

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи

ЗАЛУКАЕВА ЖАННА ОЛЕГОВНА

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ С СИНГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРОЙ

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук,
Профессор Баев Александр Дмитриевич

Воронеж — 2018

Содержание

Введение	4
1 Математическая модель малых деформаций разрывной струны с особенностями на концах	18
1.1 Некоторые сведения о π -интеграле	18
1.2 Вариационное обоснование модели малых деформаций разрывной струны с особенностями на концах	21
1.3 Корректность математической модели малых деформаций разрывной струны с особенностями на концах	32
2 Математические модели малых колебаний разрывной стилтьесовской струны	46
2.1 Вариационное обоснование модели малых колебаний разрывной стилтьесовской струны с жестко закрепленными концами	46
2.2 Представление решения математической модели малых колебаний разрывной стилтьесовской струны с жестко закрепленными концами в виде ряда Фурье	53
2.2.1 Разложение функций из E_μ в ряд Фурье	55
2.2.2 О некоторых свойствах собственных функций	69
2.2.3 Доказательство возможности применения метода Фурье	73
2.3 Корректность математической модели малых колебаний разрывной стилтьесовской струны с жестко закрепленными концами	79
2.4 Математическая модель малых колебаний разрывной стилтьесовской струны с особенностями на концах	88
2.5 Поиск режимов колебаний разрывной стилтьесовской струны	96
2.5.1 Поиск режимов колебаний разрывной струны без особенностей на концах	96
2.5.2 Поиск режимов колебаний разрывной струны с особенностями на концах	114

3	Адаптация метода конечных элементов для моделей с разрывными решениями	127
3.1	Адаптация метода конечных элементов для математической модели малых деформаций разрывной струны	127
3.2	Адаптация метода конечных элементов для математической модели малых колебаний разрывной стигльесовской струны с жестко закрепленными концами	135
3.3	Численные эксперименты для моделей с разрывными решениями	146
	Заключение	156
	Литература	157
	Приложения	164
	Приложение 1. Текст программы «discontinuous.string.Final.3.2.1» . . .	164
	Приложение 2. Текст программы «discontinuous.string.Final.3.4» . . .	172
	Приложение 3. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ . . .	181

Введение

Актуальность темы. Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-(pu')' + qu = f(= \lambda tu)$$

более двух столетий служит основой самых разнообразных моделей естествознания, поэтому к настоящему времени изучению данного уравнения посвящено достаточно большое количество работ (например, [1], [9], [10], [15] – [19], [23], [45], [48], [61] – [64], [69]). Попытки распространения теории таких моделей на случай нерегулярных физических систем начались еще в 19 веке. Так Стильтесом было предпринято исследование знаменитой задачи о «нити с бусинками», когда

$$-u'' = \lambda tu,$$

где (в современных терминах) $m(x) = \sum_{i=1}^n m_i \delta(x - \xi_i)$. Здесь $\delta(x)$ – функция Дирака, ξ_i – координаты точечных масс, а m_i – величины этих масс. Замечательно то, что в этом исследовании преодоление совершенно новых математических трудностей Стильтесу удалось совершить за счет введения принципиально нового интеграла, именуемого ныне его именем.

В 30-е гг. 20 века в рамках теоретической физики стал актуальным вопрос анализа спектральной задачи для уравнения Шредингера

$$-(u')' + qu = \lambda u$$

с сингулярным потенциалом q , когда, например, q содержит особенности как типа δ -функции, так и более сильные, порождаемые разрывами у решений. Таким образом, возникла проблема создания новых подходов и методов анализа подобной ситуации.

Появление теории обобщенных функций позволило приступить к исследованию спектральной задачи для уравнения Шредингера [2, 3], что привело к созданию весьма обширной спектральной науки, связанной с именами ряда известных ученых (от М.Г. Крейна [43], Б.М. Левитана, И.С. Саргсяна

[46] до В.А. Ильина [39], А.Г. Баскакова [5], А.П. Хромова [66], А.А. Шкаликova [58]–[60], А.М. Савчука [59, 60], Б.С. Митягина [20], П.Б. Джакова [21], Р.О. Гринива, Я.В. Микитюк [50]). Однако это спектральное направление нацелено на свои проблемы (полнота и базисность, асимптотика спектра, разнообразные свойства непрерывного спектра, структура сингулярных компонент спектра (спектральных лакун, зон неустойчивости), вопросам о следах и проч.).

Параллельно развивалось и другое направление, связанное с поточечным толкованием такого рода уравнений. Соответствующий подход на базе интеграла Стильтьеса был намечен Ф.В. Аткинсоном и М.Г. Крейном [1, 43] в 50-е гг. 20 века. Этот подход заключался в переходе от уравнения с обобщенными коэффициентами к интегро-дифференциальному уравнению. Так, уравнение с обобщенным коэффициентом M'

$$-(u')' = \lambda M'u$$

ими трактовалось в виде

$$u'_+(x) = u'_-(0) - \lambda \int_0^{x+0} u \, dM.$$

Эта идея перехода от уравнения с обобщенными коэффициентами к интегро-дифференциальному уравнению была перенесена на более широкий класс задач Ю.В. Покорным [52]. Тщательная проработка такого подхода позволила получить аналог осцилляционной теории Штурма-Лиувилля для случая задачи

$$\begin{cases} -(pu')' + Qu = \lambda tu, \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases}$$

с обобщенными коэффициентами [37, 54, 55]. Метод Ю.В. Покорного был распространен на новые классы задач, актуализированных последними десятилетиями, в работах С.А. Шаброва [67], М.Б. Зверевой [53], Ж.И. Бах-

тиной [6], Ф.В. Голованевой [12], М.Б. Давыдовой [13], Меач Мона [48], Е.В. Лылова [47].

Необходимость моделирования колебательных процессов струнных систем возникает во многих отраслях естествознания и техники. В этом направлении особенно можно выделить публикации В.А. Ильина [39], Е.И. Моисеева [40], Л.Н. Знаменской [38], А.И. Егорова [22], А.В. Боровских [7, 8], В.Л. Прядиева [56], В.В. Провоторова [57]. Однако наличие произвольного числа локализованных особенностей, приводящих к потере гладкости, а также разрывам у решений, в этих работах не рассматривалось.

В настоящей диссертации изучаются модели, описываемые уравнениями

$$-(pu')' + Q'u = F' \quad (1)$$

и

$$M'u''_{tt} = (pu')' - uQ' + F', \quad (2)$$

когда у коэффициентов Q' , M' и правой части F' допускаются как δ , так и δ' слагаемые, а решения допускают как конечное, так и бесконечное множество точек разрыва (но не более чем счетное). Математическое моделирование такого рода ситуаций актуально, поскольку обусловлено достаточно богатым набором прикладных задач. Для анализа данных моделей в настоящей диссертации получают развитие имеющиеся и разрабатываются новые подходы, включая численные методы и алгоритмы нахождения приближенных решений.

При моделировании мы развиваем концепцию Ю.В. Покорного, согласно которой уравнениям (1) и (2) может быть придано поточечное представление

$$-\frac{d}{d[\sigma]}(pu'_\mu) + \frac{dQ}{d[\sigma]}u = \frac{dF}{d[\sigma]}, \quad (3)$$

и

$$u''_{tt}(x, t)M'_{[\sigma]}(x) = (p(x)u'_\mu(x, t))'_{[\sigma]} - u(x, t)Q'_{[\sigma]}(x) + F'_{[\sigma]}(x, t),$$

соответственно, где в обобщенное дифференцирование $\frac{d}{d[\sigma]}$ вкладывается особый смысл, определяемый предложенной Ю.В. Покорным расширенной трактовкой интеграла Стилтеса, которую мы будем называть π -

интегралом [51, 52]. Запись u'_μ означает, что производная обращается интегралом Лебега-Стилтьеса [11, 42, 64, 68], а обозначение $\frac{d}{d[\sigma]}$ квадратными скобками подчеркивает, что соответствующая производная обращается интегралом Стилтьеса, понимаемом в расширенном смысле (π -интегралом).

Цели и задачи исследования. Разработка новых качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей сложных физических систем, реализуемых в виде граничных задач для дифференциальных уравнений с разрывными решениями, разработка и обоснование эффективных численных методов и алгоритмов. Реализация цели исследования осуществляется решением следующих задач как теоретического, так и прикладного характера:

- вариационное обоснование математических моделей, описывающих деформацию разрывной струны (как с конечным, так и бесконечным множеством точек разрыва) и колебания разрывной струны, помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями (как в конечном, так и в бесконечном множестве точек), включающими сосредоточенные упругие опоры, сосредоточенные массы, сосредоточенные силы;

- доказательство корректности исследуемых математических моделей объектов с сингулярной структурой;

- обоснование возможности применения метода Фурье для получения решения математической модели с сингулярной структурой;

- разработка эффективных численных методов для нахождения приближенного решения математических моделей объектов с сингулярной структурой с оценкой сходимости;

- разработка эффективных алгоритмов решения изучаемых математических моделей, а также разработка комплексов программ для ЭВМ на языке высокого уровня Python с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах;

- решение ряда задач прикладного характера: а) приближенное решение модели, описывающей деформации разрывной струны; б) для частных случаев найдены условия движений концов струны, а также такие внешние воздействия, которые позволяют перевести колебательный процесс в изучаемых моделях в заданный момент времени в заданное состояние.

Объект исследования. Качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей объектов с сингулярной структурой, решения которых допускают разрывы.

Методы исследования. Разработанные в диссертационной работе методы исследования математических моделей объектов с сингулярной структурой, допускающих разрывные решения, основаны на фундаментальных методах современного качественного анализа, функционального анализа, теории меры и интеграла. Адаптированный метод конечных элементов для исследуемых моделей объектов с сингулярной структурой, его обоснование были получены с использованием последних разработок вычислительных методов для уравнений с особенностями.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, допускающих разрывные решения и формализованных в виде единого уравнения с производными по мере (в смысле Радона-Никодима), численные методы и алгоритмы нахождения приближенных решений рассматриваемых моделей объектов с сингулярной структурой в виде комплексов проблемно-ориентированных программ.

1. Вариационное обоснование математических моделей, описывающих деформации и малые колебания физических систем с сингулярной структурой и возможными разрывами у решений.

2. Доказательство корректности полученных моделей.

3. Разработка эффективных численных методов нахождения решения исследуемых моделей, включая оценку сходимости.

4. Разработка эффективных алгоритмов нахождения решения моделей с сингулярной структурой, а также разработка комплексов программ для ЭВМ на языке высокого уровня Python с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Научная новизна. 1. В диссертационной работе предлагаются новые подходы для анализа математических моделей объектов с сингулярной структурой, допускающих разрывные решения, в виде единого уравнения с производными по мере.

2. Доказана корректность математических моделей объектов с сингулярной структурой, допускающих разрывные решения и реализуемых в виде уравнений с производными по мере.

3. Метод конечных элементов адаптирован для математических моделей с сингулярной структурой, допускающих разрывные решения, получены оценки сходимости.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая и практическая значимость результатов и методов диссертационной работы заключается в возможности их использования для исследования моделей объектов с сингулярной структурой, допускающих разрывы у решений, и описывающих колебания и деформации одномерных упругих объектов с локализованными особенностями внешней среды. Разработаны эффективные численные методы применительно к такого рода моделям, представлены новые методы построения приближенных решений. Получены оценки сходимости приближенных решений к точным. Представлены результаты тестирования разработанных численных методов с применением ЭВМ.

Область исследования. Область исследования и содержание диссертационной работы соответствует формуле специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки). Область исследования соответствует п.1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений», п.2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», п.3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», п.4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

Апробация работы. Результаты исследования были представлены в форме докладов на следующих конференциях: Воронежские зимние математические школы (Воронеж, 2015 г., 2017 г.), международные заочные научно-практические конференции «Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика» (Воронеж, 2014–2015 гг.), Воро-

нежские весенние математические школы «Понтрягинские чтения» (Воронеж, 2015–2017 гг.), на семинарах профессора А.Д. Баева (2014–2017 гг.), профессора М.И. Каменского (2014–2017 гг.), доцентов С.А Шаброва (2014–2017 гг.), М.Б. Зверевой (2014–2017 гг.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 15 работах [4], [24]–[36], [41], 5 из которых [4], [24], [34]–[36] опубликованы в рекомендованных ВАК РФ рецензируемых научных изданиях. В совместных публикациях [4], [26], [27], [31], [33]–[36], [41] в диссертацию вошли результаты, принадлежащие лично автору. Получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ, зарегистрированной в Реестре программ для ЭВМ № 2017614993.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав, заключения, библиографического списка из 69 наименований и 3 приложений, в котором приведены тексты разработанных программ, написанных на языке программирования Python, и свидетельство о регистрации программы для ЭВМ. Общий объем диссертации составляет 181 страницу. Диссертационная работа содержит 27 рисунков.

Основное содержание работы

Во введении обоснована актуальность работы, формулируются цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных в диссертационной работе результатов.

В первой главе «**Математическая модель малых деформаций разрывной струны с особенностями на концах**» изучается математическая модель, допускающая разрывные решения и реализуемая в форме уравнения (3). Такая модель была получена как экстремаль функционала потенциальной энергии разрывной неоднородной струны

$$\Phi(u) = - \int_0^\ell \frac{p u_\mu^2}{2} d\mu - \int_0^\ell \frac{u^2}{2} d[Q] + \int_0^\ell u d[F], \quad (4)$$

упруго закрепленной на концах.

Функционал (4) мы рассматриваем на множестве E_μ μ -абсолютно непрерывных функций, производные которых u'_μ являются функциями ограниченные вариации. Заметим, что μ -абсолютная непрерывность означает, что функция $u(x)$ может быть представлена в виде

$$u(\beta) - u(\alpha) = \int_\alpha^\beta u'_\mu d\mu. \quad (5)$$

Из (5) следует, что производная функции u в точке разрыва ξ функции μ определяется отношением скачков, т.е. формулой

$$u'_\mu(\xi) = \frac{u(\xi + 0) - u(\xi - 0)}{\mu(\xi + 0) - \mu(\xi - 0)}.$$

Мы предполагаем, что функция $\mu(x)$ строго возрастает, $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$ и $Q(x) \neq const$, а $p(x)$, $F(x)$ – функции ограниченной вариации на $[0, \ell]$. Из μ -абсолютной непрерывности следует, что функция $u(x)$ может быть разрывна лишь в точках разрыва $\mu(x)$, а потому множество точек разрыва у $u(x)$ не более чем счетно.

Функционал энергии (4) записан с помощью как обычного интеграла Стильтьеса, так и интегралов Стильтьеса, понимаемых в расширенном смысле, предложенном Ю.В. Покорным [51]. В отличие от обычного интеграла Стильтьеса [11, 42], π -интеграл $\int_0^\ell u d[v]$ берется по двузначной v -мере, т.е. обязательно учитывается собственное значение порождающей меру функции $v(x)$ в точке разрыва, и учитываются лишь предельные значения функции $u(x)$.

Для того чтобы иметь возможность применять методы классического анализа для изучаемой модели, реализуемой в виде уравнения (3), мы заменяем особые точки на их специальные «расширения». Таких расширений здесь два, так как функция $u(x)$ и ее производная $u'_\mu(x)$ определены на разных множествах. Обозначим через $S(\mu) \subset (0, \ell)$ – множество точек разрыва $\mu(x)$ и через S – множество точек разрыва $\sigma(x)$, не принадлежащих $S(\mu)$. Тогда из уравнения (3) вытекает, что в точках ξ разрыва функции

$\mu(x)$ верны равенства

$$-p(\xi) \frac{\Delta u(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} + p(\xi - 0)u'_\mu(\xi - 0) + u(\xi - 0)\Delta^- Q(\xi) = \Delta^- F(\xi),$$

$$p(\xi) \frac{\Delta u(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} - p(\xi + 0)u'_\mu(\xi + 0) + u(\xi + 0)\Delta^+ Q(\xi) = \Delta^+ F(\xi),$$

а в точках $s \in S \subset (0, \ell)$ равенство

$$-p(s + 0)u'_\mu(s + 0) + p(s - 0)u'_\mu(s - 0) + u(s)\Delta Q(s) = \Delta F(s).$$

Из уравнения (3) также следует, что в точках $x = 0$ и $x = \ell$ верны равенства

$$\begin{aligned} p(\ell - 0)u'_\mu(\ell - 0) + u(\ell)\Delta^- Q(\ell) &= \Delta^- F(\ell), \\ -p(+0)u'_\mu(+0) + u(0)\Delta^+ Q(0) &= \Delta^+ F(0). \end{aligned}$$

Здесь обозначены $\Delta^- z(\xi) = z(\xi) - z(\xi - 0)$ — левый скачок, $\Delta^+ z(\xi) = z(\xi + 0) - z(\xi)$ — правый скачок, $\Delta z(\xi) = z(\xi + 0) - z(\xi - 0)$ — полный скачок.

Кроме того, в первой главе вводится понятие функции влияния, изучаются ее свойства, а также устанавливается корректность исследуемой модели малых деформаций разрывной струны с особенностями на концах.

Во второй главе «**Математические модели малых колебаний разрывной стилтьесовской струны**» в начале исследуется модель малых поперечных колебаний разрывной стилтьесовской струны, жестко закрепленной на концах, реализуемая в форме граничной задачи

$$\begin{cases} u''_{tt}(x, t)M'_{[\sigma]}(x) = (p(x)u'_\mu(x, t))'_{[\sigma]} - u(x, t)Q'_{[\sigma]}(x) + F'_{[\sigma]}(x, t), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u'_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad (6)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — форма и скорость струны в начальный момент времени, соответственно. Здесь $p(x)$, $F(x, t)$ — функции ограниченной вариации по

переменной x на $[0, \ell]$, $\inf_{[0, \ell]} p(x) > 0$. Функции $M(x)$, $\mu(x)$, $\sigma(x)$ строго возрастают на $[0, \ell]$, а $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$.

Здесь через $u(x, t)$ обозначено отклонение рассматриваемой системы от положения равновесия в точке x в момент времени t . В точках ξ , в которых $u(x, t)$ терпит разрыв, уравнение из системы (6) можно записать в виде следующих равенств:

$$\begin{aligned}\Delta^- M(\xi) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi - 0, t) &= \Delta^- \left(p \frac{\partial u}{\partial \mu} \right) (\xi, t) - u(\xi - 0, t) \Delta^- Q(\xi) + \Delta^- F(\xi, t), \\ \Delta^+ M(\xi) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi + 0, t) &= \Delta^+ \left(p \frac{\partial u}{\partial \mu} \right) (\xi, t) - u(\xi + 0, t) \Delta^+ Q(\xi) + \Delta^+ F(\xi, t).\end{aligned}$$

Решение $u(x, t)$ задачи (6) будем искать в классе функций E таких, что при каждом фиксированном t функция $u(x, t)$ является μ -абсолютно непрерывной по переменной x , при этом $u'_\mu(x, t)$ – функция ограниченной вариации по переменной x и непрерывна по переменной t . Функция $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной t ; функция $u'_t(x, t)$ является функцией ограниченной вариации по переменной x . Кроме того, для любых $x_0 \in \overline{[0, \ell]}_\mu$, $t_0 \in [0, T]$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой пары (x, t) таких, что $|\mu(x) - \mu(x_0)| < \delta$ и $|t - t_0| < \delta$, верно $|u(x, t) - u(x_0, t_0)| < \varepsilon$. Функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ являются μ -абсолютно непрерывными, а $\varphi'_\mu(x)$, $\psi'_\mu(x)$ – функции ограниченной вариации на $[0, \ell]$. При этом $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$, $\psi(0) = \psi(\ell) = 0$.

В данной главе также исследуется вопрос о возможности представления решения математической модели

$$\begin{cases} M'_{[\sigma]}(x) u''_{tt}(x, t) = (p(x) u'_\mu(x, t))'_{[\sigma]} - u(x, t) Q'_{[\sigma]}(x), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u'_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad (7)$$

в виде ряда Фурье по собственным функциям спектральной задачи

$$\begin{cases} -(p(x)X'_\mu(x))'_{[\sigma]} + X(x)Q'_{[\sigma]}(x) = \lambda X(x)M'_{[\sigma]}(x), \\ X(0) = X(\ell) = 0. \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть функции $\mu(x)$, $M(x)$ строго возрастают, а $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$. Функция $p(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, \ell]$ и $\inf_{[0, \ell]} p(x) > 0$; функции $M(x)$, $p(x)$, $Q(x)$ – $[\sigma]$ -абсолютно непрерывны $[0, \ell]$.

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ μ -абсолютно непрерывны на $[0, \ell]$, производные $\varphi'_\mu(x)$ и $\psi'_\mu(x)$ имеют конечное на $[0, \ell]$ изменение; квазипроизводные $p(x)\varphi'_\mu(x)$ и $p(x)\psi'_\mu(x)$ $[\sigma]$ -абсолютно непрерывны на $[0, \ell]$. Пусть функция $\frac{L(\psi)(x)}{M'_{[\sigma]}(x)}$ μ -непрерывна на $[0, \ell]$, где $LX = -(pX'_\mu)'_{[\sigma]} + XQ'_{[\sigma]}$; функция $\frac{L(\varphi)(x)}{M'_{[\sigma]}(x)}$ μ -абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$ и ее производная является функцией ограниченной вариации. Предположим, что $\varphi(0) = \varphi(\ell) = L(\varphi)(0) = L(\varphi)(\ell) = \psi(0) = \psi(\ell) = 0$. Тогда функция

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right), \quad (8)$$

где $\varphi_k(x)$ – нормированная амплитудная функция, отвечающая собственному значению λ_k ,

$$A_k = \int_0^\ell \varphi_k(x) \varphi(x) d[M(x)], \quad B_k = \int_0^\ell \varphi_k(x) \psi(x) d[M(x)],$$

является решением математической модели (7), причем ряд (8) можно дифференцировать почленно по t дважды и по μ , $[\sigma]$ также дважды; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на прямоугольнике $\overline{[0, \ell]_\mu} \times [0, T]$.

Доказана корректность изучаемой модели (6).

Далее во второй главе рассматривается математическая модель малых поперечных колебаний разрывной стилтьесовской струны, упруго закреп-

ленной на левом ($x = 0$) и правом ($x = \ell$) концах. Для данной математической модели доказана корректность.

Для частных случаев исследуемых математических моделей найдены такие условия движения концов струны и такие внешние воздействия, которые позволяют перевести колебательный процесс в изучаемых моделях в заданный момент времени в заданное состояние.

В третьей главе «**Адаптация метода конечных элементов для моделей с разрывными решениями**» к изучаемым в первой и второй главах моделям адаптируется метод конечных элементов, получены оценки сходимости приближенного решения к точному.

Для нахождения приближенного решения модели малых деформаций разрывной струны с особенностями на концах зафиксируем произвольное число $h > 0$. Предположим, что множество $S(\mu)$ конечно. Заменим всякую точку ξ разрыва функции $\mu(x)$ парой $\{\xi - 0, \xi + 0\}$ и обозначим полученное расширение отрезка $[0, \ell]$ через $\overline{[0, \ell]}_\mu$. Дополним $\overline{[0, \ell]}_\mu$ точками x_i^* непрерывности $\mu(x)$ так, чтобы на каждом промежутке $[0, \xi_1 - 0]$, $[\xi_1 + 0, \xi_2 - 0]$, ... $[\xi_n + 0, \ell]$ выполнялись неравенства $\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*) < h$. Таким образом, мы получаем разбиение множества $\overline{[0, \ell]}_\mu$. Если же множество $S(\mu)$ счетное, то выберем сначала точки ξ_i , в которых $\Delta\mu(\xi_i) \geq \frac{h}{2}$. Заменив эти точки на пары $\{\xi_i - 0, \xi_i + 0\}$, рассмотрим аналогичное разбиение $\overline{[0, \ell]}_\mu$. Перенумеруем точки, входящие в разбиение, как $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = \ell$. Базисные функции $\varphi_k(x)$, где $k = 1, \dots, N - 1$, определим следующим образом:

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{\mu(x) - \mu(x_{k-1})}{\mu(x_k) - \mu(x_{k-1})}, & \text{если } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \frac{\mu(x_{k+1}) - \mu(x)}{\mu(x_{k+1}) - \mu(x_k)}, & \text{если } x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0, & \text{если } x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}] \end{cases} \quad (9)$$

Также определим базисные функции

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{\mu(x) - \mu(x_1)}{\mu(0) - \mu(x_1)}, & x \in [0, x_1], \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \frac{\mu(x) - \mu(x_{N-1})}{\mu(\ell) - \mu(x_{N-1})}, & x \in [x_{N-1}, \ell], \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Приближенное решение будем искать в виде

$$v(x) = \sum_{i=0}^N v_i \varphi_i(x).$$

Введем скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^\ell p \varphi'_\mu \psi'_\mu d\mu + \int_0^\ell \varphi \psi d[Q].$$

Теорема 2. Пусть $u(x)$ – точное решение (3), $v(x)$ – приближенное решение, найденное с помощью описанного выше алгоритма. Тогда

$$\langle u - v, u - v \rangle \leq Ch,$$

причем, константа C не зависит от h .

Для изучаемой модели малых колебаний разрывной стилтьесовской струны с жестко закрепленными концами построен алгоритм нахождения приближенного решения, в рамках которого базисные функции $\varphi_k(x)$ определяются аналогично (9). Приближенное решение $u_N(x, t)$ задачи (6) будем искать в виде $u_N(x, t) = \sum_{k=1}^{N-1} a_k(t) \varphi_k(x)$, где $a_k(t)$ – неизвестные дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_k(x)$ – базисные функции.

Теорема 3. Пусть $p(x)$, $F(x, t)$ – функции ограниченной вариации на $[0, \ell]$, причем $\inf_{[0, \ell]} p(x) > 0$. Функции $M(x)$, $\mu(x)$, строго возрастают на $[0, \ell]$, функция $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$. Обозначим через $u(x, t)$ и $u_N(x, t)$ точное и приближенное решения математической модели (7).

Пусть $\omega(x, t) = u(x, t) - u_N(x, t)$. Тогда

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left(\int_0^\ell \omega_t'^2(x, t) d[M] + \int_0^\ell p(x) \omega_\mu'^2(x, t) d\mu + \int_0^\ell \omega^2(x, t) d[Q] \right)^{\frac{1}{2}} \leq C\sqrt{h}.$$

Для исследуемой модели деформации разрывной струны также приведены решения тестовых примеров, найденные с помощью описанного выше алгоритма. Вычислительные эксперименты были проведены с помощью программ, написанных на языке программирования Python.

Программы работают по следующему алгоритму. Задаются параметры модели. Затем находятся коэффициенты системы, которая составляется при реализации адаптированного метода конечных элементов. Потом полученная система решается и находится приближенное решение модели. По запросу пользователя строится либо график приближенного решения, либо таблица значений, которая может быть выведена на монитор или записана в файл. Для работы программ необходим интерпретатор языка Python, пакеты `math`, `scipy.integrate`, `copy`, `time`, `pylab`, `matplotlib`. Требования к программному окружению: операционная система Linux, Windows XP, 2003, 7.

В заключительной части изложены основные результаты диссертационной работы.

Глава 1

Математическая модель малых деформаций разрывной струны с особенностями на концах

В этой главе приведены основные понятия, вариационное обоснование математической модели малых деформаций разрывной струны с особенностями на концах, доказана корректность исследуемой математической модели.

1.1 Некоторые сведения о π -интеграле

При моделировании деформаций и колебаний разрывной стилтьесовской струны мы будем пользоваться обобщенным интегралом Стильтеса, введенным Ю.В. Покорным в работе [51], так как обычный интеграл Стильтеса для изучаемых моделей оказывается неэффективным по причине того, что требует точного определения собственного значения интегрируемой функции в точке разрыва и не учитывает в точке разрыва собственное значение функции интегрирующей. Такой интеграл мы будем называть π -интегралом. Чтобы подчеркнуть, что речь идет о π -интеграле, будем заключать функцию, стоящую под знаком дифференциала, в квадратные скобки. Далее приведем основные факты о π -интеграле.

Пусть $g(x)$ – неубывающая функция, определенная на $[0, \ell]$. Обозначим через $S(g)$ множество точек разрыва $g(x)$. Отметим, что важно, чтобы $g(x)$ была определена во всех точках $\xi \in S(g)$. Пусть $\sigma(x) = x + g(x)$, т.е. функция $\sigma(x)$ строго монотонно возрастает на $[0, \ell]$. Добавим к $[0, \ell]$ для $\xi \in S(g)$ элементы $\xi - 0$ и $\xi + 0$, полагая $x < \xi - 0 < \xi$ для всех $x < \xi$, а также $\xi < \xi + 0 < x$ при всех $x > \xi$. Если $g(x)$ разрывна в точках $x = 0$ и $x = \ell$, то добавим элементы $+0$ и $\ell - 0$, соответственно. Обозначим это расширение через $\overline{[0, \ell]}_\sigma$. Очевидно, что $\overline{[0, \ell]}_\sigma$ является пополнением $[0, \ell]$ по метрике $\rho(a, b) = |\sigma(b) - \sigma(a)|$. Топология на $\overline{[0, \ell]}_\sigma$ индуцируется исходной, т.е. мет-

рикой ρ . Аддитивная функция сегмента $g([a, b]) = g(b) - g(a)$ непрерывна на $\overline{[0, \ell]}_\sigma$. Можно показать [51], что $g([a, b])$ допускает стандартное продолжение до счетно-аддитивной меры на системе борелевских (относительно $\overline{[0, \ell]}_\sigma$) подмножеств. Заметим, что для g -меры верны равенства

$$\begin{aligned} g[\xi - 0, \xi] &= g(\xi) - g(\xi - 0), & g[\xi, \xi + 0] &= g(\xi + 0) - g(\xi), \\ g[\xi - 0, \xi + 0] &= g(\xi + 0) - g(\xi - 0). \end{aligned}$$

Введем [51] процедурой лебеговского типа интеграл $\int_A f(x) d[g(x)]$ по («расщепленной») мере g и будем называть такой интеграл π -интегралом. Заметим, что в данном случае мы можем интегрировать по любому борелевскому (относительно $\overline{[0, \ell]}_\sigma$) множеству A . Так, например, если ξ – точка разрыва функции $g(x)$, то

$$\begin{aligned} \int_{\xi-0}^{\xi} f(x) d[g(x)] &= f(\xi - 0)(g(\xi) - g(\xi - 0)), \\ \int_{\xi}^{\xi+0} f(x) d[g(x)] &= f(\xi + 0)(g(\xi + 0) - g(\xi)), \\ \int_{\xi-0}^{\xi+0} f(x) d[g(x)] &= f(\xi - 0)(g(\xi) - g(\xi - 0)) + f(\xi + 0)(g(\xi + 0) - g(\xi)), \end{aligned}$$

а для точек разрыва $x = 0$ и $x = \ell$

$$\begin{aligned} \int_0^{+0} f(x) d[g(x)] &= f(0 + 0)(g(+0) - g(0)), \\ \int_{\ell-0}^{\ell} f(x) d[g(x)] &= f(\ell - 0)(g(\ell) - g(\ell - 0)). \end{aligned}$$

Понятие π -интеграла можно естественным образом распространить на случай, когда функция $g(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, \ell]$ [51]. Через $BV[0, \ell]$ будем всюду далее обозначать множество функций ограни-

ченной вариации на $[0, \ell]$, а символом $V_0^\ell(f)$ – полную вариацию функции f на $[0, \ell]$ [18].

В дальнейших рассуждениях основной для нас будет являться следующая формула из [51]:

$$\int_a^b f(x) d[g(x)] = \int_a^b f(x) dg_0(x) + \sum_{a < s \leq b} f(s-0)(g(s) - g(s-0)) + \sum_{a \leq s < b} f(s+0)(g(s+0) - g(s)),$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ – функции ограниченной вариации на $[a, b]$, $g_0(x)$ – непрерывная часть $g(x)$, интеграл $\int_a^b f(x) dg_0(x)$ понимается в обычном смысле по Лебегу-Стилтьесу. Будем также пользоваться формулой из [51]:

$$\int_a^b f(x) d[g(x)] = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x) df(x), \quad (1.1.1)$$

где $\int_a^b g(x)df(x)$ – обычный интеграл Лебега-Стилтьеса, самостоятельно определенный на $[a, b]$.

Еще раз заметим, что в отличие от обычного интеграла Стилтьеса, при вычислении π -интеграла собственное значение $f(s)$ интегрируемой функции f в точке разрыва $x = s$ функции $g(x)$ никакой роли не играет, важны лишь предельные значения $f(s-0)$, $f(s+0)$, зато учитываются все три значения $g(s-0)$, $g(s+0)$, $g(s)$ функции интегрирующей.

Основные свойства π -интеграла совпадают с привычными свойствами интеграла Лебега-Стилтьеса.

Заметим, что обычный интеграл Лебега-Стилтьеса $\int_0^\ell u(x)dv(x)$ тогда и только тогда совпадает с π -интегралом $\int_0^\ell u(x) d[v(x)]$, когда

$$\sum_{0 < s \leq \ell} \Delta^- u(s) \Delta^- v(s) = \sum_{0 \leq s < \ell} \Delta^+ u(s) \Delta^+ v(s),$$

где $\Delta^- z(s) = z(s) - z(s - 0)$, $\Delta^+ z(s) = z(s + 0) - z(s)$.

В частных случаях $\int_0^\ell u(x) dv(x) = \int_0^\ell u(x) d[v(x)]$, если в каждой точке из $[0, \ell]$ одна из функций u , v непрерывна или одна из них непрерывна справа, а другая – слева; либо когда обе функции регулярны, т.е. в точках разрыва выполнено условие

$$u(x) = \frac{u(x - 0) + u(x + 0)}{2}, \quad v(x) = \frac{v(x - 0) + v(x + 0)}{2}.$$

1.2 Вариационное обоснование модели малых деформаций разрывной струны с особенностями на концах

Рассмотрим разрывную стилтьесовскую струну (цепочку из струн, упруго соединенных между собой с помощью пружин), расположенную вдоль отрезка $[0, \ell]$ и имеющую упругие опоры (пружины) на левом (в точке $x = 0$) и правом (в точке $x = \ell$) концах с упругостями γ_1 и γ_4 , соответственно. Для определенности будем предполагать, что только в точке $x = \xi$ локализована особенность, порождаемая разрывом струны, т.е. цепочка состоит из двух струн.

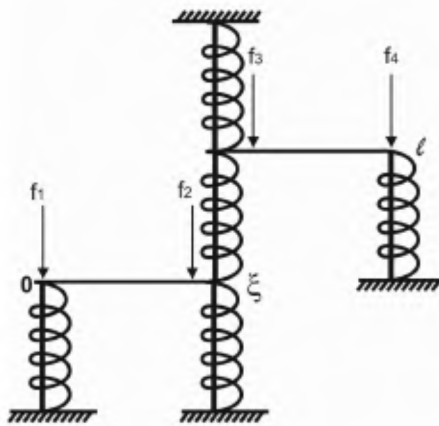


Рис. 1.2.1: Разрывная стилтьесовская струна с упруго закрепленными концами

Рассмотрим случай малых деформаций. Обозначим через $v(x)$ отклонение рассматриваемой физической системы в точке x от положения равновесия под влиянием внешней силы. Заметим, что в точке $x = \xi$ функция $v(x)$ не определена, но определены и имеют физический смысл предельные значения $v(\xi - 0)$, $v(\xi + 0)$ – отклонения соответствующих скрепленных пружиной концов струны.

Если через $F(x)$ обозначить сумму всех внешних сил, приложенных к участку $[0, x)$, тогда общая энергия, затрачиваемая внешней силой на придание системе формы $v(x)$, может быть записана в виде следующего интеграла

$$\int_{[0, \ell]} v(x) d[F(x)].$$

В частном случае, когда сосредоточены следующие силы: f_1 действует на левый конец цепочки, f_2 и f_3 – в точке упругого соединения струн, причем f_2 – на правом конце первой струны, f_3 – на левом конце второй струны, а f_4 действует на правый конец цепочки, то

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ f_1, & \text{если } 0 < x < \xi, \\ f_1 + f_2, & \text{если } x = \xi, \\ f_1 + f_2 + f_3, & \text{если } \xi < x < \ell, \\ f_1 + f_2 + f_3 + f_4, & \text{если } x = \ell, \end{cases}$$

так что

$$\int_{[0, \ell]} v(x) d[F(x)] = v(0)f_1 + v(\xi - 0)f_2 + v(\xi + 0)f_3 + v(\ell)f_4.$$

Пусть $p(x)$ – функция, характеризующая локальное натяжение струн, входящих в состав изучаемой модели. Функцию $p(x)$ в точке разрыва $x = \xi$ определим равной упругости соединяющей струны пружины, т.е. $p(\xi) = \gamma$. Тогда внутренняя энергия, накапливаемая системой за счет собственной

упругости, равна

$$\frac{1}{2} \int_{(0,\ell)} p(x)v_\mu'^2(x) d\mu(x),$$

где функция $\mu(x)$ строго возрастает на $[0, \ell]$. В силу непрерывности функции $\mu(x)$ в точках $x = 0$ и $x = \ell$ можем считать, что $p(0)v_\mu'(0) = p(\ell)v_\mu'(\ell) = 0$, поэтому справедливо равенство

$$\int_{(0,\ell)} p(x)v_\mu'^2(x) d\mu(x) = \int_{[0,\ell]} p(x)v_\mu'^2(x) d\mu(x).$$

В рассматриваемом частном случае, когда модель представляет собой цепочку из двух струн, соединенных в точке ξ с помощью пружины упругости γ , функция $\mu(x) = x + \theta(x - \xi)$, $\theta(x)$ – функция Хевисайда и

$$\int_0^\ell \frac{p(x)v_\mu'^2(x)}{2} d\mu(x) = \int_0^{\xi-0} \frac{p(x)v_x'^2(x)}{2} dx + \frac{\gamma(\Delta v(\xi))^2}{2} + \int_{\xi+0}^\ell \frac{p(x)v_x'^2(x)}{2} dx.$$

Функция $Q(x)$ характеризует упругость внешней среды. Поскольку исследуемая модель содержит упругие опоры типа пружин, то функция $Q(x)$ должна быть разрывна в точках сосредоточения опор, а скачки Q в этих точках должны совпадать с упругостями соответствующих пружин. Тогда упругость внешней среды может быть учтена с помощью интеграла

$$\int_{[0,\ell]} \frac{v^2(x)}{2} d[Q(x)].$$

В частном случае, когда на правом конце первой струны дополнительно прикреплен пружина упругости γ_2 , а на левом конце второй струны – пружина упругости γ_3 , функция $Q(x)$ имеет вид

$$Q(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ \gamma_1, & \text{если } 0 < x < \xi, \\ \gamma_1 + \gamma_2, & \text{если } x = \xi, \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, & \text{если } \xi < x < \ell, \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4, & \text{если } x = \ell. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\int_{[0, \ell]} \frac{v^2(x)}{2} d[Q(x)] = \frac{v^2(0)}{2} \gamma_1 + \frac{v^2(\xi - 0)}{2} \gamma_2 + \frac{v^2(\xi + 0)}{2} \gamma_3 + \frac{v^2(\ell)}{2} \gamma_4.$$

В общем случае потенциальная энергия системы может быть задана функционалом

$$\begin{aligned} \Phi(v) = & \frac{1}{2} \int_{[0, \ell]} p(x) (v'_\mu(x))^2 d\mu(x) + \frac{1}{2} \int_{[0, \ell]} v^2(x) d[Q(x)] - \\ & - \int_{[0, \ell]} v(x) d[F(x)]. \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Заметим, что функционал $\Phi(v)$ выражает энергию цепочки из любого количества струн (но не более, чем счетного).

Предположим, что $p(x)$, $F(x)$ – функции ограниченной вариации на $[0, \ell]$, причем $\inf_{(0, \ell)} p(x) > 0$. Функция $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$ и $Q(x) \neq \text{const}$. Функция $\mu(x)$ строго возрастает на $[0, \ell]$. Функционал (1.2.1) будем рассматривать на множестве E_μ – μ -абсолютно непрерывных функций, производные которых $v'_\mu(x)$ являются функциями ограниченной вариации на $[0, \ell]$.

Подчеркнем, что рассматриваемая функция $v(x)$ – это гипотетическая (виртуальная) деформация. Реальная деформация $v_0(x)$, согласно вариационному принципу Остроградского-Гамильтона, должна давать минимум функционалу (1.2.1).

Если $v_0(x)$ дает минимум $\Phi(v)$ на E_μ , то первая вариация должна равняться нулю, т.е.

$$\begin{aligned} \delta\Phi(v_0)h = \int_0^\ell p(x)v'_{0\mu}(x)h'_\mu(x) d\mu(x) + \int_0^\ell v_0(x)h(x) d[Q(x)] - \\ - \int_0^\ell h(x) d[F(x)] = 0 \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

для всякой допустимой h из множества E_μ .

Применив формулу (1.1.1) к первому интегралу в (1.2.2), получаем равенство

$$- \int_0^\ell h(x) d[p(x)v'_{0\mu}(x)] + \int_0^\ell h(x) d[g(x)] - \int_0^\ell h(x) d[F(x)] = 0,$$

где $d[g(x)] = v_0(x) d[Q(x)]$. Значит,

$$\int_0^\ell h(x) d[-p(x)v'_{0\mu}(x) + g(x) - F(x)] = 0.$$

Покажем, что

$$-p(x)v'_{0\mu}(x) + \int_0^x v_0(s) d[Q(s)] - F(x) \equiv \text{const} = C,$$

или что $v_0(x)$ является решением уравнения

$$-p(x)v'_\mu(x) + \int_0^x v(s) d[Q(s)] = F(x) - F(0). \quad (1.2.3)$$

Лемма 1.2.1. Пусть $A(x)$ – функция ограниченной вариации на $[0, \ell]$.
 Причем, для любой $h \in E_\mu$ выполняется равенство

$$\int_0^\ell h(x) d[A(x)] = 0.$$

Тогда $A(x) \equiv \text{const}$.

Доказательство. Рассмотрим сначала функции h из множества E_0 , где

$$E_0 = \{h \in E_\mu \mid h(0) = h(\ell) = 0\}.$$

Тогда

$$\int_0^\ell h(x) d[A(x)] = - \int_0^\ell A(x) dh(x) = 0.$$

Значит, для любой константы C верно

$$\int_0^\ell (A(x) - C) dh(x) = 0. \quad (1.2.4)$$

Полагая в (1.2.4)

$$C = \frac{\int_0^\ell A(x) d\mu(x)}{\mu(\ell) - \mu(0)}, \quad h(x) = \int_0^x (A(t) - C) d\mu(t),$$

получим, что $\int_0^\ell (A(x) - C)^2 d\mu(x) = 0$, откуда для почти всех x (по μ -мере) следует равенство $A(x) = C$.

Покажем, что во всякой точке ξ разрыва μ верно $A(\xi - 0) = A(\xi) = A(\xi + 0) = C$. Так как μ -мера точки ξ равна $\mu(\xi + 0) - \mu(\xi - 0) \neq 0$, то $A(\xi) = C$. Предположим, что $A(\xi - 0) > C$. Тогда найдется $\delta > 0$, что для всех $x \in (\xi - \delta, \xi)$ верно $A(x) > C$. Но μ -мера интервала $(\xi - \delta, \xi)$ равна $\mu(\xi - 0) - \mu(\xi - \delta + 0)$, и в силу строгого возрастания функции μ , отлична

от нуля, что противоречит равенству $A(x) = C$ почти всюду по μ -мере. Таким образом, $A(\xi - 0) = C$. Аналогично, $A(\xi + 0) = C$.

Покажем, что если в точке s функция $A(x)$ непрерывна, то $A(s - 0) = A(s) = A(s + 0)$. Предположим, что $A(s) \neq C$. Пусть, для определенности, $A(s) > C$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$, что для всех $x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ верно $A(x) > C$. Но μ -мера $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ равна $\mu(\xi + \varepsilon - 0) - \mu(\xi - \varepsilon + 0)$ и отлична от нуля.

Покажем теперь, что во всякой точке s разрыва $A(x)$ верно $A(s - 0) = A(s + 0) = C$. Так как $A(x)$ является функцией ограниченной вариации на $[0, \ell]$, то множество ее точек разрыва не более чем счетно, причем, все точки разрыва первого рода. Пусть, для определенности, $s > 0$. Тогда найдется последовательность $\{x_n\}$ такая, что $x_n \rightarrow s - 0$ при $n \rightarrow \infty$, и $A(x)$ непрерывна в x_n . Но, как показано выше, $A(x_n) = C$. То $A(s - 0) = C$. Аналогично, $A(s + 0) = C$. Таким образом, на интервале $(0, \ell)$ функция $A(x)$ является постоянной.

Получили, что для произвольных функций $h \in E_\mu$ должно быть верно равенство

$$h(0)\Delta^+ A(0) + h(\ell)\Delta^- A(\ell) = 0,$$

откуда $\Delta^+ A(0) = 0$, $\Delta^- A(\ell) = 0$. \square

Значит, реальная форма, принятая системой, является решением уравнения (1.2.3), рассматриваемого на замкнутом сегменте, причем из равенства (1.2.3) следует, что в точках $x = 0$ и $x = \ell$ справедливы граничные условия

$$\begin{aligned} p(\ell - 0)v'_\mu(\ell - 0) + v(\ell)\Delta^- Q(\ell) &= \Delta^- F(\ell), \\ -p(+0)v'_\mu(+0) + v(0)\Delta^+ Q(0) &= \Delta^+ F(0). \end{aligned}$$

Заметим, что скачки $\Delta^- Q(\ell) = \gamma_4$ и $\Delta^+ Q(0) = \gamma_1$ равняются упругостям внешних пружин, прикрепленных к струнам на концах отрезка $[0, \ell]$, а $\Delta^- F(\ell) = f_4$ и $\Delta^+ F(0) = f_1$ — сосредоточенные на концах $x = 0$, $x = \ell$ струн силы.

