ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи

БУГАКОВА НАДЕЖДА ИГОРЬЕВНА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА РАЗНОПОРЯДКОВЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук,
Профессор Баев Александр Дмитриевич

Воронеж — 2018

Оглавление

Введение 4

1 Поточечный подход к изучению разнопорядковых систем 16

1.1 Вариационное обоснование 16

1.2 Существование и единственность функции влияния 22

1.3 Спектральная задача 27

1.4 О росте собственных значений спектральной задачи 31

2 Математическая модель малых колебаний стержня и струны 34

2.1 Вывод модели 34

2.2 Единственность решения математической модели вынужденных колебаний стержня и струны 40

2.3 О разложении функций из E в ряд Фурье по собственным функциям 43

2.4 Обоснование возможности применения метода Фурье . . . 53

3 Адаптация метода конечных элементов для разнопорядковых математических моделей с негладкими решениями 62

3.1 Построение алгоритма для разнопорядковой математической модели 63

3.2 Об оценке погрешности 67

3.3 Построение алгоритма для разнопорядковой математической модели 78

3.4 Оценка скорости сходимости 82
3.5 Численные эксперименты 87
3.5.1 Первый пример 87
3.5.2 Второй пример 88
3.5.3 Третий пример 88
3.6 Комплекс программ для реализации численных экспериментов 91
Заключение 94

Литература **95**

A Листинги программ **106**
A.1 Модуль INTMYNE4.py 106
A.2 Модуль DANNIE42c.py 107
A.3 Модуль Nn.py 109
A.4 Модуль PARALLEL.py 110
A.5 Текст программы rod.string.Final.1.2.12 112

B Таблицы приближенного, точного решений и погрешности **124**

C. Свидетельство о регистрации программ для ЭВМ **132**

Введение

Актуальность темы

Несмотря на то, что математическое моделирование бурно развивается: расширяются объекты, как с позиций размерности, так и с учётом нелинейных составляющих изучаемого объекта, остаются объекты, моделирование различных процессов в которых либо трудно формалируемо, либо невозможно. Это особенно актуально в случае, когда математическая модель реализуется в виде граничной задачи. Трудности, которые возникают, как при анализе полученных моделей, так и при численном решении, вызваны отсутствием производных у решения (а в ряде случаев и «разрывностью» решения). Подобные проблемы обычно решаются с привлечением теории обобщенных функций (Завалищин С.Т., Сесекин А.Н., Дерр В.Я., Кинзебулатов Д.М., Владимиров В.С., Егоров Ю.В., Антосик П., Минусинский Я., Сикорский Р., Маслов В.П., Цупин В.А., Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. и многие другие). Однако, на этом пути возникают трудности, например, проблема интерпретации умножения обобщенной на разрывную, которая в классическом пространстве D' (линейных непрерывных функционалов над D — пространством бесконечно дифференцируемых финитных функций) неразрешима. Эту проблему пытаются «обойти» переходя к алгебре обобщенных функций Коломбо. Но и на этом пути возникают определенные трудности и неудобства при анализе решений. Для дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих особенности типа δ-функции, удалось решить ряд вопросов качественной теории (Мышкис А.Д. и Владимиров А.А.). Слабая разрешимость краевых задач — это другая проблема, а для приложений этого недостаточно.

Главное направление развития здесь диктовала спектральная теория. В спектральных вопросах наиболее эффективны теория обобщенных функций и теория операторов (Гельфанд И.М., Шилов Г.Е., Гох-

берг И.Ц., Крейн М.Г., Левитан Б.М., Саргсян И.С., Като Т., Марченко В.А., Рид М., Саймон Б., Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден Х., Гасымов М.Г., Михайлец В.А., Винокуров В.А., Садовничий В.А., Нейман-заде М.И., Шкаликов А.А., Митягин Б.С., Хромов А.П., Савчук А.М., Ширяев Е.А., Djakov P., Джаков П., Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. и многие другие).

Моделирование деформаций и колебательных процессов струнных и стержневых систем возникают во многих отраслях естествознания и техники, и здесь можно отметить работы В.А. Ильина, Нахушева А.М., Нахушевой В.А., Знаменской Л.Н., Чабакаури Г.Д., Бахвалова Н.С., Эглит М.Э., Боровских А.В. и многих других. В то же время, задачи в которых у внешней среды имелись локализованные особенности, приводящих к потере гладкости у решения, как правило, не рассматривались.

Еще одно направление развития — это качественная теория краевых задач на геометрическом графе, когда соответствующая граничная задача моделирует малые деформации системы, имеющей структуру графа. Такой подход очень эффективен, так как моделируемый объект занимает промежуточное положение между одномерными и двумерными объектами. В частности, для объектов имеющих разную структуру, приводящую к разным порядкам на различных ребрах (Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Боровских А.В., Прядиев В.Л., Лазарев К.П., Nicaise S., Lumer G., Lagnese J.E., Leugering G., Schmidt E.J.P.G., Белоглазова Т.В., Дикарева Е.В., Перловская Т.В.). Однако, при создании названной теории предполагалась достаточная гладкость коэффициентов (за исключением, быть может конечного числа точек). В последнее время для негладких на ребрах коэффициентов стали появляться работы (Зверева М.Б.) устраняющие этот пробел.

Работы Стилтьеса о нити с бусинками, Крейна М.Г. и Гантмахера Ф.Р., Крейна М.Г. и Каца И.С. о произвольно нагруженной струне, работы Келлога О. обозначили направление исследований в интересах

физической теории колебаний. Через некоторое время исследования в этом направлении «замерли», и только после выхода работ Ю.В. Покорного в 1999 и 2002 годах в Докладах Российской Академии Наук, это направление получило новую жизнь, наряду с интегралом Стилтьеса было предложено использование производных Радона–Никодима. Это направление исследования показало свою эффективность в теории граничных задач второго и четвертого порядков: построена точная параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений (Покорный Ю.В., Шабров С.А., Зверева М.Б., Голованева Ф.В., Давыдова М.Б.), изучены некоторые вопросы математического моделирования колебаний струнных и стержневых систем (Лылов Е.В, Меач М.).

Цель работы. Разработка и развитие новых качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей сложной физической системы, состоящей и стержня и струны и помещенной во внешнюю среду, реализуемых в виде граничных и начально-граничных задач для дифференциальных уравнений; разработка и обоснование эффективных численных методов и алгоритмов. Реализация цепи исследования осуществляется решением следующих задач как теоретического, так и практического характера:

— вариационное обоснование математической модели, описывающей малые деформации системы, состоящей из стержня и струны, помещённой во внешнюю среду;

— вариационное обоснование математической модели, описывающей малые свободные и вынужденные колебания струнно-стержневой системы, помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями;

— доказательство корректности полученных математических моделей;

— изучение возможности применения метода Фурье;

— разработка эффективных численных методов решения граничных и начально-граничных задач для разнопорядкового уравнения;

— разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных и начально-граничных задач, а также разработка комплекса программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах;

— решение задач прикладного характера; нахождение приближенного решения математической модели, описывающей малые деформации струнно-стрежневой системы.

Объект исследования. Качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей систем, представляющих собой сложносочленённые одномерные конструкции, составленные из континуумов, которые взаимодействуют между собой только через связующие их точки.

Методы исследования. Разработанные в диссертационной работе методы исследования математических моделей сложносочлененных систем основаны на фундаментальных методах современного качественного анализа, теории интеграла и меры, функционального анализа. Адаптированный метод конечных элементов для граничных и начально-краевых задач с локализованными особенностями, его обоснование, полученное с использованием последних разработок вычислительных методов для уравнений с особенностями.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, формализованных в виде единого уравнения с производными Радона-Никодима, численные методы и алгоритмы в виде комплексов проблемно-ориентированных программ.

1. Вариационное обоснование математической модели, описывающей малые деформации системы, состоящей из стержня и струны, помещённой во внешнюю среду, имеющей особенности, которые приводят к потере гладкости решения модели;

2. Вариационное обоснование математической модели, описывающей малые свободные и вынужденные колебания струнно-стержневой системы, помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями;

3. Доказательство корректности полученных математических моделей.

4. Разработка эффективных численных методов решения граничных и начально–краевых задач для разнопорядковых уравнений (методы построения аналогов метода конечных элементов для математических моделей и оценка близости приближенного решения к точному решению).

5. Разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных и начально–краевых задач, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Научная новизна. 1. В диссертационной работе предлагаются новые подходы при анализе математических моделей, основополагающим математическим обьектом которых является единое уравнение с производными по мере. 2. Доказана корректность разнопорядковых математических моделей с производными по мере. 3. Метод конечных элементов адаптирован для разнопорядковых математических моделей с производными по мере; доказана оценка близости приближенного решения к точному.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая и практическая значимость результатов и методов диссертационной работы заключается в возможности их использования в качестве инструментария для исследования математических моделей, описывающих колебания одномерных объектов с внутренними особенностями и особенностями, возникающих из-за наличия дефектов у внешней среды.

Разработаны эффективные численные методы применительно к разнопрядковым математическим моделям с производными по мере. Представлены новые методы построения и анализа аналогов метода конечных элементов для граничных и начально-краевых задач с производными

Радона-Никодима. Получены оценки близости приближенного решения к точному для изучаемых линейных математических моделей. Представлены результаты тестирования полученных численных методов с применением ЭВМ.

Область исследования. Область исследования и содержание диссертации соответствует формуле специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки), область исследования соответствует п. 2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», п. 3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», п. 4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

Апробация работы. Результаты работы докладывались на конференциях «Современные методы теории краевых задач» на Воронежской весенней математической школе «Понтрягинские чтения» (Воронеж, 2015–2017 гг.), Академические Жуковские чтения (ВУНЦ ВВС ВВА, 2017 г.), «Современные методы теории функций и смежные проблемы» на Воронежской зимней математической школе (Воронеж, 2015, 2017 гг.) Конференция, посвященная 100-летию С. Г. Крейна (Воронеж, 2017 г.), на семинарах профессора А. Д. Баева (2014–2017 гг.), профессора М. И. Каменского (2015–2016 гг.).

Публикации. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 9 работах: [13, 20–22, 24, 42, 44, 66, 69] из них [42], [69], [66] из перечня, рекомендованных ВАК.

