Кроме того, для сравнения на рисунках изображены характеристики, соответствующие энергоподобному (кривая 4) и энергетическому (кривая 5) обнаружению в обобщенном гауссовском шуме известной интенсивности. Для нахождения характеристик использовались следующие параметры шума: а) β = 1 и б) β = 3,5. Согласно представленным на рисунке зависимостям увеличение объема выборки обучения m ведет к росту вероятности правильного обнаружения при фиксированной вероятности ошибки первого рода. Использование адаптивной процедуры оценки интенсивности шума с m = 20, 50 и 100 ведет к увеличению требуемого отношения сигнал-шум на а) 149% 53% и 25%; б) 81%, 29% и 14% для достижения P_D = 0,9 при фиксированной вероятности ошибки первого рода P_{E1} = 0,01.Кроме того, из рис. 4.6 а) и б) видно, что адаптивный УЭО с оптимальным показателем степени при неизвестной интенсивности шума и объеме выборки обучения m = 100 обладает большей вероятностью правильного обнаружения при фиксированной вероятности ошибки первого рода, чем ТЭО сигналов на фоне шума известной интенсивности.



a) $\beta = 1$.



б) β = 3,5.

Рис. 4.6. Зависимость вероятности правильного обнаружения от отношения сигнал-шум адаптивного УЭО случайного гауссовского сигнала в обобщенном гауссовском шуме при различных значениях объема выборки обучения.

Основные результаты и выводы

1. Получены аналитические выражения для вероятности ошибки первого рода адаптивного энергоподобного обнаружителя случайного гауссовского сигнала в полигауссовском шуме неизвестной интенсивности. Ошибка оценки порога изменяется с 35% до 6% при увеличении объема выборки обучения с 15 до 300.
2. Получены аналитические выражения для вероятности правильного обнаружения адаптивного энергоподобного обнаружителя случайного гауссовского сигнала в полигауссовском шуме неизвестной интенсивности. При использовании адаптивной процедуры обучения с объемом выборки обучения от 15 до 300 требуется на 171%-21% большее отношение сигнал-шум для достижения $P_D = 0{,}9$ (при $P_{E1} = 0{,}01$) по сравнению со случаем известной дисперсии шума при рассмотренных параметрах. Адаптивный энергоподобный обнаружитель с объемом выборки обучения 15-20 обладает большей вероятностью правильного обнаружения при фиксированной вероятности ошибки первого рода по сравнению с ТЭО, работающим в условиях известной дисперсии шума.
3. Проведен анализ адаптивного энергоподобного обнаружения гауссовского случайного сигнала в полигауссовском шуме при замираниях отношения сигнал-шум. Увеличение времени обучения ведет к увеличению вероятности правильного обнаружения. При использовании объемов выборки обучения 20, 50 и 100 при среднем отношении сигнал-шум равном 5 и фиксированной вероятности ошибки первого рода, равной 0,01, адаптивный энергоподобный обнаружитель достигает вероятностей правильного обнаружения 0,75, 084 и 0,86 при условии, что замирания описываются моделью Накагами с $m = 1$.
4. С помощью статистического моделирования исследовано адаптивное улучшенное энергетическое обнаружение сигналов в обобщенном гауссовском шуме с различными параметрами. Использование адаптивной процедуры оценки интенсивности шума с объемом выборки обучения от 20 до 100 требует увеличения отношения сигнал-шум на 149%-25% ($\beta = 1$) и 81%-

14% (β = 3,5) для достижения вероятности правильного обнаружения P_D = 0,9 при фиксированной вероятности ошибки первого рода P_{E1} = 0,01.