Заметим, что в общей ситуации такого рода модель описывает физические процессы, часть которых по пространственной компоненте скрыта от наблюдения.

Рассмотрим детальнее уравнение (1.2.3). Мы предполагаем существование строго возрастающей функции $\mu(x)$ такой, что решения уравнения (1.2.3) являются μ -абсолютно непрерывными. Введенная здесь μ -производная подчинена равенству

$$v(\beta) - v(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} v'_{\mu}(x) d\mu(x),$$

так что во всякой точке ξ разрыва функции μ верно $v'_{\mu}(\xi) = \frac{\Delta v(\xi)}{\Delta \mu(\xi)}$.

Корректное распространение методов классического анализа на изучаемый нами случай требует замены особых точек их специальными «расширениями». Обозначим через $S(\mu) \subset (0, \ell)$ – множество точек разрыва $\mu(x)$. Отметим, что мы допускаем случай и когда $S(\mu)$ счетно, и когда $S(\mu)$ конечно. Решения $v(x)$ уравнения (1.2.3) ищем в классе E μ -абсолютно непрерывных функций, μ -производные которых являются функциями ограниченной вариации на $[0, \ell]$. Таким образом, всякое решение $v(x)$ является функцией ограниченной вариации на отрезке $[0, \ell]$, допускающей разрывы только в точках из $S(\mu) \subset (0, \ell)$. При этом собственные значения $v(x)$ в точках из $S(\mu)$ не определены, известны только предельные значения.

Пусть $J_{\mu} = [0, \ell] \setminus S(\mu)$. Введем на J_{μ} метрику $\rho(x, y) = |\mu(x) - \mu(y)|$. Пространство (J_{μ}, ρ) не является полным. Его пополнение по метрике ρ обозначим через $\overline{[0, \ell]}_{\mu}$. Множество $\overline{[0, \ell]}_{\mu}$ вместо всякой точки ξ разрыва $\mu(x)$ содержит пару элементов, обозначаемых $\xi - 0$ и $\xi + 0$. Таким образом, решение $v(x)$ уравнения (1.2.3) определено на $\overline{[0, \ell]}_{\mu}$.

Пусть $R_{\mu} = \overline{[0, \ell]}_{\mu} \cup S(\mu)$. Введем функцию

$$\sigma(x) = \frac{\mu(x - 0) + \mu(x + 0)}{2} + p_1 + p_2 + Q + F_1 + F_2,$$

где p_i, F_i – неубывающие функции из соответствующих жордановых представлений функций ограниченной вариации p, F таких, что $\sigma(x)$ содержит лишь точки разрыва μ, p, Q, F .

Пусть S – множество точек разрыва $\sigma(x)$, не принадлежащих $S(\mu)$. Рассмотрим данное множество $JR_{\mu} = R_{\mu} \setminus S$. Пополнение JR_{μ} по мет-

рике $\rho(x, y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$ заменит всякую точку $s \in S \subset (0, \ell)$ парой $\{s - 0, s + 0\}$, а точки 0 и ℓ на $+0$ и $\ell - 0$, соответственно. Добавив к полученному множеству 0 и ℓ , обозначим найденное расширение отрезка $[0, \ell]$ через $\overline{[0, \ell]}_s$. Заметим, что $\overline{[0, \ell]}_s$ вместе со всякой точкой ξ разрыва $\mu(x)$ содержит пару $\{\xi - 0, \xi + 0\}$, всякая точка $s \in S \subset (0, \ell)$ заменена парой $\{s - 0, s + 0\}$, а также в это множество входят точки $\{0, +0\}$ и $\{\ell - 0, \ell\}$. Для $x \in \overline{[0, \ell]}_s$ уравнение (1.2.3) корректно определено.

Из уравнения (1.2.3) вытекает, что в точках ξ разрыва функции $\mu(x)$ верны равенства

$$\begin{aligned} -p(\xi) \frac{\Delta v(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} + p(\xi - 0)v'_\mu(\xi - 0) + v(\xi - 0)\Delta^- Q(\xi) &= \Delta^- F(\xi), \\ p(\xi) \frac{\Delta v(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} - p(\xi + 0)v'_\mu(\xi + 0) + v(\xi + 0)\Delta^+ Q(\xi) &= \Delta^+ F(\xi), \end{aligned}$$

а в точках $s \in S \subset (0, \ell)$ равенство

$$-p(s + 0)v'_\mu(s + 0) + p(s - 0)v'_\mu(s - 0) + v(s)\Delta Q(s) = \Delta F(s).$$

Заметим, что введенная здесь функция $\sigma(x)$ порождает $[\sigma]$ -меру. Причем, продифференцировав (1.2.3) по $[\sigma]$ -мере (что возможно в силу построения $\sigma(x)$), получим

$$-\frac{d}{d[\sigma]}(pv'_\mu) + \frac{dQ}{d[\sigma]}v = \frac{dF}{d[\sigma]}.$$

Таким образом, уравнение (1.2.3) напоминает по своим свойствам граничную задачу для уравнения второго порядка.

Покажем теперь, что для любой функции $F(x) \in BV[0, \ell]$, уравнение (1.2.3), рассмотренное на замкнутом промежутке $\overline{[0, \ell]}_s$, имеет единственное решение, т.е. задача является невырожденной.

Теорема 1.2.2. Пусть функция $Q(x)$ не убывает на отрезке $[0, \ell]$ и $Q(x) \neq \text{const}$; $p, F \in BV[0, \ell]$; $\mu(x)$ строго возрастает на $[0, \ell]$; $\inf_{(0, \ell)} p(x) > 0$. Тогда уравнение (1.2.3) имеет единственное решение.

Доказательство. Уравнение (1.2.3) может быть переписано в виде граничной задачи

$$\begin{cases} -p(x)v'_\mu(x) + \int_{+0}^x v(s) d[Q(s)] = F(x) - F(+0) - p(+0)v'_\mu(+0), \\ p(\ell - 0)v'_\mu(\ell - 0) + v(\ell)\Delta^-Q(\ell) = \Delta^-F(\ell), \\ -p(+0)v'_\mu(+0) + v(0)\Delta^+Q(0) = \Delta^+F(0). \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Действительно, из уравнения (1.2.3) следует, что

$$-p(x)v'_\mu(x) + \int_0^{+0} v(x) d[Q(x)] + \int_{+0}^x v(s) d[Q(s)] = F(x) - F(0).$$

Поскольку

$$\int_0^{+0} v(x) d[Q(x)] = v(0)\Delta^+Q(0) = F(+0) - F(0) + p(+0)v'_\mu(+0),$$

то

$$-p(x)v'_\mu(x) + F(+0) - F(0) + p(+0)v'_\mu(+0) + \int_{+0}^x v(s) d[Q(s)] = F(x) - F(0),$$

откуда следует, что

$$-p(x)v'_\mu(x) + \int_{+0}^x v(s) d[Q(s)] = F(x) - F(+0) - p(+0)v'_\mu(+0),$$

при $x \in \overline{[0, \ell]}_s \setminus \{0 \cup \ell\}$. Доопределим функции p , Q , F на концах по непрерывности предельным образом. Воспользуемся результатами из [51]. Тогда решение уравнения из (1.2.5) может быть представлено в виде

$$v(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + z(x),$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – фундаментальная система решений однородного уравнения

$$-p(x)v'_\mu(x) + \int_{+0}^x v(x) d[Q(x)] = -p(+0)v'_\mu(+0), \quad (1.2.6)$$

а $z(x)$ – частное решение неоднородного уравнения.

Таким образом, остается доказать, что существуют такие c_1 и c_2 , что $v(x)$ удовлетворяет граничным условиям. Последний вопрос эквивалентен вопросу о существовании только тривиального решения у соответствующей однородной задачи

$$\begin{cases} -p(x)v'_\mu(x) + \int_{+0}^x v(s) d[Q(s)] = -p(+0)v'_\mu(+0), \\ p(\ell - 0)v'_\mu(\ell - 0) + v(\ell)\Delta^-Q(\ell) = 0, \\ -p(+0)v'_\mu(+0) + v(0)\Delta^+Q(0) = 0. \end{cases} \quad (1.2.7)$$

Согласно [51], всякое нетривиальное решение уравнения (1.2.6) в условиях теоремы может иметь не более одной нулевой точки на отрезке $[0, \ell]$. Точка τ называется нулевой, если $v(\tau - 0)v(\tau + 0) \leq 0$.

Предположим, что рассматриваемая задача (1.2.7) имеет нетривиальное решение $v(x)$. Предположим, что $v(x)$ сохраняет знак на отрезке $[0, \ell]$. Пусть $v(x) > 0$, тогда $p(+0)v'_\mu(+0) > 0$, а из представления (1.2.6) следует, что $v'_\mu(x) > 0$. Но из последнего факта вытекает, что $v'_\mu(\ell - 0) > 0$. Последнее противоречит равенству

$$p(\ell - 0)v'_\mu(\ell - 0) + v(\ell - 0)\Delta^-Q(\ell) = 0.$$

Аналогично, случай $v(x) < 0$ невозможен.

Пусть функция $v(x)$ имеет нулевую точку τ . Если $v(0) = 0$, то $v'_\mu(+0) = 0$. Но согласно [51], задача Коши

$$\begin{cases} -p(x)v'_\mu(x) + \int_{+0}^x v(s) d[Q(s)] = -p(+0)v'_\mu(+0), \\ v(0) = 0, \\ v'_\mu(+0) = 0 \end{cases}$$

имеет только нулевое решение. Аналогично рассматривается случай $v(\ell) = 0$.

Предположим, что нулевая точка $\tau \in (0, \ell)$. Для определенности будем считать, $v(\tau - 0) < 0$, $v(\tau + 0) \geq 0$. Тогда $\Delta v(\tau) = v(\tau + 0) - v(\tau - 0) > 0$, т.е. $v'_\mu(\tau) = \frac{\Delta v(\tau)}{\Delta \mu(\tau)} > 0$. Рассмотрим уравнение (1.2.6) на промежутке $[\tau + 0, \ell - 0]$. Его можно переписать в виде

$$-p(x)v'_\mu(x) + \int_{\tau+0}^x v(s) d[Q(s)] = -p(\tau + 0)v'_\mu(\tau + 0).$$

Поскольку нулевая точка τ может быть лишь одна, то $v(x) > 0$ для всех $x > \tau$. Значит,

$$\int_{\tau+0}^x v(s) d[Q(s)] \geq 0.$$

С другой стороны, заметим, что в точке τ должно быть верно равенство

$$-p(\tau + 0)v'_\mu(\tau + 0) + p(\tau)v'_\mu(\tau) + v(\tau + 0)\Delta^+ Q(\tau) = 0,$$

откуда следует, что $p(\tau + 0)v'_\mu(\tau + 0) > 0$. Но тогда $v'_\mu(x) > 0$, в частности, $v'_\mu(\ell - 0) > 0$, что противоречит равенству условию в точке ℓ .

1.3 Корректность математической модели малых деформаций разрывной струны с особенностями на концах

Воспользовавшись вариационной мотивацией подхода, определим функцию влияния $K(x, s)$ для уравнения

$$-p(x)v'_\mu(x) + \int_0^x v(t) d[Q(t)] = F(x) - F(0)$$

как форму, принятую изучаемой физической системой, под воздействием единичной силы, приложенной в точке $s \in \overline{[0, \ell]}_\mu$. Таким образом, функция

влияния – решение уравнения

$$-p(x)v'_\mu(x) + \int_0^x v(t) d[Q(t)] = \Theta(x - s), \quad (1.3.1)$$

где $s \in \overline{[0, \ell]}_\mu$. Здесь $\Theta(x - s)$ – функция Хевисайда, в точках s непрерывности $\mu(x)$ равная

$$\Theta(x - s) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > s, \\ 0, & \text{если } x < s. \end{cases}$$

Если функция $\mu(x)$ разрывна в точке ξ , то

$$\Theta(x - (\xi - 0)) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \xi, \\ 1, & \text{если } x \geq \xi, \end{cases} \quad \Theta(x - (\xi + 0)) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq \xi, \\ 1, & \text{если } x > \xi. \end{cases}$$

При $s = 0$ полагаем

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x < \ell, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases} \quad (1.3.2)$$

При $s = \ell$

$$\Theta(x - \ell) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < x < \ell, \\ 1, & \text{если } x = \ell. \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Из предыдущей теоремы следует, что функция влияния существует и определяется однозначно. Непосредственно из равенства (1.3.1) следует, что если в точке $s \in (0, \ell)$ функция $\mu(x)$ непрерывна, то

$$-p(s + 0)K'_\mu(s + 0, s) + p(s - 0)K'_\mu(s - 0, s) + K(s, s)\Delta Q(s) = 1.$$

Если $s = 0$, то справедливо равенство

$$-p(+0)K'_\mu(+0, 0) + K(0, 0)\Delta^+ Q(0) = 1.$$

Если $s = \ell$, то справедливо равенство

$$p(\ell - 0)K'_\mu(\ell - 0, \ell) + K(\ell - 0, \ell)\Delta^-Q(\ell) = 1.$$

Если же функция $\mu(x)$ разрывна в точке ξ , то

$$\begin{aligned} & -p(\xi)\frac{K(\xi + 0, \xi - 0) - K(\xi - 0, \xi - 0)}{\Delta\mu(\xi)} + \\ & + p(\xi - 0)K'_\mu(\xi - 0, \xi - 0) + K(\xi - 0, \xi - 0)\Delta^-Q(\xi) = 1, \\ & p(\xi)\frac{K(\xi + 0, \xi + 0) - K(\xi - 0, \xi + 0)}{\Delta\mu(\xi)} - \\ & - p(\xi + 0)K'_\mu(\xi + 0, \xi + 0) + K(\xi + 0, \xi + 0)\Delta^+Q(\xi) = 1. \end{aligned}$$

Теорема 1.3.1. Пусть функция $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$, $Q(x) \neq \text{const}$. Пусть $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – решения уравнений

$$-p(x)v'_\mu(x) + \int_0^x v(t) d[Q(t)] = \Theta(x), \quad -p(x)v'_\mu(x) + \int_0^x v(t) d[Q(t)] = \Theta(x - \ell),$$

где функции $\Theta(x)$ и $\Theta(x - \ell)$ определены формулами (1.3.2) и (1.3.3), соответственно. Тогда функция влияния $K(x, s)$ представима в виде

$$K(x, s) = \frac{1}{\varphi_2(0)} \begin{cases} \varphi_1(x)\varphi_2(s), & 0 \leq s \leq x \leq \ell, \\ \varphi_2(x)\varphi_1(s), & 0 \leq x \leq s \leq \ell. \end{cases} \quad (1.3.4)$$

Доказательство. Требуется доказать, что функция $K(x, s)$ из представления (1.3.4) – решение уравнения (1.3.1). Заметим сначала, что $\varphi_2(0) \neq 0$. Действительно, функция $\varphi_2(x)$ является решением следующей задачи

$$\begin{cases} -p(x)v'_\mu(x) + \int_{+0}^x v(t) d[Q(t)] = -p(+0)v'_\mu(+0), \\ -p(+0)v'_\mu(+0) + v(0)\Delta^+Q(0) = 0, \\ p(\ell - 0)v'_\mu(\ell - 0) + v(\ell)\Delta^-Q(\ell) = 1. \end{cases}$$

Если $\varphi_2(0) = 0$, то $\varphi'_{2\mu}(+0) = 0$. Но согласно [37] однородная задача Коши может иметь только нулевое решение, откуда $\varphi_2(x) \equiv 0$, что противоречит условию в точке ℓ . Значит, $\varphi_2(0) \neq 0$.

Функция $K(\cdot, s)$ принадлежит классу E_μ при фиксированном s в силу того, что $\varphi_1(\cdot) \in E_\mu$ и $\varphi_2(\cdot) \in E_\mu$.

Покажем, что

$$-p(+0)K'_\mu(+0, 0) + K(0, 0)\Delta^+Q(0) = 1.$$

Имеем

$$-\frac{p(+0)\varphi'_{1\mu}(+0)\varphi_2(0)}{\varphi_2(0)} + \frac{\varphi_1(0)\varphi_2(0)}{\varphi_2(0)}\Delta^+Q(0) = 1.$$

Покажем теперь, что

$$p(\ell - 0)K'_\mu(\ell - 0, \ell) + K(\ell - 0, \ell)\Delta^-Q(\ell) = 1.$$

Имеем

$$\frac{p(\ell - 0)\varphi_1(\ell)\varphi'_{2\mu}(\ell - 0)}{\varphi_2(0)} + \frac{\varphi_2(\ell)\varphi_1(\ell)}{\varphi_2(0)}\Delta^-Q(\ell) = \frac{\varphi_1(\ell)}{\varphi_2(0)}. \quad (1.3.5)$$

Но, согласно [37], поскольку при $x \in [+0, \ell - 0]$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются решениями уравнения

$$-p(x)v'_\mu(x) + \int_{+0}^x v(t) d[Q(t)] = -p(+0)v'_\mu(+0),$$

то $\tilde{p}(x)W(x) = \text{const}$, где функция $\tilde{p}(x)$ совпадает с $p(x)$ на $(0, \ell)$, и $\tilde{p}(0) = p(+0)$, $\tilde{p}(\ell) = p(\ell - 0)$,

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi'_{1\mu}(x) & \varphi'_{2\mu}(x) \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\tilde{p}(\ell - 0)W(\ell - 0) = p(\ell - 0) \begin{vmatrix} \varphi_1(\ell) & \varphi_2(\ell) \\ \varphi'_{1\mu}(\ell - 0) & \varphi'_{2\mu}(\ell - 0) \end{vmatrix} =$$

$$= p(\ell - 0)(\varphi_1(\ell)\varphi'_{2\mu}(\ell - 0) - \varphi_2(\ell)\varphi'_{1\mu}(\ell - 0)).$$

С другой стороны, так как

$$\begin{aligned} p(\ell - 0)\varphi'_{2\mu}(\ell - 0) + \varphi_2(\ell)\Delta^-Q(\ell) &= 1, \\ p(\ell - 0)\varphi'_{1\mu}(\ell - 0) + \varphi_1(\ell)\Delta^-Q(\ell) &= 0, \end{aligned}$$

то

$$\tilde{p}(\ell - 0)W(\ell - 0) = \varphi_1(\ell)(1 - \varphi_2(\ell)\Delta^-Q(\ell)) + \varphi_1(\ell)\varphi_2(\ell)\Delta^-Q(\ell) = \varphi_1(\ell).$$

Но при этом

$$\tilde{p}(x)W(x) = p(+0)W(+0) = p(+0)(\varphi_1(0)\varphi'_{2\mu}(+0) - \varphi_2(0)\varphi'_{1\mu}(+0)).$$

В связи с тем, что

$$p(+0)\varphi'_{2\mu}(+0) = \varphi_2(0)\Delta^+Q(0), \quad p(+0)\varphi'_{1\mu}(+0) = \varphi_1(0)\Delta^+Q(0) - 1,$$

то

$$p(+0)W(+0) = \varphi_1(0)\varphi_2(0)\Delta^+Q(0) - \varphi_2(0)(\varphi_1(0)\Delta^+Q(0) - 1) = \varphi_2(0).$$

Значит, $\varphi_2(0) = \varphi_1(\ell)$, т.е. правая часть (1.3.5) равна 1, что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай, когда $s = \xi - 0$, где ξ – точка разрыва $\mu(x)$. Подставим функцию $K(x, s)$ из (1.3.4) в уравнение (1.3.1), т.е. покажем, что

$$-p(x)K'_\mu(x, \xi - 0) + \int_0^x K(t, \xi - 0) d[Q(t)] = \Theta(x - (\xi - 0)).$$

Пусть $x < \xi$. Тогда требуется доказать, что

$$-p(x)K'_\mu(x, \xi - 0) + \int_0^x K(t, \xi - 0) d[Q(t)] = 0.$$

Имеем

$$\frac{\varphi_1(\xi - 0)}{\varphi_2(0)} \left(-p(x)\varphi'_{2\mu}(x) + \int_0^x \varphi_2(t) d[Q(t)] \right) = 0.$$

Покажем, что

$$\begin{aligned} -p(\xi) \frac{K(\xi + 0, \xi - 0) - K(\xi - 0, \xi - 0)}{\Delta\mu(\xi)} + p(\xi - 0)K'_\mu(\xi - 0, \xi - 0) + \\ + K(\xi - 0, \xi - 0)\Delta^-Q(\xi) = 1. \end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned} -p(\xi) \frac{\varphi_1(\xi + 0)\varphi_2(\xi - 0) - \varphi_1(\xi - 0)\varphi_2(\xi - 0)}{\varphi_2(0)\Delta\mu(\xi)} + \\ + \frac{p(\xi - 0)\varphi'_{2\mu}(\xi - 0)\varphi_1(\xi - 0)}{\varphi_2(0)} + \frac{\varphi_2(\xi - 0)\varphi_1(\xi - 0)}{\varphi_2(0)}\Delta^-Q(\xi) = \\ = -\frac{\varphi_2(\xi - 0)(p\varphi'_{1\mu})(\xi) + (p\varphi'_{2\mu}\varphi_1)(\xi - 0) + \Delta^-Q(\xi)(\varphi_2\varphi_1)(\xi - 0)}{\varphi_2(0)}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$p(\xi)\varphi'_{1\mu}(\xi) = p(\xi - 0)\varphi'_{1\mu}(\xi - 0) + \varphi_1(\xi - 0)\Delta^-Q(\xi),$$

то последнее равенство может быть продолжено как

$$\begin{aligned} -\frac{\varphi_2(\xi - 0)p(\xi - 0)\varphi'_{1\mu}(\xi - 0) + p(\xi - 0)\varphi'_{2\mu}(\xi - 0)\varphi_1(\xi - 0)}{\varphi_2(0)} = \\ = \frac{p(\xi - 0)W(\xi - 0)}{\varphi_2(0)} = \frac{\varphi_2(0)}{\varphi_2(0)} = 1. \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать, что

$$\begin{aligned} p(\xi) \frac{K(\xi + 0, \xi + 0) - K(\xi - 0, \xi + 0)}{\Delta\mu(\xi)} - p(\xi + 0)K'_\mu(\xi + 0, \xi + 0) + \\ + K(\xi + 0, \xi + 0)\Delta^+Q(\xi) = 1. \end{aligned}$$

Пусть $x > \xi$. Покажем, что

$$-p(x)K'_\mu(x, \xi - 0) + \int_0^x K(t, \xi - 0) d[Q(t)] = 1.$$

Заметим, что $K'_\mu(x, \xi - 0) = \frac{\varphi'_{1\mu}(x)\varphi_2(\xi - 0)}{\varphi_2(0)}$,

$$\begin{aligned} \int_0^x K(t, \xi - 0) d[Q(t)] &= \int_0^{\xi-0} K(t, \xi - 0) d[Q(t)] + K(\xi + 0, \xi - 0)\Delta^+Q(\xi) + \\ &+ \int_{\xi+0}^x K(t, \xi - 0) d[Q(t)] + K(\xi - 0, \xi + 0)\Delta^-Q(\xi) \end{aligned}$$

Тогда имеем равенство

$$\begin{aligned} &-\frac{p(x)\varphi'_{1\mu}(x)\varphi_2(\xi - 0)}{\varphi_2(0)} + \int_0^{\xi-0} \frac{\varphi_2(t)\varphi_1(\xi - 0)}{\varphi_2(0)} d[Q(t)] + \\ &+ \frac{\varphi_1(\xi + 0)\varphi_2(\xi - 0)\Delta^+Q(\xi) + \varphi_1(\xi - 0)\varphi_2(\xi - 0)\Delta^-Q(\xi)}{\varphi_2(0)} + \\ &+ \int_{\xi+0}^x \frac{\varphi_1(t)\varphi_2(\xi - 0)}{\varphi_2(0)} d[Q(t)] = 1. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} &-p(\xi - 0)\varphi'_{2\mu}(\xi - 0) + \int_0^{\xi-0} \varphi_2(t) d[Q(t)] = 0, \\ &-p(x)\varphi'_{1\mu}(x) + \int_{\xi+0}^x \varphi_1(t) d[Q(t)] = -p(\xi + 0)\varphi'_{1\mu}(\xi + 0). \end{aligned}$$

Тогда предыдущее равенство может быть переписано как

$$-\frac{\varphi_2(0)p(\xi + 0)\varphi'_{1\mu}(\xi + 0) + \varphi_1(\xi - 0)p(\xi - 0)\varphi'_{2\mu}(\xi - 0)}{\varphi_2(0)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varphi_1(\xi + 0)\varphi_2(\xi - 0)\Delta^+Q(\xi) + \varphi_1(\xi - 0)\varphi_2(\xi - 0)\Delta^-Q(\xi)}{\varphi_2(0)} = \\
& = \frac{p(\xi - 0)W(\xi - 0)}{\varphi_2(0)} = \frac{\varphi_2(0)}{\varphi_2(0)} = 1.
\end{aligned}$$

Остальные случаи могут быть рассмотрены аналогично. \square

Теорема 1.3.2. Пусть функция $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$, $Q(x) \neq \text{const}$. Пусть $p, F \in BV[0, \ell]$; $\mu(x)$ строго возрастает на $[0, \ell]$; $\inf_{(0, \ell)} p(x) > 0$. Тогда решение уравнения (1.2.3) имеет вид

$$v(x) = \int_0^\ell K(x, s)d[F(s)],$$

где $K(x, s)$ — функция влияния.

Доказательство. Воспользуемся полученным в предыдущей теореме представлением (1.3.4) для функции влияния. Обозначим $v(x) = \int_0^\ell K(x, s)d[F(s)]$. С учетом (1.3.4), функция $v(x)$ может быть представлена в виде

$$v(x) = \frac{\varphi_1(x) \int_0^x \varphi_2 d[F]}{\varphi_2(0)} + \frac{\varphi_2(x) \int_x^\ell \varphi_1 d[F]}{\varphi_2(0)}.$$

Докажем, что функция $v(x)$ является решением уравнения (1.2.3). Покажем сначала, что $v \in E_\mu$. Пусть $\alpha \leq \beta$. Тогда из представления разности $v(\beta) - v(\alpha)$ в виде

$$\begin{aligned}
& v(\beta) - v(\alpha) = \\
& = \frac{1}{\varphi_2(0)} \left\{ (\varphi_1(\beta) - \varphi_1(\alpha)) \int_0^\beta \varphi_2 d[F] + (\varphi_2(\beta) - \varphi_2(\alpha)) \int_\beta^\ell \varphi_1 d[F] \right\} + \\
& + \frac{1}{\varphi_2(0)} \int_\alpha^\beta \left\{ (\varphi_1(\alpha) - \varphi_1(s))\varphi_2(s) + (\varphi_2(s) - \varphi_2(\alpha))\varphi_1(s) \right\} d[F(s)]
\end{aligned}$$

следует μ -абсолютная непрерывность функции $v(x)$.

Покажем, что производная v'_μ функции $v(x)$ определяется равенством

$$v'_\mu(x) = \frac{\varphi_{1\mu}'(x) \int_0^x \varphi_2 d[F]}{\varphi_2(0)} + \frac{\varphi_{2\mu}'(x) \int_x^\ell \varphi_1 d[F]}{\varphi_2(0)}. \quad (1.3.6)$$

Обозначим $\Delta_\varepsilon z = z(x+\varepsilon) - z(x+0)$, где $\varepsilon > 0$. Проведем доказательство для правой производной (для левой рассуждения аналогичны). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_\varepsilon v}{\Delta_\varepsilon \mu} &= \frac{1}{\varphi_2(0)} \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_1}{\Delta_\varepsilon \mu} \int_0^{x+\varepsilon} \varphi_2 d[F] + \frac{1}{\varphi_2(0)} \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_2}{\Delta_\varepsilon \mu} \int_{x+\varepsilon}^\ell \varphi_1 d[F] + \\ &+ \frac{1}{\varphi_2(0)} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{\varphi_1(x+0)\varphi_2(s) - \varphi_2(x+0)\varphi_1(s)}{\Delta_\varepsilon \mu} d[F(s)]. \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\frac{1}{\varphi_2(0)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\int_{x+0}^{x+\varepsilon} \varphi_1(x+0)\varphi_2(s) - \varphi_2(x+0)\varphi_1(s) d[F(s)]}{\Delta_\varepsilon \mu(x)} \right\} = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{\Delta_\varepsilon \mu(x)} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} (\varphi_1(x+0)\varphi_2(s) - \varphi_2(x+0)\varphi_1(s)) d[F(s)] \right| \leq \\ &\leq \frac{\max_{x+0 \leq s \leq x+\varepsilon} |\varphi_1(x+0)\varphi_2(s) - \varphi_2(x+0)\varphi_1(s)|}{\Delta_\varepsilon \mu(x)} V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F). \end{aligned}$$

Пусть τ — точка из $\overline{[0, \ell]_\mu}$, в которой функция $|\varphi_1(x+0)\varphi_2(s) - \varphi_2(x+0)\varphi_1(s)|$ достигает максимума на компакте $[x+0, x+\varepsilon]$. Тогда справедливо неравенство

$$\frac{\max_{x+0 \leq s \leq x+\varepsilon} |\varphi_1(x+0)\varphi_2(s) - \varphi_2(x+0)\varphi_1(s)|}{\Delta_\varepsilon \mu(x)} \leq$$

$$\leq |\varphi_2(\tau)| \left| \frac{\varphi_1(x+0) - \varphi_1(\tau)}{\Delta_\varepsilon \mu(x)} \right| + |\varphi_1(\tau)| \left| \frac{\varphi_2(x+0) - \varphi_2(\tau)}{\Delta_\varepsilon \mu(x)} \right|,$$

из которого следует ограниченность отношения

$$\frac{\max_{x+0 \leq s \leq x+\varepsilon} |\varphi_1(x+0)\varphi_2(s) - \varphi_2(x+0)\varphi_1(s)|}{\Delta_\varepsilon \mu(x)} \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0.$$

Учитывая, что $V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0^+$, требуемое равенство доказано.

Покажем справедливость равенства (1.3.6) в точке $\xi \in S(\mu)$. Имеем

$$\begin{aligned} v'_\mu(\xi) &= \frac{v(\xi+0) - v(\xi-0)}{\Delta\mu(\xi)} = \frac{\varphi_1(\xi+0) \int_0^{\xi+0} \varphi_2 d[F] - \varphi_2(\xi+0) \int_{\xi+0}^\ell \varphi_1 d[F]}{\varphi_2(0)} - \\ &\quad - \frac{\varphi_1(\xi-0) \int_0^{\xi-0} \varphi_2 d[F] - \varphi_2(\xi-0) \int_{\xi-0}^\ell \varphi_1 d[F]}{\varphi_2(0)} + \frac{\varphi_2(\xi-0) \int_{\xi-0}^\ell \varphi_1 d[F]}{\varphi_2(0)} - \\ &\quad - \frac{\varphi_1(\xi+0) \int_0^{\xi+0} \varphi_2 d[F]}{\varphi_2(0)} + \frac{\varphi_2(\xi+0) \int_{\xi+0}^\ell \varphi_1 d[F]}{\varphi_2(0)}. \end{aligned}$$

Заметив, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\xi+0} \varphi_2 d[F] &= \int_0^\xi \varphi_2 d[F] + \varphi_2(\xi+0) \Delta^+ F(\xi), \\ \int_{\xi+0}^\ell \varphi_1 d[F] &= \int_\xi^\ell \varphi_1 d[F] - \varphi_1(\xi+0) \Delta^+ F(\xi), \\ \int_0^{\xi-0} \varphi_2 d[F] &= \int_0^\xi \varphi_2 d[F] - \varphi_2(\xi-0) \Delta^- F(\xi), \\ \int_{\xi-0}^\ell \varphi_1 d[F] &= \int_\xi^\ell \varphi_1 d[F] + \varphi_1(\xi-0) \Delta^- F(\xi), \end{aligned}$$

получаем требуемое.

Таким образом, верно представление (1.3.6). Из (1.3.6) вытекает, что $v'_\mu \in BV[0, \ell]$, и, следовательно, $v \in E_\mu$.

Покажем теперь, что функция $v(x)$ является решением уравнения (1.2.3).
Заметим, что

$$\int_0^x v d[Q] = \frac{1}{\varphi_2(0)} \int_0^x \varphi_1(s) \int_0^s \varphi_2 d[F] d[Q] + \frac{1}{\varphi_2(0)} \int_0^x \varphi_2(s) \int_s^\ell \varphi_1 d[F] d[Q].$$

Поменяв в первом слагаемом в силу теоремы Фубини пределы интегрирования и заметив, что

$$\int_t^x \varphi_1 d[Q] = (p\varphi_{1\mu}') (x) - (p\varphi_{1\mu}') (t),$$

получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varphi_2(0)} \int_0^x \varphi_1(s) \int_0^s \varphi_2 d[F] d[Q] = \\ & = \frac{1}{\varphi_2(0)} \int_0^x \varphi_2(t) ((p\varphi_{1\mu}') (x) - (p\varphi_{1\mu}') (t)) d[F(t)]. \end{aligned}$$

Аналогично заметив, что $\int_0^x \varphi_2 d[Q] = p(x)\varphi_{2\mu}'(x)$, имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^x \varphi_2(s) \int_s^\ell \varphi_1 d[F] d[Q] = \\ & = \int_0^x p(t)\varphi_1(t)\varphi_{2\mu}'(t) d[F(t)] + \varphi_{2\mu}'(x)p(x) \int_x^\ell \varphi_1(t) d[F(t)]. \end{aligned}$$

Подставив полученное представление для $\int_0^x v d[Q]$ в (1.2.3) и учитывая, что $\tilde{p}(x)W(x) = \varphi_2(0)$, получим верное равенство. Таким образом, функция $v(x)$ является решением (1.2.3). \square

Теорема 1.3.3. Пусть функция $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$, $Q(x) \neq \text{const}$. Тогда функция влияния $K(x, s) > 0$ для всех $x, s \in \overline{[0, \ell]}_\mu \times \overline{[0, \ell]}_\mu$.

Доказательство. Воспользуемся представлением (1.3.4) для функции влияния. Покажем, что для всех $x \in \overline{[0, \ell]}_\mu$ функция $\varphi_1(x) > 0$. Заметим, что функция $\varphi_1(x)$ является решением задачи

$$\begin{cases} -p(x)\varphi_{1\mu}'(x) + \int_{+0}^x \varphi_1(t) d[Q(t)] = -p(+0)\varphi_{1\mu}'(+0), \\ -p(+0)\varphi_{1\mu}'(+0) + \varphi_1(0)\Delta^+Q(0) = 1, \\ p(\ell - 0)\varphi_{1\mu}'(\ell - 0) + \varphi_1(\ell)\Delta^-Q(\ell) = 0. \end{cases}$$

Так как функция $Q(x)$ не убывает, то $\varphi_1(x)$ может иметь не более одной нулевой точки на $[0, \ell]$. Пусть ξ — нулевая точка для $\varphi_1(x)$. Если $\xi = \ell$, то $\varphi_1(\ell) = 0$, а, следовательно, $\varphi_{1\mu}'(\ell) = 0$. Но тогда $\varphi_1 \equiv 0$, что противоречит граничному условию в нуле.

Если $\xi = 0$, то $\varphi_{1\mu}'(+0) < 0$. Следовательно, $\varphi_1(x) < 0$ и $\varphi_1(\ell) < 0$. Из уравнения вытекает, что $\varphi_{1\mu}'(x) < 0$. Значит, $\varphi_{1\mu}'(\ell - 0) < 0$. Но тогда не выполняется условие в точке $x = \ell$. Пусть $\xi \in (0, \ell)$. Для определенности рассмотрим случай, когда $\varphi_1(\xi - 0) < 0$, $\varphi_1(\xi + 0) \geq 0$. Остальные случаи могут быть рассмотрены аналогично. Имеем $\varphi_{1\mu}'(\xi) = \frac{\Delta\varphi_1(\xi)}{\Delta\mu(\xi)} \geq 0$. Поскольку

$$-p(\xi + 0)\varphi_{1\mu}'(\xi + 0) + p(\xi)\varphi_{1\mu}'(\xi) + \varphi_1(\xi + 0)\Delta^+Q(\xi) = 0,$$

то $\varphi_{1\mu}'(\xi + 0) \geq 0$. Заметим, что на промежутке (ξ, ℓ) верно равенство

$$-p(x)\varphi_{1\mu}'(x) + \int_{\xi+0}^x \varphi_1(t) d[Q(t)] = -p(\xi + 0)\varphi_{1\mu}'(\xi + 0),$$

откуда следует, что $\varphi_{1\mu}'(\ell - 0) > 0$. Поскольку $\varphi_1(\ell) > 0$, получаем противоречие с условием в точке ℓ .

Значит, $\varphi_1(x)$ не имеет нулевых точек на $[0, \ell]$ и $\varphi_1(x)$ сохраняет знак на $[0, \ell]$. Предположим, что $\varphi_1(x) < 0$. Тогда

$$-p(+0)\varphi_{1\mu}'(+0) > 0, \quad -p(x)\varphi_{1\mu}'(x) > 0,$$

т.е. $\varphi_{1\mu}'(x) < 0$, в частности, $\varphi_{1\mu}'(\ell - 0) < 0$. Но последнее противоречит условию в точке ℓ . Значит, $\varphi_1(x) > 0$. Доказательство, что $\varphi_2(x) > 0$ может быть проведено аналогично. Более того, из равенств

$$p(x)\varphi_{1\mu}'(x) = - \int_x^{\ell-0} \varphi_1(t) d[Q(t)] - \varphi_1(\ell)\Delta^-Q(\ell),$$

$$p(x)\varphi_{2\mu}'(x) = \int_{+0}^x \varphi_2(t) d[Q(t)] + \varphi_2(0)\Delta^+Q(0)$$

следует, что функция $\varphi_1(x)$ убывает, а функция $\varphi_2(x)$ возрастает на $[\overline{0}, \overline{\ell}]_\mu$. \square

Из найденного представления функции влияния следуют важные для приложений спектральные свойства. В частности то, что спектр изучаемой задачи состоит из собственных значений, алгебраическая и геометрическая кратность которых равна единице, не более чем счетен, причем, единственно возможная точка сгущения собственных значений есть бесконечность.

Теперь можно завершить доказательство корректности изучаемой в данной главе модели.

Теорема 1.3.4. Пусть функция $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$. Рассмотрим уравнение

$$-(pv'_\mu)(x) + \int_0^x v d[Q] = F_0(x) - F_0(0) + \psi(\lambda)(F_1(x) - F_1(0)), \quad (1.3.7)$$

и пусть $v(x, \lambda)$ – его решение. Тогда, если функция $\psi(\lambda)$ непрерывно зависит от λ , то $v(x, \lambda)$ непрерывно зависит от λ по норме $\|v\|_\mu = \max_{[0, \ell]_\mu} |v(x)|$.

Доказательство. Как было доказано выше, решение уравнения (1.3.7) может быть представлено в виде

$$v(x, \lambda) = \int_0^\ell K(x, s) d[F_0(x) + \psi(\lambda)F_1(x)].$$

Тогда

$$\begin{aligned} |v(x, \lambda) - v(x, \lambda_0)| &= \left| \int_0^\ell K(x, s) d[(\psi(\lambda) - \psi(\lambda_0))F_1(s)] \right| = \\ &= |\psi(\lambda) - \psi(\lambda_0)| \cdot \left| \int_0^\ell K(x, s) d[F_1(s)] \right| \leq \\ &\leq |\psi(\lambda) - \psi(\lambda_0)| \max_{[0, \ell]_\mu \times [0, \ell]_\mu} |K(x, s)| V_0^\ell(F_1), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Таким образом, при малом изменении правой части решение соответствующей модели меняется мало. \square

Глава 2

Математические модели малых колебаний разрывной стилтьесовской струны

В данной главе исследуются математические модели малых поперечных колебаний разрывной стилтьесовской струны, когда концы струны как жестко закреплены, так и упруго закреплены.

2.1 Вариационное обоснование модели малых колебаний разрывной стилтьесовской струны с жестко закрепленными концами

Рассмотрим модель малых поперечных колебаний разрывной стилтьесовской струны (цепочки из струн, упруго соединенных между собой с помощью пружин), расположенной вдоль отрезка $[0, \ell]$ и жестко закрепленной на концах. Будем предполагать, что смещения каждой точки происходят в одной плоскости перпендикулярно положению равновесия струны. Через $u(x, t)$ обозначим отклонение физической системы от положения равновесия в точке x в момент времени t . Если через $M(x)$ обозначить массу участка $[0, x)$ струны, то кинетическая энергия струны выражается формулой

$$K = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right)^2 d[M(x)].$$

Заметим, что если модель представляет собой цепочку из двух струн, соединенных в точке ξ с помощью пружины, причем массы сосредоточены на правом конце левой струны и на левом конце правой, то последний интеграл равен

$$K = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(\xi - 0, t) \Delta^- M(\xi) + \frac{\partial u}{\partial t}(\xi + 0, t) \Delta^+ M(\xi) \right),$$

где левый и правый скачки $\Delta^- M(\xi)$, $\Delta^+ M(\xi)$ равны соответствующим массам.

Пусть $p(x)$ — функция, характеризующая локальное натяжение струн, составляющих изучаемую модель. Тогда внутренняя энергия, накапливаемая системой за счет собственной упругости, равна $\frac{1}{2} \int_0^\ell p(x) u_\mu'^2(x, t) d\mu(x)$, где функция $\mu(x)$ строго возрастает на $[0, \ell]$ и разрывна лишь в точках разрыва $u(x, t)$.

Пусть функция $Q(x)$ характеризует упругость внешней среды. Тогда работа силы упругости будет равна

$$\int_0^\ell \frac{u^2(x, t)}{2} d[Q(x)].$$

Обозначим через $F(x, t)$ сумму всех внешних сил, приложенных к участку $[0, x)$ в момент времени t . Тогда работа внешних сил выражается как

$$\int_0^\ell u(x, t) d_x[F(x, t)].$$

Таким образом, потенциальная энергия системы равна

$$U = \frac{1}{2} \int_0^\ell p(x) \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial \mu(x)} \right)^2 d\mu(x) + \frac{1}{2} \int_0^\ell u^2(x, t) d[Q(x)] - \int_0^\ell u(x, t) d_x[F(x, t)],$$

где индекс x у дифференциала в последнем интеграле означает, что интегрирование осуществляется по переменной x .

Пусть строго возрастающая функция $\sigma(x)$, порождающая на $[0, \ell]$ меру $[\sigma]$, такая, что функции $Q(x)$, $M(x)$ являются $[\sigma]$ -абсолютно непрерывными на $[0, \ell]$ и

$$F(x, t) = F(0, t) + \int_0^x f(x, t) d[\sigma(x)]$$

при всех $t \in [0, T]$.

Интеграл Остроградского-Гамильтона в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned}
\Phi(u) = & \int_0^T (K - U) dt = \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^\ell \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 d[M(x)] dt - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^\ell p(x) \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial \mu(x)} \right)^2 d\mu(x) dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^\ell u^2(x, t) d[Q(x)] dt + \\
& + \int_0^T \int_0^\ell u(x, t) d_x[F(x, t)] dt.
\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Мы предполагаем, что $p(x)$, $Q(x)$, $F(x, t)$ — функции ограниченной вариации на $[0, \ell]$, причем $\inf_{[0, \ell]} p(x) > 0$. Функции $M(x)$, $\mu(x)$ строго возрастают на $[0, \ell]$. Функционал (2.1.1) будем рассматривать на множестве функций E таких, что при каждом фиксированном t функция $u(x, t)$ является μ -абсолютно непрерывной по переменной x , при этом $u'_\mu(x, t)$ — функция ограниченной вариации по переменной x и непрерывна по переменной t , $p(x)u'_\mu(x, t)$ — $[\sigma]$ -абсолютно непрерывна по x . Функция $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной t ; функция $u'_t(x, t)$ является функцией ограниченной вариации по переменной x . Кроме того, для любых $x_0 \in \overline{[0, \ell]}_\mu$, $t_0 \in [0, T]$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой пары (x, t) таких, что $|\mu(x) - \mu(x_0)| < \delta$ и $|t - t_0| < \delta$, верно $|u(x, t) - u(x_0, t_0)| < \varepsilon$. При этом $u(0, t) = u(\ell, t) = 0$.

Согласно вариационному принципу Остроградского-Гамильтона, первая вариация (2.1.1) должна быть равна нулю, т.е.

$$\begin{aligned}
\delta\Phi(u)h = & \frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi(u + \lambda h)|_{\lambda=0} = \int_0^T \int_0^\ell u'_t(x, t)h'_t(x, t) d[M(x)] dt - \\
& - \int_0^T \int_0^\ell p(x)u'_\mu(x, t)h'_\mu(x, t) d\mu(x) dt - \int_0^T \int_0^\ell u(x, t)h(x, t) d[Q(x)] dt + \\
& + \int_0^T \int_0^\ell h(x, t) d_x[F(x, t)] dt = 0
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

для всякой допустимой h из множества E_0 , т.е. принадлежащей E и обращающейся в нуль на границе прямоугольника $[0, \ell] \times [0, T]$. Применим к первому интегралу уравнения (2.1.2) теорему Фубини и проинтегрируем внутренний интеграл по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^\ell u'_t(x, t) h'_t(x, t) d[M(x)] dt &= \int_0^\ell \int_0^T u'_t(x, t) h'_t(x, t) dt d[M(x)] = \\ &= - \int_0^T \int_0^\ell u''_{tt}(x, t) h(x, t) d[M(x)] dt = \\ &= - \int_0^T \int_0^\ell u''_{tt}(x, t) h(x, t) M'_{[\sigma]}(x) d[\sigma] dt. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Рассмотрим интеграл $\int_0^T \int_0^\ell p(x) u'_\mu(x, t) h'_\mu(x, t) d\mu(x) dt$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^\ell p(x) u'_\mu(x, t) h'_\mu(x, t) d\mu(x) dt &= \\ &= - \int_0^T \int_0^\ell \frac{d}{d[\sigma]} (p(x) u'_\mu(x, t)) h(x, t) d[\sigma] dt. \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Заметим, что

$$\int_0^T \int_0^\ell u(x, t) h(x, t) d[Q(x)] dt = \int_0^T \int_0^\ell u(x, t) h(x, t) Q'_{[\sigma]}(x) d[\sigma] dt, \quad (2.1.5)$$

$$\int_0^T \int_0^\ell d_x[F(x, t)] dt = \int_0^T \int_0^\ell u(x, t) f(x, t) d[\sigma] dt. \quad (2.1.6)$$

Получаем, что (2.1.2) с учетом (2.1.3) – (2.1.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \delta\Phi(u)h = & \int_0^T \int_0^\ell (-u''_{tt}(x,t)M'_{[\sigma]}(x) + (p(x)u'_\mu(x,t))'_{[\sigma]} - \\ & - u(x,t)Q'_{[\sigma]}(x) + f(x,t))h(x,t) d[\sigma] dt = 0. \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения основаны на следующей лемме.