Получено свидетельство [23] о регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора. Все результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Из совместных работ в диссертацию включены только результаты, полученные лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав, заключения, библиографического списка, состоящего из 71 наименование и 3 приложения, в котором приводятся листинги программ, написанных на Python и таблицы значений точного и приближенного решений и погрешности, которые получаются при проведении численных экспериментов. Работа изложена на 132 страницах и содержит 9 рисунков и 2 таблицы.

Содержание работы.

Во введении обоснована актуальность темы диссертационного исследования, определены его цели и задачи, перечислены методы исследования, представлены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе «Поточечный подход к изучению разнопорядковых систем» изучается модель малых деформаций механической системы, состоящей из растянутого стержня, один из концов которого защемлён, а к свободному — прикреплена растянутая струна, второй конец которой закреплён:

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u(l) = u'(0) = 0. \end{cases} \tag{1.1.4}$$

Решение задачи (1.1.4) мы ищем в классе абсолютно непрерывных на $[0, l]$ функций $u(x)$, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0, \xi]$, σ-абсолютно непрерывна на $[\xi, l]$; вторая производная u''_{xx}, определенная на $[0, \xi]$ имеет конечное изменение на $[0, \xi - \varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$; $(pu''_{xx})(x)$ абсолютна непрерывна на $[0, \xi]$; $(pu''_{xx})'_x$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0, \xi]$.

Будем говорить, что граничная задача (1.1.4) невырождена, если однородная задача имеет только тривиальное решение.

Показано, что у невырожденной граничной задачи функция влияния существует и единственна в классе непрерывных функций.

Далее, изучается спектральная задача

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = \lambda M'_\sigma u; \\ u(0) = u'(0) = u(l) = 0. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Доказана

Теорема 1.4.1. *Пусть $p(x), r(x), Q(x)$ и $F(x)$ — функции конечного на $[0,l]$ изменения, $Q(x)$ — не убывает на $[0,l]$ и $\inf\limits_{x\in[0,\xi)} p(x) > 0$, $\inf\limits_{x\in(\xi,l]} r(x) > 0$. Более того, пусть $\{\lambda_n\}$ — собственные значения задачи* (1.3.1)*, причем каждое из них является простым. Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n)^{2/3+\delta}}$$

сходится при любом $\delta > 0$.

Во второй главе диссертации «Математическая модель малых колебаний стержня и струны» изучается математическая модель

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial\sigma}(pu''_{xx})'_x + (ru')'_\sigma + F'_\sigma(x) - uQ'_\sigma, \\ u(0,t) = u'_x(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \psi_0(x); \\ u'_t(x,0) = \psi_1(x). \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Дается вариационное обоснование избранного подхода.

Доказана единственность решения математической модели в классе E — множестве функций $u(x;t)$, частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)$ и $\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)$, которых равномерно непрерывны на прямоугольнике $(0,\xi)\times[0;T]$, частные производные по переменной t непрерывны до второго порядка на прямоугольнике $[0;l]\times[0,T]$.

Показана возможность применения метода Фурье для получения решения, а именно доказана теорема.

Теорема 2.4.1. *Пусть $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $M(x)$ — σ-абсолютно непрерывны; $M'_\sigma > m > 0$; пусть ψ_i — абсолютно непрерывны на $[0,l]$,*

производные ψ_i' имеют конечное на $[0,l]$ изменение, $\psi_i'(x)$ — абсолютно непрерывны на $[0,\xi]$, $\psi_i''(x)$ также абсолютно непрерывны на $[0,\xi]$; квазипроизводная $(p\psi_i'')_x'(x)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$, $(r\psi_i)'$ — σ-абсолютно непрерывна на $[\xi,l]$; функции $\dfrac{(L\psi_0)(x)}{M_\sigma'(x)}$ непрерывны на $[0,l]$, ее производная абсолютно непрерывна; $\psi_0(0) = \psi_0'(0) = \psi(l) = (L\psi_0)(0) = (L\psi_0')(0) = (L\psi_0)(l) = \psi_1(0) = \psi_1'(0) = \psi_1(l) = 0$. Тогда функция

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \left(A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{B}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right), \tag{2.4.8}$$

где $\varphi_k(x)$ — нормированная амплитудная функция, отвечающая собственному значению λ_k,

$$A_k = \int_0^l M_\sigma'(x)\varphi_k(x)\psi_0(x)d\sigma, \quad B_k = \int_0^l M_\sigma'(x)\varphi_k(x)\psi_1(x)d\sigma,$$

является решением математической модели

$$\begin{cases} M_\sigma'(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial \sigma}(pu_{xx}'')_x' + (ru_x')_\sigma' - uQ_\sigma', \\ u(0,t) = u_x'(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \psi_0(x); \\ u_t'(x,0) = \psi_1(x). \end{cases}$$

причем ряд (2.4.8) можно дифференцировать по t дважды и на $[0;\xi]$ четырежды: сначала трижды по x, потом по σ; на $[\xi;l]$ дважды: по x и по σ; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на прямоугольнике $[0;l] \times [0;T]$.

Третья глава «**Адаптация метода конечных элементов для разнопорядковых математических моделей с негладкими решениями**» посвящена адаптации метода конечных элементов для нахождения приближенного решения изучаемых математических моделей.

Приближенное решение $u_N(x)$ математической модели

$$\begin{cases} (p(x)u''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_x + uQ'_\sigma = f(x), \\ u(0) = u'_x(0) = 0; \\ u(l) = 0 \end{cases}$$

будем искать в виде

$$u_N(x;t) = \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{N} b_k\varphi_{2k}(x) + \sum_{k=2N+1}^{3N-1} a_k\varphi_k(x),$$

где a_k, b_k — значения функции и ее производной в узловой точке, $\varphi_k(x)$ — базисные функции, определенные следующим образом. Каждый из отрезков $[0;\xi]$ и $[\xi;l]$ мы разобьем на N равных частей; точки разбиения мы обозначим через $\overline{x}_i \in [0;\xi]$ и $\overline{\overline{x}}_i \in [\xi;l]$. Тогда

$$\varphi_{2i-1}(x) = \begin{cases} 1 - 3\left(\dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_i - \overline{x}_{i-1}}\right)^2 - 2\left(\dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_i - \overline{x}_{i-1}}\right)^3 & \text{для } x \in [\overline{x}_{i-1};\overline{x}_i]; \\ 1 - 3\left(\dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_{i+1} - \overline{x}_i}\right)^2 + 2\left(\dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_{i+1} - \overline{x}_i}\right)^3 & \text{для } x \in [\overline{x}_i;\overline{x}_{i+1}]; \\ 0, \text{ для остальных } x. \end{cases}$$

$$\varphi_{2i}(x) = \begin{cases} (x-\overline{x}_i)\left(1 + \dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_i - \overline{x}_{i-1}}\right)^2 & \text{для } x \in [\overline{x}_{i-1};\overline{x}_i]; \\ (x-\overline{x}_i)\left(1 - \dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_{i+1} - \overline{x}_i}\right)^2 & \text{для } x \in [\overline{x}_i;\overline{x}_{i+1}]; \\ 0, \text{ для остальных } x; \end{cases}$$

$(i = 1, 2, \ldots, N-1)$.

$$\varphi_{2N-1}(x) = \begin{cases} 1 - 3\left(\dfrac{x-\xi}{\xi - \overline{x}_{N-1}}\right)^2 - 2\left(\dfrac{\overline{\overline{x}} - \xi}{\xi - \overline{x}_{N-1}}\right)^3, & \text{для } x \in [\overline{x}_{N-1};\xi]; \\ \dfrac{x - \overline{\overline{x}}_1}{\xi - \overline{\overline{x}}_1}, & \text{для } x \in [\xi;\overline{\overline{x}}_1]; \\ 0, \text{ для остальных } x. \end{cases}$$

$$\varphi_{2N}(x) = \begin{cases} (x-\xi)\left(1 + \dfrac{x-\xi}{\xi - \overline{x}_{N-1}}\right)^2, & \text{для } x \in [\overline{x}_{N-1};\xi]; \\ 0, \text{ для остальных } x; \end{cases}$$

$$\varphi_{i+2N}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \overline{\overline{x}}_{i-1}}{\overline{\overline{x}}_i - \overline{\overline{x}}_{i-1}}, \text{ для } x \in [\overline{\overline{x}}_{i-1}; \overline{\overline{x}}_i]; \\ \dfrac{x - \overline{\overline{x}}_{i+1}}{\overline{\overline{x}}_i - \overline{\overline{x}}_{i+1}}, \text{для } x \in [\overline{\overline{x}}_i; \overline{\overline{x}}_{i+1}]; \\ 0, \text{ для остальных } x; \end{cases}$$

$(i = 1; \dots N - 1)$.

Доказаны теорема.

Теорема 3.2.1. *Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели* (3.1.1), *$v(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов при разбиении на N равных частей каждого из отрезков $[0; \xi]$ и $[\xi; 1]$. Тогда справедлива оценка*

$$a(u - v, u - v) \leqslant C \cdot h,$$

где $h = \max\left\{\left(\dfrac{\xi}{N}\right)^2; \dfrac{1-\xi}{N}\right\}$, *$C$ не зависит от h, и $a(u, u)$ — энергетическая норма:*

$$a(u, u) = \int\limits_0^{\xi} u''^2\, dx + \int\limits_0^1 r u'^2\, dx + \int\limits_0^1 u^2\, dQ.$$

Приближенное решение $u_N(x; t)$ математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial}{\partial x}(p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}) - u\frac{dQ}{d\sigma} + f(x; t); \\ u(0, t) = 0; \\ u'_x(0, t) = 0; \\ u(l, t) = 0; \\ u(x, 0) = \psi_0(x); \\ u'_t(x, 0) = \psi_1(x), \end{cases}$$

будем искать в виде

$$u_N(x; t) = \sum_{k=1}^{3N-1} a_k(t)\varphi_k(x),$$

где $a_k(t)$ — неизвестные дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_k(x)$ — базисные функции, определенные выше.