Заключение

В диссертационной работе получены следующие основные новые результаты:

1. Аналитические выражения для вероятностей ошибки первого рода и правильного обнаружения УЭО случайного гауссовского сигнала в полигауссовском шуме.
2. Вероятности правильного обнаружения УЭО детерминированных сигналов в полигауссовском шуме, найденные с помощью статистического моделирования.
3. Аналитические выражения для вероятности ошибки первого рода улучшенного энергетического обнаружения случайного гауссовского сигнала в обобщенном гауссовском шуме.
4. Вероятность правильного обнаружения случайного гауссовского сигнала в обобщенном гауссовском шуме, полученная с помощью аппроксимации и статистического моделирования. Вероятности правильного обнаружения детерминированных сигналов, найденные с помощью статистического моделирования.
5. Аналитические выражения для вероятности правильного обнаружения УЭО гауссовского случайного сигнала при наличии замираний отношения сигнал-шум, подчиняющихся распределениям Накагами, k-μ и η-μ.
6. Аналитические выражения для вероятностей ошибки первого рода и правильного обнаружения случайного гауссовского сигнала в полигауссовском шуме при использовании схем разнесенного приема и наличии замираний отношения сигнал-шум, подчиняющихся распределениям Накагами, k-μ и η-μ.
7. Вероятность правильного обнаружения случайного гауссовского сигнала в обобщенном гауссовском шуме при наличии замираний отношения сигнал-шум, полученная с помощью статистического моделирования.

8. Аналитические выражения для вероятностей ошибки первого рода и правильного обнаружения адаптивного энергоподобного обнаружителя гауссовского случайного сигнала в полигауссовском шуме.
9. Аналитические выражения для вероятности правильного обнаружения адаптивного энергоподобного обнаружителя гауссовского случайного сигнала в полигауссовском шуме неизвестной интенсивности при наличии замираний отношения сигнал-шум, описываемых распределениями Накагами, k-μ и η-μ.
10. Характеристики адаптивного УЭО гауссовского случайного сигнала в обобщенном гауссовском шуме, полученные с помощью статистического моделирования.

На основе результатов, полученных в диссертации, можно сделать следующие выводы:

1. Значение показателя степени улучшенного энергетического обнаружителя существенно влияет на характеристики обнаружения сигналов в негауссовском шуме. Улучшенный энергетический обнаружитель может обладать большей вероятностью правильного обнаружения по сравнению с традиционным энергетическим обнаружителем.
2. Определить оптимальное значение показателя степени для конкретных условий функционирования УЭО, а также сформировать требования к отношению сигнал-шум для достижения необходимой эффективности обнаружения позволяют полученные в работе выражения для характеристик улучшенного энергетического обнаружения.
3. Ухудшение эффективности обнаружения при наличии замираний отношения сигнал-шум можно количественно оценить с помощью полученные в диссертации выражений. Повышение вероятности правильного обнаружения при фиксированной вероятности ошибки

первого рода в случае применения разнесенного приема позволяют рассчитать полученные в работе аналитические выражения.

4. Количественно оценить влияние априорной неопределенности относительно интенсивности шума можно с помощью результатов анализа адаптивного улучшенного энергетического обнаружения сигналов, проведенного в диссертации.

Библиографический список использованной литературы

1. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям : С формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган; Пер. с англ. под ред. В.А. Диткина, Л.Н. Карамзиной .— М. : Наука, 1979 .— 830 с.
2. Акимов П. С. Теория обнаружения сигналов / П. С. Акимов, П. А. Бакут, В. А. Богданович и др.; под ред. П. А. Бакута – М.: Радио и связь, 1984. – 440 с.
3. Акимов П. С. Обнаружение радиосигналов / [П. С. Акимов, Ф. Ф. Евстратов, С. И. Захаров и др.] ; под ред. А. А. Колосова .— М. : Радио и связь, 1989 .— 287 с.
4. Борьба с радиоэлектронными средствами / М. П. Атражев, В. А. Ильин, Н. П. Марьин; Под ред. Н. П. Марьина. – М.: Воениздат, 1972 . – 272 с.
5. Ван-Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции // Пер. с англ. – М.: Наука, 1972. – Т. 1. – 744 с.
6. Ван-Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции // Пер. с англ. – М.: Наука, 1975. – Т. 2. – 342 с.
7. Добряк Д. С. Об одном способе построения модели атмосферных радиопомех // Радиотехника и электроника. – 1980. – Т.25, № 3. – С. 522-528.
8. Костылев В. И. Квадратичное по сигналу обнаружение протяженного радиоисточника с неизвестным распределением яркости // Радиотехника и электроника. – 1999. – Т.44, №2. – С. 210-214.
9. Костылев В. И. О вероятности ложной тревоги энергетического обнаружителя // Материалы VI международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь». Воронеж, 2000. – Т. 1. – С. 62-71.
10. Костылев В. И. Характеристики энергетического обнаружения квазидетерминированных радиосигналов // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 2000. – Т.43, №10. – С. 926-932.
11. Костылев В. И. Сравнение аналогового и дискретного обнаружения детерминированных узкополосных радиосигналов по энергии // Вестник

Воронежского государственного университета. Серия «Физика. Математика». – Воронеж, 2001. – № 1. – С. 33-39.