Лемма 2.1.1. Пусть функция $A(x, t)$ $[\sigma]$ -суммируема на $[0, \ell]$ при каждом фиксированном $t \in [0, T]$; непрерывна по переменной t при всех $x \in [0, \ell]$; причем,

$$\int_0^T \int_0^\ell A(x, t)h(x, t) d[\sigma(x)] dt = 0$$

для всех функций $h(x, t)$ из множества E_0 . Тогда $A(x, t) = 0$ почти всюду относительно меры $[\sigma] \times t$.

Доказательство. Рассмотрим функции $h(x, t)$ вида $h(x, t) = \varphi_k(x)v_m(t)$, где $\varphi_k(x)$ – произвольная собственная функция задачи

$$\begin{cases} -(p\varphi'_\mu)'_{[\sigma]} + Q'_{[\sigma]}\varphi = \lambda M'_{[\sigma]}\varphi, \\ \varphi(0) = \varphi(\ell) = 0, \end{cases} \quad (2.1.7)$$

$v_m(t)$ – произвольная собственная функция задачи

$$\begin{cases} -v'' = \lambda v, \\ v(0) = v(T) = 0. \end{cases} \quad (2.1.8)$$

Заметим, что $h(x, t) \in E_0$, так как

$$\begin{aligned} h(0, t) = \varphi_k(0)v_m(t) = 0, \quad h(\ell, t) = \varphi_k(\ell)v_m(t) = 0, \\ h(x, 0) = \varphi_k(x)v_m(0) = 0, \quad h(x, T) = \varphi_k(x)v_m(T) = 0. \end{aligned}$$

В силу свойств функций $\varphi_k(x)$ и $v_m(t)$ следует, что $h(x, t)$ является μ -абсолютно непрерывной по x ; $h'_\mu(x, t) = \varphi'_{k\mu}(x)v_m(t)$ – функция ограниченной вариации по x , непрерывная по t ; $h'_t(x, t) = \varphi_k(x)v'_m(t)$ – функция

ограниченной вариации по x ; $h(x, t)$ $\mu \times t$ -непрерывна по совокупности переменных.

Согласно [20] и [31], системы собственных функций задач (2.1.7) и (2.1.8) являются полными. По условию леммы

$$\int_0^T \int_0^\ell A(x, t) \varphi_k(x) v_m(t) d[\sigma(x)] dt = 0. \quad (2.1.9)$$

Рассмотрим функцию

$$F_k(t) = \int_0^\ell A(x, t) \varphi_k(x) d[\sigma(x)].$$

Из (2.1.9) вытекает, что

$$\int_0^T F_k(t) v_m(t) dt = 0,$$

причем последнее равенство верно для всех m и всех k . Но тогда $F_k(t)$ ортогональна любой функции из полной системы $v_m(t)$, и, следовательно, $F_k(t) = 0$ для почти всех t и всех k . Получим, что

$$\int_0^\ell A(x, t) \varphi_k(x) d[\sigma(x)] = 0,$$

причем последнее равенство верно для всех k , то есть $A(x, t)$ ортогональна всякой функции из полной системы $\varphi_k(x)$. Значит, $A(x, t) = 0$ $[\sigma]$ -почти всюду по x . Таким образом,

$$\int_0^T \int_0^\ell A^2(x, t) d[\sigma(x)] dt = 0,$$

откуда следует, что $A(x, t) = 0$ почти всюду по $[\sigma] \times t$ -мере. \square

Используя предыдущую лемму, имеем

$$u''_{tt}(x, t)M'_{[\sigma]}(x) - (p(x)u'_\mu(x, t))'_{[\sigma]} + u(x, t)Q'_{[\sigma]}(x) - f(x, t) = 0.$$

Таким образом, реальная форма $u(x, t)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} u''_{tt}(x, t)M'_{[\sigma]}(x) = (p(x)u'_\mu(x, t))'_{[\sigma]} - u(x, t)Q'_{[\sigma]}(x) + F'_{[\sigma]}(x, t), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u'_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad (2.1.10)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – форма и скорость струны в начальный момент времени, соответственно.

Решение $u(x, t)$ задачи (2.1.10) мы ищем в классе функций E . При этом предполагаем, что функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ являются μ -абсолютно непрерывными, а $\varphi'_\mu(x)$, $\psi'_\mu(x)$ – функции ограниченной вариации на $[0, \ell]$, $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$, $\psi(0) = \psi(\ell) = 0$.

Дифференцирование $\frac{\partial u}{\partial \mu}$ обращается интегрированием по Стильтесу по μ -мере [11, 65, 68]. При этом в каждой точке ξ разрыва $\mu(x)$ верно равенство

$$\frac{\partial u(\xi, t)}{\partial \mu(\xi)} = \frac{u(\xi + 0, t) - u(\xi - 0, t)}{\mu(\xi + 0) - \mu(\xi - 0)}.$$

В точках ξ , в которых $u(x, t)$ терпит разрыв, уравнение из системы (2.1.10) можно записать в виде следующих равенств

$$\Delta^- M(\xi) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi - 0, t) = \Delta^- \left(p \frac{\partial u}{\partial \mu} \right) (\xi, t) - u(\xi - 0, t) \Delta^- Q(\xi) + \Delta^- F(\xi, t),$$

$$\Delta^+ M(\xi) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi + 0, t) = \Delta^+ \left(p \frac{\partial u}{\partial \mu} \right) (\xi, t) - u(\xi + 0, t) \Delta^+ Q(\xi) + \Delta^+ F(\xi, t).$$

$$\Delta^- \left(p \frac{\partial u}{\partial \mu} \right) (\xi, t) = p(\xi)u'_\mu(\xi, t) - p(\xi - 0)u'_\mu(\xi - 0, t),$$

$$\Delta^+ \left(p \frac{\partial u}{\partial \mu} \right) (\xi, t) = p(\xi + 0)u'_\mu(\xi + 0, t) - p(\xi)u'_\mu(\xi, t).$$

Заметим, что скачки $\Delta^- M(\xi)$ и $\Delta^+ M(\xi)$ равняются массам, сосредоточенным на разорванных (в точке ξ) концах струны, $\Delta^- Q(\xi)$ и $\Delta^+ Q(\xi)$ равняются упругостям внешних пружин, прикрепленных к разорванным концам струн, а $\Delta^- F(\xi, t)$ и $\Delta^+ F(\xi, t)$ – сосредоточенные на разорванных концах струн силы.

Из уравнения (2.1.10) в точках s , в которых функция $u(x, t)$ непрерывна, но хотя бы одна из функций $p(x)$, $M(x)$, $Q(x)$, $F(x, t)$ терпит разрыв, следует равенство

$$\Delta M(s) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(s, t) = \Delta(pu'_\mu)(s, t) - u(s, t)\Delta Q(s) + \Delta F(s, t).$$

2.2 Представление решения математической модели малых колебаний разрывной стилтьесовской струны с жестко закрепленными концами в виде ряда Фурье

Рассмотрим вопрос о возможности представления решения математической модели

$$\begin{cases} u''_{tt}(x, t)M'_{[\sigma]}(x) = (p(x)u'_\mu(x, t))'_{[\sigma]} - u(x, t)Q'_{[\sigma]}(x), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u'_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad (2.2.1)$$

которая описывает малые свободные колебания разрывной стилтьесовской струны в виде ряда Фурье по собственным функциям спектральной задачи

$$\begin{cases} -(p(x)X'_\mu(x))'_{[\sigma]} + X(x)Q'_{[\sigma]}(x) = \lambda X(x)M'_{[\sigma]}(x), \\ X(0) = X(\ell) = 0. \end{cases} \quad (2.2.2)$$

Задача (2.2.2) возникает при разделении переменных в модели (2.2.1). Спектральная задача (2.2.2), записанная в интегро-дифференциальной форме, подробно изучена в работе [37]. Показано, что спектр задачи (2.2.2) является осцилляционным, т.е. спектр Λ задачи (2.2.2) состоит из неограниченной последовательности вещественных, простых и положительных собственных значений, единственная точка сгущения которых $+\infty$. Если занумеровать их в порядке возрастания: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$, а через $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ обозначить соответствующие им амплитудные функции, то $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ обладают следующими свойствами:

1. $\varphi_1(x)$ не имеет нулевые точки внутри $(0, \ell)$;
2. $\varphi_k(x)$ ($k = 2, 3, \dots$) имеет внутри $(0, \ell)$ ровно $k - 1$ нулевых точек;
3. нулевые точки $\varphi_k(x)$ и $\varphi_{k+1}(x)$ перемежаются.

В работе [37] также показано, что решение $u(x)$ задачи (2.2.2) может быть представлено в виде

$$u(x) = \lambda \int_0^{\ell} K(x, s)u(s) d[M(s)], \quad (2.2.3)$$

где функцию влияния $K(x, s)$ можно представить в виде

$$K(x, s) = \frac{1}{p(0)\varphi_2(0)} \begin{cases} \varphi_1(s)\varphi_2(x), & 0 \leq s \leq x \leq \ell, \\ \varphi_2(s)\varphi_1(x), & 0 \leq x \leq s \leq \ell, \end{cases} \quad (2.2.4)$$

φ_i – решения уравнения $-p(x)u'_\mu(x) + \int_0^x u(s) d[Q(s)] = -p(0)u'_\mu(0)$.

Отметим, что амплитудные функции, отвечающие различным собственным частотам, ортогональны в смысле скалярного произведения

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^{\ell} \varphi(x)\psi(x) d[M(x)].$$

Будем считать, что амплитудные функции нормированы так, чтобы

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\int_0^\ell \varphi_n^2(x) d[M(x)]} = 1.$$

Для этого, очевидно, достаточно разделить амплитудную функцию на число

$$\sqrt{\int_0^\ell \varphi_n^2(x) d[M(x)]}.$$

2.2.1 Разложение функций из E_μ в ряд Фурье

Покажем, что для всякой μ -абсолютно непрерывной на $[0, \ell]$ функции $f(x)$, производная которой имеет конечное на $[0, \ell]$ изменение и принимающей нулевые значения в концевых точках $[0, \ell]$, ряд Фурье по амплитудным функциям сходится равномерно и абсолютно на $\overline{[0, \ell]}_\mu$. Заметим, что тогда коэффициенты ряда Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, построенного для функции $f(x)$, определяются по формулам

$$c_n = \int_0^\ell f(x) \varphi_n(x) d[M(x)]. \quad (2.2.5)$$

Сначала покажем, что ряд Фурье $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$, где c_n определяются по формулам (2.2.5), сходится к $f(x)$ в среднем:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\ell \left[f(x) - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(x) \right]^2 d[M(x)] = 0.$$

На множестве E_μ μ -абсолютно непрерывных на $[0, \ell]$ функций $X(x)$, первая производная которых имеет конечную на $[0, \ell]$ вариацию, и обраща-

ющихся в нуль в концевых точках отрезка $[0, \ell]$, рассмотрим функционал

$$\Phi(X) = \int_0^\ell p(x) X_\mu'^2(x) d\mu(x) + \int_0^\ell X^2(x) d[Q(x)].$$

Заметим, что функции $f_N(x) = f(x) - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(x)$ принадлежат E_μ при всех N . Введем следующие обозначения

$$\Delta_N^2 = \int_0^\ell f_N^2(x) d[M(x)], \quad \psi_N(x) = \frac{f_N(x)}{\Delta_N}$$

Найдем $\Phi(\psi_N)$:

$$\begin{aligned} \Phi(\psi_N) &= \int_0^\ell p(x) \psi_{N\mu}^{\prime 2}(x) d\mu(x) + \int_0^\ell \psi_N^2 d[Q(x)] = \\ &= \frac{1}{\Delta_N^2} \left\{ \int_0^\ell p(x) \left(f_\mu'(x) - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_{k\mu}'(x) \right)^2 d\mu(x) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\ell \left(f(x) - \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(x) \right)^2 d[Q(x)] \right\} = \\ &= \frac{1}{\Delta_N^2} \left\{ \int_0^\ell p(x) f_\mu^{\prime 2}(x) d\mu(x) + \int_0^\ell f^2(x) d[Q(x)] - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{k=1}^N c_k \left(\int_0^\ell p(x) f_\mu'(x) \varphi_{k\mu}'(x) d\mu(x) + \int_0^\ell f(x) \varphi_k(x) d[Q(x)] \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N c_k c_m \left(\int_0^\ell p(x) \varphi_{k\mu}'(x) \varphi_{m\mu}'(x) d\mu(x) + \int_0^\ell \varphi_k(x) \varphi_m(x) d[Q(x)] \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{\Delta_N^2} \left\{ \Phi(f) - \sum_{k=1}^N \lambda_k c_k^2 \right\}. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

В силу (2.2.5) и $f(0) = f(\ell) = 0$ получаем, что

$$\begin{aligned}
& \int_0^\ell p(x) f'_\mu(x) \varphi'_{k\mu}(x) d\mu(x) + \int_0^\ell f(x) \varphi_k(x) d[Q(x)] = \\
& = \int_0^\ell p(x) f'_\mu(x) \varphi'_{k\mu}(x) d\mu(x) + \int_0^\ell f(x) d[p(x) \varphi'_{k\mu}(x)] + \\
& + \lambda_k \int_0^\ell f(x) \varphi_k(x) d[M(x)] = \int_0^\ell p(x) f'_\mu(x) \varphi'_{k\mu}(x) d\mu(x) + \lambda_k c_k - \\
& - \int_0^\ell p(x) \varphi'_{k\mu}(x) df(x) = \int_0^\ell p(x) f'_\mu(x) \varphi'_{k\mu}(x) d\mu(x) + \lambda_k c_k - \\
& - \int_0^\ell p(x) f'_\mu(x) \varphi'_{k\mu}(x) d\mu(x) = \lambda_k c_k,
\end{aligned}$$

$$\int_0^\ell p(x) \varphi'_{k\mu}(x) \varphi'_{m\mu}(x) d\mu(x) + \int_0^\ell \varphi_k(x) \varphi_m(x) d[Q(x)] = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq m, \\ \lambda_k, & \text{если } k = m. \end{cases} \quad (2.2.7)$$

Покажем, что

$$\Phi(\psi_N) \geq \lambda_{N+1}, \quad (2.2.8)$$

где λ_{N+1} — $(N+1)$ -ое собственное значение (2.2.2).

Рассмотрим задачу о нахождении минимума функционала $\Phi(X)$ на множестве E_μ при условии

$$\int_0^\ell X^2(x) d[M(x)] = 1. \quad (2.2.9)$$

Заметим, что минимум достигается в классе допустимых функций. Тогда осуществляющая его функция должна удовлетворять при некотором

λ уравнению Эйлера для функционала

$$\Phi_0(X) = \int_0^\ell p(x) X_{1\mu}'^2(x) d\mu(x) + \int_0^\ell X^2(x) d[Q(x)] - \lambda \int_0^\ell X^2(x) d[M(x)],$$

которое совпадает с уравнением

$$-(p(x)X_{1\mu}'(x))'_{[\sigma]} + X(x)Q'_{[\sigma]}(x) = \lambda M'_{[\sigma]}(x)X(x).$$

Более того, граничные условия также совпадают с граничными условиями в (2.2.2). Поэтому функция $\varphi_1(x)$, дающая минимум $\Phi(X)$ при условии (2.2.9), является собственной функцией спектральной задачи (2.2.2). Причем, значение функционала $\Phi(\varphi_1)$ равно λ :

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi_1) &= \int_0^\ell p(x)\varphi_{1\mu}'^2(x) d\mu(x) + \int_0^\ell \varphi_1^2(x) d[Q(x)] = \\ &= \int_0^\ell p(x)\varphi_{1\mu}'^2(x) d\mu(x) + \lambda \int_0^\ell \varphi_1^2(x) d[M(x)] + \int_0^\ell \varphi_1(x) d[p(x)\varphi_{1\mu}'(x)] = \\ &= \int_0^\ell p(x)\varphi_{1\mu}'^2(x) d\mu(x) - \int_0^\ell p(x)\varphi_{1\mu}'^2(x) d\mu(x) + \lambda = \lambda, \end{aligned}$$

и, очевидно, является наименьшим собственным значением. Обозначим его через λ_1 . Поэтому значение функционала $\Phi(X)$ на E_μ не меньше λ_1 : $\Phi(X) \geq \lambda_1$, причем знак равенства возможен только на $\varphi_1(x)$.

Докажем, что функция $X(x)$, дающая минимум функционалу $\Phi(X)$ в классе E_μ , удовлетворяющая условиям

$$\int_0^\ell X^2(x) d[M(x)] = 1, \quad \int_0^\ell \varphi_1(x)X(x) d[M(x)] = 0, \quad (2.2.10)$$

является амплитудной функцией, отвечающей второй собственной частоте $\omega_2 = \sqrt{\lambda_2}$.

Функция $X(x)$, дающая на E_μ минимум $\Phi(X)$ при условиях (2.2.9) и (2.2.10), должна удовлетворять уравнению Эйлера для функционала

$$\begin{aligned} \Phi_1(X) = & \int_0^\ell p(x)X_\mu'^2(x) d\mu(x) + \int_0^\ell X^2(x) d[Q(x)] - \\ & - \lambda \int_0^\ell X^2(x) d[M(x)] - \alpha \int_0^\ell \varphi_1(x)X(x) d[M(x)] \end{aligned}$$

при некоторых λ и α . Как нетрудно видеть, это уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} & -(p(x)X_\mu'(x))'_{[\sigma]} + X(x)Q'_{[\sigma]}(x) - \\ & - \lambda M'_{[\sigma]}(x)X(x) - \frac{\alpha}{2}M'_{[\sigma]}(x)\varphi_1(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Покажем, что $\alpha = 0$. Для этого тождество

$$-(p(x)\varphi'_{1\mu}(x))'_{[\sigma]} + \varphi_1(x)Q'_{[\sigma]}(x) - \lambda_1 M'_{[\sigma]}(x)\varphi_1(x) \equiv 0$$

умножим на $X(x)$, а (2.2.11) – на $\varphi_1(x)$, вычтем почленно одно из другого, а результат проинтегрируем по мере $[\sigma]$ по всему отрезку $[0, \ell]$:

$$\begin{aligned} & - \int_0^\ell \varphi_1(x) d[p(x)X_\mu'(x)] - \lambda \int_0^\ell X(x)\varphi_1(x) d[M(x)] - \\ & - \frac{\alpha}{2} \int_0^\ell \varphi_1^2(x) d[M(x)] + \int_0^\ell X(x) d[p(x)\varphi'_{1\mu}(x)] + \lambda_1 \int_0^\ell \varphi_1(x)X(x) d[M(x)] = 0, \end{aligned}$$

или с учетом условия (2.2.10)

$$\begin{aligned} & - \int_0^\ell \varphi_1(x) d[p(x)X_\mu'(x)] - \frac{\alpha}{2} \int_0^\ell \varphi_1^2(x) d[M(x)] + \int_0^\ell X(x) d[p(x)\varphi'_{1\mu}(x)] = 0. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Первый и последний интеграл в левой части (2.2.12) проинтегрируем по частям и в результате взаимной ликвидации интегралов, принадлежности

$X(x)$ и $\varphi_1(x)$ классу E_μ равенство (2.2.12) принимает вид

$$-\frac{\alpha}{2} \int_0^\ell \varphi_1^2(x) d[M(x)] = 0,$$

из которого и следует требуемое условие, что $\alpha = 0$.

Таким образом, уравнение (2.2.11) принимает вид

$$-(p(x)X'_\mu(x))'_{[\sigma]} + X(x)Q'_{[\sigma]}(x) - \lambda M'_{[\sigma]}(x)X(x) = 0,$$

т.е. $X(x)$ является амплитудной функцией. Обозначим ее через $\varphi_2(x)$.

Так как от увеличения числа условий на допустимые функции минимум $\Phi(X)$ может только увеличиться и $\Phi(\varphi_2) = \lambda_2$, то $\lambda_2 \geq \lambda_1$. Равенство $\lambda_2 = \lambda_1$ невозможно в виду того, что $\varphi_2(x)$ была бы коллинеарна $\varphi_1(x)$, что противоречит условию (2.2.10). Следовательно, $\lambda_2 > \lambda_1$.

Покажем, что между λ_1 и λ_2 нет других собственных значений. Предположим, что это не так: существует собственное значение λ^* , лежащее между λ_1 и λ_2 . Но тогда амплитудная функция $\varphi^*(x)$, отвечающая λ^* , как нетрудно видеть, доставляла бы минимум $\Phi(X)$ при условиях (2.2.9) и (2.2.10), т.е. была бы решением поставленной вариационной задачи, что невозможно.

Рассмотрим задачу минимизации $\Phi(X)$ на E_μ при следующих условиях

$$\int_0^\ell X^2(x) d[M(x)] = 1,$$

$$\int_0^\ell X(x)\varphi_i(x) d[M(x)] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (2.2.13)$$

где $\varphi_i(x)$ – i -ая амплитудная функция.

Функция, дающая на E_μ минимум $\Phi(X)$ при условиях (2.2.9) и (2.2.13), удовлетворяет уравнению Эйлера для функционала

$$\Phi_n(X) = \Phi(X) - \lambda \int_0^\ell X^2(x) d[M(x)] - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \int_0^\ell X(x) \varphi_i(x) d[M(x)],$$

которое в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} & -(p(x)X'_\mu(x))'_{[\sigma]} + Q'_{[\sigma]}(x)X(x) - \lambda M'_{[\sigma]}(x)X(x) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i M'_{[\sigma]}(x) \varphi_i(x) = 0. \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Покажем, что все α_i равны нулю. Для этого (2.2.14) умножим на $\varphi_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$ – произвольно фиксированное число), тождество

$$-(p(x)\varphi'_{j\mu}(x))'_{[\sigma]} + \varphi_j(x)Q'_{[\sigma]}(x) - \lambda_j M'_{[\sigma]}(x)\varphi_j(x) \equiv 0$$

умножим на $X(x)$, вычитая почленно одно из другого, и интегрируя по $[\sigma]$ в пределах от 0 до ℓ :

$$\begin{aligned} & - \int_0^\ell \varphi_j(x) d[p(x)X'_\mu(x)] - \lambda \int_0^\ell X(x)\varphi_j(x) d[M(x)] - \\ & - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{2} \int_0^\ell \varphi_i(x)\varphi_j(x) d[M(x)] + \int_0^\ell X(x) d[p(x)\varphi'_{j\mu}(x)] + \\ & + \lambda_j \int_0^\ell \varphi_j(x)X(x) d[M(x)] = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя интегралы $\int_0^\ell \varphi_j(x) d[p(x)X'_\mu(x)]$ и $\int_0^\ell X(x) d[p(x)\varphi'_{j\mu}(x)]$ по частям и используя равенство

$$\int_0^\ell \varphi'_i(x)\varphi_j(x) d[M(x)] = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

и условие (2.2.13), будем иметь

$$\frac{\alpha_j}{2} \int_0^\ell \varphi_j^2(x) d[M(x)] = 0.$$

Из последнего равенства и следует, что $\alpha_j = 0$ (для любого $j = 1, 2, \dots, n - 1$). Таким образом, $X(x)$ есть n -ая амплитудная функция, причем $\lambda_n > \lambda_{n-1}$ и между λ_{n-1} и λ_n нет собственных значений.

Теперь остается заметить, что для всякой другой допустимой функции, удовлетворяющей условиям (2.2.9) и (2.2.13), значение функционала $\Phi(X)$ не меньше λ_n . Таким образом, неравенство (2.2.8) доказано. Из него вытекает

$$\Delta_N^2 \leq \frac{1}{\lambda_{N+1}} \left(\Phi(f) - \sum_{k=1}^N \lambda_k c_k^2 \right). \quad (2.2.15)$$

Так как $\lambda_k > 0$ для всех k , то выражение $\Phi(f) - \sum_{k=1}^N \lambda_k c_k^2$ ограничено при всех N . Из того, что $\lambda_{N+1} \rightarrow +\infty$ при $N \rightarrow \infty$, следует $\Delta_N^2 \rightarrow 0$. Таким образом, ряд Фурье по амплитудным функциям сходится к $f(x)$ в среднем.

Теперь остается показать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$ сходится равномерно и абсолютно на $\overline{[0, \ell]}_\mu$, так как в этом случае сходиться он может только к $f(x)$.

Покажем сначала, что найдется такая константа $C > 0$, что для любого $x \in \overline{[0, \ell]}_\mu$ и любых чисел n, m выполняется следующее неравенство

$$\left(\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C. \quad (2.2.16)$$

Образуем ядро

$$\omega_n(x, s) = K(x, s) - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(s)}{\lambda_k}, \quad (2.2.17)$$

где λ_k – характеристические значения, φ_k – собственные функции (2.2.3).

Покажем, что числа $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots$ и функции $\varphi_{n+1}(x), \varphi_{n+2}(x), \dots$ представляют собой полную совокупность характеристических чисел и собственных функций уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^\ell \omega_n(x, s) \varphi(s) d[M(s)]. \quad (2.2.18)$$

В самом деле, умножим обе части (2.2.17) на $\lambda_m \varphi_m(s)$, где $m > n$, и проинтегрируем. В силу ортогональности собственных функций получим

$$\begin{aligned} \lambda_m \int_0^\ell \omega_n(x, s) \varphi_m(s) d[M(s)] &= \lambda_m \int_0^\ell K(x, s) \varphi_m(s) d[M(s)] - \\ &- \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_m}{\lambda_k} \varphi_k(x) \int_0^\ell \varphi_k(s) \varphi_m(s) d[M(s)] = \varphi_m(x). \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (2.2.18) имеет те же характеристические значения λ_m и соответствующие собственные функции $\varphi_m(x)$ при $m > n$, что и основное уравнение (2.2.3).

Покажем, что это и есть полная система характеристических значений и собственных функций уравнения (2.2.18). Умножим обе части (2.2.17) на $\varphi_m(x)$, где $m \leq n$, и проинтегрируем. Принимая во внимание ортогональность и нормированность собственных функций, а также симметричность ядра $K(x, s)$ получим, что

$$\begin{aligned} &\int_0^\ell \omega_n(x, s) \varphi_m(x) d[M(x)] = \\ &= \int_0^\ell K(x, s) \varphi_m(x) d[M(x)] - \sum_{k=1}^n \int_0^\ell \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(s)}{\lambda_k} \varphi_m(x) d[M(x)] = \\ &= \int_0^\ell K(x, s) \varphi_m(x) d[M(x)] - \frac{\varphi_m(s)}{\lambda_m} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\int_0^\ell \omega_n(x, s) \varphi_m(x) d[M(x)] = 0$ при $m \leq n$.

Пусть λ – некоторое характеристическое значение уравнения (2.2.18) и $\varphi(x)$ – соответствующая собственная функция. Умножая обе части уравнения (2.2.18) на $\varphi_m(x)$ и интегрируя, получим, что

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \varphi(x) \varphi_m(x) d[M(x)] &= \lambda \int_0^\ell \int_0^\ell \omega_n(x, s) \varphi(s) \varphi_m(x) d[M(s)] d[M(x)] = \\ &= \lambda \int_0^\ell \left\{ \varphi(s) \int_0^\ell \omega_n(x, s) \varphi_m(x) d[M(x)] \right\} d[M(s)] = 0. \end{aligned}$$

Значит, $\int_0^\ell \varphi(x) \varphi_m(x) d[M(x)] = 0$ при $m \leq n$. Подставив в уравнение (2.2.18) вместо $\omega_n(x, s)$ выражение (2.2.17), получим

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda \int_0^\ell K(x, s) \varphi(s) d[M(s)] - \lambda \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \int_0^\ell \varphi_k(s) \varphi(s) d[M(s)] = \\ &= \lambda \int_0^\ell K(x, s) \varphi(s) d[M(s)], \end{aligned}$$

т.е. $\varphi(x)$ является собственной функцией основного ядра, ортогональной ко всем $\varphi_m(x)$ при $m \leq n$. Значит, λ совпадает с одним из λ_k при $k > n$, а $\varphi(x)$ является с точностью до постоянного множителя одной из функций $\varphi_k(x)$.

Покажем, что для любой неотрицательной функции $q \in C_\mu[0, \ell]$ справедливо

$$I = \int_0^\ell \int_0^\ell \omega_n(x, s) q(x) q(s) d[M(x)] d[M(s)] \geq 0.$$

Заметим, что

$$I = \int_0^\ell \int_0^\ell \omega_n(x, s) q(x) q(s) d[M(x)] d[M(s)] =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\ell \left\{ \int_0^\ell \omega_n(x, s) q(s) d[M(s)] \right\} q(x) d[M(x)] = \\
&= \int_0^\ell \sum_{k=n+1}^\infty \frac{\langle q, \varphi_k \rangle}{\lambda_k} \varphi_k(x) q(x) d[M(x)] = \sum_{k=n+1}^\infty \frac{\langle q, \varphi_k \rangle}{\lambda_k} \int_0^\ell \varphi_k(x) q(x) d[M(x)] = \\
&= \sum_{k=n+1}^\infty \frac{\langle q, \varphi_k \rangle^2}{\lambda_k} \geq 0,
\end{aligned}$$

поскольку $\lambda_k > 0$.

Покажем, что для любого $x \in \overline{[0, \ell]}_\mu$ верно $\omega_n(x, x) \geq 0$. В самом деле, предположим, что найдется точка $x^* \in \overline{[0, \ell]}_\mu$, что $\omega_n(x^*, x^*) < 0$. Пусть в точке x^* функция $\mu(x)$ непрерывна. Тогда найдется такая окрестность точки (x^*, x^*) , что для любого x такого, что $|\mu(x) - \mu(x^*)| < \delta$, и для любого s такого, что $|s - x^*| < \delta$ верно, что $\omega_n(x, s) < 0$. Мы можем определить μ -непрерывную функцию $q(x)$, которая имеет положительные значения в промежутке $x^* - \delta < x < x^* + \delta$ и равна нулю везде вне этого промежутка. Например,

$$q(x) = \begin{cases} \frac{\mu(x) - \mu(x^* - \delta)}{\mu(x^*) - \mu(x^* - \delta)}, & \text{если } x \in [x^* - \delta, x^*] \\ \frac{\mu(x^* + \delta) - \mu(x)}{\mu(x^* + \delta) - \mu(x^*)}, & \text{если } x \in [x^*, x^* + \delta] \\ 0, & \text{если } x \notin [x^* - \delta, x^* + \delta]. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\ell \int_0^\ell \omega_n(x, s) q(x) q(s) d[M(x)] d[M(s)] = \\
&= \int_{x^* - \delta}^{x^* + \delta} \int_{x^* - \delta}^{x^* + \delta} \omega_n(x, s) q(x) q(s) d[M(x)] d[M(s)] < 0,
\end{aligned}$$

что невозможно согласно предыдущему утверждению.

Если же в точке x^* функция $\mu(x)$ терпит разрыв, то найдется $\delta > 0$ для любого $x \in (x^* - \delta, x^*)$ такого, что $|\mu(x) - \mu(x^* - 0)| < \delta$, и для любого

$s \in (x^* - \delta, x^*)$ справедливо неравенство $\omega_n(x, s) < 0$. Возьмем

$$q(x) = \begin{cases} \frac{\mu(x) - \mu(x^* - \delta)}{\mu(x^* - 0) - \mu(x^* - \delta)}, & \text{если } x \in [x^* - \delta, x^* - 0] \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда

$$I = \int_{x^* - \delta}^{x^* - 0} \int_{x^* - \delta}^{x^* - 0} \omega_n(x, s) q(x) q(s) d[M(x)] d[M(s)] < 0,$$

что невозможно.

Покажем, что справедливо следующее равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \int_0^{\ell} K(x, x) d[M(x)].$$

Применим к ядру $\omega_n(x, s)$ предыдущее утверждение и получим, что для любого $x \in \overline{[0, \ell]}_{\mu}$ выполняется неравенство $\omega_n(x, x) \geq 0$, т.е.

$$K(x, x) - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k} \geq 0,$$

откуда для любых n и $x \in \overline{[0, \ell]}_{\mu}$ выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k} \leq K(x, x) \leq C^*.$$

Отсюда непосредственно следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k}$ с положительными членами равномерно сходится при всяком значении x , а его частичные суммы при любом значении x из промежутка $\overline{[0, \ell]}_{\mu}$ остаются меньше положительного числа C^* . Воспользовавшись неравенством Коши, получим

следующую оценку

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k} &= \sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot \frac{\varphi_k(s)}{\sqrt{\lambda_k}} = \\ &= \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k}} \cdot \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(s)}{\lambda_k}}, \end{aligned}$$

или

$$\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k} \leq \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k}} \cdot \sqrt{C^*} \leq \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{C^*}.$$

В силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k}$ непосредственно следует, что ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k}$ сходится равномерно по s на $\overline{[0, \ell]}_{\mu}$ при фиксированном x .

Аналогично доказывается равномерная сходимость по x при фиксированном s .

Покажем, что при любом фиксированном $x \in \overline{[0, \ell]}_{\mu}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\ell} \left(K(x, s) - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k} \right)^2 d[M(s)] = 0 \quad (2.2.19)$$

равномерно относительно x на $\overline{[0, \ell]}_{\mu}$. Для доказательства рассмотрим разложение $K(x, s)$ как функции s по ортонормированной системе $\varphi_k(s)$. Коэффициенты Фурье здесь равны $\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}$. Раскрыв квадрат разности, стоящий под интегралом, и воспользовавшись ортонормированностью $\varphi_k(x)$, получим

$$\begin{aligned} &\int_0^{\ell} \left(K(x, s) - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k} \right)^2 d[M(s)] = \\ &= \int_0^{\ell} (K(x, s))^2 d[M(s)] - \sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Рассмотрим повторное ядро

$$K_2(x, s) = \int_0^\ell K(x, s_1)K(s_1, s) d[M(s_1)]. \quad (2.2.20)$$

Функция $K_2(x, s)$ как функция от x представима через ядро. Тогда

$$K_2(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k^2},$$

причем последняя формула справедлива на всем множестве $\overline{[0, \ell]}_\mu \times \overline{[0, \ell]}_\mu$.

Заметим, что

$$K_2(x, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2}. \quad (2.2.21)$$

Ряд равномерно сходится к функции $K_2(x, x)$, т.к. функции $\varphi_k(x)$ μ -непрерывны, $K_2(x, x)$ – μ -непрерывная функция. Заметим, что из (2.2.20) следует

$$\int_0^\ell (K(x, s))^2 d[M(s)] = K_2(x, x).$$

Таким образом, равенство (2.2.19) доказано.

Поскольку ряд $\sum_k \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k}$ сходится равномерно относительно s в промежутке $\overline{[0, \ell]}_\mu$ при фиксированном x , то переходя в равенстве (2.2.19) к пределу, получим

$$\int_0^\ell \left(K(x, s) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k} \right)^2 d[M(s)] = 0.$$

Отсюда следует, что на множестве $\overline{[0, \ell]}_\mu \times \overline{[0, \ell]}_\mu$ справедливо следующее равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(s)}{\lambda_k} = K(x, s).$$

Полагая в последней формуле $s = x$ и интегрируя по $d[M(x)]$, получим, принимая во внимание нормированность функций $\varphi_k(x)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \int_0^{\ell} K(x, x) d[M(s)]. \quad \square$$

Вернемся к доказательству равномерной сходимости функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x)$. Используя неравенство Коши для суммы $\sum_{k=n}^{n+m} |c_k \varphi_k(x)|$ при некоторых n и m , последовательно находим

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+m} |c_k \varphi_k(x)| &= \sum_{k=n}^{n+m} |c_k \sqrt{\lambda_k}| \cdot \left| \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} c_k^2 \lambda_k} \cdot \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k}} \leq \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} c_k^2 \lambda_k} \cdot \sqrt{C^*} \leq \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{C^*}. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Из сходимости числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k$ вытекает равномерная и абсолютная сходимость рассматриваемого функционального ряда.

2.2.2 О некоторых свойствах собственных функций

Приведем доказательства некоторых свойств собственных функций.

Лемма 2.2.1. Пусть $\varphi_k(x)$ — нормированная амплитудная функция, отвечающая собственной частоте λ_k . Тогда найдется такая постоянная C^* , что для всех k и x верно

$$|\varphi'_{k\mu}(x)| \leq C^* \lambda_k.$$

Доказательство. Воспользовавшись представлением для $K(x, s)$, получим

$$\varphi'_{k\mu}(x) = \frac{\lambda_k \varphi'_{2\mu}(x)}{p(0) \varphi_2(0)} \int_0^x \varphi_1(s) \varphi_k(s) d[M(s)] + \frac{\lambda_k \varphi'_{1\mu}(x)}{p(0) \varphi_2(0)} \int_x^{\ell} \varphi_2(s) \varphi_k(s) d[M(s)].$$

Поскольку функции $\varphi'_{2\mu}(x)$, $\varphi'_{1\mu}(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ ограничены, то найдется константа C такая, что

$$\begin{aligned} |\varphi'_{k\mu}| &\leq \frac{2\lambda_k C}{p(0)\varphi_2(0)} \int_0^\ell |\varphi_k(x)| d[M(x)] \leq \\ &\leq \frac{2\lambda_k C}{p(0)\varphi_2(0)} \left(\int_0^\ell \varphi_k^2(x) d[M(x)] \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\ell 1^2 d[M(x)] \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{2\lambda_k C}{p(0)\varphi_2(0)} \sqrt{M(\ell) - M(0)} = C^* \lambda_k, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

Ранее было доказано, что для всякой функции из E_μ , обращающейся в нуль на концах отрезка $[0, \ell]$, ее ряд сходится равномерно и абсолютно. Покажем, что для всякой μ -непрерывной на $[0, \ell]$ функции $f(x)$ ряд Фурье, построенной по этой функции, сходится к $f(x)$ в среднем.

Для начала заметим, что для любого положительного ε найдется функция $\widehat{f}(x)$, принадлежащая E_μ и обращающейся в нуль на концах $[0, \ell]$, такая, что

$$\int_0^\ell (f(x) - \widehat{f}(x))^2 d[M(x)] < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Пусть N выбрано настолько большим, что

$$\int_0^\ell \left(\widehat{f}(x) - \sum_{k=1}^N \widehat{c}_k \varphi_k(x) \right)^2 d[M(x)] < \frac{\varepsilon}{6},$$

где \widehat{c}_k – коэффициенты ряда Фурье функции $\widehat{f}(x)$. Тогда используя неравенство Коши, получим

$$\int_0^\ell \left(f(x) - \sum_{k=1}^N \widehat{c}_k \varphi_k(x) \right)^2 d[M(x)] \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^\ell \left(|f(x) - \widehat{f}(x)| + \left| \widehat{f}(x) - \sum_{k=1}^N \widehat{c}_k \varphi_k(x) \right| \right)^2 d[M(x)] = \\
&= \int_0^\ell |f(x) - \widehat{f}(x)|^2 d[M(x)] + 2 \int_0^\ell |f(x) - \widehat{f}(x)| \cdot \\
&\cdot \left| \widehat{f}(x) - \sum_{k=1}^N \widehat{c}_k \varphi_k(x) \right| d[M(x)] + \int_0^\ell \left| \widehat{f}(x) - \sum_{k=1}^N \widehat{c}_k \varphi_k(x) \right|^2 d[M(x)] < \\
&< \frac{\varepsilon}{6} + 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{6}} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{6}} + \frac{\varepsilon}{6} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Таким образом, для всякой μ -непрерывной на $[\overline{0, \ell}]_\mu$ функции $f(x)$ найдется такое N и такие \widehat{c}_k ($k = 1, 2, \dots, N$), что интеграл

$$\int_0^\ell \left(f(x) - \sum_{k=1}^N \widehat{c}_k \varphi_k(x) \right)^2 d[M(x)] \quad (2.2.23)$$

сколь угодно мал. В то же время интеграл (2.2.23) принимает наименьшее значение, если вместо \widehat{c}_k взять коэффициенты ряда Фурье, посчитанные для этой функции.

Так как $\varphi_k(x)$ ортогональны с весом $M'_{[\sigma]}(x)$, то для всех N справедливо

$$\int_0^\ell f^2(x) d[M(x)] \geq \sum_{k=1}^N c_k^2,$$

из которого следует аналог неравенства Бесселя

$$\int_0^\ell f^2(x) d[M(x)] \geq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \quad (2.2.24)$$

С другой стороны, выберем последовательность $f_k(x)$ функций из пространства E_μ , обращающихся в нуль на концах, сходящуюся в среднем к

$f(x)$. Для таких функций справедливо равенство

$$\int_0^\ell (f_k(x) - f_\ell(x))^2 d[M(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^{(k)} - c_n^{(\ell)} \right)^2, \quad (2.2.25)$$

где $c_n^{(k)} = \int_0^\ell f_k(x) \varphi_n(x) dx$.

При $k, \ell \rightarrow \infty$ левая часть (2.2.25) стремится к нулю. Значит и правая часть тоже. Из аналога неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$\begin{aligned} \left| c_n - c_n^{(k)} \right| &= \left| \int_0^\ell (f(x) - f_k(x)) \varphi_n(x) d[M(x)] \right| \leq \\ &\leq \int_0^\ell \left| f(x) - f_k(x) \right|^2 d[M(x)] \int_0^\ell \varphi_n^2(x) d[M(x)] \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

т.е. $\lim_{k \rightarrow \infty} c_n^{(k)} = c_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Зафиксируем $N > 0$ – целое положительное число. Имеем

$$\sum_{n=1}^N \left(c_n^{(k)} - c_n^{(\ell)} \right)^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^{(k)} - c_n^{(\ell)} \right)^2 = \int_0^\ell (f_k(x) - f_\ell(x))^2 d[M(x)].$$

Значит при $N \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n - c_n^{(\ell)} \right)^2 \leq \int_0^\ell (f(x) - f_\ell(x))^2 d[M(x)].$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 - \sum_{n=1}^{\infty} (c_n^{(\ell)})^2 \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - c_n^{(\ell)})(c_n + c_n^{(\ell)}) \right| \leq \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - c_n^{(\ell)})^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (c_n + c_n^{(\ell)})^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{c_n^{(\ell)}\}^2 \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2.$$

Из сходимости в среднем $f_\ell(x)$ к $f(x)$ следует

$$\int_0^\ell f_\ell^2(x) d[M(x)] \rightarrow \int_0^\ell f^2(x) d[M(x)].$$

Т.к. $\int_0^\ell f_\ell^2(x) d[M(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^{(\ell)})^2$, то при $\ell \rightarrow \infty$ получим, что

$$\int_0^\ell f^2(x) d[M(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2,$$

т.е. выполнено равенство Парсеваля.

2.2.3 Доказательство возможности применения метода Фурье

Перейдем теперь непосредственно к доказательству возможности применения метода Фурье. Для удобства введем следующее обозначение

$$LX = -(pX'_\mu)'_{[\sigma]} + XQ'_{[\sigma]}.$$

Покажем теперь, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2.2. Пусть функции $\mu(x)$, $M(x)$ строго возрастают, а $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$. Функция $p(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, \ell]$ и $\inf_{[0, \ell]} p(x) > 0$; функции $M(x)$, $p(x)$, $Q(x)$ — $[\sigma]$ -абсолютно непрерывны $[0, \ell]$. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ μ -абсолютно непрерывны на $[0, \ell]$, производные $\varphi'_\mu(x)$ и $\psi'_\mu(x)$ имеют конечное на $[0, \ell]$ изменение; квазипроизводные $p(x)\varphi'_\mu(x)$ и $p(x)\psi'_\mu(x)$ $[\sigma]$ -абсолютно непрерывны на $[0, \ell]$. Пусть функция $\frac{L(\psi)(x)}{M'_{[\sigma]}(x)}$ μ -непрерывна на $[0, \ell]$; функция $\frac{L(\varphi)(x)}{M'_{[\sigma]}(x)}$ μ -абсолютно непрерывна на $[0, \ell]$ и ее производная является функцией ограниченной вариации. Предположим, что $\varphi(0) = \varphi(\ell) = L(\varphi)(0) = L(\varphi)(\ell) = \psi(0) =$

$\psi(\ell) = 0$. Тогда функция

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right), \quad (2.2.26)$$

где $\varphi_k(x)$ – нормированная амплитудная функция, отвечающая собственному значению λ_k ,

$$A_k = \int_0^{\ell} \varphi_k(x) \varphi(x) d[M(x)], \quad B_k = \int_0^{\ell} \varphi_k(x) \psi(x) d[M(x)],$$

является решением математической модели (2.2.1), причем ряд (2.2.26) можно дифференцировать почленно по t дважды и по μ , $[\sigma]$ также дважды; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на прямоугольнике $\overline{[0, \ell]_{\mu}} \times [0, T]$.