Доказана теорема.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $M'_\sigma(x) > 0$, $Q'_\sigma(x) > 0$, $p(x) > 0$ *на* $[0;\xi]$, $r(x) > 0$ *на* $[\xi;l]$ *и начальные условия таковы, что математическая модель*

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial x}(p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + \frac{\partial}{\partial\sigma}(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}) - u\frac{dQ}{d\sigma} + f(x;t), \\ u(0,t) = 0; \\ u'_x(0,t) = 0; \\ u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \psi_0(x); \\ u'_t(x,0) = \psi_1(x), \end{cases}$$

имеет единственное решение в классе E; $u(x,t)$ *и* $v(x,t)$ *— точное и приближенное, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов, решения. Тогда справедливо неравенство*

$$\max_t \{(w(\cdot,t);w(\cdot,t)) + [w(\cdot,t);w(\cdot,t)]\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{c}\cdot\sqrt{h}. \tag{3.4.9}$$

Здесь

$$(\varphi,\psi) = \int_0^l \varphi(x)\varphi(x)M'_\sigma d\sigma,$$

$$[\varphi,\psi] = \int_0^l p\varphi''_{xx}\psi''_{xx}dx + \int_0^l r\varphi'_x(x)\psi'_x dx + \int_0^l \varphi\psi dQ.$$

Проведены численные эксперименты с помощью комплекса программ, написанных языке программирования Python.

Дано описание алгоритма комплекса программ.

В заключении излагаются основные результаты диссертации.

Глава 1

Поточечный подход к изучению разнопорядковых систем

1.1 Вариационное обоснование

В этом параграфе рассматривается модель малых деформаций механической системы, состоящей из растянутого стержня, один из концов которого защемлён, а к свободному — прикреплена растянутая струна, второй конец которой закреплён.

Вдоль этой механической системы пустим ось x, перпендикулярно ей в точке защемления стержня ($x = 0$) восстановим ось y перпендикулярно x. Деформации этой системы будем предполагать малыми и происходящими в одной плоскости, перпендикулярно положению равновесия. Закрепленный конец струны обозначим ℓ. Через ξ обозначим точку соединения стержня и струны; $u(x)$ — отклонение точки x от положения равновесия, произошедшее под воздействием силы интенсивности $dF(x)$. Кроме того, будем считать, что эта система помещена во внешнюю среду, локальный коэффициент упругости которой равен $dQ(x)$. Пусть $p(x)$ означает коэффициент, характеризующий материал стержня; $r(x)$ — коэффициент растяжения стержня при $x < \xi$ и силу натяжения струны при $x > \xi$. Очевидно, что $p(x)$ определена только при $x < \xi$, продолжим её вправо до точки ℓ нулем; продолженную функцию мы также

будем обозначать через $p(x)$. Нетрудно видеть, что потенциальная (полная) энергия этой системы имеет вид:

$$\Phi(u) = \int_0^\ell \frac{pu''^2}{2}\,dx + \int_0^\ell \frac{ru'^2}{2}\,dx + \int_0^\ell \frac{u^2}{2}\,dQ - \int_0^\ell u\,dF. \tag{1.1.1}$$

В (1.1.1) все интегралы могут рассматриваться в смысле Римана-Стилтьеса, так как деформация рассматриваемой системы мы предполагаем непрерывными. Реальная деформация изучаемого объекта, согласно принципу Гамильтона, дает минимум функционала (1.1.1) на E — множестве абсолютно непрерывных на $[0,\ell]$ функций $u(x)$, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$, имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение, вторая квазипроизводная $pu''_{xx}(x)$ является функцией ограниченной на $[0,\xi]$ вариации, и удовлетворяет условиям: $u(0) = u'(0) = u(\ell) = 0$ ($u(0) = u(\ell) = 0$ — условия закрепления, $u'(0) = 0$ — условие защемления).

Мы предполагаем, что выполняются вполне физические условия: $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации, $Q(x)$ — неубывающая функция и $\inf\limits_{x\in[0,\xi)} p(x) > 0$, $\inf\limits_{x\in(\xi,l]} r(x) > 0$.

Функционал (1.1.1) определен на функциях из класса E абсолютно непрерывных на $[0,l]$, первая производная которых имеет конечное на $[0,l]$ изменение и абсолютно непрерывна на $[0,\xi)$; u'', определенная на $[0,\xi)$, является функцией ограниченной вариации, и удовлетворяющих следующим условиям: $u(0) = u'(0) = u(l) = 0$.

Если u — реальная деформация, то, согласно вариационному принципу Остроградского-Гамильтона, она дает минимум функционалу $\Phi(u)$ на E. Поэтому для любой допустимой $h(x)$ должно быть выполнено

$$\inf_\lambda \Phi(u + \lambda h) = \Phi(u),$$

т.е. у функции $\varphi(\lambda) = \Phi(u + \lambda h)$ минимум в точке $\lambda = 0$. Функция $\varphi(\lambda)$ дифференцируема по λ, и её первая производная равна:

$$\varphi'(0) = \int_0^l pu''_{xx}h''_{xx}\,dx + \int_0^l ru'_x h'_x\,dx + \int_0^l uh\,dQ - \int_0^l h\,dF. \qquad (1.1.2)$$

Равенство нулю этого выражения при любой h из E и должно определять истинное значение $u(x)$:

$$\int_0^l pu''(x)h''\,dx + \int_0^l ru'(x)h'\,dx + \int_0^l uh\,dQ - \int_0^l h\,dF = 0.$$

Интеграл $\int_0^l uhdQ$ проинтегрируем по частям. На множестве $[0,l]\backslash S(Q)$ определим функцию $\alpha(x) = \int_0^x u\,dQ$, где $S(Q)$ — множество точек разрыва функции $Q(x)$. Тогда

$$\int_0^l uhdQ = \left|\alpha(x) = \int_0^x u\,dQ\right| = \int_0^l hd\alpha = h\alpha\Big|_0^l - \int_0^l \alpha\,dh =$$

$$= h(l)\alpha(l) - h(0)\alpha(0) - \int_0^l \alpha h'\,dx = -\int_0^l \alpha h'\,dx,$$

так как $\int_0^l \alpha dh = \int_0^l \alpha h'\,dx$. Отметим, что последнее выполняется ввиду принадлежности h множеству E.

Тогда, возвращаясь к (1.1.2):

$$\varphi'(0) = \int_0^l pu''_{xx}h''_{xx}\,dx + \int_0^l (ru'_x - \alpha + F)h'\,dx = 0. \qquad (1.1.3)$$

Рассмотрим множество $E_1 = \{u \in E, u(x) = 0, \forall x \geqslant \xi, h(0) = h'(0) = 0\}$. Для $h \in E_1$ имеем:

$$\int_0^\xi pu''_{xx}\,dx + \int_0^\xi (ru'_x - \alpha + F)h'_x\,dx = 0.$$

Вводя функцию

$$\beta(x) = \int_0^x (ru'(s) - \alpha(s) + F(s))\,ds$$

и интегрируя по частям интеграл

$$\int_0^\xi h'_x\,d\beta,$$

будем иметь:

$$\int_0^\xi (pu'' - \beta)h''\,dx + \beta(\xi - 0)h'(\xi - 0) = 0.$$

Для дальнейшего рассуждения нам понадобится **лемма** из [33]. Для удобства читателя приведем ее без доказательства.

Лемма 1.1.1 ([33]). *Пусть $A(x)$ имеет конечное на $[0, \xi]$ изменение. Интеграл*

$$\int_0^\xi A(x)h''\,dx$$

равен нулю для любой $h \in E$, удовлетворяющей дополнительным условиям: $h(\xi) = h'(\xi) = 0$. Тогда $A(x)$ — линейная на $[0, \xi]$ функция.

Из этой леммы мы получим, что

$$pu''(x) - \beta(x) = C_1 + C_2x$$

почти всюду, а так как $\beta(x)$ и $C_1 + C_2x$ абсолютно непрерывны на $[0, \xi)$, то равенство

$$pu''(x) - \beta(x) = C_1 + C_2x$$

превращается на $[0, \xi)$ в тождество.

Также находим, что

$$C_1 + C_2\xi + \beta(\xi - 0) = 0.$$

Тогда $pu''(\xi - 0) = 0$. Отсюда мы находим, что $pu''_{xx}(x)$ абсолютно непрерывна на всем $[0, l]$, следовательно, интеграл $\int\limits_0^l pu''_{xx}h''_{xx}\,dx$ допускает интегрирование по частям:

$$\int\limits_0^l pu''_{xx}h''_{xx}\,dx = pu''_{xx}h\Big|_0^l - \int\limits_0^l (pu''_{xx})'_x h'_x\,dx = -\int\limits_0^l (pu''_{xx})'_x h'_x\,dx,$$

так как $p(l) = 0$.

Тогда равенство (1.1.3) примет вид:

$$\int\limits_0^l [-(pu''_{xx})'_x + ru'_x - \alpha + F]h'\,dx = 0.$$

для любой $h \in E$. Приведем лемму из [33], которая понадобится для дальнейших рассуждений.

Лемма 1.1.2 ([33]). *Пусть $A(x)$ — функция ограниченной вариации и пусть для любой $h \in E$*

$$\int\limits_0^l A(x)\,dh = 0.$$

Тогда $A(x)$ есть константа на $[0, l]$.

Поскольку функция

$$-(pu''_{xx})'_x(x) + ru'_x(x) - \alpha(x) + F(x)$$

является функцией ограниченной вариации, то, воспользовавшись леммой, получаем:

$$-(pu''_{xx})'_x(x) + ru'_x(x) - \alpha(x) + F(x) = C.$$

Продифференцировав функцию по мере σ, получаем математическую модель малых деформаций системы, состоящей из стержня и струны:

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u(l) = u'(0) = 0. \end{cases} \tag{1.1.4}$$

Решение задачи (1.1.4) мы ищем в классе абсолютно непрерывных на $[0, l]$ функций $u(x)$, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0, \xi]$, σ-абсолютно непрерывна на $[\xi, l]$; вторая производная u''_{xx}, определенная на $[0, \xi]$ имеет конечное изменение на $[0, \xi - \varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$; $(pu''_{xx})(x)$ абсолютна непрерывна на $[0, \xi]$; $(pu''_{xx})'_x$ - σ-абсолютно непрерывна на $[0, \xi]$. Вопрос о существовании и единственности решения такой задачи обсуждался ранее в [33].

1.2 Существование и единственность функции влияния

Будем говорить, что граничная задача (1.1.4) невырождена, если однородная задача имеет только тривиальное решение.

Покажем, что при описанных выше условиях задача (1.1.4) невырождена.