12. Костылев В. И. Анализ эффективности обнаружения радиосигнала со случайной амплитудой Накагами // Вестник Воронежского государственного университета. Серия «Физика. Математика». – Воронеж, 2001 . – № 2. – С. 16-20.
13. Костылев В. И. Проигрыш в эффективности энергетического обнаружителя оптимальному // Вестник Воронежского института МВД России. – Воронеж, 2001. – № 2(9). – С. 44-49.
14. Костылев В. И. Характеристики энергетического обнаружения квазидетерминированных радиосигналов с амплитудой Райса // Известия ВУЗов. Радиоэлектроника. – 2004. – Т. 47, № 1. – С. 55-61.
15. Костылев В. И. Характеристики энергетического обнаружения квазидетерминированных радиосигналов с нерэлеевским распределением флуктуаций амплитуды // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 2002. – Т.45, №5. – С. 450-457.
16. Костылев В. И. Характеристики энергетического обнаружения квазидетерминированных радиосигналов с амплитудой Райса // Известия ВУЗов. Радиоэлектроника. – 2004. – Т.47, № 1. – С. 55-61.
17. Костылев В. И. Характеристики энергетического обнаружения неизвестных радиосигналов на фоне шума Лихтера / В. И. Костылев, М. П. Сличенко // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 2008 . – Т. 51, № 10. – С. 889-898.
18. Костылев В. И. Энергетическое обнаружение радиосигналов на фоне негауссовского шума неизвестной интенсивности / В. И. Костылев, М. П. Сличенко // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 2009 . – Т. 52, № 11. – С. 910-920.
19. Костылев В. И. Энергетическое обнаружение частично поляризованных радиосигналов на фоне гауссовского шума / В. И. Костылев, М. П. Сличенко // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 2010 . – Т. 53, № 12. – С. 803-814.
20. Костылев В. И. Адаптивное энергетическое обнаружение квазидетерминированных радиосигналов на фоне негауссовского шума / В. И.

Костылев, М. П. Сличенко // Радиотехника и электроника. – 2011. – т. 56, № 6. – С. 698–704.

21. Костылев В. И. Решающая статистика энергетического обнаружителя при приеме радиосигналов на фоне полигауссовского шума / В.И. Костылев, М.П. Сличенко // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика .— Воронеж, 2010 .— № 1. - С. 26-30 .— 0,3 п.л.
22. Костылев В. И. Обобщённые энергетические обнаружители первого и второго родов // Вестник ВГУ. Физика. Математика. – 2015. – № 3. – С. 102–111.
23. Куликов Е. И. Методы измерения случайных процессов / Е. И. Куликов .— М. : Радио и связь, 1986 .— 270 с.
24. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.
25. Лихтер Я. И. О некоторых статистических свойствах атмосферных радиопомех // Радиотехника и электроника. – 1956. – Т.1, № 10. – С. 1295-1302.
26. Лоэв М. Теория вероятностей / Пер. с англ. Б. А. Севастьянова; под ред. Ю. В. Прохорова. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 720 с.
27. Осинин В. Ф. Описание распределения среднего числа выбросов атмосферных радиопомех с использованием отчета МККР №322 / В. Ф. Осинин, И. В.Осинин, Д. А. Подлесных // Вестник высших учебных заведений Черноземья. – Липецк. ЛГТУ. – 2007. – № 2. – С. 79-82.
28. Певницкий В. П., Полозок Ю. В. Статистические характеристики индустриальных радиопомех. – М.: Радио и связь, 1988.
29. Перов А. И. Статистическая теория радиотехнических систем. М.: Радиотехника, 2003. – 400 с.
30. Репин В. Г Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем / В. Г. Репин, Г. П. Тартаковский. – М.: Сов. радио, 1977. – 432 с.
31. Сосулин Ю. Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. – М.: Сов. радио, 1978. – 320 с.