Доказательство. Рассмотрим коэффициенты A_k и B_k . Имеем

$$\begin{aligned} A_k &= \int_0^{\ell} \varphi(x) M'_{[\sigma]}(x) \varphi_k(x) d[\sigma] = \\ &= \int_0^{\ell} \varphi(x) \frac{1}{\lambda_k} \left(-(p(x) \varphi'_{k\mu}(x))'_{[\sigma]} + Q'_{[\sigma]}(x) \varphi_k(x) \right) d[\sigma] = \\ &= -\frac{1}{\lambda_k} \int_0^{\ell} \varphi(x) (p(x) \varphi'_{k\mu}(x))'_{[\sigma]} d[\sigma] + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^{\ell} \varphi(x) \varphi_k(x) Q'_{[\sigma]}(x) d[\sigma]. \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части последнего равенства проинтегрируем по частям и воспользуемся свойствами функций $\varphi_k(x)$ и $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\lambda_k} \int_0^{\ell} \varphi(x) (p(x) \varphi'_{k\mu}(x))'_{[\sigma]} d[\sigma] &= -\frac{1}{\lambda_k} \left[\varphi(x) p(x) \varphi'_{k\mu}(x) \Big|_0^{\ell} - \right. \\ &\left. - \int_0^{\ell} \varphi_k(x) p(x) \varphi'_{\mu}(x) d\mu(x) \right] = \frac{1}{\lambda_k} \int_0^{\ell} \varphi'_{k\mu}(x) p(x) \varphi'_{\mu}(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \varphi_k(x)(p(x)\varphi'_\mu(x))'_{[\sigma]}d[\sigma] &= \varphi_k(x)p(x)\varphi'_\mu(x)\Big|_0^\ell - \int_0^\ell \varphi_k(x)p(x)\varphi'_\mu(x) d\mu(x) = \\ &= \int_0^\ell \varphi'_{k\mu}(x)p(x)\varphi'_\mu(x) d\mu(x), \\ \int_0^\ell \varphi(x)(p(x)\varphi'_{k\mu}(x))'_{[\sigma]}d[\sigma] &= \int_0^\ell \varphi_k(x)(p(x)\varphi'_\mu(x))'_{[\sigma]}d[\sigma]. \end{aligned}$$

Тогда выражение для коэффициента A_k примет вид

$$\begin{aligned} A_k &= -\frac{1}{\lambda_k} \int_0^\ell \varphi_k(x)(p(x)\varphi'_\mu(x))'_{[\sigma]}d[\sigma] + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^\ell \varphi(x)\varphi_k(x)Q'_{[\sigma]}(x) d[\sigma] = \\ &= \frac{1}{\lambda_k} \int_0^\ell \varphi_k(x)L\varphi(x) d[\sigma] = \frac{1}{\lambda_k} \int_0^\ell \varphi_k(x)M'_{[\sigma]}(x) \frac{L\varphi(x)}{M'_{[\sigma]}(x)} d[\sigma]. \end{aligned}$$

Таким образом, $\lambda_k A_k$ – это коэффициенты ряда Фурье функции $\frac{L\varphi(x)}{M'_{[\sigma]}(x)}$, которая, по условию, принадлежит E_μ и принимает нулевые значения на концах отрезка $[0, \ell]$.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^\infty |\lambda_k A_k| \cdot |\varphi_k(x)|$ сходится равномерно и абсолютно. Отметим, что из неравенства (2.2.15) вытекает, что ряд $\sum_{k=1}^\infty \lambda_k^3 A_k^2$ также сходится.

Рассмотрим B_k :

$$\begin{aligned} B_k &= \int_0^\ell \varphi_k(x)\psi(x)M'_{[\sigma]}(x)d[\sigma] = \\ &= \frac{1}{\lambda_k} \int_0^\ell \psi(x) \left(- (p(x)\varphi'_{k\mu}(x))'_{[\sigma]} + Q'_{[\sigma]}(x)\varphi_k(x) \right) d[\sigma]. \end{aligned}$$

Разобьем интеграл в последнем равенстве на два и, воспользовавшись предыдущими свойствами, получим

$$\begin{aligned}
B_k &= -\frac{1}{\lambda_k} \int_0^\ell \psi(x)(p(x)\varphi'_{k\mu}(x))'_{[\sigma]} d[\sigma] + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^\ell \psi(x)Q'_{[\sigma]}(x)\varphi_k(x) d[\sigma] = \\
&= -\frac{1}{\lambda_k} \int_0^\ell \varphi_k(x)(p(x)\psi'_\mu(x))'_{[\sigma]} d[\sigma] + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^\ell \psi(x)Q'_{[\sigma]}(x)\varphi_k(x) d[\sigma] = \\
&= \frac{1}{\lambda_k} \int_0^\ell \varphi_k(x)L\psi(x) d[\sigma] = \frac{1}{\lambda_k} \int_0^\ell \varphi_k(x)M'_{[\sigma]}(x) \frac{L\psi(x)}{M'_{[\sigma]}(x)} d[\sigma].
\end{aligned}$$

Тогда $\lambda_k B_k$, как и ранее, являются коэффициентами ряда Фурье μ -непрерывной на $[0, \ell]$ функции $\frac{L\psi(x)}{M'_{[\sigma]}(x)}$. Из аналога неравенства Бесселя (2.2.24) вытекает неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k B_k)^2 \leq \int_0^\ell M'_{[\sigma]}(x) \left(\frac{L\psi(x)}{M'_{[\sigma]}(x)} \right)^2 d[\sigma],$$

из которого следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k B_k)^2$ сходится.

Ряды, полученные формальным дифференцированием (2.2.26), имеют вид

$$u'_\mu(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi'_{k\mu}(x) \left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k t} + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k t} \right), \quad (2.2.27)$$

$$\begin{aligned}
(p(x)u'_\mu(x, t))'_{[\sigma]} &= \sum_{k=1}^{\infty} (p(x)\varphi'_{k\mu}(x))'_{[\sigma]} \left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k t} + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k t} \right) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (Q'_{[\sigma]}(x)\varphi_k(x) - \lambda_k M'_{[\sigma]}(x)\varphi_k(x)) \left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k t} + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k t} \right), \quad (2.2.28)
\end{aligned}$$

$$u'_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(-A_k \sqrt{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k} t + B_k \cos \sqrt{\lambda_k} t \right), \quad (2.2.29)$$

$$u''_{tt}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(-A_k \lambda_k \cos \sqrt{\lambda_k} t - B_k \sqrt{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right). \quad (2.2.30)$$

Покажем сначала, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |A_k| + \sqrt{\lambda_k} |B_k|) \quad (2.2.31)$$

сходится. Из установленной ранее сходимости ряда $\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k}$ следует, что для произвольного положительного ε найдется такое N , что для всякого натурального $n \geq N$ и любого m выполнено $\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k} < \varepsilon$. Для этих n и m , применяя неравенство Коши, последовательно находим

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+m} (\lambda_k |A_k| + \sqrt{\lambda_k} |B_k|) &= \sum_{k=n}^{n+m} |A_k| \lambda_k^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} + \sum_{k=n}^{n+m} |B_k| \lambda_k \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} A_k^2 \lambda_k^3} \cdot \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k}} + \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} B_k^2 \lambda_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k}} < (\sqrt{\widehat{A}} + \sqrt{\widehat{B}}) \sqrt{\varepsilon}, \end{aligned}$$

где через \widehat{A} и \widehat{B} обозначены, соответственно, суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 A_k^2$ и

$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k B_k)^2$. Таким образом, ряд (2.2.31) сходится по признаку Коши.

Выпишем оценки для рядов (2.2.27)–(2.2.30). Будем пользоваться тем фактом, что $\lambda_k \rightarrow \infty$, поэтому, начиная с некоторого номера $\lambda_k \geq 1$, $\sqrt{\lambda_k} \leq \lambda_k$.

Начнем с ряда (2.2.28). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left| (Q'_{[\sigma]}(x)\varphi_k(x) - \lambda_k M'_{[\sigma]}(x)\varphi_k(x)) \left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right) \right| &\leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(x)| (K + \lambda_k K) \cdot \left(|A_k| + \frac{|B_k|}{\sqrt{\lambda_k}} \right) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{K} |\varphi_k(x)| (|A_k| \lambda_k + \sqrt{\lambda_k} |B_k|), \end{aligned}$$

где \tilde{K} – постоянная, $|Q'_{[\sigma]}(x)| \leq K$ и $|M'_{[\sigma]}(x)| \leq K$.

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(x)| (|A_k| \lambda_k + \sqrt{\lambda_k} |B_k|)$$

равномерно сходится. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+m} |\varphi_k(x)| (\lambda_k |A_k| + \sqrt{\lambda_k} |B_k|) &= \sum_{k=n}^{n+m} |\varphi_k(x)| \lambda_k^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \cdot |A_k| + \\ &+ \sum_{k=n}^{n+m} |B_k| \cdot \lambda_k \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} |\varphi_k(x)| \leq \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} A_k^2 \lambda_k^3} \cdot \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k}} + \\ &+ \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} B_k^2 \lambda_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k}} < \sqrt{C^* \varepsilon}, \end{aligned}$$

так как $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k} \leq K(x, x) = C^*$, а ряды $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 A_k^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 B_k^2$ сходятся.

Для ряда (2.2.27) имеем

$$\sum_{k=n}^{n+m} |\varphi'_{k\mu}(x)| \left(\left| A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right| \right) \leq C^* \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |A_k| + \sqrt{\lambda_k} |B_k|).$$

Рассмотрим ряд (2.2.29). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+m} \left| \varphi_k(x) \left(-A_k \sqrt{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k} t + B_k \cos \sqrt{\lambda_k} t \right) \right| &\leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+m} |\varphi_k(x)| |A_k| \lambda_k + \sum_{k=n}^{n+m} |\varphi_k(x)| |B_k| \sqrt{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Рассмотрим ряд (2.2.30). Имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^{n+m} \varphi_k(x) \left(-A_k \lambda_k \cos \sqrt{\lambda_k} t - B_k \sqrt{\lambda_k} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right) \right| &\leq \\ &\leq \sum_{k=n}^{n+m} |\varphi_k(x)| |A_k| \lambda_k + \sum_{k=n}^{n+m} |\varphi_k(x)| |B_k| \sqrt{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

2.3 Корректность математической модели малых колебаний разрывной стилтьесовской струны с жестко закрепленными концами

Докажем сначала единственность решения изучаемой математической модели (2.1.10), которая возникает при описании малых колебаний разрывной стилтьесовской струны, расположенной вдоль отрезка $[0, \ell]$.

Теорема 2.3.1. *Пусть $p(x)$, $M(x)$, $Q(x)$, $F(x, t)$ – $[\sigma]$ -абсолютно непрерывны на $[0, \ell]$, причем $\inf_{[0, \ell]} p(x) > 0$; функция $M(x)$ строго возрастает на $[0, \ell]$, $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$. Тогда математическая модель (2.1.10) в классе E имеет единственное решение.*

Доказательство. Предположим, что существует два различных решения $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ задачи (2.1.10). Тогда разность $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$

является решением задачи

$$\begin{cases} v''_{tt}(x, t)M'_{[\sigma]}(x) = (p(x)v'_\mu(x, t))'_{[\sigma]} - v(x, t)Q'_{[\sigma]}(x), \\ v(0, t) = v(\ell, t) = 0, \\ v(x, 0) = 0, \\ v'_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Умножим первое уравнение системы (2.3.1) на v'_t и проинтегрируем по $[0, \ell]$:

$$\begin{aligned} \int_0^\ell v'_t(x, t)v''_{tt}(x, t) d[M(x)] &= \int_0^\ell v'_t(x, t) d_x[p(x)v'_\mu(x, t)] - \\ &- \int_0^\ell v'_t(x, t)v(x, t) d[Q(x)]. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Зафиксируем произвольное $T^* \in [0, T]$ и проинтегрируем (2.3.2) по отрезку $[0, T^*]$. Получим, что

$$\begin{aligned} \int_0^{T^*} \int_0^\ell v'_t(x, t)v''_{tt}(x, t) d[M(x)] dt &= \int_0^{T^*} \int_0^\ell v'_t(x, t) d_x[p(x)v'_\mu(x, t)] dt - \\ &- \int_0^{T^*} \int_0^\ell v'_t(x, t)v(x, t) d[Q(x)] dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл $\int_0^{T^*} \int_0^\ell v'_t(x, t)v''_{tt}(x, t) d[M(x)] dt$ и, используя теорему Фубини, перепишем его следующим образом

$$\int_0^{T^*} \int_0^\ell v'_t(x, t)v''_{tt}(x, t) d[M(x)] dt = \frac{1}{2} \int_0^{T^*} \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \right)^2 d[M(x)] dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\int_0^{T^*} \frac{\partial}{\partial t} (v'_t(x, t))^2 dt \right) d[M(x)] = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\ell \left((v'_t(x, T^*))^2 - (v'_t(x, 0))^2 \right) d[M(x)] = \frac{1}{2} \int_0^\ell (v'_t(x, T^*))^2 d[M(x)],
\end{aligned}$$

поскольку $v'_t(x, 0) = 0$.

Внутренний интеграл в $\int_0^{T^*} \int_0^\ell v'_t(x, t) d[p(x)v'_\mu(x, t)] dt$ проинтегрируем

по частям

$$\begin{aligned}
\int_0^{T^*} \int_0^\ell v'_t(x, t) d_x[p(x)v'_\mu(x, t)] dt &= - \int_0^{T^*} \int_0^\ell p(x)v'_\mu(x, t) d_x(v'_t(x, t)) dt + \\
&+ \int_0^{T^*} (v'_t(\ell, t)p(\ell)v'_\mu(\ell, t) - v'_t(0, t)p(0)v'_\mu(0, t)) dt = \\
&= - \int_0^\ell \int_0^{T^*} p(x)v'_\mu(x, t) d_x(v'_t(x, t)) dt,
\end{aligned}$$

т.к. в силу краевых условий $v'_\mu(0, t) = v'_\mu(\ell, t) = 0$. Индекс x у дифференциала означает, что интегрирование осуществляется по переменной x .

Покажем справедливость равенства

$$v'_t(x, t) = \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial t} (v'_\mu(s, t)) d\mu(s). \quad (2.3.3)$$

В самом деле, для любого $t_0 \in [0, T]$ имеем

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_0} v'_t(x, t) dt - \int_0^{t_0} \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} (v'_\mu(s, t)) d\mu(s) dt &= - \int_0^x (v'_\mu(s, t_0) - v'_\mu(s, 0)) d\mu(s) + \\
+v(x, t_0) &= \int_0^x v'_\mu(s, t_0) d\mu(s) - \int_0^x v'_\mu(s, t_0) d\mu(s) = 0.
\end{aligned}$$

Поскольку функция $v(x, t)$ – μ -абсолютно непрерывна по переменной x , то

$$v(x, t_0) = \int_0^x v'_\mu(s, t_0) d\mu(s).$$

Таким образом, для всех $t_0 \in [0, T]$ верно (2.3.3), т.е.

$$\int_0^{t_0} \left(v'_t(x, t) - \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} (v'_\mu(s, t)) d\mu(s) \right) dt = 0. \quad (2.3.4)$$

Продифференцируем полученное равенство (2.3.4) по t_0 :

$$v'_t(x, t_0) - \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} v'_\mu(s, t_0) d\mu(s) = 0.$$

В силу того, что $t_0 \in [0, T]$, получаем $v'_t(x, t) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial t} v'_\mu(s, t) d\mu(s)$.

Значит,

$$d_x v'_t(x, t) = d_x \left(\int_0^x \frac{\partial}{\partial t} (v'_\mu(s, t)) d\mu(s) \right) = \frac{\partial}{\partial t} (v'_\mu(x, t)) d\mu(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} - \int_0^\ell \int_0^{T^*} p(x) v'_\mu(x, t) d_x v'_t(x, t) dt &= - \int_0^\ell \int_0^{T^*} p(x) v'_\mu(x, t) \frac{\partial}{\partial t} v'_\mu(x, t) d\mu(x) dt = \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_0^{T^*} p(x) \frac{\partial}{\partial t} (v'_\mu(x, t))^2 d\mu(x) dt = - \frac{1}{2} \int_0^\ell p(x) (v'_\mu(x, T^*))^2 d\mu(x). \end{aligned}$$

Интеграл $\int_0^{T^*} \int_0^\ell v'_t(x, t)v(x, t) d[Q(x)] dt$ перепишем следующим образом

$$\begin{aligned} \int_0^{T^*} \int_0^\ell v'_t(x, t)v(x, t) d[Q(x)] dt &= \frac{1}{2} \int_0^{T^*} \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial t} (v(x, t))^2 d[Q(x)] dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_0^{T^*} \frac{\partial}{\partial t} (v(x, t))^2 dt d[Q(x)] = \frac{1}{2} \int_0^\ell (v(x, T^*))^2 d[Q(x)]. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\ell (v'_t(x, T^*))^2 d[M(x)] + \frac{1}{2} \int_0^\ell p(x) (v'_\mu(x, T^*))^2 d\mu(x) + \\ + \frac{1}{2} \int_0^\ell (v(x, T^*))^2 d[Q(x)] = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $M(x)$, $\mu(x)$, $Q(x)$ – возрастающие функции, $\inf_{[0, \ell]} p(x) > 0$, то, $v(x, T^*) = 0$ для всех T^* . Значит, $v(x, T) = 0$, что и требовалось доказать. \square

Покажем, что при малом изменении начальных условий $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответствующие решения математической задачи (2.1.10) изменяется мало.

Теорема 2.3.2. Пусть функции $\mu(x)$, $M(x)$ строго возрастают, $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$. Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ – решения исследуемой модели при начальных данных $\varphi^{(1)}(x)$, $\psi^{(1)}(x)$ и $\varphi^{(2)}(x)$, $\psi^{(2)}(x)$, соответственно, т.е. решения моделей

$$\begin{cases} u''_{itt}(x, t)M'_{[\sigma]}(x) = (p(x)u'_{i\mu}(x, t))'_{[\sigma]} - u_i(x, t)Q'_{[\sigma]}(x) + F'_{[\sigma]}(x, t), \\ u_i(0, t) = u_i(\ell, t) = 0, \\ u_i(x, 0) = \varphi^{(i)}(x), \\ u'_{it}(x, 0) = \psi^{(i)}(x), \end{cases} \quad (2.3.5)$$

($i = 1, 2$). Обозначим через $u(x, t)$ их разность $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$.

Если $\varphi(x) = \varphi^{(1)}(x) - \varphi^{(2)}(x)$, $\psi(x) = \psi^{(1)}(x) - \psi^{(2)}(x)$ и $\varphi'_\mu(x) = \varphi'^{(1)}_\mu(x) - \varphi'^{(2)}_\mu(x)$ малы по модулю (в смысле нормы $\|g(x)\|_\mu = \max_{\overline{[0, \ell]_\mu}} |g(x)|$ пространства S_μ μ -непрерывных функций), то $|u(x, t)|$ также меняется мало на множестве $\overline{[0, \ell]_\mu} \times [0, T]$.

Доказательство. Так же как и при доказательстве единственности решения математической модели для функции $u(x, t)$ рассмотрим интеграл

$$\int_0^{T^*} \int_0^\ell u'_t(x, t) \left(u''_{tt}(x, t) M'_{[\sigma]}(x) - (p(x) u'_\mu(x, t))'_{[\sigma]} + u(x, t) Q'_{[\sigma]}(x) \right) d[\sigma] dt = 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{T^*} \int_0^\ell u'_t(x, t) \left(u''_{tt}(x, t) M'_{[\sigma]}(x) - (p(x) u'_\mu(x, t))'_{[\sigma]} + u(x, t) Q'_{[\sigma]}(x) \right) d[\sigma] dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\ell (u'_t(x, T^*))^2 d[M(x)] - \frac{1}{2} \int_0^\ell \psi^2(x) d[M(x)] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\ell p(x) (u'_\mu(x, T^*))^2 d\mu(x) - \frac{1}{2} \int_0^\ell p(x) \varphi'^2_\mu(x) d\mu(x) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\ell u^2(x, T^*) d[Q(x)] - \frac{1}{2} \int_0^\ell \varphi^2(x) d[Q(x)], \end{aligned}$$

так как $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u'_t(x, 0) = \psi(x)$, $u'_\mu(x, 0) = \varphi'_\mu(x)$ и $u'_\mu(0, t) = u'_\mu(\ell, t) = 0$ в силу граничных условий. Таким образом, приходим к равенству

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell (u'_t(x, T^*))^2 d[M(x)] + \int_0^\ell p(x) (u'_\mu(x, T^*))^2 d\mu(x) + \int_0^\ell u^2(x, T^*) d[Q(x)] = \\ &= \int_0^\ell \psi^2(x) d[M(x)] + \int_0^\ell p(x) \varphi'^2_\mu(x) d\mu(x) + \int_0^\ell \varphi^2(x) d[Q(x)], \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

откуда следует, что левая часть мала, так как по условию правая часть мала. Обозначая через ε правую часть равенства (2.3.6), найдем, что для всякого $T^* \in [0, T]$ и каждого $x \in \overline{[0, \ell]}_\mu$ верно

$$\int_0^x (u'_t(s, T^*))^2 d[M(s)] \leq \int_0^\ell (u'_t(s, T^*))^2 d[M(s)] \leq \varepsilon.$$

Аналогично,
$$\int_0^x p(s) (u'_\mu(s, T^*))^2 d\mu(s) \leq \int_0^\ell p(s) (u'_\mu(s, T^*))^2 d\mu(s) \leq \varepsilon.$$

Покажем, что для всех $x \in \overline{[0, \ell]}_\mu$ и $T^* \in [0, T]$ величина $|u(x, T^*)|$ мала, если малы ε и величина $\max_{x \in \overline{[0, \ell]}_\mu} |\varphi(x)|$. Имеем

$$\begin{aligned} |u(x, T^*)| &\leq |u(x, T^*) - u(0, T^*) + u(0, T^*)| \leq \\ &\leq |u(x, T^*) - u(0, T^*)| + |u(0, T^*)|. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Оценим каждое слагаемое в правой части последнего равенства. Для первого слагаемого, используя неравенство Коши-Буняковского, последовательно находим

$$\begin{aligned} |u(x, T^*) - u(0, T^*)| &= \left| \int_0^x u'_\mu(s, T^*) d\mu(s) \right| \leq \int_0^x |u'_\mu(s, T^*)| d\mu(s) \leq \\ &\leq \left(\int_0^x 1^2 d\mu(s) \right)^{1/2} \left(\int_0^x (u'_\mu(s, T^*))^2 d\mu(s) \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \sqrt{\mu(x) - \mu(0)} \left(\int_0^\ell (u'_\mu(s, T^*))^2 d\mu(s) \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \sqrt{\mu(\ell) - \mu(0)} \left(\int_0^\ell \frac{p(s) u_\mu'^2(s, T^*)}{p(s)} d\mu(s) \right)^{1/2} \leq \sqrt{\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{c_0}} \cdot \sqrt{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

где $c_0 = \min_{x \in [0, \ell]_\mu} p(x) > 0$. Таким образом,

$$|u(x, T^*) - u(0, T^*)| \leq \sqrt{\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{c_0}} \cdot \sqrt{\varepsilon}. \quad (2.3.9)$$

Интеграл $\int_0^\ell |u(x, T^*) - u(0, T^*)| d[M(x)]$, в силу неравенства (2.3.8), допускает оценку

$$\int_0^\ell |u(x, T^*) - u(0, T^*)| d[M(x)] \leq \sqrt{\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{c_0}} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot (M(\ell) - M(0)).$$

Отсюда, после несложных преобразований, найдем

$$\begin{aligned} \int_0^\ell |u(0, T^*)| d[M(x)] &\leq \int_0^\ell | -u(x, T^*) + u(0, T^*) | d[M(x)] + \\ &+ \int_0^\ell |u(x, T^*)| d[M(x)] \leq \sqrt{\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{c_0}} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot (M(\ell) - M(0)) + \\ &+ \int_0^\ell |u(x, T^*)| d[M(x)] \leq \sqrt{\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{c_0}} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot (M(\ell) - M(0)) + \\ &+ \int_0^\ell |u(x, T^*) - u(x, 0)| d[M(x)] + \int_0^\ell |\varphi(x)| d[M(x)]. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Для интеграла $\int_0^\ell |u(x, T^*) - u(x, 0)| d[M(x)]$ применяя теорему Фубини и неравенство Коши-Буняковского, получаем оценку

$$\int_0^\ell |u(x, T^*) - u(x, 0)| d[M(x)] = \int_0^\ell \left| \int_0^{T^*} u'_t(x, t) dt \right| d[M(x)] \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^\ell \int_0^{T^*} |u'_t(x, t)| dt d[M(x)] = \int_0^{T^*} \int_0^\ell |u'_t(x, t)| d[M(x)] dt \leq \\
&\leq \int_0^{T^*} \left(\left(\int_0^\ell 1^2 d[M(x)] \right)^{1/2} \left(\int_0^\ell (u'_t(x, t))^2 d[M(x)] \right)^{1/2} \right) dt \leq \\
&\leq \sqrt{M(\ell) - M(0)} \cdot \sqrt{\varepsilon} \int_0^{T^*} dt = T^* \sqrt{M(\ell) - M(0)} \cdot \sqrt{\varepsilon} \leq T \sqrt{M(\ell) - M(0)} \cdot \sqrt{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Тогда (2.3.10) принимает вид

$$\begin{aligned}
|u(0, T^*)|(M(\ell) - M(0)) &\leq \sqrt{\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{c_0}} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot (M(\ell) - M(0)) + \\
&+ \sqrt{M(\ell) - M(0)} \cdot T \cdot \sqrt{\varepsilon} + \max_{x \in [0, \ell]_\mu} |\varphi(x)|(M(\ell) - M(0)).
\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$|u(0, T^*)| \leq \sqrt{\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{c_0}} \cdot \sqrt{\varepsilon} + \frac{T \cdot \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M(\ell) - M(0)}} + \max_{x \in [0, \ell]_\mu} |\varphi(x)|. \quad (2.3.11)$$

Таким образом, для (2.3.7) с учетом (2.3.9) и (2.3.11) имеем

$$|u(x, T^*)| \leq 2\sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{c_0}} + \frac{T \cdot \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M(\ell) - M(0)}} + \max_{x \in [0, \ell]_\mu} |\varphi(x)|.$$

Таким образом, показана корректность модели малых колебаний разрывной стилтьесовской струны с жестко закрепленными концами. \square

2.4 Математическая модель малых колебаний разрывной стилтьесовской струны с особенностями на концах

Рассмотрим модель малых поперечных колебаний разрывной стилтьесовской струны (цепочки из струны, упруго соединенных между собой пружинами), расположенной вдоль отрезка $[0, \ell]$ и подпертой пружинами на левом (в точке $x = 0$) и на правом (в точке $x = \ell$) концах. Будем предполагать, что смещение каждой точки происходит в одной плоскости, перпендикулярно положению равновесия струны. Через $v(x, t)$ обозначим отклонение фактической системы от положения равновесия в точке x в момент времени t .

В этом случае потенциальная энергия системы равна

$$U = \frac{1}{2} \int_{[0, \ell]} p(x) (v'_\mu(x, t))^2 d\mu(x) + \frac{1}{2} \int_{[0, \ell]} v^2(x, t) d[Q(x)] - \int_{[0, \ell]} v(x, t) d_x[F(x, t)].$$

Интеграл Остроградского-Гамильтона принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi(v) = & \frac{1}{2} \int_0^T \left(\int_{[0, \ell]} v_t'^2(x, t) d[M(x)] - \int_{[0, \ell]} p(x) v_\mu'^2(x, t) d\mu(x) - \right. \\ & \left. - \int_{[0, \ell]} v^2(x, t) d[Q(x)] + 2 \int_{[0, \ell]} v(x, t) d_x[F(x, t)] \right) dt. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Предположим, что $p(x)$, $F(x, t)$ – функции ограниченной вариации на $[0, \ell]$, причем $\inf_{(0, \ell)} p(x) > 0$, а $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$, $Q(x) \neq const$. Функции $M(x)$, $\mu(x)$ строго возрастают на $[0, \ell]$. Функционал (2.4.1) будем рассматривать на введенном ранее множестве функций E_μ .

Согласно вариационному принципу Остроградского-Гамильтона, первая вариация (2.4.1) должна равняться нулю. Имеем

$$\delta\Phi(v)h = \int_0^T \left(\int_{[0, \ell]} v_t'(x, t) h_t'(x, t) d[M(x)] - \int_{[0, \ell]} p(x) v_\mu'(x, t) h_\mu'(x, t) d\mu(x) - \right.$$

$$- \int_{[0, \ell]} v(x, t) h(x, t) d[Q(x)] + \int_{[0, \ell]} h(x, t) d_x[F(x, t)] dt = 0,$$

значит,

$$\begin{aligned} \delta\Phi(v)h = & \int_0^T \int_0^\ell (-v''_{tt}(x, t)M'_{[\sigma]}(x) + (p(x)v'_\mu(x, t))'_{[\sigma]} - \\ & - v(x, t)Q'_{[\sigma]}(x) + f(x, t))h(x, t) d[\sigma] dt = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$-v''_{tt}(x, t)M'_{[\sigma]}(x) + (p(x)v'_\mu(x, t))'_{[\sigma]} - v(x, t)Q'_{[\sigma]}(x) + f(x, t) = 0.$$

В точках $x = 0$ и $x = \ell$ последнее уравнение реализуется в виде следующих равенств:

$$v''_{tt}(+0, t)\Delta^+ M(0) - p(+0)v'_\mu(+0, t) + v(+0, t)\Delta^+ Q(0) - \Delta^+ F(0, t) = 0, \quad (2.4.2)$$

$$-v''_{tt}(\ell - 0, t)\Delta^- M(\ell) - p(\ell - 0)v'_\mu(\ell - 0, t) - v(\ell - 0, t)\Delta^- Q(\ell) + \Delta^- F(\ell, t) = 0. \quad (2.4.3)$$

Таким образом, реальная форма $v(x, t)$ является решением следующей задачи

$$\begin{cases} v''_{tt}(x, t)M'_{[\sigma]}(x) = (p(x)v'_\mu(x, t))'_{[\sigma]} - v(x, t)Q'_{[\sigma]}(x) + F'_{[\sigma]}(x, t), & x \in [0, \ell] \\ v(x, 0) = \varphi(x), \\ v'_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad (2.4.4)$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – форма и скорость в начальный момент времени, соответственно. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются μ -абсолютно непрерывными, а $\varphi'_\mu(x)$, $\psi'_\mu(x)$ – функции ограниченной вариации на $[0, \ell]$.

Всюду далее будем рассматривать случай $\Delta^- M(\ell) = 0 = \Delta^+ M(0)$. Тогда равенства (2.4.2) и (2.4.3) принимают вид

$$-p(+0)v'_\mu(+0, t) + v(+0, t)\Delta^+ Q(0) - \Delta^+ F(0, t) = 0,$$

$$p(\ell - 0)v'_\mu(\ell - 0, t) + v(\ell - 0, t)\Delta^- Q(\ell) - \Delta^- F(\ell, t) = 0.$$

Докажем теперь единственность решения исследуемой математической модели.

Теорема 2.4.1. Пусть $p(x)$, $M(x)$, $Q(x)$, $F(x, t)$ – $[\sigma]$ -абсолютно непрерывны на $[0, \ell]$, причем $\inf_{(0, \ell)} p(x) > 0$; функция $M(x)$ строго возрастает на $[0, \ell]$, а $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$ и $Q(x) \neq \text{const}$. Тогда математическая модель (2.4.4) в классе E_μ имеет единственное решение.

Доказательство. Предположим, что существует два различных решения $v_1(x, t)$, $v_2(x, t)$ задачи (2.4.4). Тогда разность $w(x, t) = v_1(x, t) - v_2(x, t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} w''_{tt}(x, t)M'_{[\sigma]}(x) = (p(x)w'_\mu(x, t))'_{[\sigma]} - w(x, t)Q'_{[\sigma]}(x), & x \in [0, \ell] \\ w(x, 0) = 0, \\ w'_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (2.4.5)$$

Умножим первое уравнение системы (2.4.5) на w'_t и проинтегрируем по $[0, \ell]$:

$$\begin{aligned} \int_{[0, \ell]} w'_t(x, t)w''_{tt}(x, t) d[M(x)] &= \int_{[0, \ell]} w'_t(x, t) d_x[p(x)w'_\mu(x, t)] - \\ &- \int_{[0, \ell]} w'_t(x, t)w(x, t) d[Q(x)]. \end{aligned}$$

Зафиксируем произвольное $t_0 \in [0, T]$ и проинтегрируем предыдущее равенство по отрезку $[0, t_0]$. Получим, что

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \int_{[0, \ell]} w'_t(x, t)w''_{tt}(x, t) d[M(x)] dt &= \int_0^{t_0} \int_{[0, \ell]} w'_t(x, t) d_x[p(x)w'_\mu(x, t)] dt - \\ &- \int_0^{t_0} \int_{[0, \ell]} w'_t(x, t)w(x, t) d[Q(x)] dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл $\int_0^{t_0} \int_{[0,\ell]} w'_t(x,t)w''_{tt}(x,t) d[M(x)] dt$ и, используя теорему Фубини, перепишем его следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \int_{[0,\ell]} w'_t(x,t)w''_{tt}(x,t) d[M(x)] dt &= \frac{1}{2} \int_{[0,\ell]} \left(\int_0^{t_0} \frac{\partial}{\partial t} (w'_t(x,t))^2 dt \right) d[M(x)] = \\ &= \frac{1}{2} \int_{[0,\ell]} \left((w'_t(x,t_0))^2 - (w'_t(x,0))^2 \right) d[M(x)] = \frac{1}{2} \int_{[0,\ell]} (w'_t(x,t_0))^2 d[M(x)]. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл в $\int_0^{t_0} \int_{[0,\ell]} w'_t(x,t)d[p(x)w'_\mu(x,t)]dt$ проинтегрируем по частям и получим

$$\int_0^{t_0} \int_{[0,\ell]} w'_t(x,t)d_x[p(x)w'_\mu(x,t)]dt = - \int_0^{t_0} \int_0^\ell p(x)w'_\mu(x,t)d_x(w'_t(x,t))dt, \quad (2.4.6)$$

т.к. $p(0)w'_\mu(0,t) = p(\ell)w'_\mu(\ell,t) = 0$. Воспользовавшись ранее полученным равенством, двойной интеграл в уравнение (2.4.6) примет вид

$$\begin{aligned} - \int_0^\ell \int_0^{t_0} p(x)w'_\mu(x,t)d_x(w'_t(x,t))dt &= - \int_0^\ell \int_0^{t_0} p(x)w'_\mu(x,t) \frac{\partial}{\partial t} (w'_\mu(x,t)) d\mu(x) dt = \\ &= - \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_0^{t_0} p(x) \frac{\partial}{\partial t} (w'_\mu(x,t))^2 d\mu(x) dt = - \frac{1}{2} \int_0^\ell p(x) (w'_\mu(x,t_0))^2 d\mu(x). \end{aligned}$$

Интеграл $\int_0^{t_0} \int_{[0,\ell]} w'_t(x,t)w(x,t)d[Q(x)]dt$ перепишем следующим образом

$$\int_0^{t_0} \int_{[0,\ell]} w'_t(x,t)w(x,t) d[Q(x)] dt = \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \int_{[0,\ell]} \frac{\partial}{\partial t} (w(x,t))^2 d[Q(x)] dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{[0, \ell]} \int_0^{t_0} \frac{\partial}{\partial t} (w(x, t))^2 dt d[Q(x)] = \frac{1}{2} \int_{[0, \ell]} (w(x, t_0))^2 d[Q(x)].$$

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{[0, \ell]} (w'_t(x, t_0))^2 d[M(x)] + \frac{1}{2} \int_0^\ell p(x) (w'_\mu(x, t_0))^2 d\mu(x) + \\ + \frac{1}{2} \int_{[0, \ell]} (w(x, t_0))^2 d[Q(x)] = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $M(x)$, $\mu(x)$, $Q(x)$ – возрастающие функции, $\inf_{[0, \ell]} p(x) > 0$, то, $w(x, t_0) = 0$ для всех t_0 . Значит, $w(x, T) = 0$, что и требовалось доказать. \square

Докажем теперь корректность исследуемой модели малых колебаний разрывной стилитьесовской струны с особенностями на концах.

Теорема 2.4.2. Пусть функции $\mu(x)$, $M(x)$, $\sigma(x)$ строго возрастают, $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$ и $Q(x) \neq \text{const}$. Пусть $v_1(x, t)$ и $v_2(x, t)$ – решения исследуемой модели при начальных данных $\varphi^{(1)}(x)$, $\psi^{(1)}(x)$ и $\varphi^{(2)}(x)$, $\psi^{(2)}(x)$, соответственно, т.е. решения моделей

$$\begin{cases} v_{tt}^{(i)}(x, t) M'_{[\sigma]}(x) = (p(x) v_\mu^{(i)}(x, t))'_{[\sigma]} - v^{(i)}(x, t) Q'_{[\sigma]}(x) + F'_{[\sigma]}(x, t), & x \in [0, \ell] \\ v^{(i)}(x, 0) = \varphi^{(i)}(x), \\ v_t^{(i)}(x, 0) = \psi^{(i)}(x), \end{cases} \quad (2.4.7)$$

($i = 1, 2$). Обозначим через $v(x, t)$ их разность: $v(x, t) = v_1(x, t) - v_2(x, t)$.

Если $\varphi(x) = \varphi^{(1)}(x) - \varphi^{(2)}(x)$, $\psi(x) = \psi^{(1)}(x) - \psi^{(2)}(x)$ и $\varphi'_\mu(x) = \varphi_\mu^{(1)}(x) - \varphi_\mu^{(2)}(x)$ малы в смысле нормы $\|g(x)\|_\mu = \max_{[0, \ell]_\mu} |g(x)|$ пространства S_μ μ -непрерывных функций, то $|v(x, t)|$ также меняется мало на прямоугольнике $\overline{[0, \ell]_\mu} \times [0, T]$.

Доказательство. Заметим, что $v(x, t)$ – решение уравнения

$$v''_{tt}(x, t) M'_{[\sigma]}(x) = (p(x) v'_\mu(x, t))'_{[\sigma]} - v(x, t) Q'_{[\sigma]}(x).$$

Умножив это уравнение на v'_t и проинтегрировав полученное выражение, имеем

$$\int_{[0,\ell]} v'_t(x,t)v''_{tt}(x,t)d[M(x)] = \int_{[0,\ell]} v'_t(x,t)d_x[p(x)v'_\mu(x,t)] - \int_{[0,\ell]} v'_t(x,t)u(x,t)d[Q(x)].$$

Зафиксируем произвольное $t_0 \in [0, T]$ и проинтегрируем предыдущее равенство по отрезку $[0, t_0]$. Получим, что

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \int_{[0,\ell]} v'_t(x,t)v''_{tt}(x,t)d[M(x)]dt &= \int_0^{t_0} \int_{[0,\ell]} v'_t(x,t)d_x[p(x)v'_\mu(x,t)]dt - \\ &- \int_0^{t_0} \int_{[0,\ell]} v'_t(x,t)u(x,t)d[Q(x)]dt. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Рассмотрим интеграл $\int_0^{t_0} \int_{[0,\ell]} v'_t(x,t)v''_{tt}(x,t)d[M(x)]dt$ и, воспользовавшись теоремой Фубини, перепишем его следующим образом:

$$\int_0^{t_0} \int_{[0,\ell]} v'_t(x,t)v''_{tt}(x,t)d[M(x)]dt = \frac{1}{2} \int_{[0,\ell]} ((v'_t(x,t_0))^2 - \psi(x)^2) d[M(x)].$$

Внутренний интеграл в $\int_0^{t_0} \int_{[0,\ell]} v'_t(x,t)d[p(x)v'_\mu(x,t)]dt$ проинтегрируем по частям

$$\int_0^{t_0} \int_{[0,\ell]} v'_t(x,t)d_x[p(x)v'_\mu(x,t)]dt = -\frac{1}{2} \int_{[0,\ell]} p(x) ((v'_\mu(x,t_0))^2 - \varphi_\mu'^2(x)) d\mu(x),$$

т.к. $p(0)v'_\mu(0,t) = p(\ell)v'_\mu(\ell,t) = 0$ и $v'_t(x,t) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial t}(v'_\mu(s,t)) d\mu(s)$.

Интеграл $\int_0^{t_0} \int_{[0, \ell]} v'_t(x, t)v(x, t)d[Q(x)]dt$ перепишем следующим образом

$$\int_0^{t_0} \int_{[0, \ell]} v'_t(x, t)v(x, t) d[Q(x)] dt = \frac{1}{2} \int_{[0, \ell]} ((v(x, t_0))^2 - \varphi^2(x)) d[Q(x)].$$

Подставив полученные представления в равенство (2.4.8), получим, что

$$\begin{aligned} \int_{[0, \ell]} (v'_t(x, t_0))^2 d[M(x)] + \int_{[0, \ell]} p(x) (v'_\mu(x, t_0))^2 d\mu(x) + \int_{[0, \ell]} v^2(x, t_0) d[Q(x)] = \\ = \int_{[0, \ell]} \psi^2(x) d[M(x)] + \int_{[0, \ell]} p(x) \varphi_\mu'^2(x) d\mu(x) + \int_{[0, \ell]} \varphi^2(x) d[Q(x)]. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Левая часть равенства (2.4.9) мала, так как по условию правая часть мала. Обозначая через ε правую часть уравнения (2.4.12), для всякого $t_0 \in [0, T]$ и каждого $x \in \overline{[0, \ell]}_\mu$ будем иметь

$$\int_0^x (v'_t(s, t_0))^2 d[M(s)] \leq \int_{[0, \ell]} (v'_t(s, t_0))^2 d[M(s)] \leq \varepsilon.$$

Аналогично,

$$\int_0^x p(s) (v'_\mu(s, t_0))^2 d\mu(s) \leq \int_{[0, \ell]} p(s) (v'_\mu(s, t_0))^2 d\mu(s) \leq \varepsilon.$$

Покажем, что для всех $x \in \overline{[0, \ell]}_\mu$ и $t_0 \in [0, T]$ величина $|v(x, t_0)|$ мала, если малы ε и величина $\max_{x \in \overline{[0, \ell]}_\mu} |\varphi(x)|$. Имеем

$$|v(x, t_0)| \leq |v(x, t_0) - v(0, t_0)| + |v(0, t_0)|.$$

Оценим каждое слагаемое в правой части последнего равенства. Для первого слагаемого, используя неравенство Коши-Буняковского, последо-

вательно находим

$$|v(x, t_0) - v(0, t_0)| \leq \sqrt{\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{c_0}} \cdot \sqrt{\varepsilon}, \quad (2.4.10)$$

где $c_0 = \inf_{x \in (0, \ell)} p(x) > 0$. Интеграл $\int_{[0, \ell]} |v(x, t_0) - v(0, t_0)| d[M(x)]$, в силу неравенства (2.4.10), допускает оценку

$$\int_{[0, \ell]} |v(x, t_0) - v(0, t_0)| d[M(x)] \leq \sqrt{\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{c_0}} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot (M(\ell) - M(0)).$$

Отсюда, после несложных преобразований, найдем

$$\begin{aligned} \int_{[0, \ell]} |v(0, t_0)| d[M(x)] &\leq \sqrt{\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{c_0}} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot (M(\ell) - M(0)) + \\ &+ \int_{[0, \ell]} |v(x, t_0) - v(x, 0)| d[M(x)] + \int_{[0, \ell]} |\varphi(x)| d[M(x)]. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Для интеграла $\int_{[0, \ell]} |v(x, t_0) - v(x, 0)| d[M(x)]$, применяя теорему Фубини и неравенство Коши-Буняковского, получаем оценку

$$\int_{[0, \ell]} |v(x, t_0) - v(x, 0)| d[M(x)] \leq \sqrt{M(\ell) - M(0)} \cdot T \cdot \sqrt{\varepsilon}.$$

Тогда (2.4.11) принимает вид

$$\begin{aligned} |v(0, t_0)|(M(\ell) - M(0)) &\leq \sqrt{\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{c_0}} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot (M(\ell) - M(0)) + \\ &+ \sqrt{M(\ell) - M(0)} \cdot T \cdot \sqrt{\varepsilon} + \max_{x \in [0, \ell]_\mu} |\varphi(x)|(M(\ell) - M(0)). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$|v(0, t_0)| \leq \sqrt{\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{c_0}} \cdot \sqrt{\varepsilon} + \frac{T \cdot \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M(\ell) - M(0)}} + \max_{x \in [0, \ell]_\mu} |\varphi(x)|. \quad (2.4.12)$$

Таким образом, с учетом (2.4.10) и (2.4.12), $|v(x, t_0)|$ допускает перезапись

$$|v(x, t_0)| \leq 2\sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\frac{\mu(\ell) - \mu(0)}{c_0}} + \frac{T \cdot \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{M(\ell) - M(0)}} + \max_{x \in [0, \ell]_\mu} |\varphi(x)|.$$

Из последнего неравенства и следует требуемое. Другими словами, показано, что при малом изменении начальных условий $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ соответствующие решения математической задачи (2.4.7) изменяется мало. \square

С учетом результатов, полученных в первой главе, и методов, разработанных в данной главе, может быть обоснован метод Фурье для математической модели малых колебаний разрывной стилтьесовской струны с особенностями на концах.

2.5 Поиск режимов колебаний разрывной стилтьесовской струны

В настоящем разделе для частных случаев исследуемых математических моделей приведен алгоритм нахождения таких условий движения концов струны и внешних воздействий, которые позволяют перевести колебательный процесс в моделях в заданный момент времени в заданное состояние.