Предположим противное: у однородной граничной задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0, \\ u(0) = u(l) = u'(0) = 0, \end{cases}$$

найдется нетривиальное решение $\varphi(x)$. Подставим решение $\varphi(x)$ в однородное уравнение

$$(pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = 0,$$

умножим полученное тождество на $\varphi(x)$, и проинтегрируем по мере σ по всему отрезку $[0; l]$:

$$\int_0^l \left[(p\varphi''_{xx})''_{x\sigma} - (r\varphi'_x)'_\sigma + \varphi Q'_\sigma\right] \varphi \, d\sigma = 0.$$

Разобьем интеграл на три, и первый интеграл проинтегрируем дважды по частям, а второй — один раз:

$$(p\varphi''_{xx})\,\varphi\Big|_0^l - p\varphi''_{xx}\varphi'_x\varphi\Big|_0^l + \int_0^l p\varphi''^2_{xx}\,dx - r\varphi'_x\varphi\Big|_0^l + \int_0^l r\varphi'^2_x dx + \int_0^l \varphi^2 Q'_\sigma\,d\sigma = 0,$$

или, так как $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi(l) = p(l) = 0$,

$$\int_0^l p\varphi''^2_{xx}\,dx + \int_0^l r\varphi'^2_x\,dx + \int_0^l \varphi^2 Q'_\sigma\,d\sigma = 0.$$

По условию все три слагаемых в левой части (1.1.4) неотрицательны, поэтому

$$\int_0^l p\varphi''^2_{xx}\,dx = 0; \int_0^l r\varphi'^2_x\,dx = 0; \int_0^l \varphi^2 Q'_\sigma\,d\sigma = 0.$$

Из первого равенства мы находим, что

$$p\varphi''^2_{xx}(x) = 0$$

почти всюду на $[0;\xi]$. Отсюда следует (так как $p(x) > 0$ при $x \in [0;\xi)$)

$$\varphi''_{xx}(x) = 0,$$

следовательно,

$$\varphi'_x(x) = C_1(= const).$$

Последнее вместе с граничным условием $u'(0) = 0$ нам дает тождество

$$\varphi'_x(x) \equiv 0.$$

Тогда

$$\varphi(x) = C_2(= const),$$

что опять вместе с граничным условием $u(0) = 0$, нам дает

$$\varphi(x) \equiv 0 \text{ на } [0;\xi).$$

Аналогично, из равенства

$$\int_0^l r\varphi'^2_x\,dx = 0$$

мы получаем $\varphi(x) \equiv 0$ на $(\xi; l]$.

Теорема 1.2.1. *Для того, чтобы* (1.1.4) *была невырождена, необходимо и достаточно, чтобы граничная задача* (1.1.4) *имела единственное решение для любой σ-абсолютно непрерывной на $[0; l]$ функции.*

Доказательство. Пусть граничная задача невырождена. Покажем, что у граничной задачи (1.1.4) существует единственная функция влияния.

Предположим противное: существует две функции влияния $G_1(x, s)$ и $G_2(x, s)$, которые определены на квадрате $[0, l] \times [0, l]$.

Так как $G_1(x,s)$ и $G_2(x,s)$ различны, то найдется точка (x_0,s_0), в которой $G_1(x,s) \neq G_2(x,s)$. Без ограничения общности можно считать, что $G_1(x_0,s) - G_2(x_0,s) > 0$.

В силу непрерывности $G_1(x,s)$ и $G_2(x,s)$ существует окрестность U_δ точки (x_0,s_0), для всех точек из которой справедливо неравенство.

$$G_1(x,s) - G_2(x,s) \geqslant K > 0.$$

Возьмем в качестве $f(x)$ равную нулю на $(s_0-\delta; s_0+\delta)$, 1 — на $(s_0-\frac{\delta}{2}; s_0+\frac{\delta}{2})$ и продолженную линейным образом на оставшуюся часть отрезка $[0;l]$. Тогда будем иметь:

$$0 = \int_0^l (G_1(x,s) - G_2(x,s)) f(s)\, d\sigma(s) =$$

$$= \int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta} (G_1(x,s) - G_2(x,s)) f(s)\, d\sigma(s) \geqslant$$

$$\geqslant \int_{s_0-\frac{\delta}{2}}^{s_0+\frac{\delta}{2}} (G_1(x,s) - G_2(x,s)) 1\, d\sigma(s) \geqslant \int_{s_0-\frac{\delta}{2}}^{s_0+\frac{\delta}{2}} k \cdot\, d\sigma(s) =$$

$$= k \cdot \sigma([s_0 - \frac{\delta}{2}, s_0 + \frac{\delta}{2}]) > 0.$$

Следовательно, предположение неверно и функция влияния единственна.

Докажем существование функции влияния.

Через $K(x,s)$ обозначим минималь функционала (1.1.1) на множестве E при $F_s(x) = \theta(x-s)$, где $\theta(x-s)$ — функция Хевисайда, равная 1 при $x > s$ и равная нулю при $x < s$. Как и выше, показывается, что $K(x,s)$ является решением граничной задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = \theta'_\sigma, \\ u(0) = u'(0) = u(l) = 0. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Покажем, что функция

$$u(x) = \int_0^l K(x,s) F'_\sigma(s)\, d\sigma \tag{1.2.2}$$

является решением граничной задачи (1.1.4).

Равенство (1.2.2) перепишем в следующем виде

$$u(x) = \begin{cases} \int\limits_0^x K(x,s) f(s) d\sigma + \int\limits_x^\xi K(x,s) f(s)\, d\sigma + \\ \qquad\qquad + \int\limits_\xi^l K(x,s) f(s)\, d\sigma,\ x \leqslant \xi, \\ \int\limits_0^\xi K(x,s) f(s)\, d\sigma + \int\limits_\xi^x K(x,s) f(s)\, d\sigma + \\ \qquad\qquad + \int\limits_x^l K(x,s) f(s)\, d\sigma,\ x > \xi. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

Из равенства (1.2.3) и отмеченных выше свойств функции $K(x,s)$ вытекают равенства

если $x < \xi$

$$u'_x(x) = \int_0^l K'_x(x,s) f(s)\, d\sigma,$$

$$(pu''_{xx})(x) = \int_0^l pK''_{xx}(x,s) f(s)\, d\sigma,$$

$$(pu''_{xx})'_x(x) = \int_0^l (pK''_{xx})'_x(x,s) f(s)\, d\sigma,$$

$$(pu''_{xx})''_{x\sigma}(x) = f(x) + \int_0^l (pK''_{xx})''_{x\sigma}(x,s) f(s)\, d\sigma.$$

И, в случае $x > \xi$,

$$u'_x(x) = \int_0^l K'_x(x,s) f(s)\, d\sigma,$$

$$(ru'_x)(x) = \int_0^l rK'_x(x,s) f(s)\, d\sigma,$$

$$(ru'_x)'_\sigma(x) = -f(x) + \int_0^l (rK'_x)'_\sigma(x,s) f(s)\, d\sigma,$$

Тогда $u(x)$ является решением граничной задачи (1.1.4), так как $u(x)$, очевидно, удовлетворяет граничным условиям.

Пусть теперь граничная задача (1.1.4) имеет единственное решение при любой σ-абсолютно непрерывной на $[0; l]$ функции $F(x)$, и для $F(x) = const$ в частности, то есть (1.1.4) обладает свойством невырожденности.

Остается заметить, что непрерывная зависимость доказывается теми же рассуждениями, что и в [65].

1.3 Спектральная задача

В этом параграфе рассматривается следующая задача:

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = \lambda M'_\sigma u; \\ u(0) = u'(0) = u(l) = 0. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Данная спектральная задача возникает при применении метода Фурье для нахождения решения математической модели, которая описывает малые собственные колебания системы, состоящей из стержня, один конец которого защемлен, а ко второму прикреплена растянутая струна, другой конец которой закреплен.

Решение задачи (1.3.1) мы ищем в классе абсолютно непрерывных на $[0, l]$ функций $u(x)$, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0, \xi]$, σ-абсолютно непрерывна на $[\xi, l]$; вторая производная u''_{xx}, определенная на $[0, \xi]$, имеет конечное изменение на $[0, \xi - \varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$; $(pu''_{xx})(x)$ абсолютна непрерывна на $[0, \xi]$; $(pu''_{xx})'_x$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0, \xi]$.

Мы предполагаем, что выполняются вполне физические условия: $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной на $[0, l]$ вариации, $Q(x)$ — неубывающая на $[0, l]$ функция и $\inf\limits_{x\in[0,\xi)} p(x) > 0$, $\inf\limits_{x\in(\xi,l]} r(x) > 0$.

Уравнение в (1.3.1) определено на специальном расширении $\overline{[0, l]}_\sigma$ отрезка $[0, l]$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi - 0; \xi; \xi + 0\}$.

Множество $\overline{[0, l]}_\sigma$ строится следующим образом. На $[0, l]$ вводим метрику $\rho(x, y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Если $S(\sigma) \neq 0$, то $([0, l], \rho)$ является неполным метрическим пространством. Стандартное пополнение и приводит к $\overline{[0, l]}_\sigma$.

Как показано в параграфе § 1.2, задача

$$\begin{cases} Lu = (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma; \\ u(0) = u'(0) = u(l) = 0, \end{cases}$$

является невырожденной, то есть она имеет единственное решение для любой σ - абсолютно непрерывной функции $F(x)$ на $[0; l]$.

Задача (1.3.1) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda \int_0^l K(x,s)u(s)M'_\sigma(s)\,d\sigma,$$

где $K(x;s)$ — функция влияния задачи (1.3.1), или, вспоминая теорему о замене [51],

$$u(x) = \lambda \int_0^l K(x,s)u(s)\,dM(s).$$

Интегральный оператор

$$(Au)(x) = \int_0^l K(x,s)u(s)\,dM(s)$$

действует в $C[0;l]$ и вполне непрерывен. Поэтому его спектр состоит из собственных значений, причем каждое из них имеет конечную кратность.

Отметим, что функция влияния не является симметричной, вообще говоря, $K(x,s) \neq K(s,x)$. В это же время задача является симметричной: для всяких $u, v \in E$ справедливо равенство

$$(Lu, v) = (u, Lv).$$

Отсюда вытекает вещественность спектра.

Покажем, что у каждого собственного значения присоединенные элементы отсутствуют.