32. Трифонов А. П. Энергетическое обнаружение узкополосных радиосигналов на фоне шума неизвестной интенсивности / А.П. Трифонов, В.И. Костылев // Известия ВУЗов. Радиофизика. – 2002. – Т.45, №6. – С. 538-547.
33. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. – М.: Сов. радио, 1966. – 678 с.
34. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1982.— 624 с.
35. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. – М.: Радио и связь, 1983. – 320 с.
36. Тихонов В. И. Нелинейные преобразования случайных процессов. – М.: Радио и связь, 1986. – 296 с.
37. Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. – М.: Наука. Физматлит, 1999. – 496 с.
38. Чабдаров Ш. М. Полигауссовы представления случайных явлений в радиотехнике // Юбилейный сборник избранных трудов членов Академии наук Республики Татарстан. Казань, Фолианть. – 2002. – С.59-100.
39. Чабдаров Ш. М. Основы статистической теории радиосвязи. Полигауссовские модели и методы / Ш. М. Чабдаров, Н.З. Сафиуллин, А. Ю. Феоктистов. Казань: КАИ, 1983. – 86 с .
40. Чабдаров Ш. М. Смеси случайных явлений в статистической радиотехнике // КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2008. – № 4. – С. 26-30.
41. Шахтарин, Борис Ильич. Случайные процессы в радиотехнике : Цикл лекций: Учебное пособие для студ. вузов радиотехн. и прибор. специальностей / Б. И. Шахтарин .— М. : Радио и связь, 2000 .— 583 с.
42. Шахтарин Б.И. Обнаружение сигналов. Учебное пособие для вузов. - 3-е изд., испр. - М.: Горячая линия-Телеком, 2015. -464.
43. Шайдуров Г. Я. Основы теории и проектирования радиотехнических систем: Курс лекций – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2007. – 292 с.

44. Alkheir A. An Improved Energy Detector Using Outdated Channel State Information / A. A. Alkheir, H. T. Mouftah // IEEE Communications Letters. – 2015. – vol. 19, № 7. – pp. 1237-1240.
45. Annamalai A. Unified analysis of energy detection of unknown signals over generalized fading channels / A. Annamalai, O. Olabiyi, S. Alam, O. Odejide, and D. Vaman // in Proc. Int. Wireless Commun. and Mobile Computing Conf. (IWCMC). – 2011. – pp. 636-641.
46. Atapattu S. Unified Analysis of Low-SNR Energy Detection and Threshold Selection / S. Atapattu, C. Tellambura, H. Jiang, N. Rajatheva // IEEE Transactions on Vehicular Technology. – 2015. – vol. 64, № 11. – pp. 5006 - 5019.
47. Atapattu S. Energy Detection for Spectrum Sensing in Cognitive Radio / S. Atapattu., C. Tellambura, and H. Jiang // New York, NY, USA: Springer, 2014.
48. Atapattu S. Analysis of area under the ROC curve of energy detection / S. Atapattu, C. Tellambura, and H. Jiang // IEEE Trans. Wireless Commun. – 2010. – vol. 9, № 3. – pp. 1216-1225.
49. Atapattu S. Performance of an energy detector over channels with both multipath fading and shadowing // IEEE Trans. Wireless Commun.– 2010. – vol. 9, № 12. – pp. 3662-3670.
50. Badarneh O.S. Spatial Multiplexing-Based Minimum Distance Detection in Additive Generalized Gaussian Noise / O. S. Badarneh, R. Mesleh // IEEE Wireless Communications Letters. – 2016. – vol. 5, № 4. – pp. 360-363.
51. Badarneh O.S. Performance of Multihop Wireless Networks in α-μ Fading Channels Perturbed by an Additive Generalized Gaussian Noise / O. S. Badarneh, F. S. Almehmadi // IEEE Communications Letters. – 2016. – vol. 20, № 5. – pp. 986-989.
52. Banjade V.R.S. Performance of p-Norm Detector in AWGN, Fading, and Diversity Reception / V. R. S. Banjade, C. Tellambura, H. Jiang // IEEE Transactions on Vehicular Technology. – 2014. – vol. 63, № 7. – pp. 3209 - 3222.
53. Cabric D. Implementation issues in spectrum sensing for cognitive radios / D. Cabric, S. Mishra, and R. Brodersen // in Proc. Asilomar Conf. Signals, Systems and Computers. – 2004. – pp. 772-776.