2.5.1 Поиск режимов колебаний разрывной струны без особенностей на концах

Рассмотрим задачу о колебаниях системы, состоящей из двух кусков струны единичной длины, натянутых вдоль отрезка $[-1, 1]$ и прикрепленных в точке 0 к вертикальной спице, по которой они могут перемещаться (без учета трения). При этом предполагается, что куски дополнительно

соединены между собой пружиной жесткости γ . Обозначим через $u(x, t)$ отклонение такой системы в точке x от положения равновесия в момент времени t . Заметим, что в точке $x = 0$ функция $u(x, t)$ не определена. Определены и имеют физический смысл лишь предельные значения $u(-0, t)$, $u(+0, t)$ – отклонения соответствующих концов кусков струн. Колебания такой системы при $x \neq 0$ могут быть заданы с помощью волнового уравнения

$$u''_{xx}(x, t) = u''_{tt}(x, t), \quad \text{где } -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1.$$

Рассмотрим задачи выбора условий движения концов струны $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$, позволяющих перевести данную систему из начального состояния $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u'_t(x, 0) = \psi(x)$ в финальное состояние $u(x, T) = \varphi^*(x)$, $u'_t(x, T) = \psi^*(x)$, $-1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1$ за малый промежуток времени T .

Математическая модель такой задачи имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} u''_{xx}(x, t) = u''_{tt}(x, t), \quad -1 < x < 0, 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u'_x(+0, t) = \gamma \Delta u(0, t), \\ u'_x(-0, t) = \gamma \Delta u(0, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ u(-1, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \\ u(1, t) = \mu_1(t). \quad 0 \leq t \leq T \end{array} \right. \quad (2.5.1)$$

Теорема 2.5.1. Пусть $\varphi^*, \varphi \in C^2[-1, 0) \cup (0, 1]$; $\psi, \psi^* \in C^1[-1, 0) \cup (0, 1]$; $0 < T < 2$; $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$; $\varphi'(+0) = \gamma(\varphi(+0) - \varphi(-0))$; $\varphi'(-0) = \gamma(\varphi(+0) - \varphi(-0))$; $\varphi''(-1) = \varphi''(1) = 0$; $\psi(+0) = \psi(-0)$; $\psi'(+0) = -\psi'(-0)$; $\psi(-1) = \psi(1) = 0$. Тогда решение $u(x, t)$ задачи (2.5.1) может быть представлено в виде

$$u(x, t) = \begin{cases} \underline{\mu}_1(t+x-1) + \underline{\mu}_1(t-x-1) - \\ 2\gamma e^{-2\gamma(t-x-1)} \int_0^{t-x-1} e^{2\gamma\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha + v(x, t), & x > 0 \\ \underline{\mu}_2(t-x-1) + \underline{\mu}_2(x+t-1) - \\ 2\gamma e^{-2\gamma(x+t-1)} \int_0^{x+t-1} e^{2\gamma\alpha} \underline{\mu}_2(\alpha) d\alpha + v(x, t), & x < 0, \end{cases} \quad (2.5.2)$$

где

$$\underline{\mu}_i(t) = \begin{cases} \mu_i(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$$v(x, t) = \begin{cases} \frac{\Phi^+(x+t) + \Phi^+(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \Psi^+(s) ds, & x > 0 \\ \frac{\Phi^-(x+t) + \Phi^-(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \Psi^-(s) ds, & x < 0, \end{cases}$$

$$\Phi^+(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 < x \leq 1 \\ \varphi(+0), & x = 0 \\ -\varphi(2-x), & 1 < x \leq 2 \\ -\varphi(x-2) + 2\gamma e^{-2\gamma(x-2)} \int_0^{x-2} e^{2\gamma\alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha, & 2 < x \leq 3 \\ \varphi(-x) - 2\gamma e^{2\gamma x} \int_0^{-x} e^{-2\gamma\alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha, & -1 \leq x < 0 \\ -\varphi(x+2) - 2\gamma e^{2\gamma x} \int_0^1 e^{2\gamma\alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha - \\ -2\gamma e^{2\gamma(x+2)} \int_1^{x+2} e^{-2\gamma\alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha, & -2 \leq x < -1, \end{cases}$$

$$\Phi^{-}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & -1 \leq x < 0 \\ \varphi(-0), & x = 0 \\ -\varphi(-x-2), & -2 \leq x < -1 \\ -\varphi(x+2) - 2\gamma e^{2\gamma(x+2)} \int_0^{x+2} e^{-2\gamma\alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha, & -3 \leq x < -2 \\ \varphi(-x) + 2\gamma e^{-2\gamma x} \int_0^{-x} e^{-2\gamma\alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha, & 0 < x \leq 1 \\ -\varphi(x-2) + 2\gamma e^{-2\gamma x} \int_0^{-1} e^{-2\gamma\alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha + \\ + 2\gamma e^{-2\gamma(x-2)} \int_{-1}^{x-2} e^{2\gamma\alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

$$\Psi^{+}(x) = \begin{cases} \psi(x), & 0 < x \leq 1 \\ \psi(+0), & x = 0 \\ -\psi(2-x), & 1 < x \leq 2 \\ -\psi(x-2) + 2\gamma e^{-2\gamma(x-2)} \int_0^{x-2} e^{2\gamma\alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha, & 2 < x \leq 3 \\ \psi(-x) - 2\gamma e^{2\gamma x} \int_0^{-x} e^{-2\gamma\alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha, & -1 \leq x < 0 \\ -\psi(x+2) - 2\gamma e^{2\gamma x} \int_0^1 e^{2\gamma\alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha - \\ - 2\gamma e^{2\gamma(x+2)} \int_1^{x+2} e^{-2\gamma\alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha, & -2 \leq x < -1, \end{cases}$$

$$\Psi^{-}(x) = \begin{cases} \psi(x), & -1 \leq x < 0 \\ \psi(-0), & x = 0 \\ -\psi(-x-2), & -2 \leq x < -1 \\ -\psi(x+2) - 2\gamma e^{2\gamma(x+2)} \int_0^{x+2} e^{-2\gamma\alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha, & -3 \leq x < -2 \\ \psi(-x) + 2\gamma e^{-2\gamma x} \int_0^{-x} e^{-2\gamma\alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha, & 0 < x \leq 1 \\ -\psi(x-2) + 2\gamma e^{-2\gamma x} \int_0^{-1} e^{-2\gamma\alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha + \\ + 2\gamma e^{-2\gamma(x-2)} \int_{-1}^{x-2} e^{2\gamma\alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Доказательство. Справедливость теоремы может быть установлена путем подстановки формулы (2.5.2) в задачу (2.5.1). Представление (2.5.2) было получено из суммы решений задач

$$\left\{ \begin{array}{l} u''_{xx}(x, t) = u''_{tt}(x, t), \quad -1 < x < 0, 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u'_x(+0, t) = \gamma \Delta u(0, t), \\ u'_x(-0, t) = \gamma \Delta u(0, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ u(-1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T; \end{array} \right. \quad (2.5.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u''_{xx}(x, t) = u''_{tt}(x, t), \quad -1 < x < 0, 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u'_x(+0, t) = \gamma \Delta u(0, t), \\ u'_x(-0, t) = \gamma \Delta u(0, t), \\ u(x, 0) = 0, \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ u'_t(x, 0) = 0, \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ u(-1, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \\ u(1, t) = \mu_1(t). \quad 0 \leq t \leq T \end{array} \right. \quad (2.5.4)$$

В свою очередь, решение задачи (2.5.3) на соответствующих промежутках может быть представлено в виде суммы решений следующих задач

$$\left\{ \begin{array}{l} u''_{xx}(x, t) = u''_{tt}(x, t), \quad 0 < x < 1 \\ u(1, t) = 0, \\ u'_x(+0, t) = 0, \\ u(x, 0) = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2}, \\ u'_t(x, 0) = \frac{\psi(x) + \psi(-x)}{2}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u''_{xx}(x, t) = u''_{tt}(x, t), \quad 0 < x < 1 \\ u(1, t) = 0, \\ u'_x(+0, t) = 2\gamma u(+0, t), \\ u(x, 0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}, \\ u'_t(x, 0) = \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{2}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u''_{xx}(x, t) = u''_{tt}(x, t), \quad -1 < x < 0 \\ u(-1, t) = 0, \\ u'_x(-0, t) = 0, \\ u(x, 0) = \frac{\varphi(-x) + \varphi(x)}{2}, \\ u'_t(x, 0) = \frac{\psi(-x) + \psi(x)}{2}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u''_{xx}(x, t) = u''_{tt}(x, t), \quad -1 < x < 0 \\ u(-1, t) = 0, \\ u'_x(-0, t) = -2\gamma_1 u(-0, t), \\ u(x, 0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}, \\ u'_t(x, 0) = \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{2}, \end{array} \right.$$

$\Phi^+(x)$, $\Phi^-(x)$, $\Psi^+(x)$, $\Psi^-(x)$ можно получить с помощью формулы Даламбера. Найдем теперь функции $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$. Обозначим через $v(x, t)$ решение задачи (2.5.3), $h(x, t)$ – решение задачи (2.5.4). Решение $u(x, t)$ исходной задачи (2.5.1) представимо в виде $u(x, t) = h(x, t) + v(x, t)$. Тогда $h(x, T) = \varphi^*(x) - v(x, T) = \tilde{\varphi}(x)$, $h'_t(x, T) = \psi^*(x) - v'_t(x, T) = \tilde{\psi}(x)$.

Сначала будем рассматривать случай, когда $0 < T < 1$. Будем полагать, что $x > 0$, и найдем μ_1 . Имеем

$$\underline{\mu}_1(T + x - 1) = \tilde{\varphi}(x), \quad (2.5.5)$$

$$\underline{\mu}'_1(T + x - 1) = \tilde{\psi}(x). \quad (2.5.6)$$

Значит, $\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0) - (\hat{\tilde{\psi}}(t) - \hat{\tilde{\psi}}(t_0)) \equiv 0$, где $\hat{\tilde{\psi}}(t)$ – какая-то первообразная $\tilde{\psi}(t)$, $t_0 \in (0, 1]$. Выберем первообразную так, чтобы

$$\hat{\tilde{\psi}}(t_0) - \tilde{\varphi}(t_0) = 0. \quad (2.5.7)$$

Тогда получим равенство $\hat{\tilde{\psi}}(t) - \tilde{\varphi}(t) = 0$, справедливое для всех $t \in (0, 1]$. С другой стороны,

$$2\underline{\mu}'_1(T + x - 1) = \tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x) \equiv 0.$$

Зафиксируем любое $t_0 \in (0, 1 - T]$, тогда $\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0) + \hat{\tilde{\psi}}(t) - \hat{\tilde{\psi}}(t_0) \equiv 0$. Первообразную выберем так, чтобы выполнялось условие

$$\hat{\tilde{\psi}}(t_0) + \tilde{\varphi}(t_0) = 0. \quad (2.5.8)$$

Тогда для всех $t \in (0, 1 - T]$ получим, что $\tilde{\varphi}(t) + \widehat{\psi}(t) = 0$. Поскольку $\tilde{\varphi}(x) = \underline{\mu}_1(T + x - 1)$, то $\tilde{\varphi}(x) \equiv 0$ при $x \leq 1 - T$. Следовательно, если $t_0 \in (0, 1 - T]$, то $\tilde{\varphi}(t_0) = 0$. Таким образом, для $t_0 \in (0, 1 - T]$ равенства (2.5.7) и (2.5.8) эквивалентны. Получаем, что

$$\tilde{\varphi}(t) - \widehat{\psi}(t) = 0, \quad t \in (0, 1] \quad (2.5.9)$$

$$\tilde{\varphi}(t) + \widehat{\psi}(t) = 0, \quad t \in (0, 1 - T]. \quad (2.5.10)$$

Первообразную $\widehat{\psi}(t)$ для функции $\tilde{\psi}(t)$ выберем так, чтобы $\widehat{\psi}(t_0) + \tilde{\varphi}(t_0) = 0$, где $t_0 \in (0, 1 - T]$. Вернувшись к исходным обозначениям, перепишем (2.5.8), (2.5.9), (2.5.10) как

$$\varphi^*(t) - \widehat{\psi}^*(t) - \Phi^+(t - T) + \widehat{\Psi}^+(t - T) = 0, \quad t \in (0, 1], \quad (2.5.11)$$

$$\varphi^*(t) + \widehat{\psi}^*(t) - \Phi^+(t + T) - \widehat{\Psi}^+(t + T) = 0, \quad t \in (0, 1 - T], \quad (2.5.12)$$

$$\varphi^*(t_0) + \widehat{\psi}^*(t_0) - \Phi^+(t_0 + T) - \widehat{\Psi}^+(t_0 + T) = 0, \quad t_0 \in (0, 1 - T]. \quad (2.5.13)$$

Равенство (2.5.11) распадается на два. Если $t \in [T, 1]$, то оно принимает вид

$$\varphi^*(t) - \widehat{\psi}^*(t) - \varphi(t - T) + \widehat{\psi}(t - T) = 0. \quad (2.5.14)$$

Если же $t \in (0, T)$, то получаем выражение

$$\begin{aligned} & \varphi^*(t) - \widehat{\psi}^*(t) - \varphi(T - t) + 2\gamma e^{2\gamma(t-T)} \int_0^{t-T} e^{-2\gamma\alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha - \\ & - \widehat{\psi}(T - t) - e^{2\gamma(t-T)} \int_0^{t-T} e^{-2\gamma\alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha + \int_0^{t-T} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha. \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

Равенства (2.5.12), (2.5.13) при $t \in (0, 1 - T]$ примут вид

$$\varphi^*(t) + \widehat{\psi}^*(t) - \varphi(t + T) - \widehat{\psi}(t + T) = 0, \quad (2.5.16)$$

$$\varphi^*(t_0) + \widehat{\psi}^*(t_0) - \varphi(t_0 + T) - \widehat{\psi}(t_0 + T) = 0. \quad (2.5.17)$$

Сложим равенства (2.5.5) и (2.5.6) после чего, вернемся к исходным обозначениям и введем замену переменных $t = T + x - 1$

$$2\underline{\mu}'_1(t) = \varphi^{*'}(t - T + 1) + \psi^*(t - T + 1) - \Phi^{+'}(t + 1) - \Psi^+(t + 1),$$

откуда при $t \in [0, T]$ получим явное представление для $\mu_1(t)$

$$\mu_1(t) = \frac{1}{2}(\varphi^*(t - T + 1) + \widehat{\psi}^*(t - T + 1) + \varphi(1 - t) - \widehat{\psi}(1 - t)). \quad (2.5.18)$$

При этом функции φ , ψ , φ^* , ψ^* должны быть связаны между собой равенствами (2.5.14)–(2.5.16), а первообразные функций ψ , ψ^* – условием (2.5.17).

Проведя аналогичные рассуждения для $x < 0$, получим, что

$$\mu_2(t) = \frac{1}{2}(\varphi^*(T - t - 1) - \widehat{\psi}^*(T - t - 1) + \varphi(t - 1) + \widehat{\psi}(t - 1)).$$

При этом должны выполняться следующие условия связи между начальными и финальными данными

$$\begin{aligned} \varphi^*(t) + \widehat{\psi}^*(t) - \varphi(t + T) - \widehat{\psi}(t + T) &= 0, \quad t \in [-1, -T] \\ \varphi^*(t) + \widehat{\psi}^*(t) - \varphi(t - T) - 2\gamma e^{-2\gamma(t+T)} \int_0^{-t-T} e^{-2\gamma\alpha}(\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha))d\alpha + \\ &+ \widehat{\psi}(-t - T) + e^{-2\gamma(t+T)} \int_0^{-t-T} e^{-2\gamma\alpha}(\psi(\alpha) - \psi(-\alpha))d\alpha - \\ &- \int_0^{-t-T} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha))d\alpha = 0, \quad t \in (-T, 0) \\ -\varphi^*(t) + \widehat{\psi}^*(t) + \varphi(t - T) - \widehat{\psi}(t - T) &= 0, \quad t \in [T - 1, 0) \end{aligned}$$

а первообразные выбираются так, чтобы

$$-\varphi^*(t_0) + \widehat{\psi}^*(t_0) + \varphi(t_0 - T) - \widehat{\psi}(t_0 - T) = 0, \quad t_0 \in [T - 1, 0).$$

Рассмотрим теперь случай, когда $1 \leq T < 2$. Найдем представление функции $\mu_1(t)$. При $x > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_1(T+x-1) + \underline{\mu}_1(T-x-1) - 2\gamma e^{-2\gamma(T-x-1)} \int_0^{T-x-1} e^{2\gamma\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha &= \tilde{\varphi}(x), \\ \underline{\mu}_1'(T+x-1) + \underline{\mu}_1'(T-x-1) + 4\gamma^2 e^{-2\gamma(T-x-1)} \int_0^{T-x-1} e^{2\gamma\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha - \\ - 2\gamma \underline{\mu}_1(T-x-1) &= \tilde{\psi}(x). \end{aligned}$$

Продифференцируем по x первое равенство и вычтем из него второе. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}'(x) - \tilde{\psi}'(x) &= -2\underline{\mu}_1'(T-x-1) - 8\gamma^2 e^{-2\gamma(T-x-1)} \int_0^{T-x-1} e^{2\gamma\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha + \\ &+ 4\gamma \underline{\mu}_1(T-x-1). \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

При $x \in [T-1, 1]$, правая часть уравнения (2.5.19) обращается в нуль, тогда для любого $x_0 \in [T-1, 1]$ имеем

$$\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(x_0) - \tilde{\psi}(x) + \tilde{\psi}(x_0) \equiv 0.$$

Первообразную выбираем так, чтобы выполнялось $\tilde{\psi}(x_0) - \tilde{\varphi}(x_0) = 0$. Тогда получим равенство $\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\psi}(x) = 0$, которое с учетом найденных представлений функций Φ^+ , Ψ^+ и замены $x = t$ примет вид

$$\varphi^*(t) - \hat{\psi}^*(t) - \Phi^+(t-T) - \hat{\Psi}^+(t-T) = 0.$$

Поскольку нам известны представления функций Φ^+ , Ψ^+ для $t \in [T-1, 1]$, то последнее равенство перепишем

$$\varphi^*(t) - \hat{\psi}^*(t) - \varphi(T-t) + 2\gamma e^{2\gamma(t-T)} \int_0^{T-t} e^{2\gamma\alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha + \hat{\psi}(T-t) +$$

$$+e^{2\gamma(t-T)} \int_0^{T-t} e^{2\gamma\alpha}(\psi(\alpha) - \psi(-\alpha))d\alpha + \int_0^{T-t} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha))d\alpha = 0. \quad (2.5.20)$$

Вернемся снова к уравнению (2.5.19). Воспользовавшись представлениями для функций $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$, проинтегрируем равенство и введем замену переменной $t = T - x - 1$, $t \in [0, T - 1)$

$$2\underline{\mu}_1(t) + 4\gamma e^{-2\gamma t} \int_0^t e^{2\gamma\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha = \varphi^*(T - t - 1) - \hat{\psi}^*(T - t - 1) - \\ - \Phi^+(-t - 1) + \hat{\Psi}^+(-t - 1).$$

Применив к последнему равенству ряд преобразований и воспользовавшись представлениями функций Φ^+ и Ψ^+ , получим, что при $t \in [0, T - 1)$

$$\mu_1(t) = \frac{1}{2} \left\{ \varphi^*(T - t - 1) - \hat{\psi}^*(T - t - 1) - \varphi^*(T - 1) + \hat{\psi}^*(T - 1) + \right. \\ \left. + \varphi(1 - t) - \int_1^{1-t} \psi(\alpha) d\alpha \right\} - \gamma \int_{T-1}^{T-t-1} (\varphi^*(\alpha) - \hat{\psi}^*(\alpha)) d\alpha - \\ - \gamma \int_1^{1-t} (\varphi(-\alpha) + \hat{\psi}(\alpha)) d\alpha - \gamma t (\hat{\psi}(1) + \hat{\psi}(-1)). \quad (2.5.21)$$

С другой стороны, $\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x) = 2\underline{\mu}_1'(T + x - 1)$. Воспользовавшись представлениями $\tilde{\varphi}(x)$ и $\tilde{\psi}(x)$, проинтегрируем полученное равенство и введем замену переменной $t = T + x - 1$, $t \in (T - 1, T]$

$$\underline{\mu}_1(t) = \frac{1}{2} (\varphi^*(t - T + 1) + \hat{\psi}^*(t - T + 1) - \Phi^+(t + 1) - \hat{\Psi}^+(t + 1)).$$

Для всех $t \in (T - 1, 1)$ функция $\mu_1(t)$ имеет вид аналогичный предыдущему случаю, а именно (2.5.18). При $t \in (1, T]$ функцию $\mu_1(t)$ можно записать в виде

$$\mu_1(t) = \frac{1}{2} \left\{ \varphi^*(t - T + 1) + \hat{\psi}^*(t - T + 1) + \varphi(t - 1) + \hat{\psi}(t - 1) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -2\gamma e^{-2\gamma(t-1)} \int_0^{t-1} e^{2\gamma\alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha + \\
& + e^{-2\gamma(t-1)} \int_0^{t-1} e^{2\gamma\alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha - \int_0^{t-1} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha \Big\}. \quad (2.5.22)
\end{aligned}$$

Таким образом, при $1 \leq T < 2$ функция $\mu_1(t)$ имеет вид (2.5.18), (2.5.21) и (2.5.22), а функции φ , ψ , φ^* , ψ^* должны удовлетворять условию (2.5.20).

Аналогично для случая $x < 0$ функция $\mu_2(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\mu_2(t) &= \frac{1}{2} \left\{ \varphi^*(t - T + 1) + \widehat{\psi}^*(t - T + 1) - \varphi^*(1 - T) - \widehat{\psi}^*(1 - T) + \right. \\
& \quad \left. + \varphi(t - 1) + \int_{-1}^{t-1} \psi(\alpha) d\alpha \right\} + \gamma \int_{1-T}^{t-T+1} (\varphi^*(\alpha) + \widehat{\psi}^*(\alpha)) d\alpha + \\
& \quad + \gamma \int_{-1}^{t-1} (\varphi(-\alpha) + \widehat{\psi}(-\alpha)) d\alpha + \gamma t (\widehat{\psi}(1) + \widehat{\psi}(-1)), \quad t \in [0, T - 1) \\
\mu_2(t) &= \frac{1}{2} (\varphi^*(T - t - 1) - \widehat{\psi}^*(T - t - 1) + \varphi(t - 1) + \widehat{\psi}(t - 1)), \quad t \in (T - 1, 1) \\
\mu_2(t) &= \frac{1}{2} \left\{ \varphi^*(T - t - 1) - \widehat{\psi}^*(T - t - 1) + \varphi(1 - t) - \widehat{\psi}(1 - t) + \right. \\
& \quad + 2\gamma e^{2\gamma(1-t)} \int_0^{1-t} e^{-2\gamma\alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha - e^{2\gamma(1-t)} \int_0^{1-t} e^{-2\gamma\alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha + \\
& \quad \left. + \int_0^{1-t} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha \right\}, \quad t \in (1, T].
\end{aligned}$$

При $t \in [-1, 1 - T]$ функции φ , ψ , φ^* , ψ^* должны быть связаны между собой следующим условием

$$\varphi^*(t) + \widehat{\psi}^*(t) - \varphi(-t - T) - 2\gamma e^{-2\gamma(t+T)} \int_0^{-t-T} e^{-2\gamma\alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha)) d\alpha +$$

$$\begin{aligned}
& + \widehat{\psi}(-t - T) + e^{-2\gamma(t+T)} \int_0^{-t-T} e^{-2\gamma\alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha - \\
& - \int_0^{-t-T} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha = 0.
\end{aligned}$$

Для случая, когда $T = 2$, условия движения концов струн находятся путем подстановки соответствующего значения T в найденные представления функций $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ при $1 \leq T < 2$. \square

Теорема 2.5.2. Пусть $2 < T \leq 3$. Тогда для произвольных четырех функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi^*(x)$, $\psi^*(x)$ существуют режимы движения концов струны $u(1, t) = \mu_1(t)$, $u(-1, t) = \mu_2(t)$, переводящие процесс колебаний из состояния $\{u(x, 0) = \varphi(x), u'_t(x, 0) = \psi(x)\}$ в состояние $\{u(x, T) = \varphi^*(x), u'_t(x, T) = \psi^*(x)\}$. Функции $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ определяются неоднозначно и имеют вид $\mu_1(t) = \bar{\mu}_1(t) + \underline{\mu}_1(t)$, $\mu_2(t) = \bar{\mu}_2(t) + \underline{\mu}_2(t)$, где

$$\bar{\mu}_1(t) = \frac{1}{2} \begin{cases} \varphi(1-t) - \widehat{\psi}(1-t) + 2\bar{\omega}(t+2) - \\ - 4\gamma e^{2\gamma(t+2)} \int_{t+2}^{T+1} e^{-2\gamma\alpha} \bar{\omega}(\alpha) d\alpha, & 0 \leq t \leq T-2 \\ \varphi(1-t) - \widehat{\psi}(1-t), & T-2 \leq t < 1 \\ \varphi(t-1) + \widehat{\psi}(t-1) - 2\gamma \int_1^{t-1} (\varphi(\alpha) + \widehat{\psi}(\alpha)) d\alpha, & 1 < t \leq 2 \\ 2\bar{\omega}(t), & 2 \leq t \leq T \\ 0, & t \geq T, \end{cases}$$

$$\bar{\mu}_2(t) = \frac{1}{2} \begin{cases} \varphi(t-1) + \widehat{\psi}(t-1) + 2\bar{\eta}(t+2) - \\ -4\gamma e^{2\gamma(t+2)} \int_{t+2}^{T+1} e^{-2\gamma\alpha} \bar{\eta}(\alpha) d\alpha, & 0 \leq t \leq T-2 \\ \varphi(t-1) + \widehat{\psi}(t-1), & T-2 \leq t < 1 \\ \varphi(1-t) - \widehat{\psi}(1-t) + 2\gamma \int_{-1}^{1-t} (\varphi(\alpha) - \widehat{\psi}(\alpha)) d\alpha, & 1 < t \leq 2 \\ 2\bar{\eta}(t), & 2 \leq t \leq T \\ 0, & t \geq T, \end{cases}$$

$$\underline{\mu}_1(t) = \frac{1}{2} \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 2\underline{\omega}(t), & 0 \leq t \leq T-2 \\ \varphi^*(T-t-1) - \widehat{\psi}^*(T-t-1) - \\ -2\gamma \int_1^{T-t-1} (\varphi^*(\alpha) - \widehat{\psi}^*(\alpha)) d\alpha, & T-2 \leq t < T-1 \\ \varphi^*(t-T+1) + \widehat{\psi}^*(t-T+1), & T-1 < t \leq 2 \\ \varphi^*(t-T+1) + \widehat{\psi}^*(t-T+1) + 2\underline{\omega}(t-2) - \\ -4\gamma e^{-2\gamma(t-2)} \int_0^{t-2} e^{2\gamma\alpha} \underline{\omega}(\alpha) d\alpha, & 2 \leq t \leq T, \end{cases}$$

$$\underline{\mu}_2(t) = \frac{1}{2} \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 2\underline{\eta}(t), & 0 \leq t \leq T-2 \\ \varphi^*(t-T+1) + \widehat{\psi}^*(t-T+1) + \\ + 2\gamma \int_{-1}^{t-T+1} (\varphi^*(\alpha) + \widehat{\psi}^*(\alpha)) d\alpha, & T-2 \leq t < T-1 \\ \varphi^*(T-t-1) - \widehat{\psi}^*(T-t-1), & T-1 < t \leq 2 \\ \varphi^*(T-t-1) - \widehat{\psi}^*(T-t-1) + 2\underline{\eta}(t-2) - \\ -4\gamma e^{-2\gamma(t-2)} \int_0^{t-2} e^{2\gamma\alpha} \underline{\eta}(\alpha) d\alpha, & 2 \leq t \leq T, \end{cases}$$

где $\widehat{\psi}(t)$, $\widehat{\psi}^*(t)$ – какие-то первообразные функций $\psi(t)$, $\psi^*(t)$, соответственно; функции $\underline{\omega}(t)$, $\bar{\omega}(t)$, $\underline{\eta}(t)$, $\bar{\eta}(t)$ – произвольные функции, удовлетворяющие условиям $\underline{\omega}(0) = 0$, $\underline{\omega}(T-2) = \frac{1}{2}(\varphi^*(1) - \widehat{\psi}^*(1))$, $\underline{\eta}(0) = 0$, $\underline{\eta}(T-2) = \frac{1}{2}(\varphi(-1) + \psi(-1))$, $\bar{\omega}(T) = 0$, $\bar{\omega}(2) = \frac{1}{2}(\varphi(1) - \widehat{\psi}(1))$, $\bar{\eta}(T) = 0$, $\bar{\eta}(2) = \frac{1}{2}(\varphi(-1) - \widehat{\psi}(-1))$.

Доказательство. Решение рассматриваемой задачи $u(x, t)$ получается из суммы решений $\underline{u}(x, t)$ и $\bar{u}(x, t)$ следующих задач

$$\left\{ \begin{array}{l} u''_{xx}(x, t) = u''_{tt}(x, t), \quad -1 < x < 0, 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u'_x(+0, t) = \gamma \Delta u(0, t), \\ u'_x(-0, t) = \gamma \Delta u(0, t), \\ u(x, 0) = 0, \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ u'_t(x, 0) = 0, \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ u(x, T) = \varphi^*(x), \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ u'_t(x, T) = \psi^*(x), \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ u(-1, t) = \underline{\mu}_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \\ u(1, t) = \underline{\mu}_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{array} \right. \quad (2.5.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u''_{xx}(x, t) = u''_{tt}(x, t), \quad -1 < x < 0, 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u'_x(+0, t) = \gamma \Delta u(0, t), \\ u'_x(-0, t) = \gamma \Delta u(0, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ u(x, T) = 0, \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ u'_t(x, T) = 0, \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq, \\ u(-1, t) = \bar{\mu}_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \\ u(1, t) = \bar{\mu}_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{array} \right. \quad (2.5.24)$$

где $\underline{u}(x, t)$ – решение задачи (2.5.23), а $\bar{u}(x, t)$ – решение задачи (2.5.24).

Заметим, что решение $\underline{u}(x, t)$ задачи (2.5.23) имеет вид

$$\underline{u}(x, t) = \begin{cases} \underline{\mu}_1(x+t-1) + \underline{\mu}_1(t-x-1) - \underline{\mu}_1(x+t-3) - \\ - 2\gamma e^{-2\gamma(t-x-1)} \int_0^{t-x+1} e^{2\gamma\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha + \\ + 2\gamma e^{-2\gamma(x+t-3)} \int_0^{x+t-3} e^{2\gamma\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha, & 0 < x \leq 1 \\ \underline{\mu}_2(t-x-1) + \underline{\mu}_2(t+x-1) - \bar{\mu}_2(t-x-3) - \\ - 2\gamma e^{-2\gamma(t+x-1)} \int_0^{t+x-1} e^{2\gamma\alpha} \bar{\mu}_2(\alpha) d\alpha + \\ + 2\gamma e^{2\gamma(t-x-3)} \int_0^{t-x-3} e^{2\gamma\alpha} \bar{\mu}_2(\alpha) d\alpha, & -1 \leq x < 0, \end{cases}$$

Рассмотрим случай, когда $x > 0$. Сначала сложим равенства

$$\begin{aligned} & \underline{\mu}'_1(T+x-1) - \underline{\mu}'_1(T-x-1) - \underline{\mu}'_1(T+x+3) - \\ & - 4\gamma^2 e^{-2\gamma(T-x-1)} \int_0^{T-x-1} e^{2\gamma\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha + 2\gamma \underline{\mu}_1(T-x-1) - \\ & - 4\gamma^2 e^{-2\gamma(T+x+3)} \int_0^{T+x+3} e^{2\gamma\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha + 2\gamma \underline{\mu}_1(T+x-3) = \varphi^{*'}(x), \\ & \underline{\mu}'_1(T+x-1) + \underline{\mu}'_1(T-x-1) - \underline{\mu}'_1(T+x+3) + \\ & + 4\gamma^2 e^{-2\gamma(T-x-1)} \int_0^{T-x-1} e^{2\gamma\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha - 2\gamma \underline{\mu}_1(T-x-1) - \\ & - 4\gamma^2 e^{-2\gamma(T+x+3)} \int_0^{T+x+3} e^{2\gamma\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha + 2\gamma \underline{\mu}_1(T+x-3) = \psi^*(x), \end{aligned}$$

тогда получим

$$\begin{aligned} & 2\underline{\mu}'_1(T+x-1) - 2\underline{\mu}'_1(T+x-3) - 8\gamma^2 e^{-2\gamma(T+x+3)} \int_0^{T+x+3} e^{2\gamma\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha + \\ & + 4\gamma \underline{\mu}_1(T+x-3) = \varphi^{*'}(x) + \psi^*(x). \end{aligned} \quad (2.5.25)$$

Введя замену переменных $t = T + x - 1$, $t \in (T - 1, T]$ уравнение (2.5.25) примет вид

$$\begin{aligned} 2\underline{\mu}'_1(t) - 2\underline{\mu}'_1(t-2) - 8\gamma^2 e^{-2\gamma(t-2)} \int_0^{t-2} e^{2\gamma\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha + 4\gamma \underline{\mu}_1(t-2) = \\ = \varphi^*(t-T+1) + \psi^*(t-T+1). \end{aligned} \quad (2.5.26)$$

При $t \in (T - 1, 2]$ имеем $\underline{\mu}_1(t) = \frac{1}{2}(\varphi^*(t-T+1) + \widehat{\psi}^*(t-T+1))$.

При $t \in [2, T]$ проинтегрируем равенство (2.5.26)

$$2\underline{\mu}_1(t) - 2\underline{\mu}_1(t-2) + 4\gamma e^{-2\gamma(t-2)} \int_0^{t-2} e^{2\gamma\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha = \varphi^*(t-T+1) + \widehat{\psi}^*(t-T+1). \quad (2.5.27)$$

Введем теперь в уравнении (2.5.25) замену $t = T + x - 3$ и проинтегрируем его, тогда

$$2\underline{\mu}_1(t+2) - 2\underline{\mu}_1(t) + 4\gamma e^{-2\gamma t} \int_0^t e^{2\gamma\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha = \varphi^*(t-T+3) + \widehat{\psi}^*(t-T+3). \quad (2.5.28)$$

При $t \in [0, T-2]$ верно, что $t+2 \in [2, T]$ и посредством замены $s = t+2$ в равенстве (2.5.27) получаем

$$2\underline{\mu}_1(t+2) = 2\underline{\mu}_1(t) - 4\gamma e^{-2\gamma t} \int_0^t e^{2\gamma\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha + \varphi^*(t-T+3) + \widehat{\psi}^*(t-T+3).$$

Подставим полученное представление для $\underline{\mu}_1(t+2)$ в (2.5.28) и получим, что уравнение не зависит от функции $\underline{\mu}_1(t)$. Следовательно, на $t \in [0, T-2]$ функция $\underline{\mu}_1(t)$ может быть любой, то есть

$$\underline{\mu}_1(t) = \underline{\omega}(t),$$

где $\underline{\omega}(0) = \underline{\mu}_1(0) \equiv 0$.

Тогда для $t \in [2, T]$ получим

$$\underline{\mu}_1(t) = \frac{1}{2} \left(2\underline{\omega}(t-2) - 4\gamma e^{-2\gamma(t-2)} \int_0^{t-2} e^{2\gamma\alpha} \underline{\omega}(\alpha) d\alpha + \varphi^*(t-T+1) + \widehat{\psi}^*(t-T+1) \right).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} -2\underline{\mu}'_1(T-x-1) - 8\gamma^2 e^{-2\gamma(T-x-1)} \int_0^{T-x-1} e^{2\gamma\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha + 4\gamma \underline{\mu}_1(T-x-1) = \\ = \varphi^{*'}(x) - \psi^*(x). \end{aligned}$$

Заменив $t = T - x - 1$, $t \in [T - 2, T - 1)$ и применив к последнему равенству ряд преобразований, получим

$$\underline{\mu}_1(t) = \frac{1}{2} \left(\varphi^*(T-t-1) - \widehat{\psi}^*(T-t-1) - 2\gamma \int_1^{T-t-1} (\varphi^*(\alpha) - \widehat{\psi}^*(\alpha)) d\alpha \right).$$

Таким образом, было показано, что функцию $\mu_1(t)$ для случая, когда $2 < T \leq 3$, нельзя однозначно определить. Аналогично находятся представления функции $\underline{\mu}_2(t)$, когда $x < 0$.

Решение $\bar{u}(x, t)$ задачи (2.5.24) имеет вид

$$\bar{u}(x, t) = \begin{cases} \bar{\mu}_1(t-x+1) + \bar{\mu}_1(x+t+1) - \bar{\mu}_1(t-x+3) - \\ - 2\gamma e^{2\gamma(x+t+1)} \int_{x+t+1}^{T+1} e^{-2\gamma\alpha} \bar{\mu}_1(\alpha) d\alpha + \\ + 2\gamma e^{2\gamma(t-x+3)} \int_{t-x+3}^{T+1} e^{-2\gamma\alpha} \bar{\mu}_1(\alpha) d\alpha, & 0 < x \leq 1 \\ \bar{\mu}_2(x+t+1) + \bar{\mu}_2(t-x+1) - \bar{\mu}_2(x+t+3) - \\ - 2\gamma e^{2\gamma(t-x+1)} \int_{t-x+1}^{T+1} e^{-2\gamma\alpha} \bar{\mu}_2(\alpha) d\alpha + \\ + 2\gamma e^{2\gamma(x+t+3)} \int_{x+t+3}^{T+1} e^{-2\gamma\alpha} \bar{\mu}_2(\alpha) d\alpha, & -1 \leq x < 0, \end{cases}$$

Для того чтобы доказать неоднозначное определение функции $\bar{\mu}_1(t)$, воспользуемся схемой, описанной ранее. Используя представление решения

$\bar{u}(x, t)$, найдем разность $\varphi'(x) - \psi(x)$, т.е. при $t = 0$

$$\begin{aligned} -2\bar{\mu}'_1(1-x) + 2\bar{\mu}'_1(3-x) - 8\gamma^2 e^{2\gamma(3-x)} \int_{3-x}^{T+1} e^{-2\gamma\alpha} \bar{\mu}_1(\alpha) d\alpha + \\ + 4\gamma\bar{\mu}_1(3-x) = \varphi'(x) - \psi(x). \end{aligned} \quad (2.5.29)$$

Заменив в равенстве (2.5.29) $t = 1 - x$, $t \in [0, 1)$, проинтегрируем его

$$\begin{aligned} -2\bar{\mu}_1(t) + 2\bar{\mu}_1(t+2) - 4\gamma e^{2\gamma(t+2)} \int_{t+2}^{T+1} e^{-2\gamma\alpha} \bar{\mu}_1(\alpha) d\alpha = -\varphi(1-t) + \hat{\psi}(1-t). \end{aligned} \quad (2.5.30)$$

При $t \in [T-2, 1)$ из уравнения (2.5.30) находим, что

$$\bar{\mu}_1(t) = \frac{1}{2}(\varphi(1-t) - \hat{\psi}(1-t)).$$

Пусть $t = 3 - x$, $t \in [2, T]$, тогда проинтегрировав равенство (2.5.29), его можно переписать

$$-2\bar{\mu}_1(t-2) + 2\bar{\mu}_1(t) + 4\gamma e^{2\gamma t} \int_t^{T+1} e^{-2\gamma\alpha} \bar{\mu}_1(\alpha) d\alpha = -\varphi(3-t) + \hat{\psi}(3-t).$$

Проведя аналогичные рассуждения что и при нахождении $\underline{\mu}_1(t)$, получим, что при $t \in [2, T]$ функция $\bar{\mu}_1(t)$ может быть любой, то есть $\bar{\mu}_1(t) = \bar{\omega}(t)$, причем $\bar{\omega}(T) = \bar{\mu}_1(T) \equiv 0$.

Вернемся к уравнению (2.5.30). При $t \in [0, T-2]$ найдем, что

$$\bar{\mu}_1(t) = \frac{1}{2} \left\{ \varphi(1-t) - \hat{\psi}(1-t) + 2\bar{\omega}(t+2) - 4\gamma e^{2\gamma(t+2)} \int_{t+2}^{T+1} e^{-2\gamma\alpha} \bar{\omega}(\alpha) d\alpha \right\}.$$

С другой стороны, сумма $\varphi'(x) + \psi(x)$ равна

$$2\bar{\mu}'_1(x+1) - 8\gamma^2 e^{2\gamma(x+1)} \int_{x+1}^{T+1} e^{-2\gamma\alpha} \bar{\mu}_1(\alpha) d\alpha + 4\gamma\bar{\mu}_1(x+1) = \varphi'(x) + \psi(x).$$

Проинтегрировав полученную сумму и введя замену $t = x + 1$, имеем

$$2\bar{\mu}_1(t) - 4\gamma e^{2\gamma t} \int_t^{T+1} e^{-2\gamma\alpha} \bar{\mu}_1(\alpha) d\alpha = \varphi(t-1) + \widehat{\psi}(t-1).$$

Отсюда находим, что при $t \in (1, 2]$

$$\bar{\mu}_1(t) = \frac{1}{2} \left(\varphi(t-1) + \widehat{\psi}(t-1) - 2\gamma \int_{-1}^{t-1} (\varphi(\alpha) + \widehat{\psi}(\alpha)) d\alpha \right).$$

Что и требовалось доказать. Поиск представлений $\bar{\mu}_2(t)$ проводится аналогично. \square

2.5.2 Поиск режимов колебаний разрывной струны с особенностями на концах

Рассмотрим задачу о колебаниях механической системы, представляющей собой два куска струны единичной длины, натянутых вдоль отрезка $[-1, 1]$, на концах которого расположены пружины жесткости γ_2 , прикрепленные к вертикальным спицам, по которым они могут перемещаться (без учета трения). При этом предполагается, что куски дополнительно соединены между собой пружиной жесткости γ_1 . Обозначим через $u(x, t)$ отклонение изучаемой системы в момент времени t от положения равновесия в точке x .