Предположим противное: у некоторого собственного значения λ_k существует цепочка присоединенных ненулевых векторов. Тогда, первая (за собственной функцией, которую мы обозначим через φ_k) является решением граничной задачи

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = \lambda_k M'_\sigma u + \varphi_k, \\ u(0) = u(l) = u'(0) = 0. \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Умножим уравнение в (1.3.2) на φ_k и проинтегрируем по мере σ по отрезку $[0, l]$:

$$\int_0^l (pu''_{xx})''_{x\sigma}\varphi_k\,d\sigma - \int_0^l (ru'_x)'_\sigma\varphi_k\,d\sigma + \int_0^l uQ'_\sigma\varphi_k\,d\sigma = \\ = \lambda_k \int_0^l uM'_\sigma\varphi_k\,d\sigma + \int_0^l \varphi_k^2\,d\sigma. \quad (1.3.3)$$

Первый и второй интеграл равенства (1.3.3) проинтегрируем по частям (первый интеграл — четыре раза, второй — два):

$$\int_0^l (pu''_{xx})''_{x\sigma}\varphi_k\,d\sigma = (pu''_{xx})'_x\varphi_k\Big|_0^l - pu''_{xx}\varphi'_{kx}\Big|_0^l + p\varphi''_{kxx}u'\Big|_0^l - (p\varphi''_{kxx})'_x u\Big|_0^l + \\ + \int_0^l (p\varphi''_{kxx})''_{x\sigma}u\,d\sigma = \int_0^l (p\varphi''_{kxx})''_{x\sigma}u\,d\sigma \quad (1.3.4)$$

и

$$\int_0^l (ru'_x)'_\sigma\varphi_k\,d\sigma = ru'_x\varphi_k\Big|_0^l - r\varphi'_{kx}u\Big|_0^l + \int_0^l (r\varphi'_{kx})'_\sigma u\,d\sigma = \int_0^l (r\varphi'_{kx})'_\sigma u\,d\sigma. \quad (1.3.5)$$

Все подынтегральные слагаемые равны нулю, так как $p(l) = r(0) = 0$ и $\varphi_k(x)$ и $u(x)$ удовлетворяют граничным условиям. С учетом равенств (1.3.4) и (1.3.5), соотношение (1.3.3) принимает вид:

$$\int_0^l [(p\varphi'_{kx})''_{x\sigma}) - (r\varphi'_{kx})'_\sigma + Q'_\sigma\varphi_k]u d\sigma = \lambda_k \int_0^l uM'_\sigma\varphi_k\,d\sigma + \int_0^l \varphi_k^2\,d\sigma. \quad (1.3.6)$$

Но $\varphi_k(x)$ — собственная функция, отвечающая собственному значению λ_k, потому (1.3.6) принимает вид:

$$\int_0^l \varphi_k^2\,d\sigma = 0,$$

откуда следует, в силу непрерывности $\varphi_k(x)$, тождество

$$\varphi_k(x) \equiv 0.$$

Последнее противоречит нетривиальности $\varphi_k(x)$.

1.4 О росте собственных значений спектральной задачи

Собственные значения спектральной задачи (1.3.1) определяются как нули оператора Фредгольма, который в нашем случае определяется следующим образом (см., например, [36])

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} A_n,$$

где

$$A_n = \int_0^l \dots \int_0^l \begin{vmatrix} K(s_1, s_1) & \dots & K(s_1, s_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ K(s_n, s_1) & \dots & K(s_n, s_n) \end{vmatrix} dM(s_1) \dots dM(s_n).$$

Точно так же, как и в [36], доказывается сходимость ряда при всех λ. Однако, применить схему, использованную в [36], в нашем случае нельзя, так как $K(x, s)$ не имеет непрерывной производной по x, если $x > \xi$.

В то же время, так как $K(x, s)$ — есть решение уравнения (1.2.1), то $K'_x(x, s)$ ограничена на всем квадрате $[0, l] \times [0, l]$, так как и разность

$$K(s_{i+1}, s_i) - K(s_i, s_j) = \kappa_{ij}(s_{i+1} - s_i),$$

$i = 1, 2, \dots, n-1, j = 1, 2, \dots, n$.

Причем $|\kappa_{ij}|$ ограничены одной и той же постоянной C.

Тогда, при $n \geqslant 2$ имеем

$$\begin{vmatrix} K(s_1, s_1) & K(s_1, s_2) & \dots & K(s_1, s_n) \\ K(s_2, s_1) & K(s_2, s_2) & \dots & K(s_2, s_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & \\ K(s_{n-1}, s_1) & K(s_{n-1}, s_2) & \dots & K(s_{n-1}, s_n) \\ K(s_n, s_1) & K(s_n, s_2) & \dots & K(s_n, s_n) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \dots & K(s_1,s_n) \\ K(s_2,s_1) & K(s_2,s_2) & \dots & K(s_2,s_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ K(s_{n-1},s_1) & K(s_{n-1},s_2) & \dots & K(s_{n-1},s_n) \\ \kappa_{n-1,1} & \kappa_{n-1,2} & \dots & \kappa_{n-1,n} \end{vmatrix} \cdot (s_n - s_{n-1}) = \dots$$

$$= \begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \dots & K(s_1,s_n) \\ \kappa_{1,1} & \kappa_{1,2} & \dots & \kappa_{1,n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \kappa_{n-2,1} & \kappa_{n-2,2} & \dots & \kappa_{n-2,n} \\ \kappa_{n-1,1} & \kappa_{n-1,2} & \dots & \kappa_{n-1,n} \end{vmatrix} \cdot (s_2 - s_1)(s_3 - s_2)\dots(s_n - s_{n-1}).$$

Применяя неравенство Адамара и оценку

$$|(s_2 - s_1)(s_3 - s_2)\dots(s_n - s_n - 1)| \leqslant \left(\frac{l}{n-1}\right)^{n-1},$$

для A_n (при $n \geqslant 2$) будем иметь

$$|A_n| \leqslant C^n \cdot n^{\frac{n}{2}} (M(l) - M(0))^n \left(\frac{l}{n-1}\right)^{n-1} = \\ = \frac{1}{l}(C(M(l) - M(0))l)^n \frac{n^{\frac{n}{2}}}{(n-1)^{n-1}}.$$

Так как для любого фиксированного положительного ε, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n^{\varepsilon n}} = 0$, то при достаточно большом n (зависящем от ε), справедливо неравенство

$$|A_n| \leqslant \frac{1}{l}(C(M(l) - M(0))l)^n n^{-\frac{n}{2}+\varepsilon n}.$$

Доказанное неравенство, согласно общей теории целых функций [34], [62], показывает, что порядок роста функции $D(\lambda)$ не выше $\frac{2}{3} - \varepsilon$ для любого $\varepsilon \in (0; \frac{1}{2})$. Поэтому $D(\lambda)$ имеет порядок роста не выше $2/3$, следовательно, для произвольности $\delta > 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n)^{2/3+\delta}}$$

сходится. Таким образом, доказана теорема.

Теорема 1.4.1. *Пусть* $p(x), r(x), Q(x)$ *и* $F(x)$ *— функции конечного на* $[0, l]$ *изменения,* $Q(x)$ *— не убывает на* $[0, l]$ *и* $\inf\limits_{x\in[0,\xi)} p(x) > 0$, $\inf\limits_{x\in(\xi,l]} r(x) > 0$. *Более того, пусть* $\{\lambda_n\}$ *— собственные значения задачи* (1.3.1), *причем каждое из них является простым. Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n)^{2/3+\delta}}$$

сходится при любом $\delta > 0$.

Глава 2

Математическая модель малых колебаний стержня и струны

В этой главе изучается математическая модель малых вынужденных поперечных колебаний системы, состоящей из стержня, один конец которого защемлен, а ко второму прикреплена растянутая струна, другой конец которой закреплен.

2.1 Вывод модели

Поместим начало координат в один из концов стержневой системы. Пусть ξ — точка соединения стержня и струны; l — точка закрепления второго конца струны. Изучаемая система в состоянии покоя расположена вдоль некоторой прямой, по которой направим ось абсцисс. Через $u(x,t)$ обозначим отклонение от положения равновесия точки x в момент времени t. Будем рассматривать малые колебания, при которых каждая точка системы смещается перпендикулярно положению равновесия, т. е. оси Ox. Кинетическая энергия стержневой системы равна

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_0^\ell \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dM,$$

где $M(x)$ — масса участка $[0;x)$. Рассмотрим случай нерастяжимого стержня. Потенциальная энергия упругого при постоянной кривизне

пропорциональна квадрату кривизны. Следовательно, потенциальная энергия dU_0 элементарного участка dx равна

$$dU_0 = \frac{1}{2}p(x)\left\{\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}^2,$$

где $p(x) > 0$ — характеризует материал, из которого создан материал, а потенциальная энергия стержня системы равна

$$U_0 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\xi} p(x)\left\{\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left[1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}^2 dx. \tag{2.1.1}$$

Предположим, что отклонения системы от положения равновесия малы и членом $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ в знаменателе можно пренебречь. Тогда (2.1.1) принимает вид

$$U_0 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\xi} p(x)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx. \tag{2.1.2}$$

Прибавим к (2.1.2) потенциальную энергию струны,

$$U_{0,2} = \frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{l} r(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx,$$

внешней среды —

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\ell} u^2(x,t)\,dQ(x),$$

где $dQ(x)$ — локальный коэффициент упругости внешней среды, и внешних сил

$$\int\limits_0^{\ell} u(x,t)\,d_x F(x,t),$$

где $F(x,t)$ — сумма всех сил, приложенных к участку $[0;x)$ в момент времени t, индекс x у дифференциала в последнем интеграле означает, что интегрирование осуществляется по переменной x.

Пусть функция $\sigma(x)$, порождающая на $[0;\ell]$ меру σ, такая, что функции $Q(x)$ и $M(x)$ являются σ-абсолютно непрерывными на $[0;\ell]$ и

$$F(x,t) = F(0,t) + \int\limits_0^x f(x,t)\,d\sigma(x)$$

при всех $t \in [0;T]$. (Последнее по сути означает, что $F(x,t)$ — σ-абсолютно непрерывна по x на $[0;\ell]$ при каждом фиксированном t.)