54. Chen Y. Improved energy detector for random signals in Gaussian noise // IEEE Trans. Wireless Commun., vol. 9, no. 2, pp. 558–563, Feb. 2010.
55. Digham F. F. On the Energy Detection of Unknown Signals Over Fading Channels / F.F. Digham, M.-S. Alouini, M.K. Simon // IEEE Trans. Comm. – 2007. – vol. 55. – pp.21-24.
56. Dytso A. On additive channels with generalized Gaussian noise / A. Dytso, R. Bustin, H. V. Poor, S. S. Shitz // 2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT), DOI: 10.1109/ISIT.2017.8006563.
57. Filho J.C.S.S. Highly accurate /spl eta/-μ approximation to the sum of M independent nonidentical Hoyt variates / J.C.S.S. Filho, M.D. Yacoub // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – 2005. – vol. 4 , № 12. – pp. 436-438.
58. Gahane L. Performance of improved energy detector with cognitive radio mobility and imperfect channel state information / L. Gahane, P. K. Sharma // IET Communications. – 2017. – vol. 11, № 12. – pp. 1857 -1863.
59. Gezici S. On the Optimality of Equal Gain Combining for Energy Detection of Unknown Signals / S. Gezici, Z. Sahinoglu, H. V. Poor // IEEE Comm. Letters. – 2006. – vol. 10. – pp. 772-774.
60. Gradshteyn I.S. Tables of Integrals, Series and Products / I. S. Gradshteyn and I. Ryzhik // 7th ed. London, U. K.: Academic, 2007.
61. Haykin S. Cognitive radio: Brain-empowered wireless communications // IEEE J. Sel. Areas Commun. – 2005. – vol. 23, № 2. – pp. 201-220.
62. Herath S. P. Energy detection of unknown signals in fading and diversity reception / S. P. Herath, N. Rajatheva, and C. Tellambura // IEEE Trans. Commun. – 2011. – vol. 59, № 9. – pp. 2443-2453.
63. Jin M. Energy Detection With Random Arrival and Departure of Primary Signals: New Detector and Performance Analysis / M. Jin, Q. Guo, Y. Li, J. Xi, Y. Yu // IEEE Transactions on Vehicular Technology.– 2017. – vol. 66, № 11. – pp. 10092-10101.
64. Kassam S. A. Signal Detection in Non-Gaussian Noise. // New York, NY, USA: Springer, 1988.

65. Kolodziejski K.R. Detection of weak random signals in IID non-Gaussian noise / K.R. Kolodziejski, J.W. Betz // IEEE Transactions on communications. – 2000. – vol. 48, № 2. – pp. 222-230.
66. Kostylev V. I. // Proc. IEEE Int. Conf. on Communication: ICC'02, 28 Apr. – 2 May 2002. N.Y.: IEEE. – 2002. – vol. 3. – p. 1606.
67. Middleton D. Statistical-physical models of electromagnetic interference // IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility. – 1977. – № 19. – pp. 106-127.
68. Middleton D. Procedures for determining the parameters of the first-order canonical models of class A and class B electromagnetic interference // IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility. – 1979. – № 21. – pp. 190-208.
69. Middleton D. Canonical non-Gaussian noise models: their implications for measurement and for prediction of receiver performance // IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility. – 1979. – № 21. – pp. 209-220.
70. Moghimi F. Adaptive Lp-norm spectrum sensing for cognitive radio networks / F. Moghimi, A. Nasri, and R. Schober // IEEE Trans. Commun. – 2011. – vol. 59, № 7. – pp. 1934-1945.
71. Urkowitz H. Energy Detection of Unknown Deterministic signals // Proc. IEEE. – 1967. – vol. 55. – pp. 523-531.
72. Vastola K.S. Threshold detection in narrow-band non-Gaussian noise // IEEE Trans. Communications. – 1984. – № 32. – pp. 134-139.
73. Park K. Y. Performance evaluation of energy detectors // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. – 1978. – vol. 14. – pp. 237-241.
74. Pishro-Nik H. Introduction to Probability // Statistics, and Random Processes, Kappa Research, LLC, 2014.
75. Poor H.V. Locally optimum detection of discrete-time stochastic signals in non-Gaussian noise / H.V. Poor, J.B. Thomas // The Journal of the Acoustical Society of America. – 1978. – vol. 63, № 75.
76. Richter, W.J. Signal design and error rate for an impulse noise channel / W.J. Richter, T. Smits // IEEE Trans. Communication Tech. – vol. 19, № 4. – pp. 446-458.