Математическая модель рассматриваемой задачи имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} u''_{xx}(x, t) = u''_{tt}(x, t), \quad -1 < x < 0, 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u'_x(+0, t) = \gamma_1 \Delta u(0, t), \\ u'_x(-0, t) = \gamma_1 \Delta u(0, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ -u'_x(-1, t) + \gamma_2 u(-1, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \\ u'_x(1, t) + \gamma_2 u(1, t) = \mu_1(t). \quad 0 \leq t \leq T \end{array} \right. \quad (2.5.31)$$

Заметим, что решение задачи (2.5.31) может быть представлено в виде суммы решений следующих задач

$$\left\{ \begin{array}{l} u''_{xx}(x, t) = u''_{tt}(x, t), \quad -1 < x < 0, 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u'_x(+0, t) = \gamma_1 \Delta u(0, t), \\ u'_x(-0, t) = \gamma_1 \Delta u(0, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ -u'_x(-1, t) + \gamma_2 u(-1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \\ u'_x(1, t) + \gamma_2 u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \end{array} \right. \quad (2.5.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u''_{xx}(x, t) = u''_{tt}(x, t), \quad -1 < x < 0, 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u'_x(+0, t) = \gamma_1 \Delta u(0, t), \\ u'_x(-0, t) = \gamma_1 \Delta u(0, t), \\ u(x, 0) = 0, \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ u'_t(x, 0) = 0, \quad -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1 \\ -u'_x(-1, t) + \gamma_2 u(-1, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \\ u'_x(1, t) + \gamma_2 u(1, t) = \mu_1(t). \quad 0 \leq t \leq T \end{array} \right. \quad (2.5.33)$$

В свою очередь, решение задачи (2.5.32) на соответствующих промежутках может быть представлено в виде суммы решений следующих задач

$$\left\{ \begin{array}{l} u''_{xx}(x, t) = u''_{tt}(x, t), \quad 0 < x < 1 \\ u'_x(1, t) = -\gamma_2 u(1, t), \\ u'_x(+0, t) = 0, \\ u(x, 0) = \frac{\varphi(x) + \varphi(-x)}{2}, \\ u'_t(x, 0) = \frac{\psi(x) + \psi(-x)}{2}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u''_{xx}(x, t) = u''_{tt}(x, t), \quad 0 < x < 1 \\ u'_x(1, t) = -\gamma_2 u(1, t), \\ u'_x(+0, t) = 2\gamma_1 u(+0, t), \\ u(x, 0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}, \\ u'_t(x, 0) = \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{2}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u''_{xx}(x, t) = u''_{tt}(x, t), \quad -1 < x < 0 \\ u'_x(-1, t) = \gamma_2 u(-1, t), \\ u'_x(-0, t) = 0, \\ u(x, 0) = \frac{\varphi(-x) + \varphi(x)}{2}, \\ u'_t(x, 0) = \frac{\psi(-x) + \psi(x)}{2}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u''_{xx}(x, t) = u''_{tt}(x, t), \quad -1 < x < 0 \\ u'_x(-1, t) = \gamma_2 u(-1, t), \\ u'_x(-0, t) = -2\gamma_1 u(-0, t), \\ u(x, 0) = \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{2}, \\ u'_t(x, 0) = \frac{\psi(x) - \psi(-x)}{2}. \end{array} \right.$$

Теорема 2.5.3. Будем предполагать, что $0 < T < 2$, $\varphi \in C^2[-1, 0) \cup (0, 1]$, $\psi \in C^1[-1, 0) \cup (0, 1]$. Пусть для функций φ , ψ выполняются следующие условия: $\varphi'(+0) = \varphi'(-0) = \gamma_1 \Delta \varphi(0)$, $-\varphi'(-1) + \gamma_2 \varphi(-1) = 0$, $\varphi'(1) + \gamma_2 \varphi(1) = 0$, $\psi'(-0) = \psi'(+0)$, $\psi'(+0) + \psi'(-0) = 2\gamma_1 \Delta \psi(0)$, $\psi'(-1) = \psi'(1)$, $\psi'(-1) = \gamma_2 \psi(-1)$, $\psi'(1) = -\gamma_2 \psi(1)$, $\gamma_2 \neq 2\gamma_1$. Тогда решение $u(x, t)$ задачи (2.5.31) может быть представлено в виде

$$u(x, t) = \left\{ \begin{array}{l} e^{-\gamma_2(x+t-1)} \int_0^{x+t-1} e^{\gamma_2 \alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha + \frac{\gamma_2 e^{-\gamma_2(t-x-1)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{t-x-1} e^{\gamma_2 \alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha - \\ - \frac{2\gamma_1 e^{-2\gamma_1(t-x-1)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{t-x-1} e^{2\gamma_1 \alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha + v(x, t), \quad x > 0 \\ e^{-\gamma_2(t-x-1)} \int_0^{t-x-1} e^{\gamma_2 \alpha} \underline{\mu}_2(\alpha) d\alpha + \frac{\gamma_2 e^{-\gamma_2(t+x-1)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{t+x-1} e^{\gamma_2 \alpha} \underline{\mu}_2(\alpha) d\alpha - \\ - \frac{2\gamma_1 e^{-2\gamma_1(t+x-1)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{t+x-1} e^{2\gamma_1 \alpha} \underline{\mu}_2(\alpha) d\alpha + v(x, t), \quad x < 0, \end{array} \right. \quad (2.5.34)$$

Здесь

$$v(x, t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Phi^+(x+t) + \Phi^+(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \Psi^+(s) ds, \quad x > 0 \\ \frac{\Phi^-(x+t) + \Phi^-(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \Psi^-(s) ds, \quad x < 0, \end{array} \right.$$

$$\Phi^+(x) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x), \quad 0 < x \leq 1 \\ \varphi(-x) - 2\gamma_1 e^{2\gamma_1 x} \int_0^{-x} e^{2\gamma_1 \alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha, \quad -1 \leq x < 0 \\ \varphi(2-x) + 2\gamma_2 e^{\gamma_2(2-x)} \int_1^{2-x} e^{-\gamma_2 \alpha} \varphi(\alpha) d\alpha, \quad 1 \leq x < 2 \\ \varphi(2+x) - 2\gamma_1 e^{2\gamma_1 x} \int_0^1 e^{2\gamma_1 \alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha + \\ + \frac{2\gamma_2 e^{\gamma_2(2+x)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_1^{2+x} e^{-\gamma_2 \alpha} (\gamma_2 \varphi(\alpha) - 2\gamma_1 \varphi(-\alpha)) d\alpha - \\ - \frac{2\gamma_1 e^{2\gamma_1(2+x)} (\gamma_2 + 2\gamma_1)}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_1^{2+x} e^{-2\gamma_1 \alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha, \quad -2 \leq x < -1 \\ \varphi(x-2) - 2\gamma_2 e^{-\gamma_2(x-2)} \int_0^1 e^{-\gamma_2 \alpha} \varphi(\alpha) d\alpha + \\ + \frac{2\gamma_1 e^{-2\gamma_1(x-2)} (\gamma_2 + 2\gamma_1)}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{x-2} e^{2\gamma_1 \alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha - \\ - \frac{2\gamma_2 e^{-\gamma_2(x-2)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{x-2} e^{\gamma_2 \alpha} (\gamma_2 \varphi(\alpha) - 2\gamma_1 \varphi(-\alpha)) d\alpha, \quad 2 \leq x < 3, \end{array} \right.$$

$$\Phi^-(x) = \left\{ \begin{array}{l} \varphi(x), \quad -1 \leq x < 0 \\ \varphi(-x) + 2\gamma_1 e^{-2\gamma_1 x} \int_0^x (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) e^{2\gamma_1 \alpha} d\alpha, \quad 0 < x \leq 1 \\ \varphi(-2-x) + 2\gamma_2 e^{\gamma_2(2+x)} \int_1^{2+x} e^{-\gamma_2 \alpha} \varphi(-\alpha) d\alpha, \quad -2 < x \leq -1 \\ \varphi(x-2) + 2\gamma_1 e^{-2\gamma_1 x} \int_0^1 e^{2\gamma_1 \alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha + \\ + \frac{2\gamma_2 e^{-\gamma_2(x-2)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_1^{2-x} e^{-\gamma_2 \alpha} (\gamma_2 \varphi(-\alpha) - 2\gamma_1 \varphi(\alpha)) d\alpha - \\ - \frac{2\gamma_1 e^{-2\gamma_1(x-2)} (\gamma_2 + 2\gamma_1)}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_1^{2-x} e^{-2\gamma_1 \alpha} (\varphi(-\alpha) - \varphi(\alpha)) d\alpha, \quad 1 < x \leq 2 \\ \varphi(2+x) - 2\gamma_2 e^{\gamma_2(2+x)} \int_0^1 e^{-\gamma_2 \alpha} \varphi(-\alpha) d\alpha + \\ + \frac{2\gamma_2 e^{\gamma_2(x+2)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{x+2} e^{-\gamma_2 \alpha} (\gamma_2 \varphi(\alpha) - 2\gamma_1 \varphi(-\alpha)) d\alpha - \\ - \frac{2\gamma_1 e^{2\gamma_1(x+2)} (\gamma_2 + 2\gamma_1)}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{x+2} e^{-2\gamma_1 \alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha, \quad -3 < x \leq -2, \end{array} \right.$$

$$\Psi^+(x) = \left\{ \begin{array}{l} \psi(x), \quad 0 < x \leq 1 \\ \psi(-x) - 2\gamma_1 e^{2\gamma_1 x} \int_0^{-x} e^{2\gamma_1 \alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha, \quad -1 \leq x < 0 \\ \psi(2-x) + 2\gamma_2 e^{\gamma_2(2-x)} \int_1^{2-x} e^{-\gamma_2 \alpha} \psi(\alpha) d\alpha, \quad 1 \leq x < 2 \\ \psi(2+x) - 2\gamma_1 e^{2\gamma_1 x} \int_0^1 e^{2\gamma_1 \alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha + \\ + \frac{2\gamma_2 e^{\gamma_2(2+x)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_1^{2+x} e^{-\gamma_2 \alpha} (\gamma_2 \psi(\alpha) - 2\gamma_1 \psi(-\alpha)) d\alpha - \\ - \frac{2\gamma_1 e^{2\gamma_1(2+x)} (\gamma_2 + 2\gamma_1)}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_1^{2+x} e^{-2\gamma_1 \alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha, \quad -2 \leq x < -1 \\ \psi(x-2) - 2\gamma_2 e^{-\gamma_2(x-2)} \int_0^1 e^{-\gamma_2 \alpha} \psi(\alpha) d\alpha + \\ + \frac{2\gamma_1 e^{-2\gamma_1(x-2)} (\gamma_2 + 2\gamma_1)}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{x-2} e^{2\gamma_1 \alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha - \\ - \frac{2\gamma_2 e^{-\gamma_2(x-2)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{x-2} e^{\gamma_2 \alpha} (\gamma_2 \psi(\alpha) - 2\gamma_1 \psi(-\alpha)) d\alpha, \quad 2 \leq x < 3. \end{array} \right.$$

$$\Psi^-(x) = \left\{ \begin{array}{l} \psi(x), \quad -1 \leq x < 0 \\ \psi(-x) + 2\gamma_1 e^{-2\gamma_1 x} \int_0^x (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) e^{2\gamma_1 \alpha} d\alpha, \quad 0 < x \leq 1 \\ \psi(-2-x) + 2\gamma_2 e^{\gamma_2(2+x)} \int_1^{2+x} e^{-\gamma_2 \alpha} \psi(-\alpha) d\alpha, \quad -2 < x \leq -1 \\ \psi(x-2) + 2\gamma_1 e^{-2\gamma_1 x} \int_0^1 e^{2\gamma_1 \alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha + \\ + \frac{2\gamma_2 e^{-\gamma_2(x-2)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_1^{2-x} e^{-\gamma_2 \alpha} (\gamma_2 \psi(-\alpha) - 2\gamma_1 \psi(\alpha)) d\alpha - \\ - \frac{2\gamma_1 e^{-2\gamma_1(x-2)} (\gamma_2 + 2\gamma_1)}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_1^{2-x} e^{-2\gamma_1 \alpha} (\psi(-\alpha) - \psi(\alpha)) d\alpha, \quad 1 < x \leq 2 \\ \psi(2+x) - 2\gamma_2 e^{\gamma_2(2+x)} \int_0^1 e^{-\gamma_2 \alpha} \psi(-\alpha) d\alpha + \\ + \frac{2\gamma_2 e^{\gamma_2(x+2)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{x+2} e^{-\gamma_2 \alpha} (\gamma_2 \psi(\alpha) - 2\gamma_1 \psi(-\alpha)) d\alpha - \\ - \frac{2\gamma_1 e^{2\gamma_1(x+2)} (\gamma_2 + 2\gamma_1)}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{x+2} e^{-2\gamma_1 \alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha, \quad -3 < x \leq -2. \end{array} \right.$$

Доказательство. Справедливость теоремы может быть установлена непосредственной подстановкой. Функции $\Phi^+(x)$, $\Phi^-(x)$, $\Psi^+(x)$, $\Psi^-(x)$ можно найти с помощью формулы Даламбера и ее аналогов. Рассмотрим задачу поиска внешних воздействий $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$, которые позволяют за малый промежуток времени $0 < T < 2$ перевести рассматриваемую систему из начального состояния в финальное

$$u(x, T) = \varphi^*(x), \quad u'_t(x, T) = \psi^*(x) \quad -1 \leq x < 0, \quad 0 < x \leq 1.$$

Обозначим через $h(x, t)$ решение задачи (2.5.33), а через $v(x, t)$ – решение задачи (2.5.32). Тогда решение исходной задачи $u(x, t) = h(x, t) + v(x, t)$, а

$$h(x, T) = \varphi^*(x) - v(x, T) = \tilde{\varphi}(x), \quad h'_t(x, T) = \psi^*(x) - v'_t(x, T) = \tilde{\psi}(x).$$

Рассмотрим случай, когда $0 < T < 1$ и $x > 0$. Заметим, что

$$e^{-\gamma_2(x+T-1)} \int_0^{x+T-1} e^{\gamma_2\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha = \tilde{\varphi}(x),$$

$$-\gamma_2 e^{-\gamma_2(x+T-1)} \int_0^{x+T-1} e^{\gamma_2\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha + \underline{\mu}_1(x+T-1) = \tilde{\psi}(x).$$

Продифференцировав первое равенство по x и вычтя из него второе, получим $\tilde{\varphi}'(x) - \tilde{\psi}(x) = 0$. Проинтегрируем получившееся равенство

$$\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0) - (\hat{\tilde{\psi}}(t) - \hat{\tilde{\psi}}(t_0)) \equiv 0,$$

где $\hat{\tilde{\psi}}(t)$ – какая-то первообразная для $\tilde{\psi}(t)$, $t_0 \in (0, 1]$. Первообразную выберем так, чтобы

$$\hat{\tilde{\psi}}(t_0) - \tilde{\varphi}(t_0) = 0. \quad (2.5.35)$$

Тогда получим равенство $\tilde{\varphi}(t) - \hat{\tilde{\psi}}(t) = 0$, справедливое для всех $t \in (0, 1]$.

С другой стороны,

$$2\underline{\mu}_1(T+x-1) - 2\gamma_2 e^{-\gamma_2(x+T-1)} \int_0^{x+T-1} e^{\gamma_2\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha = \tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x).$$

Значит, при $x \in (0, 1-T]$ должно выполняться $\tilde{\varphi}'(x) + \tilde{\psi}(x) \equiv 0$. Зафиксировав любое $t_0 \in (0, 1-T]$ и проинтегрировав последнее равенство, имеем

$$\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0) + \widehat{\tilde{\psi}}(t) - \widehat{\tilde{\psi}}(t_0) \equiv 0.$$

Выберем первообразную так, чтобы

$$\widehat{\tilde{\psi}}(t_0) + \tilde{\varphi}(t_0) = 0. \quad (2.5.36)$$

Тогда для всех $0 < t \leq 1-T$ получим, что $\tilde{\varphi}(t) + \widehat{\tilde{\psi}}(t) = 0$.

Поскольку

$$\tilde{\varphi}(x) = e^{-\gamma_2(x+T-1)} \int_0^{x+T-1} e^{\gamma_2\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha,$$

то $\tilde{\varphi}(x) \equiv 0$ при $x \leq 1-T$. Следовательно, если $t_0 \in (0, 1-T]$, то $\tilde{\varphi}(t_0) = 0$. Таким образом, для $t_0 \in (0, 1-T]$ равенства (2.5.35), (2.5.36) эквивалентны.

Получаем, что

$$\tilde{\varphi}(t) - \widehat{\tilde{\psi}}(t) = 0, \quad t \in (0, 1] \quad (2.5.37)$$

$$\tilde{\varphi}(t) + \widehat{\tilde{\psi}}(t) = 0, \quad t \in (0, 1-T]. \quad (2.5.38)$$

Вернувшись к исходным обозначениям, условия (2.5.36), (2.5.37), (2.5.38)

$$\varphi^*(t) - \widehat{\psi}^*(t) - \Phi^+(t-T) + \widehat{\Psi}^+(t-T) = 0, \quad t \in (0, 1], \quad (2.5.39)$$

$$\varphi^*(t) + \widehat{\psi}^*(t) - \Phi^+(t+T) - \widehat{\Psi}^+(t+T) = 0, \quad t \in (0, 1-T], \quad (2.5.40)$$

где первообразные $\widehat{\Psi}^+(t)$, $\widehat{\psi}^*(t)$ выбираются так, чтобы

$$\varphi^*(t_0) + \widehat{\psi}^*(t_0) - \Phi^+(t_0+T) - \widehat{\Psi}^+(t_0+T) = 0, \quad t_0 \in (0, 1-T]. \quad (2.5.41)$$

Заметим, что равенство (2.5.39) может быть переписано следующим образом. Если $x \in (T, 1]$, то

$$\varphi^*(x) - \widehat{\psi}^*(x) - \varphi(x - T) + \widehat{\psi}(x - T) = 0. \quad (2.5.42)$$

Если $x = T$, то

$$\varphi^*(T) - \widehat{\psi}^*(T) - \varphi(+0) + \widehat{\psi}(+0) = 0. \quad (2.5.43)$$

Если $x \in (0, T)$, то

$$\begin{aligned} & \varphi^*(x) - \widehat{\psi}^*(x) - \varphi(T - x) + 2\gamma_1 e^{2\gamma_1(x-T)} \int_0^{T-x} e^{2\gamma_1 z} (\varphi(z) - \varphi(-z)) dz - \\ & - \widehat{\psi}(T - x) - e^{2\gamma_1(x-T)} \int_0^{T-x} (\psi(z) - \psi(-z)) e^{2\gamma_1 z} dz - \int_0^{x-T} (\psi(-z) - \psi(z)) dz = 0. \end{aligned} \quad (2.5.44)$$

Равенство (2.5.40) принимает вид

$$\varphi^*(x) + \widehat{\psi}^*(x) - \varphi(x + T) - \widehat{\psi}(x + T) = 0, \quad x \in (0, 1 - T]. \quad (2.5.45)$$

Причем, первообразные $\widehat{\psi}^*(x)$ и $\widehat{\psi}(x)$ выбираются так, чтобы

$$\varphi^*(x_0) + \widehat{\psi}^*(x_0) - \varphi(x_0 + T) - \widehat{\psi}(x_0 + T) = 0, \quad x_0 \in (0, 1 - T]. \quad (2.5.46)$$

Найдем теперь функцию $\mu_1(t)$. Сложив $h'_t(x, T)$ и $h'_x(x, T)$, получим следующее равенство

$$\begin{aligned} & 2\underline{\mu}_1(x + T - 1) - 2\gamma_2 e^{-\gamma_2(x+T-1)} \int_0^{x+T-1} e^{\gamma_2 s} \underline{\mu}_1(s) ds = \\ & = \varphi^{*'}(x) + \psi^*(x) - \Phi^{+'}(x + T) - \Psi^+(x + T). \end{aligned}$$

Проинтегрировав получившееся выражение и воспользовавшись ранее полученным представлением функции $\Phi^+(x)$, $\Psi^+(x)$, введем замену перемен-

ных $x + T - 1 = t$ и получим представление для $\mu_1(t)$

$$\begin{aligned} \mu_1(t) = & \frac{1}{2}(\gamma_2\varphi^*(t+1-T) + \gamma_2\widehat{\psi}^*(t+1-T) + \varphi^*(t+1-T) + \\ & + \psi^*(t+1-T) + \gamma_2\varphi(1-t) + \varphi'(1-t) - \\ & - \gamma_2\widehat{\psi}(1-t) - \psi(1-t)) + \gamma_2\widehat{\psi}(1). \end{aligned} \quad (2.5.47)$$

Причем должны выполняться условия связи между начальными и финальными данными (2.5.42)–(2.5.46).

Внешнее воздействие $\mu_2(t)$ может быть найдено аналогично. Для случая $0 < T < 1$ получим, что

$$\mu_2(t) = \frac{1}{2}(\varphi^*(T-t-1) - \widehat{\psi}^*(T-t-1) + \varphi(t-1) + \widehat{\psi}(t-1)),$$

а функции φ , ψ , φ^* , ψ^* удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \varphi^*(t) + \widehat{\psi}^*(t) - \varphi(t+T) - \widehat{\psi}(t+T) &= 0, \quad t \in [-1, -T] \\ \varphi^*(t) - \varphi(-t-T) - 2\gamma e^{-2\gamma(t+T)} \int_0^{-t-T} e^{-2\gamma\alpha}(\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha))d\alpha &+ \widehat{\psi}(-t-T) + \\ + e^{-2\gamma(t+T)} \int_0^{-t-T} e^{-2\gamma\alpha}(\psi(\alpha) - \psi(-\alpha))d\alpha - \int_0^{-t-T} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha))d\alpha, &t \in (-T, 0) \\ -\varphi^*(t) + \widehat{\psi}^*(t) + \varphi(t-T) - \widehat{\psi}(t-T) &= 0, \quad t \in [T-1, 0) \end{aligned}$$

причем первообразные $\widehat{\psi}$ и $\widehat{\psi}^*$ выбираются так, чтобы

$$-\varphi^*(t_0) + \widehat{\psi}^*(t_0) + \varphi(t_0-T) - \widehat{\psi}(t_0-T) = 0, \quad t_0 \in [T-1, 0).$$

Рассмотрим теперь случай, когда $1 \leq T < 2$. Для положительного случая имеем

$$e^{-\gamma_2(x+T-1)} \int_0^{x+T-1} e^{\gamma_2\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha + \frac{\gamma_2 e^{-\gamma_2(T-x-1)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{T-x-1} e^{\gamma_2\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\gamma_1 e^{-2\gamma_1(T-x-1)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{T-x-1} e^{2\gamma_1\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha = \tilde{\varphi}(x), \\
& \underline{\mu}_1(x+T-1) + \underline{\mu}_1(T-x-1) - \gamma_2 e^{-\gamma_2(x+T-1)} \int_0^{x+T-1} e^{\gamma_2\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha - \\
& -\frac{\gamma_2^2 e^{-\gamma_2(T-x-1)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{T-x-1} e^{\gamma_2\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha + \frac{4\gamma_1^2 e^{-2\gamma_1(T-x-1)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{T-x-1} e^{2\gamma_1\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha = \tilde{\psi}(x).
\end{aligned}$$

Продифференцировав первое равенство по x и вычтя из него второе, получим

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}'(x) - \tilde{\psi}'(x) &= -2\underline{\mu}_1(T-x-1) + \frac{2\gamma_2^2 e^{-\gamma_2(T-x-1)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{T-x-1} e^{\gamma_2\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha - \\
& -\frac{8\gamma_1^2 e^{-2\gamma_1(T-x-1)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{T-x-1} e^{2\gamma_1\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha.
\end{aligned}$$

Проинтегрируем получившееся равенство от t_0 до t , при этом $t, t_0 \in (T-1, 1]$, тогда

$$\tilde{\varphi}(t) - \tilde{\varphi}(t_0) - \widehat{\tilde{\psi}}(t) + \widehat{\tilde{\psi}}(t_0) \equiv 0.$$

Первообразную выбираем так, чтобы выполнялось следующее условие $\widehat{\tilde{\psi}}(t_0) - \tilde{\varphi}(t_0) = 0$. Тогда для всех $t \in (T-1, 1]$ справедливо равенство

$$\tilde{\varphi}(t) - \widehat{\tilde{\psi}}(t) = 0. \quad (2.5.48)$$

Воспользовавшись исходными обозначениями, условие (2.5.48) примет вид

$$\begin{aligned}
& \varphi^*(x) - \widehat{\psi}^*(x) - \varphi(T-x) - \widehat{\psi}(T-x) + \\
& + 2\gamma_1 e^{-2\gamma_1(T-x)} \int_0^{T-x} e^{2\gamma_1\alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha - e^{-2\gamma_1(T-x)} \int_0^{T-x} e^{2\gamma_1\alpha} (\psi(\alpha) -
\end{aligned}$$

$$-\psi(-\alpha)) d\alpha + \int_0^{T-x} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha = 0.$$

Теперь найдем внешнее воздействие $\mu_1(t)$. Для этого сложим $h'_t(x, T)$ и $h'_x(x, t)$ и получим

$$\begin{aligned} & 2\underline{\mu}_1(t)(x + T - 1) - 2\gamma_2 e^{-\gamma_2(x+T-1)} \int_0^{x+T-1} e^{\gamma_2\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha = \\ & = \varphi^{*'}(x) + \psi^*(x) - \Phi^+(x + T) - \Psi^+(x + T). \end{aligned}$$

Проинтегрировав последнее уравнение и введя замену $x + T - 1 = t$, представление $\mu_1(t)$ при $t \in (T - 1, 1)$ совпадает с (2.5.47). При $t \in (1, T)$ имеем

$$\begin{aligned} \mu_1(t) = & \frac{1}{2} \left\{ \gamma_2 \varphi^*(t - T + 1) + \gamma_2 \widehat{\psi}^*(t - T + 1) + \varphi^{*'}(t - T + 1) + \psi^*(t - T + 1) - \right. \\ & - \varphi'(t - 1) + \gamma_2 \varphi(t - 1) - \gamma_2 \widehat{\psi}(t - 1) - \psi(t - 1) + \gamma_2 \int_0^{t-1} (\psi(\alpha) + \psi(-\alpha)) d\alpha + \\ & \left. + (\gamma_2 + 2\gamma_1) e^{-2\gamma_1(t-1)} \int_0^{t-1} e^{2\gamma_1\alpha} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)) d\alpha \right\} + \gamma_1 (\varphi(t - 1) - \\ & - \varphi(1 - t)) - \gamma_1 (\gamma_2 + 2\gamma_1) e^{-2\gamma_1(t-1)} \int_0^{t-1} e^{2\gamma_1\alpha} (\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha)) d\alpha. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим разность функций $h'_x(x, T)$ и $h'_t(x, T)$.

$$\begin{aligned} & \frac{2\gamma_2^2 e^{-\gamma_2(T-x-1)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{T-x-1} e^{\gamma_2\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha - \frac{8\gamma_1^2 e^{-2\gamma_1(T-x-1)}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^{T-x-1} e^{2\gamma_1\alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha - \\ & - 2\underline{\mu}_1(T - x - 1) = \varphi^{*'}(x) - \Phi^+(x - T) + \widehat{\Psi}^+(x - T) - \widehat{\psi}^*(x). \end{aligned}$$

Проинтегрируем последнее равенство и воспользуемся следующей заменой переменной $t = T - x - 1$, где $t \in (0, T - 1)$. Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{2\gamma_2 e^{-\gamma_2 t}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^t e^{\gamma_2 \alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha - \frac{4\gamma_1 e^{-2\gamma_1 t}}{\gamma_2 - 2\gamma_1} \int_0^t e^{2\gamma_1 \alpha} \underline{\mu}_1(\alpha) d\alpha = \\ & = \varphi^*(T - t - 1) - \Phi^+(-t - 1) + \widehat{\Psi}^+(-t - 1) - \widehat{\psi}^*(T - t - 1). \end{aligned}$$

Применив к полученному уравнению ряд преобразований и перейдя к исходным обозначениям, найдем внешнее воздействие $\mu_1(t)$ при $t \in (0, T - 1)$

$$\begin{aligned} \mu_1(t) = & \frac{1}{2} \left\{ -\varphi^{*'}(T-t-1) + \psi^*(T-t-1) + (\gamma_2 + 2\gamma_1)(\varphi^*(T-t-1) - \widehat{\psi}^*(T-t-1)) - \right. \\ & - 2\gamma_1\gamma_2(\widehat{\varphi}^*(T-t-1) - \widehat{\varphi}^*(T-1)) + 2\gamma_1\gamma_2 \int_{T-1}^{T-t-1} \widehat{\psi}^*(\alpha) d\alpha + \varphi^{*'}(T-1) - \psi^*(T-1) + \\ & + (\gamma_2 + 2\gamma_1)(-\varphi^*(T-1) + \widehat{\psi}^*(T-1)) + \varphi'(1-t) + \gamma_2\varphi(t-1) + 2\gamma_1\gamma_2\widehat{\varphi}(-1) - \\ & - 2\gamma_1\gamma_2\widehat{\varphi}(t-1) - \varphi'(-1) - \gamma_2\varphi(1) + 2\gamma_1\varphi(-1) - \psi(1-t) - 2\gamma_1\gamma_2 \int_1^{1-t} \widehat{\psi}(-\alpha) d\alpha - \\ & \left. - 2\gamma_1\gamma_2 t(\widehat{\psi}(1) - \widehat{\psi}(-1)) + \psi(1) - \int_1^{1-t} (\gamma_2\psi(\alpha) - 2\gamma_1\psi(-\alpha)) d\alpha \right\}. \end{aligned}$$

Для случая $x < 0$ алгоритм нахождения $\mu_2(t)$ аналогичен. Так внешнее воздействие $\mu_2(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mu_2(t) = & \frac{1}{2} \left\{ \varphi^{*'}(t-T+1) + \psi(t-T+1) + (\gamma_2 + 2\gamma_1)(\varphi^*(t-T+1) + \widehat{\psi}^*(t-T+1)) - \right. \\ & - \varphi^{*'}(1-T) - \psi^*(1-T) - (\gamma_2 + 2\gamma_1)(\varphi^*(1-T) + \widehat{\psi}^*(1-T)) + \\ & + 2\gamma_1\gamma_2 \int_{-T-1}^{t-T-1} \widehat{\psi}^*(\alpha) d\alpha - \varphi'(t-1) + 2\gamma_1\gamma_2\widehat{\varphi}(1-t) - 2\gamma_1\gamma_2\widehat{\varphi}(1) - \gamma_2\varphi(t-1) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\gamma_1\varphi(1-t) + \gamma_2\varphi(-1) - 2\gamma_1\varphi(1) + \varphi'(-1) - \psi(t-1) - 2\gamma_1\gamma_2 \int_{-1}^{t-1} \widehat{\psi}(-\alpha)d\alpha + \\
& + 2\gamma_1\gamma_2 t(\widehat{\psi}(1) - \widehat{\psi}(-1)) + \int_{-1}^{t-1} (\gamma_2\psi(\alpha) - 2\gamma_1\psi(-\alpha))d\alpha + \\
& + \psi(-1) + 2\gamma_1\gamma_2(\widehat{\varphi}^*(t-T-1) - \widehat{\varphi}^*(-T-1)) \Big\}, \quad t \in (0, T-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2(t) = & \frac{1}{2}(\gamma_2\varphi^*(T-t-1) - \gamma_2\widehat{\psi}^*(T-t-1) - \varphi^*(T-t-1) + \psi^*(T-t-1) + \\
& + \gamma_2\varphi(t-1) - \varphi'(t-1) + \gamma_2\widehat{\psi}(t-1) - \psi(t-1)) + \gamma_2\widehat{\psi}(-1), \quad t \in (T-1, 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2(t) = & \frac{1}{2}(\gamma_2\varphi^*(T-t-1) - \gamma_2\widehat{\psi}^*(T-t-1) - \varphi^*(T-t-1) + \psi^*(T-t-1) + \\
& + \varphi'(1-t) + (\gamma_2 + 2\gamma_1)\varphi(1-t) - 2\gamma_1\varphi(t-1) - \gamma_2\widehat{\psi}(t-1) - \psi(1-t) - \\
& - (\gamma_2 + 2\gamma_1)e^{2\gamma_1(1-t)} \int_0^{1-t} e^{-2\gamma_1\alpha}(\psi(\alpha) - \psi(-\alpha))d\alpha + \\
& + \gamma_1(\gamma_2 + 2\gamma_1)e^{2\gamma_1(1-t)} \int_0^{1-t} e^{-2\gamma_1\alpha}(\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha))d\alpha, \quad t \in (1, T).
\end{aligned}$$

При этом начальный и финальные данные связаны условием

$$\begin{aligned}
& \varphi^*(x) + \widehat{\psi}^*(x) - \varphi(-x-T) - 2\gamma_1e^{-2\gamma_1(x+T)} \int_0^{x+T} e^{2\gamma_1\alpha}(\varphi(\alpha) - \varphi(-\alpha))d\alpha + \\
& + \widehat{\psi}(-x-T) + e^{-2\gamma_1(x+T)} \int_0^{x+T} e^{2\gamma_1\alpha}(\psi(\alpha) - \psi(-\alpha))d\alpha - \\
& - \int_0^{x+T} (\psi(\alpha) - \psi(-\alpha))d\alpha = 0, \quad x \in [-1, 1-T]. \quad \square
\end{aligned}$$

Глава 3

Адаптация метода конечных элементов для моделей с разрывными решениями

В данной главе для изучаемых математических моделей адаптирован метод конечных элементов, получены оценки сходимости приближенного решения к точному. Кроме того, приведены решения тестовых примеров и результаты вычислительных экспериментов, проведенных с помощью программы, написанной на языке высокого уровня Python.

3.1 Адаптация метода конечных элементов для математической модели малых деформаций разрывной струны

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$-(pv'_\mu)(x) + \int_0^x v(s) d[Q(s)] = F(x) - F(0). \quad (3.1.1)$$

Предполагается, что $p(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации на $[0, \ell]$, причем $\inf_{(0, \ell)} p(x) = p_0 > 0$; функция $\mu(x)$ строго возрастает на $[0, \ell]$, $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$, $Q(x) \neq const$. Решение $v(x)$ уравнения (3.1.1) ищется в классе E_μ μ -абсолютно непрерывных на $[0, \ell]$ функций, производная которых $v'_\mu(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, \ell]$. Как было показано ранее, уравнение (3.1.1) имеет единственное решение, которое может быть представлено в виде $v(x) = \int_0^\ell K(x, s) d[F(s)]$, где $K(x, s)$ — функция влияния. Изучим вопрос о нахождении приближенного решения (3.1.1).

Для нахождения приближенного решения (3.1.1) выберем систему базисных функций, линейной комбинацией которых будет искомое приближенное решение. Зафиксируем произвольное число $h > 0$. Обозначим через $S(\mu)$ множество точек разрыва функции $\mu(x)$. Предположим, что множе-

ство $S(\mu)$ конечное. Заменяем всякую точку ξ разрыва функции $\mu(x)$ парой $\{\xi - 0, \xi + 0\}$ и обозначим полученное расширение отрезка $[0, \ell]$ через $\overline{[0, \ell]}_\mu$. Дополним $\overline{[0, \ell]}_\mu$ точками x_i^* непрерывности $\mu(x)$ так, чтобы на каждом промежутке $[0, \xi_1 - 0], [\xi_1 + 0, \xi_2 - 0], \dots, [\xi_n + 0, \ell]$ выполнялись неравенства $\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*) < h$. Таким образом, мы получили разбиение множества $\overline{[0, \ell]}_\mu$. Если же множество $S(\mu)$ счетное, то выберем сначала точки ξ_i , в которых $\Delta\mu(\xi_i) \geq \frac{h}{2}$. Заменяя эти точки на пары $\{\xi_i - 0, \xi_i + 0\}$, рассмотрим аналогичное разбиение построенного расширения $\overline{[0, \ell]}_\mu$. Перенумеруем точки, входящие в разбиение, как $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = \ell$. Затем определим базисные функции $\varphi_k(x)$, где $k = 1, \dots, N - 1$, следующим образом:

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{\mu(x) - \mu(x_{k-1})}{\mu(x_k) - \mu(x_{k-1})}, & \text{если } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \frac{\mu(x_{k+1}) - \mu(x)}{\mu(x_{k+1}) - \mu(x_k)}, & \text{если } x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0, & \text{если } x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}] \end{cases}$$

Также определим базисные функции

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{\mu(x) - \mu(x_1)}{\mu(0) - \mu(x_1)}, & x \in [0, x_1], \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \frac{\mu(x) - \mu(x_{N-1})}{\mu(\ell) - \mu(x_{N-1})}, & x \in [x_{N-1}, \ell], \\ 0, & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Вместо искомой функции $v(x)$ будем искать лишь ее значения в точках разбиения. В связи с этим будем использовать в (3.1.1) функцию $v^*(x) = \sum_{i=0}^N v_i^* \varphi_i(x)$, где v_i^* — значения $v^*(x)$ в точках разбиения. Из уравнения (3.1.1) следует, что

$$-\int_0^\ell \varphi_k(x) d[p(x)v'_\mu(x)] + \int_0^\ell v(x)\varphi_k(x) d[Q(x)] = \int_0^\ell \varphi_k(x) d[F(x)],$$

откуда

$$\int_0^{\ell} p(x)v'_\mu(x)\varphi'_{k\mu}(x) d\mu(x) + \int_0^{\ell} \varphi_k(x)v(x) d[Q(x)] = \int_0^{\ell} \varphi_k(x) d[F(x)].$$

Подставив сюда функцию $v^*(x)$ вместо $v(x)$, получим систему из $N + 1$ уравнения с $N + 1$ неизвестными $\{v_0^*, v_1^*, \dots, v_N^*\}$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^N v_m^*(x) \left(\int_0^{\ell} p(x)\varphi'_{m\mu}(x)\varphi'_{k\mu}(x)d\mu(x) + \int_0^{\ell} \varphi_m(x)\varphi_k(x)d[Q(x)] \right) = \\ = \int_0^{\ell} \varphi_k(x) d[F(x)]. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Введем обозначение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^{\ell} p(x)\varphi'_\mu(x)\psi'_\mu(x) d\mu(x) + \int_0^{\ell} \varphi(x)\psi(x) d[Q(x)].$$

Очевидно, что последнее выражение представляет собой билинейный симметричный функционал в пространстве μ -непрерывных функций, имеющих производную, суммируемую с квадратом. Благодаря свойствам $p(x)$ и $Q(x)$ он еще и невырожденный, т.е. $\langle \varphi, \psi \rangle > 0$, $\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0$. Поэтому этот функционал может служить скалярным произведением.

Тогда коэффициенты рассматриваемой системы уравнений (3.1.2) $A_{ij} = \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = A_{ji}$ образуют матрицу Грамма системы линейно независимых векторов φ_i . Значит, определитель матрицы коэффициентов изучаемой системы уравнений отличен от нуля, откуда следует, что система (3.1.2) имеет единственное решение.

Теорема 3.1.1. Пусть $v(x)$ – точное решение модели (3.1.1); $v^*(x)$ – приближенное решение, найденное с помощью описанного выше алгоритма. Тогда

$$\langle v - v^*, v - v^* \rangle \leq Ch,$$

причем, константа C не зависит от h .

Доказательство. Как уже было замечено, уравнение (3.1.1) возникает из задачи о минимизации квадратичного функционала (потенциальной энергии)

$$\Phi(v) = \int_0^\ell \frac{(p'_\mu)^2(x)}{2} d\mu(x) + \int_0^\ell \frac{v^2(x)}{2} d[Q(x)] - \int_0^\ell v(x) d[F(x)]. \quad (3.1.3)$$

Решение (3.1.1) как раз является точкой минимума функционала (3.1.3) на множестве E_μ . Так как функционал (3.1.3) не содержит вторых производных, то его можно определить на функциях, у которых первая производная μ -суммируема с квадратом, т.е. на \widehat{E} — пополнении E_μ по норме

$$\|v\|_{\widehat{E}}^2 = \int_0^\ell p(x)v'_\mu(x) d\mu(x) + \int_0^\ell v^2(x) d[Q(x)].$$

Отметим, что такое расширение не может привести к уменьшению минимального значения функционала, поскольку каждое новое значение $\Phi(v^*)$ есть предел $\Phi(v_n^*)$, где $v_n^* \in E_\mu$ и $\|v_n^* - v^*\|_{\widehat{E}} \rightarrow 0$. Поэтому, если v доставляет $\min_{E_\mu} \Phi(v^*)$, то $\Phi(v_n^*) \geq \Phi(v^*)$, и следовательно, $\Phi(v^*) \geq \Phi(v)$ для всех $v^* \in \widehat{E}$.

В обратную сторону, минимизация $\Phi(v)$ на \widehat{E} приводит к уравнению (3.1.1). В самом деле, для первой вариации функционала (3.1.3) имеем равенство

$$\int_0^\ell p(x)v'_\mu(x)h'_\mu(x) d\mu + \int_0^\ell v(x)h(x) d[Q(x)] - \int_0^\ell h(x) d[F(x)] = 0.$$

Откуда следует, что $\int_0^\ell hd[-pv'_\mu + g - F] = 0$, где $g(x) = \int_0^x vd[Q] + const$.

Значит,

$$-pv'_\mu(x) + \int_0^x v(s) d[Q(s)] - F(x) = const,$$

т.е.

$$-pv'_\mu(x) + \int_0^x v(s) d[Q(s)] = F(x) - F(0).$$

В силу свойств функций p , Q , F функция v'_μ имеет ограниченную вариацию, причем $v(x)$ является μ -абсолютно непрерывной, т.е. $v \in E_\mu$. Таким образом, мы можем минимизировать $\Phi(v)$ на \hat{E} . Другими словами, в качестве базисных функций мы можем действительно брать описанные выше функции. После решения линейной системы мы получим приближенное решение $v^*(x)$, которое в тоже время будет аппроксимацией Рунца.

Оценим разность между точным решением $v(x)$ и полученным приближенным решением $v^*(x)$. Для этого сначала оценим разность между точным решением и его интерполянт $v_I(x)$ в энергетической норме, где

$$v_I(x) = \sum_{i=0}^N v(x_i) \varphi_i(x).$$

Обозначим $\omega(x) = v(x) - v_I(x)$. Заметим, что $\omega(\eta) = 0$ для всякой точки разбиения η . Имеем

$$\langle v - v_I, v - v_I \rangle = \langle \omega, \omega \rangle = \int_0^\ell p(x) \omega_\mu'^2(x) d\mu(x) + \int_0^\ell \omega^2(x) d[Q(x)].$$

Заметим, что на $[x_i, x_{i+1}]$, где одновременно выполняются условия, что x_i не совпадает с элементом $\xi - 0$, а x_{i+1} не совпадает с элементом $\xi + 0$, где ξ – точка разрыва μ , интерполянт $v_I(x)$ определен как

$$v_I(x) = v(x_i) + \frac{v(x_{i+1}) - v(x_i)}{\mu(x_{i+1}) - \mu(x_i)} (\mu(x) - \mu(x_i)).$$

Тогда для всех $x \in [x_i, x_{i+1}]$ верно

$$\omega(x) = \int_{x_i}^x \omega'_\mu(s) d\mu(s) = \int_{x_i}^x \left(v'_\mu(s) - \frac{v(x_{i+1}) - v(x_i)}{\mu(x_{i+1}) - \mu(x_i)} \right) d\mu(s).$$

Следовательно,

$$|\omega(x)| \leq \int_{x_i}^x |v'_\mu(s)| d\mu(s) + |v(x_{i+1}) - v(x_i)|.$$

С другой стороны,

$$v(x) = \int_0^x v'_\mu(s) d\mu(s) + v(0),$$

откуда

$$|v(x_{i+1}) - v(x_i)| \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} |v'_\mu(s)| d\mu(s).$$

Значит,

$$|\omega(x)| \leq 2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} |v'_\mu(s)| d\mu(s).$$

Поскольку $v(x)$ — решение (3.1.1), то

$$\begin{aligned} |v'_\mu(x)| &\leq \frac{\sup_{[0,\ell]} |v(x)| V_0^\ell(Q) + V_0^\ell(F)}{p_0} \leq \\ &\leq \frac{V_0^\ell(F) \left(\sup_{[0,\ell] \times [0,\ell]} K(x,s) V_0^\ell(Q) + 1 \right)}{p_0} = A \equiv const. \end{aligned}$$

Значит,

$$|\omega(x)| \leq 2A(\mu(x_{i+1}) - \mu(x_i)) \leq 2Ah.$$

Оценим теперь $\omega(x)$ в энергетической норме. Заметим, что

$$\int_0^\ell p\omega_\mu'^2(x) d\mu(x) = - \int_0^\ell \omega(x) d[p(x)\omega'_\mu(x)] = - \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega(x) d[p(x)\omega'_\mu(x)],$$

т.к. внеинтегральные слагаемые вида $\omega(\xi-0)\Delta^- p\omega'_\mu(\xi)$ и $\omega(\xi+0)\Delta^+ p\omega'_\mu(\xi)$ равны нулю. Значит,

$$\begin{aligned} \int_0^\ell p(x)\omega'_\mu{}^2(x) d\mu(x) &\leq \sum_i \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega(s) d[p(s)\omega'_\mu(s)] \right| \leq \\ &\leq 2Ah \left(V_0^\ell(F) \sup_{[0,\ell] \times [0,\ell]} K(x,s) V_0^\ell(Q) + V_0^\ell(F) \right). \end{aligned}$$

Для слагаемого $\int_0^\ell \omega^2(x) d[Q(x)]$ из энергетической нормы верно

$$\int_0^\ell \omega^2(x) d[Q(x)] = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega^2(s) d[Q(s)] \leq 4h^2 A^2 V_0^\ell(Q).$$

Получили, что $\langle \omega, \omega \rangle \leq Ch$.

Остается показать, что верна оценка $\langle v - v^*, v - v^* \rangle \leq Ch$. Это следует из приведенного ниже аналога классического результата теории конечных элементов.

Предположим, что $v(x)$ минимизирует функционал $\Phi(v^*)$, задаваемый равенством (3.1.3), на множестве \widehat{E} . Обозначим через E_N конечномерное подпространство \widehat{E} . Тогда

- 1) минимум $\Phi(v_h^*)$ и минимум $\langle v - v_h^*, v - v_h^* \rangle$, где v_h^* пробегает подпространство E_N , достигается на одной и той же функции v_h .
- 2) по отношению к энергетическому скалярному произведению v_h есть проекция v на E_N , или, что то же самое, ошибка $v - v_h$ ортогональна E_N :

$$\langle v - v_h, v_h^* \rangle = 0 \text{ для всех } v_h \in E_N. \quad (3.1.4)$$

- 3) функция v_h , на которой достигается минимум, удовлетворяет условию

$$\langle v_h, v_h^* \rangle = \int_0^\ell v_h^* d[F] \text{ для всех } v_h^* \in E_N, \quad (3.1.5)$$

$$\langle v, v^* \rangle = \int_0^\ell v d[F] \text{ для всех } v \in \widehat{E}. \quad (3.1.6)$$

Как и в классической теории для нас эта теорема ключевая. Более того все три ее части тесно связаны.

Из 1) следует 2): в пространстве с энергетическим скалярным произведением функция из подпространства E_N , ближайшая к заданной функции v , всегда является ее проекцией на E_N . Наоборот, 1) вытекает из 2):

$$\langle v - v_h - v_h^*, v - v_h - v_h^* \rangle = \langle v - v_h, v - v_h \rangle - 2\langle v - v_h, v_h^* \rangle + \langle v_h^*, v_h^* \rangle.$$

Если справедливо равенство (3.1.4), то

$$\langle v - v_h, v - v_h \rangle \leq \langle v - v_h - v_h^*, v - v_h - v_h^* \rangle.$$

Равенство возможно только когда $\langle v_h^*, v_h^* \rangle = 0$, т.е. когда $v_h^* = 0$. Таким образом, b_h — единственная функция, на которой $\langle v - v_h^*, v - v_h^* \rangle$ достигает минимум, и утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) непосредственно вытекает из 3): если равенство (3.1.6) справедливо для всех $v^* \in \widehat{E}$, то оно справедливо и для $v_h^* \in E_N$; вычитая из него (3.1.5), получаем утверждение второй части.

Осталось доказать утверждение 3). Из него вытекает 2), а из него следует 1). Если v_h минимизирует $\Phi(v^*)$ на E_N , то $\Phi(v_h) \leq \Phi(v_h + \varepsilon v_h^*)$ для всех ε и v_h^* . Заметив, что $\Phi(v^*) = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle - \int_0^\ell v d[F]$, из предыдущего неравенства получим, что

$$0 \leq \varepsilon \left(\langle v_h, v_h^* \rangle - \int_0^\ell v_h^* d[F] \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \langle v_h^*, v_h^* \rangle.$$

Так как неравенство верно для сколь угодно малого числа ε любого знака, то $\langle v_h, v_h^* \rangle = \int_0^\ell v_h^* d[F]$. Последнее выражает равенство нулю первой вариации функционала Φ в точке v_h по направлению v_h^* . Таким образом, утверждение 3) доказано. \square

Заметим, что полученная оценка сходимости будет верна и для случая, когда левый конец исследуемой системы жестко закреплен, а правый свободен, что может быть выражено условиями $u(0) = 0 = u'_\mu(1)$.