Интеграл Остроградского–Гамильтона в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned}\Phi(u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} (T-U)\,dt = \\ = \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int\limits_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 M'_\sigma d\sigma dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int\limits_0^\xi p(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dxdt - \\ - \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int\limits_\xi^l r(x) \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right)^2 dxdt - \\ - \frac{1}{2} \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^\ell (u^2(x,t)Q'_\sigma(x) - 2u(x,t)F'_\sigma(x,t)d\sigma dt. \quad (2.1.3)\end{aligned}$$

Функционал (2.1.3) мы рассмотрим на следующем множестве функций: $u(x;t)$ и частная производная $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ непрерывны на замкнутом прямоугольнике $[0;l] \times [t_0,t_1]$; $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$ равномерно непрерывны на прямоугольнике $(0,\xi) \times [t_0;t_1]$; интегралы $\displaystyle\int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^l p(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt$, $\displaystyle\int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_0^\xi p(x) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dxdt$ и $\displaystyle\int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_\xi^l r(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt$ конечны. Предположим,

что функция $u(x,t)$ имеет частные производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\dfrac{\partial}{\partial x}(p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$, первая из которых непрерывна на $[0;\ell]\times[t_0,t_1]$, остальные — равномерно непрерывны на $(0,\xi)\times[t_0,t_1]$. Обозначим множество функций, удовлетворяющих описанным выше свойствам, через E.

Функцию $p(x)$ продолжим на $[\xi;l]$ нулем; полученную функцию будем обозначать также $p(x)$. Аналогично, $r(x)$ продолжим на $[0;\xi]$ нулем, и новую функцию будем обозначать через $r(x)$.

Применяя схему Лагранжа к функционалу $\Phi(u)$, будем иметь равенство нулю вариации:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{0}^{\ell}\frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial t}M'_\sigma d\sigma dt-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{0}^{l}p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}dxdt-$$
$$-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{0}^{l}\left(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right)dxdt-\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{0}^{l}u(x,t)h(x,t)Q'_\sigma d\sigma dt+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{0}^{l}h(x,t)F'_\sigma(x,t)d\sigma dt=0 \quad (2.1.4)$$

для всякой $h(x,t)$, равной нулю на границе прямоугольника $[0;l]\times[t_0,t_1]$ вместе с производной $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ (только на той части, где $x<\xi$).

Применим к интегралу $\displaystyle\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{0}^{\ell}M'_\sigma(x)u'_t(x,t)h'_t(x,t)\,d\sigma(x)\,dt$ теорему Фубини и внутренний интеграл проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{0}^{\ell}M'_\sigma(x)u'_t(x,t)h'_t(x,t)\,d\sigma(x)\,dt=$$
$$=\int\limits_{0}^{\ell}M'_\sigma(x)\int\limits_{t_0}^{t_1}u'_t(x,t)h'_t(x,t)\,dt\,d\sigma(x)=$$
$$=\int\limits_{0}^{\ell}\left[u'_t(x,t)h(x,t)\Big|_{t=t_0}^{t=t_1}-\int\limits_{t_0}^{t_1}h(x,t)u''_{tt}(x,t)\,dt\right]d\sigma(x)=$$

$$= -\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{0}^{\ell} M'_\sigma(x)h(x,t)u''_{tt}(x,t)\,d\sigma(x)\,dt \quad (2.1.5)$$

(в последнем равенстве мы снова применили теорему Фубини), так как $h(x,t_0) = h(x,t_1) = 0$. Следует отметить, что интегрирование по частям внутреннего интеграла в (2.1.5) законно в силу свойств функций из класса E.

Внутренний интеграл в интеграле $\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{0}^{\ell} p(x)u''_{xx}(x,t)h''(x,t)\,dx\,dt$ дважды проинтегрируем по частям (что законно в силу свойств функций из E):

$$\int\limits_0^\ell p(x)u''_{xx}(x,t)h''(x,t)\,dx = pu''_{xx}h'\Big|_0^l - \left(pu''_{xx}\right)'_x h\Big|_0^l + \int\limits_0^l \left(pu''_{xx}\right)''_{x\sigma} h d\sigma =$$

$$= \int\limits_0^l \left(pu''_{xx}\right)''_{x\sigma} h d\sigma, \quad (2.1.6)$$

внеинтегральные слагаемые равны нулю в силу свойств функций из E и $p(l) = 0$.

Аналогично,

$$\int\limits_0^l \left(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right)dx = ru'_x h\Big|_0^l - \int\limits_0^l \left(ru'_x\right)'_\sigma h d\sigma =$$

$$= -\int\limits_0^l \left(ru'_x\right)'_\sigma h d\sigma \quad (2.1.7)$$

(внеинтегральные слагаемые также равны нулю в силу свойств функций из E и $r(0) = 0$).

Теперь равенство (2.1.4), с учетом (2.1.5), (2.1.6) и (2.1.7), принимает вид

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_0^l \Big[- M'_\sigma u''_{tt} - \left(pu''_{xx}\right)''_{x\sigma} + \left(ru'_x\right)'_\sigma - uQ'_\sigma + F'_\sigma\Big] h d\sigma dt = 0. \quad (2.1.8)$$

Дальнейшие рассуждения основаны на аналоге леммы Лагранжа, который доказан в [38], и для удобства читателя мы приведем ее формулировку.

Лемма 2.1.3 (Аналог леммы Лагранжа [38]). *Пусть $A(x,t)$ равномерно ограничена на $[0;\ell]$; σ-суммируема на $[0;\ell]$ при каждом фиксированном $t \in [t_0;t_1]$; непрерывна по t при всех $x \in [0;\ell]$; интеграл $\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{0}^{\ell} A(x,t)h(x,t)\,d\sigma(x)\,dt$ равен нулю для каждой функции $h(x,t)$, принадлежащей классу E, и обращающейся в нуль на границе прямоугольника $I = [0;\ell]\times[t_0;t_1]$. Тогда $A(x,t)$ равна нулю почти всюду относительно меры $\sigma \times t$.*

На основании леммы, из (2.1.8) мы получаем уравнение

$$-M'_\sigma u''_{tt} - (pu''_{xx})''_{x\sigma} + (ru'_x)'_\sigma - uQ'_\sigma + F'_\sigma = 0,$$

дополнив которое граничными условиями

$$u(0,t) = u'_x(0,t) = u(0,t) = 0$$

и начальными

$$u(x,0) = \varphi_0(x), u'_t(x,0) = \varphi_1(x),$$

получим математическую модель малых колебаний системы.

2.2 Единственность решения математической модели вынужденных колебаний стержня и струны

В этом параграфе доказывается единственность математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial\sigma}(pu''_{xx})'_x + (ru')'_\sigma + F'_\sigma(x) - uQ'_\sigma, \\ u(0,t) = u'_x(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \psi_0(x); \\ u'_t(x,0) = \psi_1(x). \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Коэффициент $p(x)$ характеризует материал, из которого изготовлен стержень; положителен на отрезке $[0,\xi)$, где ξ — точка соединения стержня и струны. Продолжим его на оставшуюся часть отрезка нулем, полученную функцию мы также будем обозначать $p(x)$.

Функция $r(x)$ — сила натяжения струны в точке x. Как и функцию $p(x)$, продолжим $r(x)$ на $[0,\xi)$ нулем, обозначив продолженную функцию через $r(x)$. Функция $Q(x)$ определяет упругую реакцию внешней среды, $F(x)$ — внешнюю силу, а $M(x)$ — масса участка $[0,x)$, σ — мера, порождаемая функцией $\sigma(x)$, содержит все особенности системы — это точки, в которых имеются локализованные особенности. Через $S(\sigma)$ обозначим множество точек разрыва функции $\sigma(x)$.

Решение задачи (2.2.1) мы ищем в классе абсолютно непрерывных по совокупности переменных функций $u(x,t)$, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$, σ-абсолютно непрерывна на $[\xi,l]$; вторая производная u''_{xx}, определенная на $[0,\xi]$, имеет конечное изменение на $[0,\xi-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$; $(pu''_{xx})(x)$ абсолютна непрерывна на $[0,\xi]$; $(pu''_{xx})'_x$ - σ-абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$.

Мы предполагаем, что выполняются вполне физические условия: $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной на $[0,l]$ вариации, $Q(x)$ — неубывающая на $[0,l]$ функция и $\inf\limits_{x\in[0,\xi)} p(x) > 0$, $\inf\limits_{x\in(\xi,l]} r(x) > 0$.

Докажем, что не может существовать более двух решений.

Предположим противное, что существует два различных решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, тогда $u_1(x,t) - u_2(x,t)$ также будет решением модели (2.2.1). Пусть (x^*, T^*) — точка, в которой решения различны.

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{T^*}\int_0^{l} \frac{\partial u}{\partial t}\left(M'_\sigma(x)u''_{tt} + (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma\right) + uQ'_\sigma)\, d\sigma dt. \tag{2.2.2}$$

Рассмотрим первое слагаемое. По теореме Фубини получим:

$$\int_0^{T^*}\int_0^{l} \frac{\partial u}{\partial t}\left(M'_\sigma(x)u''_{tt}\right) d\sigma dt = \int_0^{T^*}\int_0^{l} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial u}{dt}\right)^2\right) dM dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{l}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x^*, T^*)\right)^2 dM. \tag{2.2.3}$$

Второе слагаемое в (2.2.2) проинтегрируем по частям и в силу краевых условий, получим:

$$\int_0^{T^*}\left(\int_0^{l} u'_t(pu''_{xx})''_{x\sigma} d\sigma\right) dt =$$

$$= \int_0^{T^*}\left(u'_t\left(pu'_{xx}\right)'_x\Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^{l}(pu''_{xx})'_x d_x(u'_x)\right) dt = -\int_0^{T^*}\left(\int_0^{l}(pu'_{xx})'_x u''_{tx} dx\right) dt =$$

$$= \int_0^{T^*}\left((pu''_{xx})u''_{tx}\Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^{l} pu''_{xx} d_x(u''_{tx})\right) = \int_0^{T^*}\left(\int_0^{l}(pu''_{xx}u'''_{txx} dx\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{l} p(x)\left(u''_{xx}(x^*, T^*)\right)^2 dx,$$

так как $u(x,0) = 0$.

В третьем слагаемом в (2.2.3) аналогично:

$$\int_0^{T^*}\left(\int_0^{l} u'_t u Q'_\sigma dt\right) d\sigma = \frac{1}{2}\int_0^{l} u^2(x, T^*)Q'_\sigma(x) d\sigma.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^l M'_\sigma(x)(u'_t(x,T^*))^2 d\sigma + \frac{1}{2}\int\limits_0^\xi p(x)(u''_{xx}(x,T^*))^2 dx + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_0^l r(x)(u'_x(x,T^*))^2 dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^l u^2(x,T^*)Q'_\sigma(x)d\sigma = 0. \quad (2.2.4)$$

В левой части равенства (2.2.4) стоит сумма неотрицательных слагаемых, значит,

$$\int\limits_0^\xi p(x)(u''_{xx}(x,T^*))^2 dx = 0$$

и, соответственно, $u''_{xx}(x,T^*) = 0$ на отрезке $[0,\xi]$.