77. Sahin M. E. Optimization of Energy Detector Receivers for UWB Systems / M. E. Sahin, I. Guvenc, H. Arslan // Proc. IEEE Veh. Tech. Conf. – 2005 – pp. 1386-1390.
78. Simon M. K. Digital Communication over Fading Channels / M. K. Simon and M.-S. Alouini // 2nd ed. New York: Wiley, 2005.
79. Singh A. Optimization of cooperative spectrum sensing with an improved energy detector over imperfect reporting channels / A. Singh, M. Bhatnagar, and R. Mallik // in Proc. IEEE Veh. Technol. Conf. (VTC Fall), 2011.
80. Singh A. Cooperative spectrum sensing in multiple antenna based cognitive radio network using an improved energy detector / A. Singh, M. R. Bhatnagar, and R. K. Mallik // IEEE Commun. Lett. – 2012. – vol. 16, № 1. – pp. 64-66.
81. Singh A. Performance of an Improved Energy Detector in Multihop Cognitive Radio Networks / A. Singh, M. R. Bhatnagar, R. K. Mallik // IEEE Transactions on Vehicular Technology. – 2016. – vol. 65, № 2. – pp. 732 -743.
82. Sofotasios P. Energy detection based spectrum sensing over κ-μ and κ-μ extreme fading channels / P. Sofotasios, E. Rebeiz, L. Zhang, T. Tsiftsis, D. Cabric, S. Freear // IEEE Trans. Veh. Technol. – 2013. – vol. 62, № 3. – pp. 1031-1040.
83. Stevenson C. IEEE 802.22: The first cognitive radio wireless regional area network standard / C. Stevenson, G. Chouinard, Z. Lei, W. Hu, S. Shellhammer, W. Caldwell // IEEE Commun. Mag. – 2009. – vol. 47, № 1. – pp. 130-138.
84. Yacoub M.D. The $\eta-\mu$ Distribution: A General Fading Distribution // IEEE VTC – 2000 – p. 872-877.
85. Yacoub M.D. The $\kappa-\mu$ distribution and the $\eta-\mu$ distribution / IEEE Antennas Propag. Mag. – 2007. – vol. 49, № 1. – pp. 68-81.
86. Yucek T. A survey of spectrum sensing algorithms for cognitive radio applications / T. Yucek, H. Arslan // IEEE Communications Surveys Tutorials. – 2009. – №1. – pp. 116-130.
87. Zhang W. Optimization of cooperative spectrum sensing with energy detection in cognitive radio networks / W. Zhang, R. K. Mallik, K. B. Letaief // IEEE Transactions on Wireless Communications. – 2009. – vol. 8, №12. – pp. 5761-5766.

88. Гресь И. П. Сравнительный анализ энергетического и линейного обнаружения гауссовского сигнала на фоне гауссовского шума / И.П. Гресь // Перспективы развития авиационного радиоэлектронного оборудования : сборник статей по материалам 2 межвузовской научно-практической конференции курсантов и слушателей "Молодежные чтения памяти Ю.А. Гагарина", 20 мая 2015 г. — Воронеж, 2015 .— С. 14-18.— 0,3 п.л.

89. Костылев В. И. Улучшенный энергетический обнаружитель случайных гауссовых сигналов в коррелированном гауссовом шуме / В.И. Костылев, И.П. Гресь // Радиолокация, навигация, связь : XIX Международная научно-техническая конференция, г. Воронеж, 16-18 апр. 2013 г. — Воронеж, 2013.— Т. 3.- С. 2114-2124 .— 0,7 п.л.