Для частного случая, когда

$$\mu(x) = x + \sum_{i=1}^n \Theta(x - \xi_i),$$

в качестве базисных функций можно взять классические базисные «треугольники», добавив к ним функции Хевисайда, у каждой из которых точка разрыва совпадает с одной из точек разрыва $\mu(x)$.

3.2 Адаптация метода конечных элементов для математической модели малых колебаний разрывной стилтьесовской струны с жестко закрепленными концами

Рассмотрим математическую модель малых поперечных колебаний разрывной стилтьесовской струны с жестко закрепленными концами, расположенной вдоль отрезка $[0, \ell]$

$$\begin{cases} M'_{[\sigma]}(x)u''_{tt}(x, t) = (p(x)u'_\mu(x, t))'_{[\sigma]} - u(x, t)Q'_{[\sigma]}(x) + F'_{[\sigma]}(x, t), \\ u(0, t) = u(\ell, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ u'_t(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad (3.2.1)$$

где $p(x)$, $F(x, t)$ – функции ограниченной вариации на $[0, \ell]$, причем $\inf_{[0, \ell]} p(x) > 0$. Функции $M(x)$, $\mu(x)$ строго возрастают на $[0, \ell]$, а $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$.

Определим базисные функции $\varphi_k(x)$, где $k = 1, \dots, N - 1$ как и в предыдущем пункте. Приближенное решение $u_N(x, t)$ задачи (3.2.1) будем искать в виде

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^{N-1} a_k(t)\varphi_k(x),$$

где $a_k(t)$ – неизвестные дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_k(x)$ – базисные функции.

Уравнение в (3.2.1) умножим на базисную функцию $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$) и проинтегрируем по мере $[\sigma]$ по отрезку $[0, \ell]$

$$\begin{aligned} \int_0^\ell M'_{[\sigma]} u''_{tt}(x) \varphi_i(x) d[\sigma] &= \int_0^\ell (p(x) u'_\mu(x, t))'_{[\sigma]} \varphi_i(x) d[\sigma] - \\ &- \int_0^\ell u(x, t) \varphi_i(x) Q'_{[\sigma]}(x) d[\sigma] + \int_0^\ell \varphi_i(x) F'_{[\sigma]}(x, t). \end{aligned}$$

Проинтегрировав интеграл $\int_0^\ell (p(x) u'_\mu(x, t))'_{[\sigma]} \varphi_i(x) d[\sigma]$ по частям и воспользовавшись граничными условиями (которым удовлетворяют базисные функции), будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^\ell M'_{[\sigma]}(x) u''_{tt}(x, t) \varphi_i(x) d[\sigma] + \int_0^\ell p(x) u'_\mu(x, t) \varphi'_{i\mu}(x) d\mu + \\ + \int_0^\ell u(x, t) \varphi_i(x) Q'_{[\sigma]}(x) d[\sigma] = \int_0^\ell F'_{[\sigma]}(x, t) \varphi_i(x) d[\sigma], \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^\ell u''_{tt}(x, t) \varphi_i(x) d[M] + \int_0^\ell p(x) u'_\mu(x, t) \varphi'_{i\mu}(x) d\mu + \\ + \int_0^\ell u(x, t) \varphi_i(x) d[Q] = \int_0^\ell F'_{[\sigma]}(x, t) \varphi_i(x) d[\sigma]. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Подставляя $u_N(x, t)$ в последнее равенство, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N-1} a_k''(t) \int_0^\ell \varphi_k(x) \varphi_i(x) d[M(x)] + \sum_{k=1}^{N-1} a_k(t) \int_0^\ell p(x) \varphi'_{k\mu}(x) \varphi'_{i\mu}(x) d\mu + \\ & + \sum_{k=1}^{N-1} a_k(t) \int_0^\ell \varphi_k(x) \varphi_i(x) d[Q(x)] = \int_0^\ell F'_{[\sigma]}(x, t) \varphi_i(x) d[\sigma], \end{aligned}$$

($i = 1, 2, \dots, N - 1$). Таким образом, мы получили систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\widehat{A}a''(t) + \widehat{B}a(t) = \widehat{F}, \quad (3.2.3)$$

где \widehat{A} и \widehat{B} – квадратные матрицы порядка $N - 1$, коэффициенты которых находятся по формулам

$$\begin{aligned} \widehat{A}_{ki} = \widehat{A}_{ik} &= \int_0^\ell \varphi_k(x) \varphi_i(x) d[M], \\ \widehat{B}_{ki} = \widehat{B}_{ik} &= \int_0^\ell p(x) \varphi'_{k\mu}(x) \varphi'_{i\mu}(x) d\mu + \int_0^\ell \varphi_k(x) \varphi_i(x) d[Q(x)], \end{aligned}$$

$a(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_{N-1}(t))^T$ и $\widehat{F}(t) = (F_1(t), F_2(t), \dots, F_{N-1}(t))^T$ – вектор-столбцы, компоненты $F_i(t)$ которого определяются равенствами

$$F_i(t) = \int_0^\ell \varphi_i(x) d[F(x, t)].$$

Заметим, что равенства

$$(v, w) = \int_0^\ell v(x)w(x)d[M] \quad (3.2.4)$$

и

$$[v, w] = \int_0^\ell p(x)v'_\mu(x)w'_\mu(x)d\mu + \int_0^\ell v(x)w(x)d[Q] \quad (3.2.5)$$

являются скалярными произведениями. Введем обозначения для норм, порожаемых скалярными произведениями (3.2.4) и (3.2.5).

$$\|v\|_1 = \sqrt{(v, v)},$$

$$\|v\|_2 = \sqrt{[v, v]}.$$

Воспользуемся теперь начальными условиями. Имеем $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u'_\mu(x, 0) = \varphi'_\mu(x)$, $u'_t(x, 0) = \psi(x)$. Тогда для всех $i = 1, 2, \dots, N - 1$ верны равенства

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell p(x)u'_\mu(x, 0)\varphi'_{i\mu}(x)d\mu + \int_0^\ell u(x, 0)\varphi_i(x)d[Q] = \\ & = \int_0^\ell p(x)\varphi'_\mu(x)\varphi'_{i\mu}(x)d\mu + \int_0^\ell \varphi(x)\varphi_i(x)d[Q]. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

$$\int_0^\ell u'_t(x, 0)\varphi_i(x)d[M] = \int_0^\ell \psi(x)\varphi_i(x)d[M]. \quad (3.2.7)$$

Подставим в равенства (3.2.6) и (3.2.7) вместо $u(x, t)$ функцию $u_N(x, t)$. Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N-1} a_k(0) \left(\int_0^\ell p(x)\varphi'_{k\mu}(x)\varphi'_{i\mu}(x) d\mu + \int_0^\ell \varphi_k(x)\varphi_i(x)d[Q] \right) = \\ & = \int_0^\ell p(x)\varphi'_\mu(x)\varphi'_{i\mu}(x) d\mu + \int_0^\ell \varphi(x)\varphi_i(x)d[Q], \\ & \sum_{k=1}^{N-1} a'_k(0) \int_0^\ell \varphi_k(x)\varphi_i(x) d[M] = \int_0^\ell \psi(x)\varphi_i(x) d[M], \end{aligned}$$

или в матричном виде

$$\widehat{B}a(0) = H_1, \quad \widehat{A}a'(0) = H_2, \quad (3.2.8)$$

где H_1, H_2 – вектор-столбцы с координатами

$$(H_1)_i = \int_0^\ell p(x)\varphi'_\mu(x)\varphi'_{i\mu}(x) d\mu + \int_0^\ell \varphi(x)\varphi_i(x)d[Q],$$

$$(H_2)_i = \int_0^\ell \psi(x)\varphi_i(x) d[M].$$

Заметим, что матрицы \widehat{A} и \widehat{B} являются матрицами Грамма системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{N-1}$ линейно независимых функций. Поэтому \widehat{A} и \widehat{B} имеют обратные. Тогда, (3.2.3) и (3.2.8) принимают вид

$$a''(t) + \widehat{A}^{-1}\widehat{B}a = \widehat{A}^{-1}\widehat{F}, \quad (3.2.9)$$

$$a(0) = \widehat{B}^{-1}H_1, \quad a'(0) = \widehat{A}^{-1}H_2. \quad (3.2.10)$$

В классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений доказывается, что система (3.2.9), дополненная начальными условиями (3.2.10), имеет единственное решение.

Для численного решения (3.2.9), (3.2.10) применим явную схему (τ – шаг по временной переменной). Для реализации алгоритма имеем следующие формулы

$$\frac{a_k((j+1)\tau) - 2a_k(j\tau) + a_k((j-1)\tau)}{\tau^2} + \sum_{j=1}^{N-1} \eta_{k,j}a_j(j\tau) = F_k(j\tau),$$

где $k = 1, 2, \dots, N-1$, $\eta_{k,j}$ – коэффициенты матрицы $\widehat{A}^{-1}\widehat{B}$. Два начальных слоя мы найдем, используя начальные данные

$$a_k(0) = \left(\widehat{B}^{-1}H_1\right)_k, \quad \frac{a_k(\tau) - a_k(0)}{\tau} = \left(\widehat{A}^{-1}H_2\right)_k.$$

Найдем теперь оценку скорости сходимости. Обозначим $\omega = u(x, t) - u_N(x, t)$. Интерполянт $u_I(x, t)$ определим как $u_I(x, t) = \sum_{k=1}^{N-1} u(x_k, t)\varphi_k(x)$. Равенство (3.2.2) с учетом введенных обозначений (3.2.4) и (3.2.5) перепишем в виде

$$(u''_{tt}, \varphi_i) + [u, \varphi_i] = \int_0^\ell \varphi_i d[F].$$

Поскольку

$$(u''_{Ntt}, \varphi_i) + [u_N, \varphi_i] = \int_0^\ell \varphi_i d[F],$$

то для $\omega(x, t)$ получаем равенства

$$(\omega''_{tt}, \varphi_i) + [\omega, \varphi_i] = 0, \quad (3.2.11)$$

где $i = 1, 2, \dots, N - 1$. Аналогично из условий (3.2.6) и (3.2.7) получаем равенства

$$[\omega(\cdot, 0), \varphi_i(\cdot)] = 0, \quad (3.2.12)$$

$$(\omega'_t(\cdot, 0), \varphi_i(\cdot)) = 0, \quad (3.2.13)$$

где $i = 1, 2, \dots, N - 1$.

Докажем, что

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^\ell w''_{tt}(x, \tau) w'_t(x, \tau) d[M] d\tau + \int_0^t \int_0^\ell p(x) w'_\mu(x, \tau) w''_{t\mu}(x, \tau) d\mu d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^\ell w(x, \tau) w'_t(x, \tau) d[Q] d\tau = \int_0^t \int_0^\ell w''_{tt}(x, t) (u'_t(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau)) d[M] d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^\ell p(x) w'_\mu(x, \tau) (u'_t(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau))'_\mu d\mu d\tau + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \int_0^\ell w(x, \tau)(u'_t(x, \tau) - u'_{It}(x, \tau))d[Q]d\tau,$$

т.е. докажем, что

$$\int_0^t (\omega''_{tt}, \omega'_t)d\tau + \int_0^t [\omega, \omega'_t]d\tau = \int_0^t (\omega''_{tt}, u'_t - u'_{It})d\tau + \int_0^t [\omega, u'_t - u'_{It}]d\tau. \quad (3.2.14)$$

В самом деле, левая часть (3.2.14) преобразуется к следующему выражению

$$\begin{aligned} \int_0^t (\omega''_{tt}, \omega'_t)d\tau + \int_0^t [\omega, \omega'_t]d\tau &= \int_0^t (\omega''_{tt}, u'_t - u'_{Nt})d\tau + \int_0^t [\omega, u'_t - u'_{Nt}]d\tau = \\ &= \int_0^t (\omega''_{tt}, u'_t - u'_{It})d\tau + \int_0^t [\omega, u'_t - u'_{It}]d\tau + \\ &+ \left\{ \int_0^t (\omega''_{tt}, u'_{It} - u'_{Nt})d\tau + \int_0^t [\omega, u'_{It} - u'_{Nt}]d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Остается показать, что выражение в фигурных скобках равно нулю. Вспоминая определения $u_N(x, t)$ и $u_I(x, t)$ и учитывая (3.2.11), получим

$$\begin{aligned} &\int_0^t (\omega''_{tt}, u'_{It} - u'_{Nt})d\tau + \int_0^t [\omega, u'_{It} - u'_{Nt}]d\tau = \\ &= \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{N-1} (u'_t(x_k, t) - a'_k(t))((\omega''_{tt}, \varphi_k) + [\omega, \varphi_k]) \right) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Применяя теорему Фубини и интегрируя по частям, левую часть (3.2.14) перепишем в виде

$$\int_0^t \int_0^\ell \omega''_{tt}(x, \tau)\omega'_t(x, \tau)d[M]d\tau + \int_0^t \int_0^\ell p(x)\omega'_\mu(x, \tau)\omega''_{t\mu}(x, \tau)d\mu d\tau +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_0^\ell \omega(x, \tau) \omega'_t(x, \tau) d[Q] d\tau = \frac{1}{2} \int_0^\ell \omega_t'^2(x, t) d[M] - \frac{1}{2} \int_0^\ell \omega_t'^2(x, 0) d[M] + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^\ell p(x) \omega_\mu'^2(x, t) d\mu - \frac{1}{2} \int_0^\ell p(x) \omega_\mu'^2(x, 0) d\mu + \frac{1}{2} \int_0^\ell \omega^2(x, t) d[Q] - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^\ell \omega^2(x, 0) d[Q] = \frac{1}{2} (\omega'_t, \omega'_t) + \frac{1}{2} [\omega, \omega] - \frac{1}{2} (\omega'_t(\cdot, 0), \omega'_t(\cdot, 0)) - \\
& - \frac{1}{2} [\omega(\cdot, 0), \omega(\cdot, 0)].
\end{aligned}$$

Тогда равенство (3.2.14) можно переписать, как

$$\begin{aligned}
(\omega'_t, \omega'_t) + [\omega, \omega] &= (\omega'_t(\cdot, 0), \omega'_t(\cdot, 0)) + [\omega(\cdot, 0), \omega(\cdot, 0)] + \\
& + 2 \int_0^t (\omega''_{tt}, u'_t - u'_{It}) d\tau + 2 \int_0^t [\omega, u'_t - u'_{It}] d\tau.
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Применив теорему Фубини к первому интегралу в последнем равенстве, перепишем (3.2.15) как

$$\begin{aligned}
(\omega'_t, \omega'_t) + [\omega, \omega] &= (\omega'_t(\cdot, 0), \omega'_t(\cdot, 0)) + [\omega(\cdot, 0), \omega(\cdot, 0)] + \\
& + 2(\omega'_t, (u - u_I)'_t) - 2(\omega'_t(\cdot, 0), (u - u_I)'_t(\cdot, 0)) - \\
& - 2 \int_0^t (\omega'_t, (u - u_I)''_{tt}) d\tau + 2 \int_0^t [\omega, (u - u_I)'_t] d\tau.
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Оценим слагаемые из правой части последнего равенства. Имеем

$$\begin{aligned}
& \|\omega'_t(\cdot, 0)\|_1^2 = (\omega'_t(\cdot, 0), \omega'_t(\cdot, 0)) = \\
& = (\omega'_t(\cdot, 0), u'_t(\cdot, 0) - u'_{It}(\cdot, 0)) + (\omega'_t(\cdot, 0), u'_{It}(\cdot, 0) - u'_{Nt}(\cdot, 0)) = \\
& = (\omega'_t(\cdot, 0), \psi(\cdot) - u'_{It}(\cdot, 0)) + (\omega'_t(\cdot, 0), u'_{It}(\cdot, 0) - u'_{Nt}(\cdot, 0)).
\end{aligned}$$

Воспользуемся представлениями для $u_N(x, t)$ и $u_I(x, t)$ и равенством (3.2.13) и рассмотрим последнее слагаемое

$$\begin{aligned} (\omega'_t(\cdot, 0), u'_{It}(\cdot, 0) - u'_{Nt}(\cdot, 0)) &= (\omega'_t(\cdot, 0), \sum_{k=1}^{N-1} (\psi(x_k) - a'_k(0)) \varphi_k(\cdot)) = \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} (\psi(x_k) - a'_k(0)) (\omega'_t(\cdot, 0), \varphi_k(\cdot)) = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\omega'_t(\cdot, 0)\|_1^2 &= (\omega'_t(\cdot, 0), \omega'_t(\cdot, 0)) = \\ &= (\omega'_t(\cdot, 0), \psi(\cdot) - u'_{It}(\cdot, 0)) \leq \|\omega'_t(\cdot, 0)\|_1 \cdot \|\psi(\cdot) - u'_{It}(\cdot, 0)\|_1. \end{aligned}$$

Покажем, что $\|\psi(\cdot) - u'_{It}(\cdot, 0)\|_1 \leq c_1 h$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\psi(\cdot) - u'_{It}(\cdot, 0)\|_1^2 &= \int_0^\ell \left(\psi(x) - \sum_{k=1}^{N-1} \psi(x_k) \varphi_k(x) \right)^2 d[M] = \\ &= \sum_j \int_{x_{j+0}}^{x_{j+1-0}} \left(\psi(x) - \psi(x_j) - \frac{\psi(x_{j+1}) - \psi(x_j)}{\mu(x_{j+1}) - \mu(x_j)} (\mu(x) - \mu(x_j)) \right)^2 d[M], \end{aligned}$$

где из суммы исключены интегралы по промежуткам вида $[\xi - 0, \xi + 0]$, когда ξ – точка разрыва μ или M , поскольку такие интегралы равны нулю в силу подинтегральной функции. Заметим, что при $x \in [x_j + 0, x_{j+1} - 0]$

$$\begin{aligned} &\left| \psi(x) - \psi(x_j) - \frac{\psi(x_{j+1}) - \psi(x_j)}{\mu(x_{j+1}) - \mu(x_j)} (\mu(x) - \mu(x_j)) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\mu(x_{j+1}) - \mu(x_j)} \left(\int_{x_j}^{x_{j+1}} \int_{x_j}^x (\psi'_\mu(s) - \psi'_\mu(\tau)) d\mu(s) d\mu(\tau) \right) \right| \leq V_0^\ell(\psi'_\mu) h. \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Значит

$$\|\psi(\cdot) - u'_{It}(\cdot, 0)\|_1^2 \leq (V_0^\ell(\psi'_\mu))^2 h^2 (M(\ell) - M(0)),$$

откуда следует, что

$$\|\psi(\cdot) - u'_{It}(\cdot, 0)\|_1 \leq c_1 h.$$

Тогда $\|\omega'_t(\cdot, 0)\|_1 \leq c_1 h$.

Выпишем оценку второго слагаемого в (3.2.16). Имеем

$$\begin{aligned} \|\omega(\cdot, 0)\|_2^2 &= [\omega(\cdot, 0), \omega(\cdot, 0)] = \\ &= [\omega(\cdot, 0), u(\cdot, 0) - u_I(\cdot, 0)] + [\omega(\cdot, 0), u_I(\cdot, 0) - u_N(\cdot, 0)] = \\ &= [\omega(\cdot, 0), \varphi(\cdot) - u_I(\cdot, 0)] + [\omega(\cdot, 0), u_I(\cdot, 0) - u_N(\cdot, 0)]. \end{aligned}$$

Воспользуемся представлениями для $u_N(x, t)$ и $u_I(x, t)$ и равенством (3.2.12) и рассмотрим последнее слагаемое

$$\begin{aligned} [\omega(\cdot, 0), u_I(\cdot, 0) - u_N(\cdot, 0)] &= [\omega(\cdot, 0), \sum_{k=1}^{N-1} (\varphi(x_k) - a_k(0))\varphi_k(\cdot)] = \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} (\varphi(x_k) - a_k(0)) [\omega(\cdot, 0), \varphi_k(\cdot)] = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\omega(\cdot, 0)\|_2^2 &= [\omega(\cdot, 0), \omega(\cdot, 0)] = \\ &= [\omega(\cdot, 0), \varphi(\cdot) - u_I(\cdot, 0)]. \end{aligned}$$

Покажем, что $\|\varphi(\cdot) - u_I(\cdot, 0)\|_2 \leq c_2 h$. Имеем

$$\|\varphi(\cdot) - u_I(\cdot, 0)\|_2^2 = \int_0^\ell p(x) (\varphi'_\mu(x) - u'_{I\mu}(x, 0))^2 d\mu + \int_0^\ell (\varphi(x) - u_I(x, 0))^2 d[Q].$$

Оценим отдельно каждое слагаемое. Обозначим через $p_1 = \sup_{[0, \ell]} p(x)$.

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\ell p(x) (\varphi'_\mu(x) - u'_{I\mu}(x, 0))^2 d\mu &\leq p_1 \left| \int_0^\ell (\varphi'_\mu(x) - u'_{I\mu}(x, 0)) d(\varphi(x) - u_I(x, 0)) \right| \leq \\ &\leq p_1 \left| \int_0^\ell (\varphi(x) - u_I(x, 0)) d[\varphi'_\mu(x) - u'_{I\mu}(x, 0)] \right| = \end{aligned}$$

$$= p_1 \left| \sum_j \int_{x_j+0}^{x_{j+1}-0} (\varphi(x) - u_I(x)) d[\varphi'_\mu(x)] \right|.$$

Аналогично неравенству (3.2.17) можно показать, что для всех $x \in [x_j + 0, x_{j+1} - 0]$ выполняется

$$|\varphi(x) - u_I(x, 0)| \leq C_1^* h, \quad (3.2.18)$$

откуда следует, что

$$\int_0^\ell p(x) (\varphi'_\mu(x) - u'_{I\mu}(x, 0))^2 d\mu \leq p_1 C_1^* h V_0^\ell(\varphi'_\mu).$$

Оценим теперь второе слагаемое. Имеем

$$\int_0^\ell (\varphi(x) - u_I(x, 0))^2 d[Q] = \sum_j \int_{x_j+0}^{x_{j+1}-0} (\varphi(x) - u_I(x, 0))^2 d[Q],$$

где аналогично из суммы исключены интегралы по промежуткам вида $[\xi - 0, \xi + 0]$, когда ξ – точка разрыва μ или Q , поскольку такие интегралы равны нулю в силу подинтегральной функции. Воспользовавшись неравенством (3.2.18), получим, что

$$\int_0^\ell (\varphi(x) - u_I(x, 0))^2 d[Q] \leq C_1^{*2} h^2 V_0^\ell(Q).$$

Таким образом, получаем $\|\varphi(\cdot) - u_I(\cdot, 0)\|_2 \leq c_2 \sqrt{h}$.

Тогда имеем $\|\omega(\cdot, 0)\|_2 \leq c_2 h$. Оценим остальные слагаемые в равенстве (3.2.16) через сумму модулей. Имеем

$$|(\omega'_t, (u - u_I)'_t)| + |(\omega'_t(\cdot, 0), (u - u_I)'_t(\cdot, 0))| + \left| \int_0^t (\omega'_t, (u - u_I)''_{tt}) d\tau \right| +$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \int_0^t [\omega, (u - u_I)'_t] d\tau \right| \leq \|\omega'_t\|_1 \|(u - u_I)'_t\|_1 + \|\omega'_t(\cdot, 0)\|_1 \|(u - u_I)'_t(\cdot, 0)\|_1 + \\
& \quad + \int_0^t \|\omega'_t\|_1 \|(u - u_I)''_{tt}\|_1 d\tau + \int_0^t \|\omega\|_2 \|(u - u_I)'_t\|_2 d\tau.
\end{aligned}$$

Второй сомножитель в каждом слагаемом в правой части последнего равенства оценивается сверху величиной $C\sqrt{h}$ при некоторой постоянной, не зависящей от h . Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 3.2.1. Пусть $p(x)$, $F(x, t)$ – функции ограниченной вариации по x на $[0, \ell]$, причем $\inf_{[0, \ell]} p(x) > 0$. Функции $M(x)$, $\mu(x)$ строго возрастают на $[0, \ell]$. Функция $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$. Обозначим через $u(x, t)$ и $u_N(x, t)$ точное и приближенное решения математической модели (3.2.1). Пусть $\omega(x, t) = u(x, t) - u_N(x, t)$. Тогда

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left(\int_0^\ell \omega_t'^2(x, t) d[M] + \int_0^\ell p(x) \omega_\mu'^2(x, t) d\mu + \int_0^\ell \omega^2(x, t) d[Q] \right)^{\frac{1}{2}} \leq C\sqrt{h}.$$

3.3 Численные эксперименты для моделей с разрывными решениями

В данном разделе приведены примеры решений, найденных с помощью адаптированного метода конечных элементов для математических моделей с разрывными решениями. Все численные эксперименты проведены с помощью программы, написанной на языке программирования Python.

Сначала рассмотрим математическую модель

$$\begin{cases} -p(x)u'_\mu(x) + \int_0^x u(s) d[Q(s)] = F(x) - F(0) - p(0)u'_\mu(0), \\ u(0) = u'_\mu(1) = 0, \end{cases} \quad (3.3.1)$$

которая представляет собой частный случай исследуемой ранее модели, когда $\gamma_1 = \infty$, $\gamma_4 = 0$.

Будем полагать, что $\mu(x)$ имеет вид

$$\mu(x) = x + \sum_{i=1}^n \Theta(x - \xi_i).$$

Пример 1. Рассмотрим случай, когда $p(x) \equiv 1$, а $Q(x) \equiv const$. Выберем ξ_i так, чтобы $\xi_1 = 1/3$, $\xi_2 = 1/2$, $\xi_3 = 2/3$, $\xi_4 = 3/4$, $\xi_5 = 4/5$. Внешняя сила $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} -2x, & 0 \leq x < 1/3 \\ 4/9, & x = 1/3 \\ 1, & 1/3 < x < 1/2 \\ -3, & x = 1/2 \\ -1, & 1/2 < x < 2/3 \\ 7/9, & x = 2/3 \\ -4x, & 2/3 < x < 3/4 \\ 245/128, & x = 3/4 \\ -3x^2/2, & 3/4 < x < 4/5 \\ 32/125, & x = 4/5 \\ 0, & 4/5 < x \leq 1. \end{cases}$$

При таком выборе коэффициентов математическая модель (3.3.1) примет вид

$$\begin{cases} u'_\mu(x) = F(x) - F(0) - u'_\mu(0), \\ u(0) = u'_\mu(1) = 0. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Тогда точное решение математической модели (3.3.2) для $F(x)$ можно записать

$$u(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1/3 \\ -x, & 1/3 < x < 1/2 \\ x + 2, & 1/2 < x < 2/3 \\ 2x^2 + 1, & 2/3 < x < 3/4 \\ x^3/2, & 3/4 < x < 4/5 \\ 0, & 4/5 < x \leq 1. \end{cases}$$

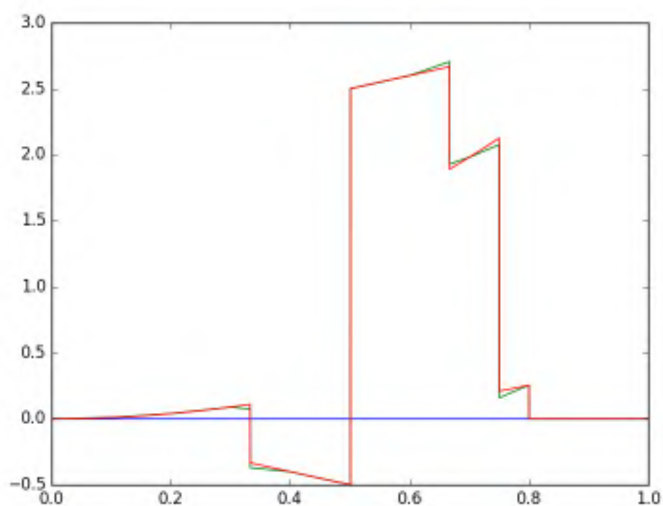


Рис. 3.3.1: Точное и приближенное решение Примера 1 (Python)

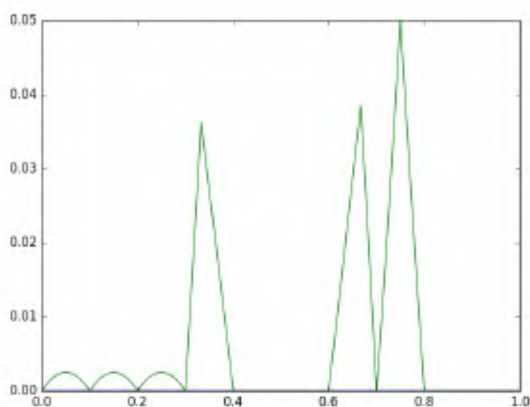


Рис. 3.3.2: График погрешности при $N = 10$

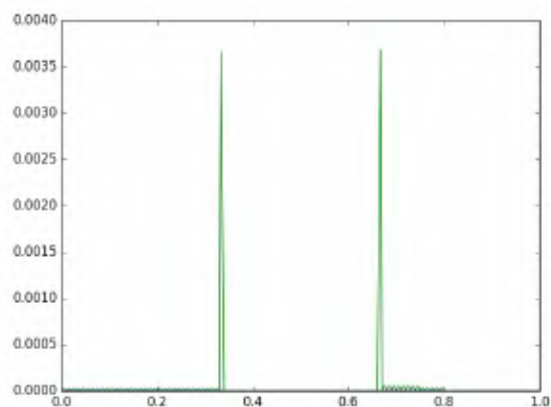


Рис. 3.3.3: График погрешности при $N = 100$

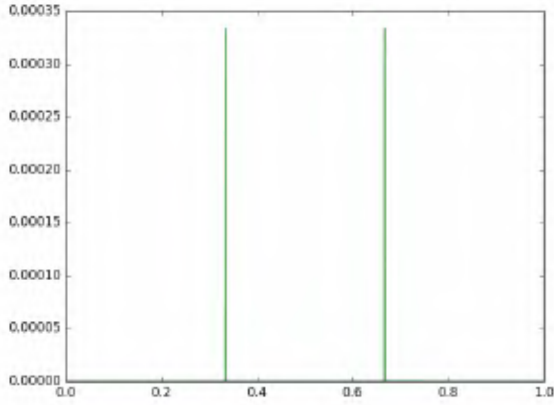


Рис. 3.3.4: График погрешности при $N = 1000$

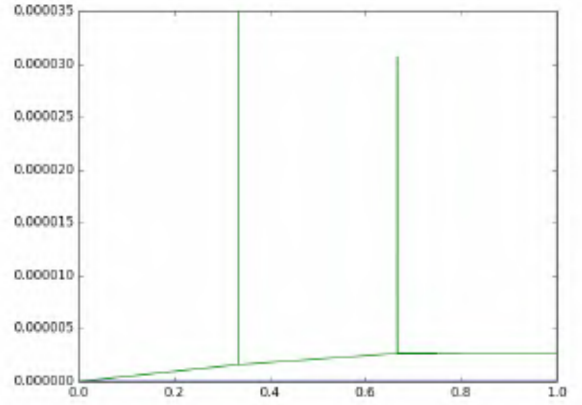


Рис. 3.3.5: График погрешности при $N = 10000$

Пример 2. Пусть $p(x) \equiv 1$.

$$Q(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/3 \\ 1, & x = 1/3 \\ 2x + 2, & 1/3 < x \leq 1. \end{cases}$$

Внешняя сила $F(x)$ задается следующим образом

$$F(x) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \leq x < 1/3 \\ 31/9, & x = 1/3 \\ 3 - x^2, & 1/3 < x < 1/2 \\ 3/4, & x = 1/2 \\ x^2 + 1/2, & 1/2 < x < 2/3 \\ 13/6, & x = 2/3 \\ 2x^3/3 - 2x + 283/162, & 2/3 < x < 3/4 \\ 12547/2592, & x = 3/4 \\ -3x^2 + 17407/2592, & 3/4 < x < 4/5 \\ -101369/64800, & x = 4/5 \\ -2x^3/3 + 2x^2 + 2x - 370333/324000, & 4/5 < x \leq 1. \end{cases}$$

Тогда точное решение математической модели (3.3.1) имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/3 \\ -x, & 1/3 < x < 1/2 \\ x, & 1/2 < x < 2/3 \\ x^2, & 2/3 < x < 3/4 \\ -3x, & 3/4 < x < 4/5 \\ 2x - x^2, & 4/5 < x \leq 1. \end{cases}$$

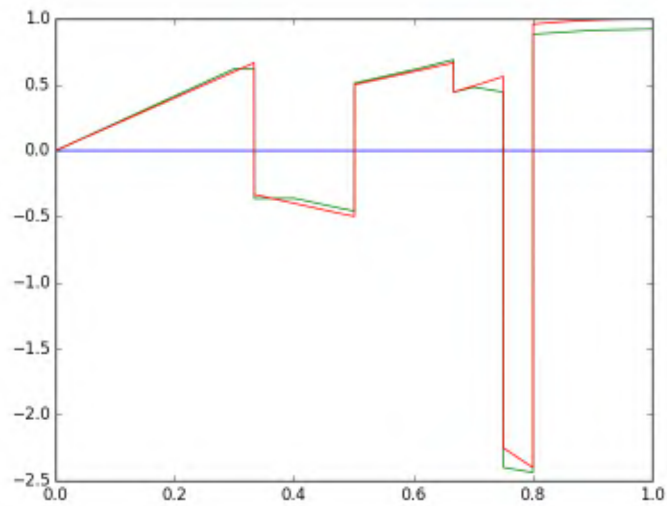


Рис. 3.3.6: Точное и приближенное решение Примера 2 (Python)

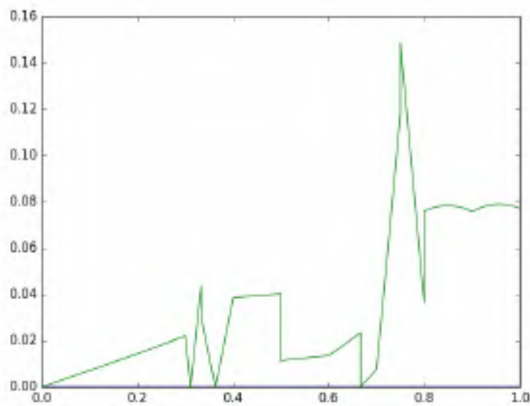


Рис. 3.3.7: График погрешности при $N = 10$

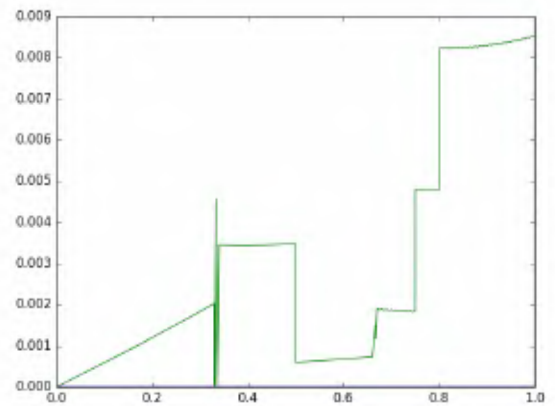


Рис. 3.3.8: График погрешности при $N = 100$

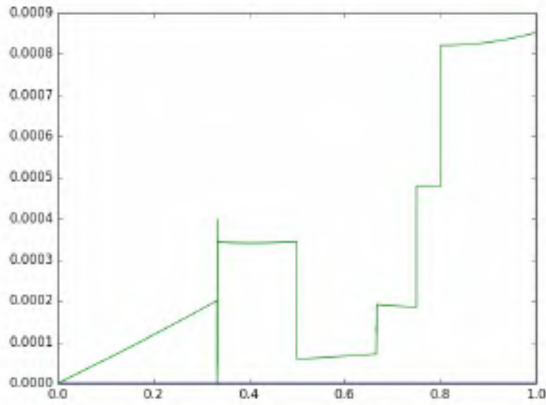


Рис. 3.3.9: График погрешности при $N = 1000$

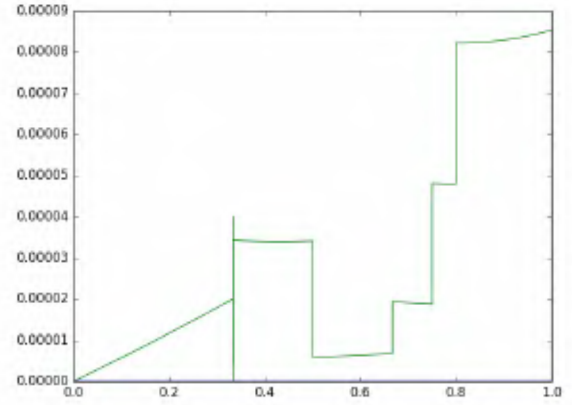


Рис. 3.3.10: График погрешности при $N = 10000$

Проведем теперь численные эксперименты для математической модели с пружинами на концах.

$$\begin{cases} -p(x)u'_\mu(x) + \int_{+0}^x u(s) d[Q(s)] = F(x) - F(+0) - p(+0)u'_\mu(+0), \\ -p(+0)u'_\mu(+0) + u(0)\Delta^+Q(0) = \Delta^+F(0), \\ p(1-0)u'_\mu(1-0) + u(1)\Delta^-Q(1) = \Delta^-F(1). \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Пример 3. Пусть $p(x) \equiv 1$,

$$Q(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 2, & 0 < x < 1 \\ 4, & x = 1, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 2 - 2x, & x < 1/2, \\ 5/4, & x = 1/2, \\ -2, & 1/2 < x < 1, \\ 10, & x = 1. \end{cases}$$

Тогда точное решение модели (3.3.3) имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1/2 \\ 4x, & x > 1/2. \end{cases}$$

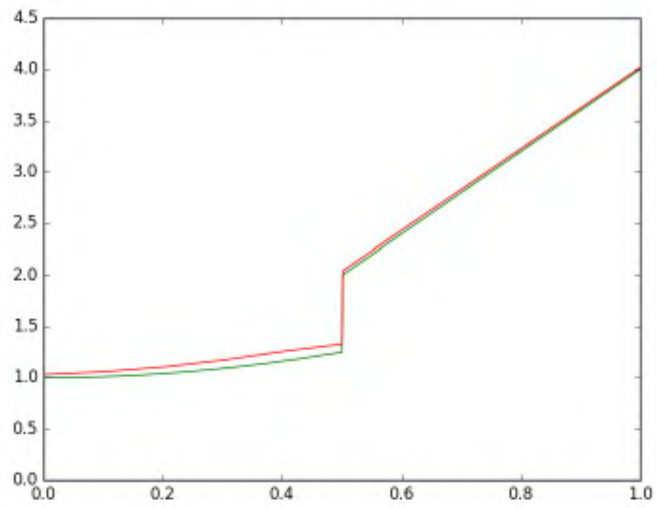


Рис. 3.3.11: Графики точного и приближенного решений Примера 3 (Python)

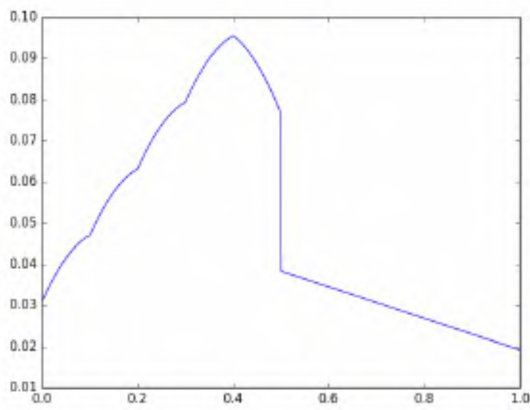


Рис. 3.3.12: График погрешности при $N = 10$

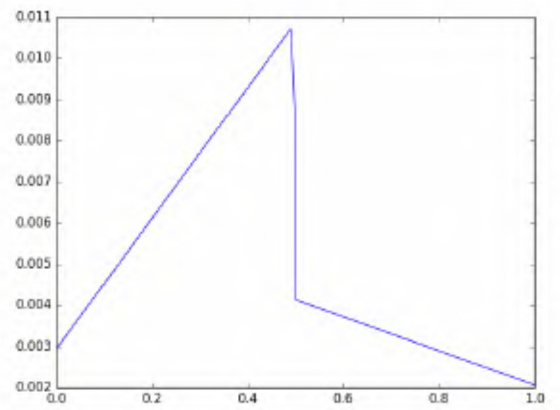


Рис. 3.3.13: График погрешности при $N = 100$

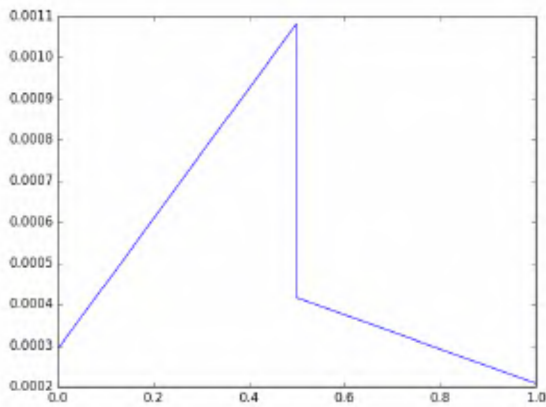


Рис. 3.3.14: График погрешности при $N = 1000$

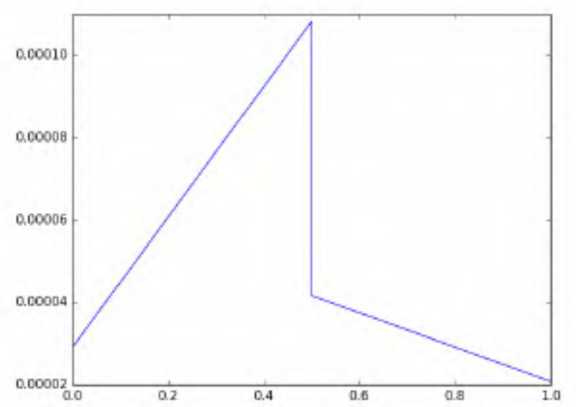


Рис. 3.3.15: График погрешности при $N = 10000$

Пример 4. Рассмотрим случай, когда

$$p(x) = \begin{cases} 1+x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 1, & x = 1/2 \\ 1+x, & 1/2 < x \leq 1, \end{cases} \quad Q(x) = \begin{cases} -1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \\ 1/2, & x = 1, \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ -2x^2 - x + 9/4, & 0 < x < 1/2 \\ 5/2, & x = 1/2 \\ 1/4 - x, & 1/2 < x < 1 \\ 11/8, & x = 1. \end{cases}$$

Для таких параметров точное решение математической модели (3.3.3) равняется

$$u(x) = \begin{cases} (x - 1/2)^2 + 1, & 0 \leq x < 1/2 \\ x - 3/4, & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

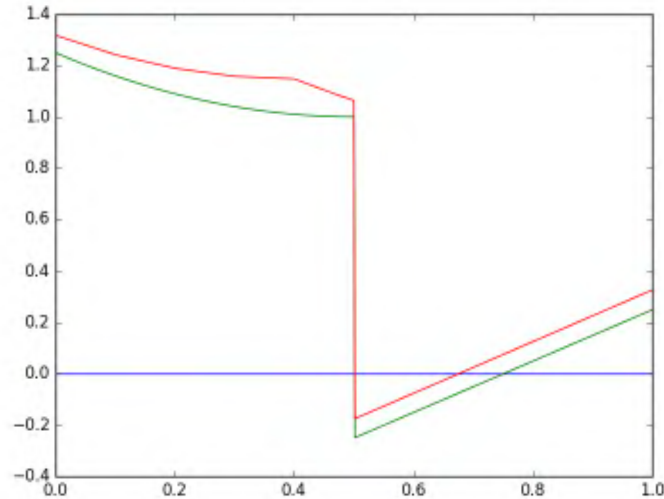


Рис. 3.3.16: Точное и приближенное решение Примера 4 (Python)

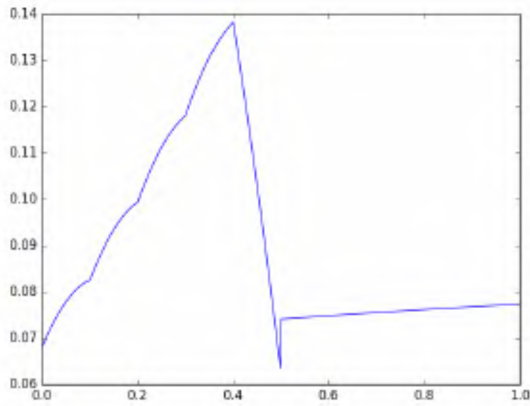


Рис. 3.3.17: График погрешности при $N = 10$

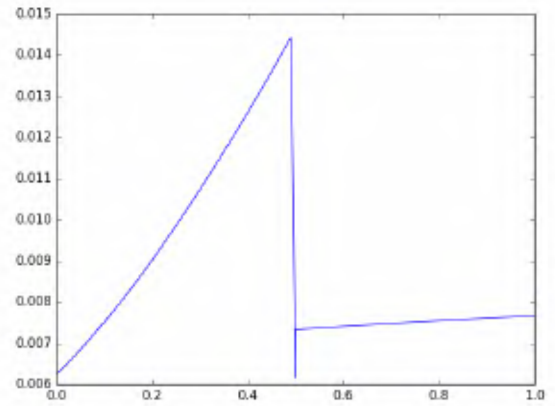


Рис. 3.3.18: График погрешности при $N = 100$

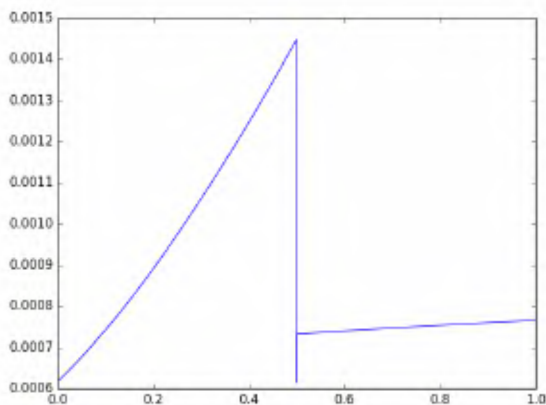


Рис. 3.3.19: График погрешности при $N = 1000$

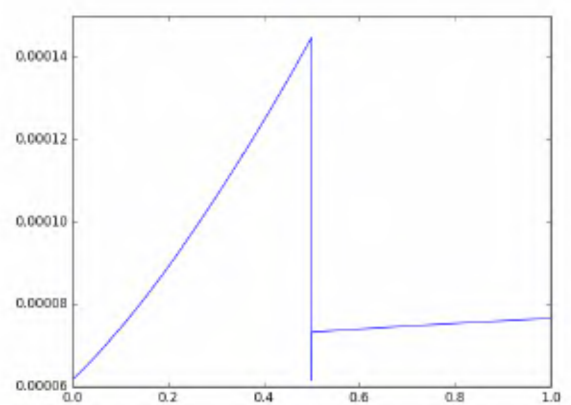


Рис. 3.3.20: График погрешности при $N = 10000$

Пример 5. Рассмотрим случай, когда $p(x) \equiv 1$,

$$Q(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \\ 6, & x = 1, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ -1, & 0 < x < 5/6 \\ 1891/432, & x = 5/6 \\ -3x + 1062/432, & x > 5/6 \\ -666/432, & x = 1. \end{cases}$$

Точное решение для такой задачи можно записать в виде

$$u(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 5/6 \\ x^3/2 - 1, & x > 5/6. \end{cases}$$

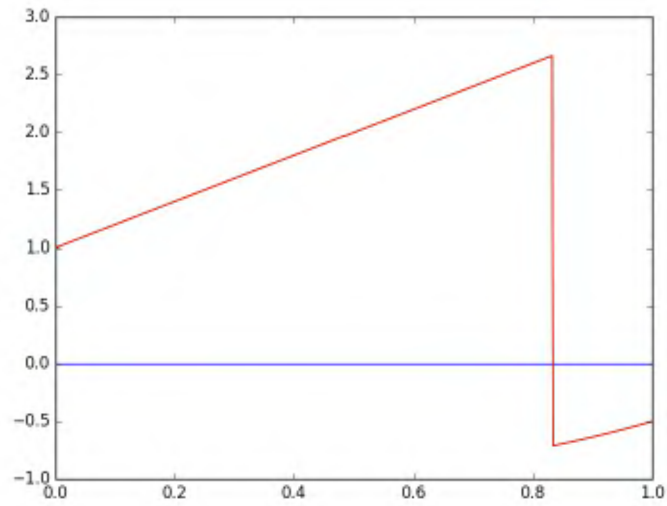


Рис. 3.3.21: Точное и приближенное решение Примера 5 (Python)

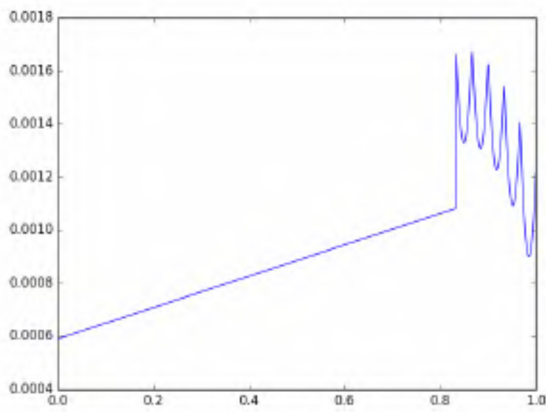


Рис. 3.3.22: График погрешности при $N = 10$

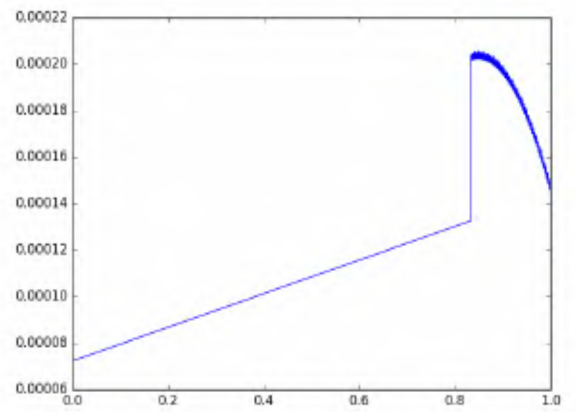


Рис. 3.3.23: График погрешности при $N = 100$

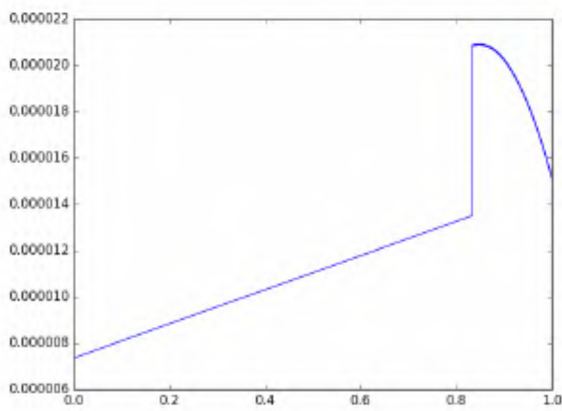


Рис. 3.3.24: График погрешности при $N = 1000$

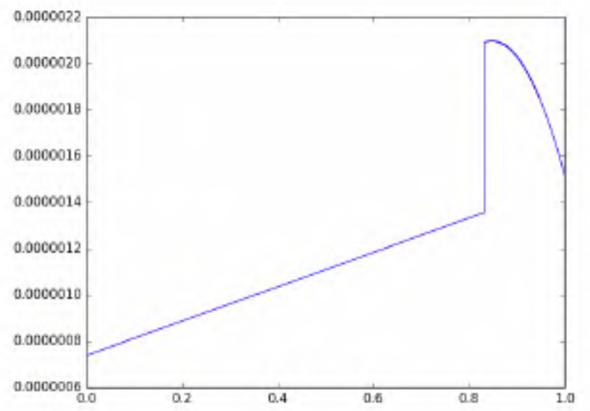


Рис. 3.3.25: График погрешности при $N = 10000$

Заключение

В диссертационной работе предложены новые качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей с сингулярной структурой, допускающие разрывные решения и формализованные в виде единого уравнения с производными по мере, численные методы и алгоритмы в виде комплексов проблемно-ориентированных программ.