Откуда получим, что решение будет линейной функцией $u(x,T^*) = c_1 + c_2 x$.

Воспользуемся краевыми условиями: $u(0,T^*) = c_1 = 0$, $u'_x(0,T^*) = c_2 = 0$.

Таким образом, $u(x,T^*) \equiv 0$ на $[0,\xi)$. Далее,

$$\int\limits_0^l r(x)(u'_x(x,T^*))^2 dx = \int\limits_\xi^l r(x)(u'_x(x,T^*))^2 dx = 0,$$

следовательно, $u'_x(x,T^*) = 0$ почти всюду.

Поэтому $u(x,T^*) = c_3$. Значит, $u(l,T^*) = c_3 = 0$.

Таким образом, мы приходим к равенству $u_1(x,T^*) - u_2(x,T^*) = 0$, которое противоречит нашему предположению. Единственность доказана.

2.3 О разложении функций из E в ряд Фурье по собственным функциям

Все дальнейшие рассуждения мы будем проводить в предположении, что геометрическая кратность каждого собственного значения равна единице.

Покажем, что ряд Фурье для всякой абсолютно непрерывной на $[0;l]$ функции $f(x)$, производная $f'(x)$ которой имеет конечное на $[0,l]$ изменение, более того, $f'(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\xi]$, $f''(x) \in BV[0;\xi]$ ($BV[0;\xi]$ — пространство функций с ограниченным на $[0;\xi]$ изменением), и принимающей нулевые значения в концах этого отрезка, а также $u'(0) = 0$ сходится равномерно и абсолютно на $[0,l]$. Заметим, что если это так, то коэффициенты ряда Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$, построенного для функции $f(x)$, определяются по формулам

$$c_n = \int\limits_0^l f(x)\varphi_n(x)M'_\sigma(x)d\sigma.$$

Сначала покажем, что ряд Фурье

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$$

сходится в среднем.

Рассмотрим функционал

$$\Phi(u) = \int\limits_0^l pu''^2_{xx}dx + \int\limits_0^l ru'^2_x dx + \int\limits_0^l u^2\, dQ.$$

Отметим, что функции

$$f_N(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k(x)$$

принадлежат E при всех N.

Как и в работе [38] введем следующие обозначения

$$\Delta_N^2 = \int\limits_0^l M'_\sigma(x) f_N^2(x) d\sigma, \quad \psi_N(x) = \frac{f_N(x)}{\Delta_N^2}.$$

Найдем $\Phi(\psi_N)$:

$$\Phi(\psi_N) = \int\limits_0^\xi p(x)\psi_N''^2\,dx + \int\limits_0^l r(x)\psi_N'^2\,dx + \int\limits_0^l \psi_N^2\,dQ =$$

$$= \int\limits_0^\xi p(x)\frac{1}{\Delta_N^2}\left(f''(x) - \sum_{k=1}^N c_k\varphi_k''(x)\right)^2 dx +$$

$$+ \int\limits_0^l r(x)\frac{1}{\Delta_N^2}\left(f'(x) - \sum_{k=1}^N c_k\varphi_k'(x)\right)^2 dx +$$

$$+ \int\limits_0^l Q'_\sigma(x)\frac{1}{\Delta_N^2}\left(f(x) - \sum_{k=1}^N c_k\varphi_k(x)\right)^2 d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\Delta_N^2}\left(\int\limits_0^\xi p(x)f''^2(x)\,dx + \int\limits_0^l r(x)f'^2(x)\,dx + \int\limits_0^l Q'_\sigma(x)f^2(x)\,d\sigma - \right.$$

$$- 2\sum_{k=1}^N c_k\left(\int\limits_0^\xi p(x)f''(x)\varphi_k''(x)\,dx + \int\limits_0^l r(x)f'(x)\varphi_k'(x)\,dx + \right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_0^l Q'_\sigma f(x)\varphi_k(x)d\sigma\right) + \sum_{k=1}^N\sum_{k=1}^N c_k c_m\left(\int\limits_0^\xi p(x)f''(x)\varphi_k''(x)dx + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_0^l r(x)f'(x)\varphi_k'(x)dx\right) + \int\limits_0^l Q'_\sigma f(x)\varphi_k(x)\,d\sigma\right) =$$

$$= \frac{1}{\Delta_N^2}\left(\Phi(f) - \sum_{k=1}^N \lambda_k c_k^2\right),$$

так как

$$\int\limits_0^\xi p(x)f''(x)\varphi_k''(x)\,dx + \int\limits_0^l r(x)f'(x)\varphi_k'(x)\,dx + \int\limits_0^l Q'_\sigma f(x)\varphi_k(x)\,d\sigma =$$

$$= p(x)f'(x)\varphi_k''(x)\Big|_0^{\xi} + f(x)(\varphi_k''(x)p(x))_x'\Big|_0^{l} + r(x)f(x)\varphi_k'(x)\Big|_0^{l} =$$

$$= \int_0^l f(x)\left((\varphi_k''(x)p(x))_{x\sigma}'' - (r(x)\varphi_k''(x))_\sigma' + \varphi_k(x)Q_\sigma'(x)\right)d\sigma =$$

$$= \int_0^l f(x)\lambda_k M_\sigma'\varphi_k(x)d\sigma = \lambda_k c_k,$$

в виду того, что $f(0) = f(l) = 0$ (здесь мы первый и второй интегралы проинтегрировали по частям, и затем воспользовались тем, что $\varphi_k(x)$ является амплитудной функцией, отвечающей собственной частоте $\sqrt{\lambda_k}$), и

$$\int_0^l p(x)\varphi_k''(x)\varphi_m''(x)dx + \int_0^l r(x)\varphi_k'(x)\varphi_m'(x)dx + \int_0^l \varphi_k(x)\varphi_m(x)Q_\sigma d\sigma =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } k \neq m, \\ 1, \text{ если } k = m. \end{cases}$$

Покажем, что

$$\Phi(\psi_N) \geqslant \lambda_{N+1}, \tag{2.3.1}$$

где λ_{N+1} — $(N+1)$-ое собственное значение задачи (2.2.1). Доказательство разобьем на 4 этапа.

1. Рассмотрим задачу о нахождении минимума функционала $\Phi(X)$ при условии

$$\int_0^l M_\sigma'(x)X^2(x)d\sigma = 1$$

на множестве E абсолютно непрерывных на $[0; l]$ функций, первая производная которых абсолютно непрерывна на отрезке $[0; \xi]$, а также имеет конечное изменение на $[0; \xi]$ и принимает нулевые значения к концах этого отрезка, сходится равномерно и абсолютно на $[0, l]$; вторая производная производная имеет конечное на $[0; \xi]$ изменение. Минимум будет

достигаться в классе допустимых функций. Тогда функция, дающая этот минимум, должна удовлетворять при некотором λ уравнению Лагранжа-Эйлера для функционала

$$\Phi_0(X) = \int\limits_0^l p(x)X''^2(x)dx + \int\limits_0^l r(x)X'^2(x)dx + \\ + \int\limits_0^l X^2(x)Q'_\sigma d\sigma - \lambda \int\limits_0^l M'_\sigma X^2(x)d\sigma,$$

которое совпадает с уравнением $(pX'')''_{x\sigma} - (rX')'_\sigma + XQ'_\sigma = \lambda M'_\sigma X$, более того, граничные условия также совпадают с граничными условиями в (2.2.1). Поэтому функция $\varphi_1(x)$, дающая минимум функционалу $\Phi(X)$ при условии $\int\limits_0^l M'_\sigma(x)X^2(x)d\sigma = 1$, является собственной функцией спектральной задачи. Более того, значение функционала на этой функции равно λ:

$$\Phi(\varphi_1) = \int\limits_0^\xi p(x)\varphi_1''^2(x)\,dx + \int\limits_0^l r(x)\varphi_1'^2(x)\,dx + \int\limits_0^l \varphi_1^2(x)Q'_\sigma(x)\,d\sigma = \\ = p(x)\varphi_1''(x)\varphi_1'(x)\Big|_0^l - (p(x)\varphi_1''(x))'_\sigma\varphi_1'(x)\Big|_0^l + \\ + \int\limits_0^l \left[(p\varphi_1''(x))''_{x\sigma} - (r\varphi_1'(x))'_\sigma + \varphi_1(x)Q'_\sigma\right]\varphi_1(x)\,d\sigma = \\ = \lambda \int\limits_0^l M'_\sigma(x)\varphi_1^2(x)(x)d\sigma = \lambda$$

и является наименьшим собственным значением. Обозначим его через λ_1. Поэтому, значение функционала $\Phi(x)$ на E не меньше λ_1: $\Phi(x) \geqslant \lambda_1$, причем знак равенства возможен только на $\varphi_1(x)$.

2. Докажем, что функция $X(x)$, дающая минимум функционалу $\Phi(x)$ в классе E, удовлетворяет условиям.

$$\int_0^l M'_\sigma(x)X^2(x)d\sigma = 1, \tag{2.3.2}$$

$$\int_0^l M'_\sigma(x)\varphi_1(x)X(x)d\sigma = 0, \tag{2.3.3}$$

является амплитудной функцией, отвечающей второй собственной частоте $\omega_2 = \sqrt{\lambda_2}$.