90. Костылев В. И. Обобщенное энергетическое обнаружение случайного гауссовсого сигнала в гауссовском коррелированном шуме / В.И. Костылев, И.П. Гресь // Вестник Воронежского института МВД России.— Воронеж, 2013.— № 2. - С. 136-144.— 0,6 п.л.

91. Костылев В. И. Определение характеристик обобщенного энергетического обнаружителя с помощью статистического моделирования / В.И. Костылев, И.П. Гресь // Информатика : проблемы, методология, технологии : материалы 14 Международной научно-методической конференции, 6-8 февраля 2014 г., г. Воронеж .— Воронеж, 2014.— Т. 2. - С. 116-120.— 0,3 п.л.

92. Костылев В. И. Обобщенное энергетическое обнаружение детерминированного сигнала на фоне шума Лихтера / В.И. Костылев, И.П. Гресь // Радиолокация, навигация, связь: XX Международная научно-техническая конференция, г. Воронеж, 15-17 апр. 2014 г. — Воронеж, 2014.— Т. 1. - С. 72-81.— 0,6 п.л.

93. Костылев В. И. Обобщённое энергетическое обнаружение неизвестных детерминированных сигналов на фоне шума Лихтера / В.И. Костылев, И.П. Гресь // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии .— Воронеж, 2014.— № 3. - С. 73-80.— ISSN 0234-5439 .— ISSN 1995-5499 .— 0,5 п.л.

94. Костылев В. И. Обобщенное энергетическое обнаружение квазидетерминированных сигналов на фоне шума Лихтера / В.И. Костылев, И.П. Гресь // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии.— Воронеж, 2014.— № 4. - С. 32-38 .— ISSN 0234-5439 .— ISSN 1995-5499.— 0,4 п.л.
95. Костылев В. И. Статистическое моделирование в оценке влияния формы сигнала на характеристики обобщенного энергетического обнаружителя / В.И. Костылев, И.П. Гресь // Информатика : проблемы, методология, технологии : материалы 15 Международной научно-методической конференции, 12-13 февраля 2015 г., г. Воронеж : в 4 т. — Воронеж, 2015.— Т. 2. - С. 145-150 .— 0,4 п.л.
96. Костылев В. И. Программа для нахождения вероятности правильного обнаружения детерминированного сигнала на фоне шума Лихтера : свидетельство № 2013661455 о государственной регистрации программы для ЭВМ : № 2013619735; заявл.24.10.2013; зарегистр. 09.12.2013 г. / В.И. Костылев, И.П. Гресь .— Москва, 2013.
97. Костылев В. И. Статистический анализ эффективности обнаружения случайных сигналов на фоне полигауссовского шума с помощью обобщенного энергетического обнаружителя первого порядка / В.И. Костылев, И.П. Гресь // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии.— Воронеж, 2015.— № 3. - С. 75-83.— ISSN 0234-5439.— ISSN 1995-5499.— 0,6 п.л.
98. Костылев В. И. Квазиэнергия системы стандартных гауссовских случайных величин / В.И. Костылев, И.П. Гресь // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии.— Воронеж, 2016.— № 1. - С. 35-42.— ISSN 0234-5439.— ISSN 1995-5499.— 0,5 п.л.
99. Костылев В. И. Адаптивное энергоподобное обнаружение гауссовского сигнала на фоне шума Лихтера / В.И. Костылев, И.П. Гресь // Радиолокация и

радиосвязь: X Всероссийская научно-техническая конференция, 21-23 ноября 2016 г., г. Москва: сборник трудов.— Москва, 2016.— С. 161-165 .— 0,3 п.л.

100. Костылев В. И. Характеристики энергоподобного обнаружителя гауссовского сигнала на фоне шума Лихтера / В.И. Костылев, И.П. Гресь // Известия высших учебных заведений. Радиофизика.—Нижний Новгород, 2017.— Т. 60, № 4. - С. 1-8.

101. Kostylev V.I. Characteristics of *p*-norm Signal Detection in Gaussian Mixture Noise / V.I. Kostylev, I.P. Gres // IEEE Transactions on Vehicular Technology. – 2017. – DOI: 10.1109/TVT.2017.2762244.