В частности, основными результатами диссертационной работы являются

- вариационное обоснование математических моделей с сингулярной структурой, допускающих разрывные решения и описывающих колебания и деформации одномерных упругих объектов с локализованными особенностями внешней среды;

- доказательство корректности полученных математических моделей;

- разработка эффективных численных методов приближенного решения математических моделей с сингулярной структурой, в том числе оценка сходимости;

- разработка эффективных алгоритмов нахождения решения математических моделей с сингулярной структурой, а также разработка комплексов программ для ЭВМ на языке высокого уровня Python с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Литература

- [1] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи: пер. с англ. / Ф. Аткинсон. — М.: Мир, 1968. — 749 с.
- [2] Albeverio S. Solvable models in quantum mechanics / S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn and H. Holden // Texts and Monogr. Phys., Springer-Verlag, New York, 1988. — 452 p.
- [3] Albeverio S. Schrödinger Operators with Delta-Type Interactions / S. Albeverio, A. Kostenko, M. Malamud, H. Neidhardt // Journal of Mathematical Physics 54 (5). — 2013. p. 253–304.
- [4] Баев А.Д. Дифференциал Стильтьеса в моделировании колебаний струны с локализованными особенностями / А.Д. Баев, Ж.О. Залукаева, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 73–83.
- [5] Баскаков А.Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А.Г. Баскаков, А.В. Дербушев, А.О. Щербаков // Известия РАН. Серия математическая. — 2011. — Т. 75, № 3. — С. 3–28.
- [6] Бахтина Ж.И. Метод дифференциала Стильтьеса в моделировании некоторых динамических задач с прерывистым или ветвящимся аргументом: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Ж.И. Бахтина; Воронеж. гос. ун-т; — Воронеж: Б.и., 2009. — 100 с.
- [7] Боровских А.В. Системы Чебышева-Хаара в теории разрывных ядер Келлога / А.В. Боровских, Ю.В. Покорный // УМН. — 1994. — Т. 49, №3. — С. 3–42.
- [8] Боровских А.В. Формула граничного управления неоднородной струной / А.В. Боровских // Дифференциальные уравнения. — 2007. — Т. 34, вып. 1. — С. 64–89.
- [9] Бурлуцкая М.Ш. Классическое решение смешанной задачи для уравнения с инволюцией и двухточечными краевыми условиями / М.Ш. Бурлуцкая, С.А. Чередникова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 71–79.
- [10] Гантмахер Ф.Р. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф.Р. Гантмахер, М.Г. Крейн. — М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теоретич. литературы, 1950. — 359 с.
- [11] Гливенко В.И. Интеграл Стильтьеса / В.И. Гливенко. — ОНТИ НКТП СССР, 1936. — 217 с.

- [12] Голованева Ф.В. О функции Грина некоторых негладких задач: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / Ф.В. Голованева; Воронеж. гос. ун-т; — Воронеж: Б.и., 2007. — 101 с.
- [13] Давыдова М.Б. О краевых задачах с негладкими и разрывными решениями: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / М.Б. Давыдова; Воронеж. гос. ун-т; — Воронеж: Б.и., 2011. — 102 с.
- [14] Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория: пер. с англ. / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. — М.: ИЛ, 1962. — 896 с.
- [15] Дерр В.Я. К определению решения линейного дифференциального уравнения с обобщенными функциями в коэффициентах / В.Я. Дерр // Докл. АН СССР. — 1988. — Т.298, № 2. — С. 269–272.
- [16] Дерр В.Я. Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения / В.Я. Дерр // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. — Ижевск, 1999. — Вып. 1 (16). — С. 3–105.
- [17] Дерр В.Я. О решениях дифференциальных уравнений с обобщенными функциями в коэффициентах / В.Я. Дерр // Известия Института математики и информатики УдГУ. — Ижевск, 1995. — Вып. 1. — С. 51–75.
- [18] Дерр В.Я. О дифференциальных уравнениях с обобщенными функциями и C -интегральных уравнениях / В.Я. Дерр // Вестник Удмуртского университета. — 2000. — Вып. 1. — С. 49–60.
- [19] Дерр В.Я., Кинзебулатов Д.М., Дифференциальные уравнения с обобщенными функциями, допускающими умножение на разрывные функции, Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем., 2005, № 1, С. 35–58.
- [20] Джаков П. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера и Дирака / П. Джаков, Б.С. Митягин // Успехи математических наук. — 2006. — Т. 61, № 4. — С. 77–182.
- [21] Djakov P. Riesz basis property of Hill operators with potentials in weighted spaces / P. Djakov, B. Mityagin // Тр. ММО, 75, No. 2, МЦНМО, М., 2014, С. 181–204.
- [22] Егоров А.И. Граничная наблюдаемость упругих колебаний системы последовательно соединенных струн / А.И. Егоров, Л.Н. Знаменская // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 52:9 (2012), С. 1614–1620.
- [23] Завалицин С.Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С.Т. Завалицин, А.Н. Сесекин. — М.: Наука, 1991. — 255 с.

- [24] Залукаева Ж.О. О корректности математической модели вынужденных колебаний разрывной стилтьесовской струны с особенностями на концах / Ж.О. Залукаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 63–71.
- [25] Залукаева Ж.О. Моделирование колебаний разрывной стилтьесовской струны / Ж.О. Залукаева // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. Сборник научных трудов по материалам международной заочной научно-практической конференции / ВГЛТА — Воронеж, 2014 — № 5 ч. 2. — С. 66–68.
- [26] Залукаева Ж.О. Зависимость решения модели колебаний разрывной струны от начальных условий / Ж.О. Залукаева, М.Б. Зверева // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа. — Воронеж, 2015. — С. 46.
- [27] Залукаева Ж.О. Метод Фурье в моделировании колебаний разрывной стилтьесовской струны / Ж.О. Залукаева, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXVI». — Воронеж: ВГУ, 2015. — С. 92–94.
- [28] Залукаева Ж.О. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с разрывными решениями / Ж.О. Залукаева // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. Сборник научных трудов по материалам международной заочной научно-практической конференции. ВГЛТА — Воронеж, 2015 — № 5 ч. 1. — С. 33–36.
- [29] Залукаева Ж.О. Метод Фурье в задаче с разрывными решениями / Ж.О. Залукаева // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXVII». — Воронеж: ВГУ, 2016. — С. 105–106.
- [30] Залукаева Ж.О. О единственности решения смешанной краевой задачи с условиями третьего рода / Ж.О. Залукаева // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXVII». — Воронеж: ВГУ, 2016. — С. 106–107.
- [31] Залукаева Ж.О. Оценка сходимости в задаче о колебаниях разрывной струны / Ж.О. Залукаева, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа. — Воронеж, 2017. — С. 94–96.

- [32] Залукаева Ж.О. Моделирование колебаний разрывной струны с упругим закреплением на концах / Ж.О. Залукаева // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXVIII». — Воронеж: ВГУ, 2017. — С. 70–71.
- [33] Залукаева Ж.О. Метод Фурье для задачи с разрывными решениями / Ж.О. Залукаева, М.Б. Зверева // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. Выпуск 7. Часть I. Материалы международной молодежной научной школы «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы»; — Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2017. — С. 91–93.
- [34] Зверева М.Б. Моделирование колебаний сингулярной струны / М.Б. Зверева, Ф.О. Найдюк, Ж.О. Залукаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика, математика. — 2014. — №2. — С. 111–119.
- [35] Зверева М.Б. Об адаптации метода конечных элементов для задачи с разрывными решениями / М.Б. Зверева, С.А. Шабров, Ж.О. Залукаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 112–120.
- [36] Зверева М.Б. Моделирование колебаний разрывной струны для случая третьей краевой задачи / М.Б. Зверева, Ж.О. Залукаева, С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер.: Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 134–142.
- [37] Зверева М.Б. Дифференциальные уравнения с разрывными решениями: качественная теория / М.Б. Зверева. — Саарбрюккен: Lap Lambert Academic Publishing, 2012. — 112 с.
- [38] Знаменская Л.Н. Управляемость колебаниями струны с одним закрепленным концом при ограничениях на управление / Л.Н. Знаменская // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39, № 3. — С. 377–382.
- [39] Избранные труды В.А. Ильина: В 2-х томах: Том 2. — М.: МАКС Пресс, 2008. — 692 с.
- [40] Ильин В.А. Оптимизация граничных управлений колебаниями струны / В.А. Ильин, Е.И. Моисеев // УМН. — 2005. — Т. 60, вып. 6 (366). — С. 89–114.
- [41] Kamenskii M. The influence function properties for a problem with discontinuous solutions / Mikhail Kamenskii, Ching-Feng Wen, Zhanna Zalukaeva, Margarita Zvereva // Applied Analysis and

Optimization. 2017. — Jokohama Publishers, Japan. — V. 1, № 2. — P. 259–281.

- [42] Камке Э. Интеграл Лебега-Стилтьеса: пер. с нем. / Э. Камке. — М.: Физматлит, 1959. — 328 с.
- [43] Кац И.С. О спектральных функциях струны / И.С. Кац, М.Г. Крейн // Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон, — М.: Мир, 1968. — С. 648–733.
- [44] Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Наука, 1968. — 496 с.
- [45] Kurzweil J. Generalized ordinary differential equations / J. Kurzweil // Czech. Math. J. — 1958. — V. 8. — P. 360–388.
- [46] Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970, — 671 с.
- [47] Лылов Е.В. Математическое моделирование процессов с локализованными особенностями на геометрическом графе: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Е.В. Лылов; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж: Б.и., 2015. — 140 с.
- [48] Меач Мон. Математическое моделирование колебаний струнных и стержневых систем с локализованными особенностями: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Меач Мон; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж: Б.и., 2014. — 135 с.
- [49] Мышкис А.Д. О решениях линейного однородного двучленного дифференциального неравенства второго порядка с обобщенным коэффициентом / А.Д. Мышкис // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 32, № 5. — С. 615–619.
- [50] R.O. Hryniv and Ya.V. Mykytyuk, Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials, *Inverse Problems* **19:3** (2003), 665–684.
- [51] Покорный Ю.В. Интеграл Стильтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю.В. Покорный // Докл. АН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.
- [52] Покорный Ю.В. О дифференциалах Стильтьеса в обобщенной задаче Штурма-Лиувилля / Ю.В. Покорный // Докл. АН. — 2002. — Т. 383, № 5. — С. 262–265.

- [53] Покорный Ю.В. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, А.С. Ищенко, С.А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.
- [54] Покорный Ю.В. Осцилляционная теория Штурма Штурма-Лиувилля для импульсных задач / Ю.В. Покорный, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // УМН. — 2008. — Т. 63, вып. 1 (379). — С. 111–154.
- [55] Покорный Ю.В. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задачах / Покорный Ю.В. и др. — М.: Физматлит, 2009. — 192 с.
- [56] Покорный Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах./ Ю.В. Покорный, О.М. Пенкин, В.Л. Прядиев, А.В. Боровских, К.П. Лазарев, С.А. Швабров — М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2004. 272 с.
- [57] Провоторов В.В. Оптимальное управление параболической системой с распределенными параметрами на графе / В.В. Провоторов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2014. — Вып. 3. — С. 154–163.
- [58] Savchuk M. Recovering a Potential of Sturm-Liouville Problem from Finite Sets of Spectral Data / M. Savchuk, A.A. Shkalikov // American Mathematical Society Translations — Series 2, Advances in the Mathematical Sciences, 233 (2014), p. 211–224.
- [59] Савчук А.М. Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Равномерная устойчивость, Функц. анализ и его прил., 44:4 (2010), С. 34–53.
- [60] Савчук А.М. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами / А.М. Савчук, А.А. Шкаликов // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66. — Вып. 6. — С. 897–911.
- [61] Tverdý M. Generalized differential equations in the space of regulated functions (Boundary value problems and controllability). Math. Bohem. **116** (3) (1991) 225–244.
- [62] Tverdý M. Differential and Integral Equations in the Space of Regulated Functions. Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics vol.25 (2002), pp. 1–104.
- [63] Tverdý M. Stieltjesuv integrál. Kurzweilova teorie. Univerzita Palackeho v Olomouci, Olomouc, 2012.

- [64] Филиппов, А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. — М.: Наука, 1985. — 224 с.
- [65] Халмош П. Теория меры: пер. с англ. / П. Халмош. — М.: ИЛ, 1953. — 291 с.
- [66] Хромов А.П. Спектральный анализ дифференциальных операторов на конечном интервале, Дифференц. уравнения, 31:10 (1995), 1691–1696; Differ. Equ., 31:10 (1995), 1657–1662.
- [67] Шабров С.А. О краевых задачах с импульсными коэффициентами: дис. ... канд. физ.-мат. наук / С.А. Шабров; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж: Б.и., 2000. — 74 с.
- [68] Шилов Г.Е. Интеграл, мера и производная (общая теория) / Г.Е. Шилов, Б.Л. Гуревич. — М.: Наука, 1967. — 220 с.
- [69] Schwabik S. Differential and integral: Boundary value problems and adjoints / S. Schwabik, V. Tvrdy, O.Vejvoda. — Prague:Academia, 1970. — 246 p.

Приложения

Приложение 1. Текст программы «discontinuous.string.Final.3.2.1»

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: UTF-8 -*-
# Версия 3.2.1
import math
import scipy .integrate as spint
import copy
import multiprocessing
import time
import pylab
from matplotlib import mlab
import numpy as np

import DANNIE2R
from decimal import *
getcontext().prec=100

a=aa = 0.0
b = 1.0

VV=True
while VV:
    try:
        print "Введите N"
        print "рекомендуется ввести 10,100,1000,..."
        NN=input("число N = ")
        if (not(NN>0)) or NN!=int(NN):
            print "Число должно быть натуральным"
        else:
            VV=not(NN>0)
    except:
        print "Некорректное число"

M=5
print "Вы хотите построить график приближенного решения
или получить таблицу значений?"
print "1 - график"
```

```

print "2 - таблица"
print "3 - записать в tex-файл"
print "4 - вычислить значение приближенного решения
в конкретной точке"
print "5 - записать значения приближенного решения
в текстовый файл"

Vibor=1
VV=True
while VV:
    try:
        Vibor=input("Сделайте свой выбор.
По умолчанию используется 1: ")
    except:
        Vibor=1
    VV=not (Vibor==1 or Vibor==2 or Vibor==3 or Vibor==4
or Vibor==5)

if Vibor==5:
    Vv=True
    while Vv:
        print "Введите имя файла"
        print "По умолчанию имя файла - RESULT.txt"
        print "Если такой файл существует, он будет заменен"
        try:
            NAME=raw_input()
            if NAME=='':
                NAME='RESULT.txt'
            Vv=False
        except:
            NAME='RESULT.txt'
if Vibor==3:
    Vv=True
    while Vv:
        print "Введите имя файла"
        print "По умолчанию имя файла - RESULT.tex"
        print "Если такой файл существует, он будет заменен"
        try:
            NAME=raw_input()
            if NAME=='':
                NAME='RESULT.tex'
            Vv=False
        except:

```

```

NAME='RESULT.tex'

print "Начинаем вычисления..."
tt1=time.time()
N = NN+M
xk=[a+i*(b-a)/NN for i in xrange(0,NN+2)]
xii=[1.0/3, 1.0/2, 2.0/3, 3.0/4, 4.0/5]

fs=DANNIE2R.fs
qs=DANNIE2R.qs
Q=DANNIE2R.Q
p=DANNIE2R.p
fa=DANNIE2R.fa
pxi=DANNIE2R.pxi

xk=[a+i*(b-a)/NN for i in xrange(0,NN+2)]
Hj=1
def fik(m,x):
    if (xk[m-1]<x) and (x<= xk[m]):
        return 1.0*(x-xk[m-1])/(Hj)
    elif (xk[m]<x) and (x<=xk[m+1]):
        return 1.0*(x-xk[m+1])/(-1.0*Hj)
    else:
        return 0.0
def fikk(m,x):
    if m<=NN:
        return 1.0*fik(m,x)*NN
    else:
        return 1.0*theta(x-xii[m-NN-1])
def theta(x):
    if x<=0:
        return 0.0
    else:
        return 1.0
def thetaa(x):
    if x<0:
        return 0.0
    else:
        return 1.0
xmin = -0.5
xmax = 1.0
if N>=1000:
    dx = 1.0/(10*NN)

```

```

elif N>=100:
    dx = 1.0/(NN**2)
else:
    dx = 1.0/(NN**4)
x=[]
A=[]
for j in xrange(0,N):
    A+=[[0 for i in xrange(0,N)]]
for m in range(1,N+1):
    for n in range(1,m+2):
        if m<NN and m==n-1:
            b = xk[m+1]
            a = xk[m]
            c,d=spint.quad(lambda x:-1.0*p(x),a,b)
            cc,dd=spint.quad(lambda x: Q(x)*(x-xk[m])*(xk[m+1]-x),a,b)
            ccc=0
            for ix in xrange(0,5):
ccc+=float(qs[ix][0]+qs[ix][1])*fik(m,float(xii[ix]))
*fik(n,float(xii[ix]))
            c = c+cc+ccc
            A[m][m-1]=c*NN**2
            A[m-1][m]=c*NN**2
        elif m<NN and m==n:
            c,d=spint.quad(lambda x:p(x),xk[m-1],xk[m+1])
            cc,dd=spint.quad(lambda x:Q(x)*(x-xk[m-1])**2,xk[m-1],xk[m])
            cc1,dd=spint.quad(lambda x:Q(x)*(x-xk[m+1])**2,xk[m],xk[m+1])
            ccc=0
            for ix in xrange(0,5):
ccc+=float(qs[ix][0]+qs[ix][1])*fik(m,float(xii[ix]))
*fik(n,float(xii[ix]))
            c = c+cc+cc1+ccc
            A[m-1][m-1]=c*NN**2
        elif m==NN and n==NN:
            c,d=spint.quad(lambda x:p(x),xk[m-1],1)
            cc,dd=spint.quad(lambda x:Q(x)*(x-xk[m-1])**2,xk[m-1],1)
            ccc=0
            for ix in xrange(0,5):
ccc+=float(qs[ix][0]+qs[ix][1])*fik(m,float(xii[ix]))
*fik(n,float(xii[ix]))
            c = c+cc+ccc
            A[m-1][m-1]=c*NN**2
        elif m>NN and n<=NN:
            a=0.0

```

```

b=1.0
c=0.0
if xk[n+1]<=xii[m-NN-1]:
cc=0
cc1=0
elif xk[n]<=xii[m-NN-1] and xii[m-NN-1]<xk[n+1]:
cc,dd=spint.quad(lambda x: Q(x)*(xk[n+1]-x),
xii[m-NN-1],xk[n+1])
elif xk[n-1]<=xii[m-NN-1] and xii[m-NN-1]<xk[n]:
cc,dd=spint.quad(lambda x: Q(x)*(x-xk[n-1]),
xii[m-NN-1],xk[n])
cc1,dd=spint.quad(lambda x: Q(x)*(xk[n+1]-x),xk[n],xk[n+1])
else:
cc,dd=spint.quad(lambda x: Q(x)*(x-xk[n-1]),xk[n-1],xk[n])
cc1,dd=spint.quad(lambda x: Q(x)*(xk[n+1]-x),xk[n],xk[n+1])
ccc=0
for ix in xrange(0,5):
ccc+=qs[ix][0]*fik(n,xii[ix])*theta(xii[ix]-xii[m-NN-1])\
+qs[ix][1]*fik(n,xii[ix])*thetaa(xii[ix]-xii[m-NN-1])
A[m-1][n-1]=(c+cc+cc1+ccc)*NN
A[n-1][m-1]=A[m-1][n-1]
elif m>NN and n>NN and n<=N:
a=0.0
b=1.0
c=pxi[m-NN-1] if m==n else 0.0
a=max(xii[n-NN-1],xii[m-NN-1])
cc,dd=spint.quad(lambda x: Q(x),a,1.0)
ccc=0
for ix in xrange(0,5):
ccc+=qs[ix][0]*theta(xii[ix]-xii[m-NN-1])*
theta(xii[ix]-xii[n-NN-1])\
+qs[ix][1]*thetaa(xii[ix]-xii[m-NN-1])*
thetaa(xii[ix]-xii[n-NN-1])
A[m-1][n-1]= c+cc+ccc
A[n-1][m-1]=A[m-1][n-1]
ffff=[]
ffff+=[0.0 for i in xrange(0,N)]
for i in xrange(1,N+1):
dfd=0.0
cdf=0.0
if i<NN:
dfd=0.0
cdf=0.0

```



```

    for ii in range(0,5):
        dfd+=(fs[ii][0]+fs[ii][1])*fik(i,xii[ii])
    az=xk[i-1]
    bz=xk[i+1]
    cfd,dfhd=spint.quad(lambda x:fa(x)*(x-xk[i-1]),
    xk[i-1],xk[i])
    cfd1,fhd=spint.quad(lambda x:fa(x)*(xk[i+1]-x),
    xk[i],xk[i+1])
    ffff[i-1]=(cfd+cfd1+dfd)*NN
elif i==NN:
    for ii in range(0,5):
        dfd+=(fs[ii][0]+fs[ii][1])*fik(i,xii[ii])
    cfd,dfhd=spint.quad(lambda x:fa(x)*(x-xk[i-1]),
    xk[i-1],xk[i])
    ffff[i-1]=(cfd+dfd)*NN
else:
    cfd=0.0
    a=0.0
    b=1.0
    cfd,dfhd=spint.quad(lambda x:fa(x),xii[i-NN-1],b)
    for ix in xrange(0,5):
        cfd+=fs[ix][0]*theta(xii[ix]-xii[i-NN-1])+
        fs[ix][1]*thetaa(xii[ix]-xii[i-NN-1])*
        thetaa(xii[ix]-xii[i-NN-1])
    ffff[i-1]=cfd
B=A
gf=ffff
xx=[0 for i in xrange(N)]

for k in xrange(N):
    gf[k]=gf[k]/B[k][k]
    for j in xrange(N-1,k-1,-1):
        B[k][j]=B[k][j]/B[k][k]
    for j in xrange(k+1,N):
        if B[j][k]!=0:
            r=B[j][k]
            for i in xrange(k,N):
                B[j][i]=B[j][i]-r*B[k][i]
            gf[j]=gf[j]-r*gf[k];
for k in xrange(N-1,-1,-1):
    r=0
    for j in xrange(k+1,N):
        g=B[k][j]*xx[j]

```

```

        r=r+g
        xx[k]=(gf[k]-r)/B[k][k]
def pr(x):
    qaql=0.0
    for m in xrange(1,N+1):
        qaql+=xx[m-1]*fikk(m,x)
    return qaql
if Vibor==1:
    xlist = mlab.frange (0, 1, dx)
    ylist2 = [pr(x) for x in xlist]
    ylist1 = [0 for x in xlist]

    pylab.plot (xlist, ylist1)
    pylab.plot (xlist, ylist2)
    tt2=time.time()
    print "Прошло времени:", tt2-tt1
    print "При этом количество базисных функций равно", N
    pylab.show()
elif Vibor==2:
    for lk in xrange(NN):
        print "x=", aa+lk*1.0/NN, "u=", pr(aa+lk*1.0/NN)
    print "x=", b, "u=", pr(b)
    tt2=time.time()
    print "Прошло времени:", tt2-tt1
    print "При этом количество базисных функций равно", N
elif Vibor==3:
    tex=open(NAME,'w')
    tex.write('\documentclass[a4paper,10pt]{article}
\r\\usepackage[utf8]{inputenc}\r')
    tex.write('\usepackage[russian]{babel}
\r\\usepackage{longtable}\r\\begin{document}\r')
    tex.write('\begin{longtable}{|l|l|}\r')
    tex.write('\hline\r')
    for lk in xrange(N):
        tex.write('$')
        tex.write(str(aa+lk*1.0/N))
        tex.write('$')
        tex.write(' & ')
        tex.write('$')
        tex.write(str(pr(aa+lk*1.0/N)))
        tex.write('$')
        tex.write('\\\\ \hline\r')
    tex.write('\end{longtable}\r\\end{document}')

```

```

tex.close
tt2=time.time()
print "Прошло времени:", tt2-tt1
elif Vibor==4:
    print "Введите число между", a, " и ", b
    print "Выход ENTER"
    try:
        Vibor=True
        while Vibor:
            klkkk=input()
            if klkkk>=a and klkkk<=b:
                print "u(",klkkk,")=",pr(klkkk)
            else:
                print "Число должно быть между ",a, " и ", b
                print " Хотите еще?"
                print "ENTER - выход"
        except:
            print "До свидания"
elif Vibor==5:
    if N<=10:
        МК=1000
    elif N<=1000:
        МК=2500
    else:
        МК=10000
    tex=open(NAME, 'w')
    tex.write(str(МК)+'\r')

    МАХ=pr(0.0)
    МИН=pr(0.0)
    for lk in xrange(МК+1):
        tex.write(str(lk*1.0/МК)+'\r')
        tex.write(str(pr(lk*1.0/МК))+'\r')
        if pr(lk*1.0/МК)>МАХ:
            МАХ=pr(lk*1.0/МК)
        if pr(lk*1.0/МК)<МИН:
            МИН=pr(lk*1.0/МК)
    tex.write(str(МАХ)+'\r')
    tex.write(str(МИН))
    tex.close
    tt2=time.time()
    print "Прошло времени:", tt2-tt1
    print "Имя файла",NAME

```

Приложение 2. Текст программы «discontinuous.string.Final.3.4»

```
# -*- coding: UTF-8 -*-
import math
import scipy.integrate as splean
import copy
import multiprocessing
import time
import pylab
from matplotlib import mlab
from numpy import matrix

a = 0.0
b = 1.0

VV=True
while VV:
    try:
        NN=input("Введите N ")
        if (not(NN>0)) or NN!=int(NN):
            print "Число должно быть натуральным"
        else:
            VV=not(NN>0)
    except:
        print "Некорректное число"
M=1
Vibor=1

print "Вы хотите построить график приближенного решения
или получить таблицу значений?"
print "1 - график"
print "2 - таблица"
print "3 - записать в recordTeX-файл"
print "4 - вычислить значение приближенного решения
в конкретной точке"
Vibor=1
VV=True
while VV:
    try:
        Vibor=input("Сделай выбор. По умолчанию 1: ")
    except:
```

```

    Vibor=1
    VV=not (Vibor==1 or Vibor==2 or Vibor==3 or Vibor==4)
    tt1=time.time()
    N = (NN+1)*(M+1)

    xii=[5.0/6]
    mxii=1
    fs=[[0,-1.0], [2323.0/432, -1909.0/432], [-1.0, 0]]
    pxi=[1.0,1.0,1.0,1.0,1.0]

    qs=[[0, 1.0], [0.0,0], [5.0,0.0], [0.0,0.0],
        [0.0,0.0], [0.0,0.0], [0.0, 0]]

    def fa(x):
        if x<=xii[0]:
            return 0
        else:
            return -3.0*x

    Hj=1

    if N>=1000:
        dx = 1.0/(10*NN)
    elif N>=100:
        dx = 1.0/(NN**2)
    else:
        dx = 1.0/(NN**4)

    def Q(x):
        if x<0.5:
            return 0.0
        else:
            return 0.0

    def p(x):
        return 1.0
    pxi=[1.0,1.0,1.0,1.0,1.0]

    x=[]
    A=[]
    for j in xrange(0,N):
        A+=[0]

```

```

B=[]
for j in xrange(0,N-1):
    B+=[0]

intXii = [0.0]
intXii+=xii
intXii+=[1.0]

# Вычисляем коэффициенты матрицы A
# Первый участок
h = (intXii[1]-intXii[0])/NN
i=0
c, d = splean.quad(lambda x: p(x), intXii[0], intXii[0]+h)
c = c/(h*h)
A[i*(NN+1)]=c

c, d = splean.quad(lambda x: Q(x)*(intXii[i]+(j+1)*h-x)**2,
intXii[i], intXii[i]+h)
c = c/(h*h)
A[i*(NN+1)]+=c
A[i*(NN+1)]+=qs[0][1]

for j in range(1, NN+1):
    a=max(intXii[i]+(j-1)*h, intXii[i])
    b=min(intXii[i]+(j+1)*h, intXii[i+1])
    c, d = splean.quad(lambda x: p(x), a, intXii[i]+j*h)
    c = c/(h*h)
    A[i*(NN+1)+j]=c
    c, d = splean.quad(lambda x: p(x), intXii[i]+j*h, b)
    c = c/(h*h)
    A[i*(NN+1)+j]+=c
    c, d = splean.quad(lambda x: Q(x)*(intXii[i]+(j+1)*h-x)**2,
intXii[i]+j*h, b)
    c = c/(h*h)
    A[i*(NN+1)+j]+=c
    c, d = splean.quad(lambda x: Q(x)*(x-intXii[i]+(j-1)*h)**2,
a, intXii[i]+j*h)
    c = c/(h*h)
    A[i*(NN+1)+j]+=c
A[i*(NN+1)+NN]+=1

# промежуточные
for i in range(1, M):

```

```

h = (intXii[i+1]-intXii[i])/NN
for j in range(1,NN+1):
    a=max(intXii[i]+(j-1)*h, intXii[i])
    b=min(intXii[i]+(j+1)*h, intXii[i+1])
    c, d = splean.quad(lambda x: p(x), a, intXii[i]+j*h)
    c = c/(h*h)
    A[i*(NN)+j-1]=c
    c, d = splean.quad(lambda x: p(x), intXii[i]+j*h, b)
    c = c/(h*h)
    A[i*(NN)+j-1]+=c
    c, d = splean.quad(lambda x: Q(x)*(intXii[i]+(j+1)*h-x)**2,
intXii[i]+j*h, b)
    c = c/(h*h)
    A[i*(NN)+j-1]+=c
    c, d = splean.quad(lambda x: Q(x)*(x-intXii[i]+(j-1)*h)**2,
a, intXii[i]+j*h)
    c = c/(h*h)
    A[i*(NN)+j-1]+=c

```

Последний участок

```

i=M
h = (intXii[i+1]-intXii[i])/NN
j=1
a=max(intXii[i]+(j-1)*h, intXii[i])
b=min(intXii[i]+(j+1)*h, intXii[i+1])
c, d = splean.quad(lambda x: p(x), a, intXii[i]+j*h)
c = c/(h*h)
A[i*(NN+1)+j-1]=c
c, d = splean.quad(lambda x: Q(x)*(intXii[i]+(j+1)*h-x)**2,
intXii[i]+j*h, b)
c = c/(h*h)
A[i*(NN+1)+j-1]+=c
A[i*(NN+1)+j-1]+=1
for j in range(1,NN+1):
    b=min(intXii[i]+(j+1)*h, intXii[i+1])
    c, d = splean.quad(lambda x: p(x), intXii[i]+(j-1)*h, b)
    c = c/(h*h)
    A[i*(NN+1)+j]=c
    c, d = splean.quad(lambda x: Q(x)*(intXii[i]+(j+1)*h-x)**2,
intXii[i]+j*h, b)
    c = c/(h*h)
    A[i*(NN+1)+j]+=c
    c, d = splean.quad(lambda x: Q(x)*(x-intXii[i]+(j-1)*h)**2,

```

```

    a, intXii[i]+j*h)
    c = c/(h*h)
    A[i*(NN+1)+j]+=c
A[i*(NN+1)+NN]+=qs[M+1][0]

# Вычисляем коэффициенты B
# Первый участок
i=0
h = (intXii[i+1]-intXii[i])/NN

for j in range(NN):
    b=min(intXii[i]+(j+1)*h, intXii[i+1])
    c, d = splean.quad(lambda x: p(x), intXii[i]+(j)*h, b)
    c = c/(h*h)
    B[i*(NN)+j]-=c
    c, d = splean.quad(lambda x: Q(x)*(intXii[i]+(j+1)*h-x)*
(x-intXii[i]+j*h), intXii[i]+(j+1)*h, b)
    c = c/(h*h)
    B[i*(NN)+j]+=c
B[i*(NN)+NN]=-1

# промежуточные
for i in range(1, M):
    h = (intXii[i+1]-intXii[i])/NN
    for j in range(NN):
        c, d = splean.quad(lambda x: p(x), intXii[i]+j*h,
intXii[i]+(j+1)*h)
        c = c/(h*h)
        B[i*(NN)+j]-=c
        c, d = splean.quad(lambda x: Q(x)*(intXii[i]+(j+1)*h-x)*
(x-intXii[i]+j*h),
intXii[i]+j*h, intXii[i]+(j+1)*h)
        c = c/(h*h)
        B[i*(NN)+j]+=c
for i in range(M):
    B[i*(NN)+NN]=-1

# Последний участок
i=M
h = (intXii[i+1]-intXii[i])/NN
for j in range(NN):
    b=min(intXii[i]+(j+1)*h, intXii[i+1])
    c, d = splean.quad(lambda x: p(x), intXii[i]+(j)*h, b)

```



```

c = c/(h*h)
B[i*(NN+1)+j]-=c
c, d = splean.quad(lambda x: Q(x)*(intXii[i]+(j+1)*h-x)*
(x-intXii[i]+j*h), intXii[i]+(j+1)*h, b)
c = c/(h*h)
B[i*(NN+1)+j]+=c

# Вычисляем правую часть
right_ch=[]
right_ch+=[0.0 for i in xrange(0, N)]

# Первый участок
i=0
h = (intXii[i+1]-intXii[i])/NN
right_ch[0]+=fs[0][1]
j=0
c, d = splean.quad(lambda x: fa(x)*(intXii[i]+h-x),
intXii[i], intXii[i]+(j+1)*h)
c = c/h
right_ch[i*(NN+1)+j]+=c
for j in range(1, NN):
    c, d = splean.quad(lambda x: fa(x)*(x-intXii[i]-(j-1)*h),
    intXii[i]+(j-1)*h, intXii[i]+(j)*h)
    c = c/h
    right_ch[i*(NN+1)+j]+=c
    c, d = splean.quad(lambda x: fa(x)*(intXii[i]+(j+1)*h-x),
    intXii[i]+(j)*h, intXii[i]+(j+1)*h)
    c = c/h
    right_ch[i*(NN+1)+j]+=c
j=NN
c, d = splean.quad(lambda x: fa(x)*(x-intXii[i]-(j-1)*h),
intXii[i]+(j-1)*h, intXii[i]+(j)*h)
c = c/h
right_ch[i*(NN+1)+j]+=c
right_ch[i*(NN+1)+j]+=fs[i+1][0]

# промежуточные
for i in range(1,M):
    h = (intXii[i+1]-intXii[i])/NN
    for j in range(1, NN):
        c, d = splean.quad(lambda x: fa(x)*(intXii[i]+(j+1)*h-x),
        intXii[i]+j*h, intXii[i]+(j+1)*h)
        c = c/h

```

```

right_ch[i*(NN-1)+j]+=c
c, d = splean.quad(lambda x: fa(x)*(x-intXii[i]-(j-1)*h),
    intXii[i]+(j-1)*h, intXii[i]+j*h)
c = c/h
right_ch[i*(NN-1)+j]+=c

# Последний участок
i=M
h = (intXii[i+1]-intXii[i])/NN
j=0
c, d = splean.quad(lambda x: fa(x)*(intXii[i]+(j+1)*h-x),
    intXii[i]+(j)*h, intXii[i]+(j+1)*h)
c = c/h
right_ch[i*(NN+1)+j]+=c
right_ch[i*(NN+1)+j]+=fs[i][1]

for j in range(1, NN):
    c, d = splean.quad(lambda x: fa(x)*(x-intXii[i]-(j)*h),
        intXii[i]+(j)*h, intXii[i]+(j+1)*h)
    c = c/h
    right_ch[i*(NN+1)+j]+=c
    c, d = splean.quad(lambda x: fa(x)*(intXii[i]+(j+1)*h-x),
        intXii[i]+(j)*h, intXii[i]+(j+1)*h)
    c = c/h
    right_ch[i*(NN+1)+j]+=c
j=NN
c, d = splean.quad(lambda x: fa(x)*(x-intXii[i]-(j-1)*h),
    intXii[i]+(j-1)*h, intXii[i]+(j)*h)
c = c/h
right_ch[i*(NN+1)+j]+=c
right_ch[i*(NN+1)+NN]+=fs[i+1][0]

ffff = right_ch
# Прямой ход
for i in xrange(1,N):
    ffff[i]-=ffff[i-1]*B[i-1]/A[i-1]
    A[i]-=B[i-1]*B[i-1]/A[i-1]

xx=[]
xx+=[0.0 for i in xrange(0,N)]

xx[N-1]=ffff[N-1]/A[N-1]

```

```

# Обратный...
for i in xrange(N-2,-1,-1):
    xx[i]=(ffff[i]-B[i]*xx[i+1])/A[i]

def pr(x):
    for i in range(M+1):
        if x<=intXii[1]:
            h = (intXii[i+1]-intXii[i])/NN
            for j in range(NN+1):
                if (intXii[i]+(j)*h <= x) and (x<=intXii[i]+(j+1)*h):
                    ggg=(x-intXii[i]-(j)*h)*(xx[j+1]-xx[j])/h+xx[j]
                    return ggg
            elif x>=intXii[M]:
                h = (intXii[M+1]-intXii[M])/NN
                for j in range(NN+1):
                    if (intXii[M]+(j)*h < x) and (x<=intXii[M]+(j+1)*h):
                        ggg=(x-intXii[M]-(j)*h)*(xx[j+1+(NN+1)*M]-xx[(NN+1)*
                            M+j])/h+xx[(NN+1)*M+j]
                        return ggg
            return 0

# Конец алгоритма
xMyne = mlab.frange (0, 1, dx)

if Vibor==1:
    xMyne = mlab.frange (0, 1, dx)
    yMyne = [pr(x) for x in xMyne]
    yMyne1 = [0 for x in xMyne]
    pylab.plot (xMyne, yMyne1)
    pylab.plot (xMyne, yMyne)
    pylab.show()

elif Vibor==2:
    for lk in xrange(2*N):
        print "x=", a+lk*1.0/(2*N), "u=", pr(a+lk*1.0/(2*N))
        print "x=", b, "u=", pr(b)
    elif Vibor==3:
        recordTeX=open('RESULT_record.TeX','w')
        recordTeX.write('\documentclass[a4paper,12pt]{article}\r')
        recordTeX.write('\usepackage[utf8]{inputenc}\r')
        recordTeX.write('\usepackage[russian]{babel}
\r\usepackage{longtable}\r\begin{document}\r')

```

```

recordTeX.write('\begin{longtable}{|l|l|}\r')
recordTeX.write('\hline\r')
for lk in xrange(N):
    recordTeX.write('$')
    recordTeX.write(str(a+lk*1.0/N))
    recordTeX.write('$')
    recordTeX.write(' & ')
    recordTeX.write('$')
    recordTeX.write(str(pr(a+lk*1.0/N)))
    recordTeX.write('$')
    recordTeX.write('\\\\ \hline\r')
recordTeX.write('\end{longtable}\r\end{document}')
recordTeX.close
elif Vibor==4:
    print "Введите число между", a, " и ", b
    print "Выход ENTER"
    try:
        Vibor=True
        while Vibor:
            xInput=input()
            if xInput>=a and xInput<=b:
                print "u(",xInput,")=",pr(xInput)
            else:
                print "Число должно быть между ",a, " и ", b
                print "Хотите еще?"
                print "ENTER - выход"
    except:
        print "До свидания"

```

Приложение 3. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2017614993

«discontinuous.string.Final.3.2.1»

Правообладатель: *Залукаева Жанна Олеговна (RU)*

Автор: *Залукаева Жанна Олеговна (RU)*

Заявка № 2017611827

Дата поступления 06 марта 2017 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 02 мая 2017 г.



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев Г.П. Ивлиев