Функция $X(x)$, дающая на E минимум $\Phi(x)$ при условиях (2.3.2) и (2.3.3), должна удовлетворять уравнению Лагранжа-Эйлера для функционала

$$\Phi_1(x) = \int_0^l p(x)X''^2(x)dx + \int_0^l r(x)X'^2(x)dx + \int_0^l X^2(x)Q'_\sigma d\sigma - \\ - \lambda\int_0^l M'_\sigma X^2(x)d\sigma - æ\int_0^l M'_\sigma(x)\varphi_1(x)X(x)d\sigma$$

при некоторых λ и æ. Как нетрудно видеть, это уравнение принимает вид

$$(pX'')''_{x\sigma} - (rX')'_\sigma + XQ'_\sigma - \lambda M'_\sigma X - \frac{1}{2}æM'_\sigma(x)\varphi_1(x) = 0. \tag{2.3.4}$$

Покажем, что æ $= 0$. Для этого тождество

$$(p\varphi''_1)''_{x\sigma} - (r\varphi'_1)'_\sigma + \varphi_1 Q'_\sigma - \lambda M'_\sigma\varphi_1 \equiv 0$$

умножим на $X(x)$, а (2.3.4) — на $\varphi_1(x)$, вычтем почленно один из другого, и результат проинтегрируем по мере σ по всему отрезку:

$$\int_0^l (p(x)X''(x))''_{x\sigma}\varphi_1(x)d\sigma - \int_0^l (r(x)X'(x))'_\sigma\varphi_1(x)d\sigma -$$

$$- \lambda \int_0^l M'_\sigma X(x)\varphi_1(x)d\sigma - \frac{æ}{2}\int_0^l M'_\sigma(x)\varphi_1^2(x)d\sigma -$$

$$- \int_0^l (p(x)\varphi_1''(x))''_{x\sigma}X(x)d\sigma + \int_0^l (r(x)\varphi_1'(x))'_\sigma X(x)d\sigma +$$

$$+ \lambda \int_0^l M'_\sigma \varphi_1(x)X(x)d\sigma = 0,$$

или, с учетом условия (2.3.3),

$$\int_0^l (p(x)X''(x))''_{x\sigma}\varphi_1(x)\,d\sigma - \int_0^l (r(x)X'(x))'_\sigma \varphi_1(x)\,d\sigma -$$

$$- \frac{æ}{2}\int_0^l M'_\sigma(x){\varphi_1}^2(x)\,d\sigma - \int_0^l (p(x)\varphi_1''(x))''_{x\sigma}X(x)\,d\sigma +$$

$$+ \int_0^l (r(x)\varphi_1'(x))'_\sigma X(x)d\sigma = 0. \quad (2.3.5)$$

Первый и последний интегралы в левой части (2.3.5) проинтегрируем по частям, и, в результате взаимной ликвидации интегралов, принадлежности $X(x)$ и φ_1 к классу E, равенство (2.3.5) принимает вид

$$-\frac{æ}{2}\int_0^l M'_\sigma(x){\varphi_1}^2(x)d\sigma = 0,$$

из которого и следует $æ = 0$.

Таким образом, уравнение принимает вид

$$(pX'')''_{x\sigma} - (rX')'_\sigma + XQ'_\sigma - \lambda M'_\sigma X = 0$$

и $X(x)$ является амплитудной функцией. Обозначим ее через $\varphi_2(x)$.

Так как от увеличения числа условий на допустимые функции минимум $\Phi(x)$ может только увеличиваться и $\Phi(\varphi_2) = \lambda_2$, то $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$. Равенство $\lambda_2 = \lambda_1$ невозможно ввиду того, что $\varphi_2(x)$ была бы коллинеарна $\varphi_1(x)$, что противоречит условию (2.3.3). Следовательно, $\lambda_2 > \lambda_1$.

Покажем, что между λ_1 и λ_2 нет других собственных значений. Предположим, что это не так: существует собственное значение λ^*, лежащее между λ_1 и λ_2. Но тогда амплитудная функция $\varphi^*(x)$, отвечающая собственной частоте λ^*, как нетрудно видеть, доставляла бы минимум $\Phi(x)$ при условиях (2.3.2) и (2.3.3), то есть была бы решением поставленной вариационной задачи, что невозможно.

3. Рассмотрим задачу минимизации $\Phi(x)$ при следующих условиях

$$\int_0^l M'_\sigma(x)X^2(x)d\sigma = 1, \tag{2.3.6}$$

$$\int_0^l M'_\sigma(x)X(x)\varphi_i(x)d\sigma = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{2.3.7}$$

где $\varphi_i(x)$ — i-я амплитудная функция.

Функция, дающая на E минимум $\Phi(x)$ при условиях (2.3.6) и (2.3.7) удовлетворяет уравнению Лагранжа-Эйлера для функционала

$$\Phi_n(x) = \Phi(x) - \lambda \int_0^l M'_\sigma(x)X^2(x)\,d\sigma - \sum_{i=1}^{n-1} æ_i \int_0^l M'_\sigma(x)X(x)\varphi_i(x)d\sigma,$$

которое в данном случае принимает вид

$$(p(x)X''(x))''_{x\sigma} - (r(x)X'(x))'_\sigma + X(x)Q'_\sigma(x) - \lambda M'_\sigma(x)X(x) - \\ - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} æ_i M'_\sigma(x)\varphi_i(x) = 0 \tag{2.3.8}$$

(вместе с граничными условиями). Покажем, что все $æ_i$ равны нулю. Для этого (2.3.8) умножим на $\varphi_j(x)$ ($j = 1, 2, \ldots, n-1$ — произвольно фиксированное число), тождество

$$(p(x)\varphi''_j(x))''_{x\sigma} - (r(x)\varphi'_j(x))'_\sigma + \varphi_j(x)Q'_\sigma(x) - \lambda_j M'_\sigma(x)\varphi_j(x) \equiv 0$$

на $X(x)$, вычитая почленно одно из другого, и интегрируя по σ в пределах от 0 до l:

$$\int_0^l (p(x)X''(x))''_{x\sigma}\varphi_j d\sigma - \int_0^l (r(x)X'(x))'_\sigma \varphi_j d\sigma - \lambda \int_0^l M'_\sigma(x)X(x)\varphi_j(x)\,d\sigma -$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} æ_i \int_0^l M'_\sigma(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,d\sigma - \int_0^l (p(x)\varphi''_j(x))''_{x\sigma}X(x)d\sigma +$$

$$+ \int_0^l (r(x)X'(x))'_\sigma X(x)d\sigma + \lambda_i \int_0^l M'_\sigma(x)\varphi_j(x)X(x)d\sigma = 0.$$

Интегрируя интегралы $\int_0^l (p(x)X''(x))''_{x\sigma}\varphi_j d\sigma$, $\int_0^l (r(x)X'(x))'_\sigma \varphi_j d\sigma$, $\int_0^l (p(x)\varphi''_j(x))''_{x\sigma}X(x)d\sigma$, $\int_0^l (r(x)\varphi'_j(x))'_\sigma X(x)d\sigma$ по частям, используя равенство

$$\int_0^l M'_\sigma(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)d\sigma = \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j \end{cases}$$

и условие (2.3.7), будем иметь

$$\frac{æ_i}{2}\int_0^l M'_\sigma(x)\varphi_j^2(x)d\sigma = 0.$$

Из последнего равенства и следует, что $æ_i = 0$ (для любого $j = 1, 2, \ldots, n-1$).

Таким образом, $X(x)$ есть n-ая амплитудная функция, причем $\lambda_n > \lambda_{n-1}$ и между λ_{n-1} и λ_n нет собственных значений.

4. Теперь остается заметить, что для всякой другой допустимой функции, удовлетворяющей условиям (2.3.2) и (2.3.7), значение функционала $\Phi(x)$ не меньше λ_n.

Таким образом, неравенство (2.3.1) доказано. Из него вытекает

$$\Delta_N^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_{N+1}} \left(\Phi(f) - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k c_k^2 \right).$$

Так как $\lambda_k > 0$ для всех k, то выражение $\Phi(f) - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k c_k^2$ ограничено при всех N. Из того, что $\lambda_{N+1} \longrightarrow \infty$ при $N \longrightarrow \infty$ и следует $\Delta_N^2 \longrightarrow 0$.

Таким образом, ряд Фурье по амплитудным функциям сходится к $f(x)$ в среднем.

Теперь остается показать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \tag{2.3.9}$$

сходится равномерно и абсолютно, так как в этом случае сходиться он может только к $f(x)$. Применим критерий Коши для доказательства равномерной сходимости функционального ряда (2.3.9).

Для суммы $\sum_{k=n}^{n+m} |c_k \varphi_k(x)|$ при некоторых n и m последовательно находим (применив при этом неравенство Коши)

$$\sum_{k=n}^{n+m} |c_k \varphi_k(x)| = \sum_{k=n}^{n+m} \left| c_k \sqrt{\lambda_k} \right| \cdot \left| \frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=n}^{n+m} c_k^2 \lambda_k \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k} \right)^{1/2}.$$

Так как числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k$ сходится и обозначая $K = \max\limits_{x,k} |\varphi_k(x)|$, последняя оценка принимает вид

$$\sum_{k=n}^{n+m} |c_k \varphi_k(x)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k \right)^{1/2} K \left(\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k} \right)^{1/2} \leqslant K_1 \left(\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k} \right)^{1/2},$$

где $K_1 = \sqrt{\Phi(f)}\, K$.

В [69] доказана сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{2/3+\delta}}$ для любого $\delta > 0$, в частности, при $\delta = 1/3$. Следовательно, сумма $\sum\limits_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k}$ может быть сделана сколь угодно малой, для любого $\varepsilon > 0$ найдется N^* такое, что для всех $n \geqslant N^*$ и m справедливо неравенство

$$\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k} < \frac{\varepsilon}{K_1},$$

которое и доказывает равномерную и абсолютную сходимость ряда (2.3.9).

2.4 Обоснование возможности применения метода Фурье

В этом параграфе исследуется вопрос о возможности представления решения математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial\sigma}(pu''_{xx})'_x + (ru')'_\sigma - uQ'_\sigma, \\ u(0,t) = u(l,t) = u'_x(0,t) = 0, \\ u(x,0) = \varphi_0(x) \\ u'(x,0) = \varphi_1(x), \end{cases} \tag{2.4.1}$$

которая описывает малые колебания системы, состоящей из струны и стержня с закрепленными концами, в виде ряда Фурье.

Решение будем искать в виде $u(x,t) = X(x)T(t)$, причем потребуем, чтобы эти решения удовлетворяли граничным условиям.

Если решение $u(x,t) = X(x)T(t)$ существует, то, подставляя его в (2.4.1), получим уравнение $M'_\sigma(x)X(x)T''(t) = T(t)(-pX'')''_{x\sigma} + (rX')'_\sigma T(t) - Q'_\sigma X(x)T(t)$ и краевые условия: $X(0) = 0$, $X'(0) = 0$, $X(l) = 0$,

Деля последнее равенство на $X(x)T(t)M'_\sigma(x) \neq 0$, будем иметь

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{-(pX'')''_{x\sigma} + (rX'_x)'_\sigma - Q'_\sigma X(x)}{X(x)M'_\sigma(x)} \tag{2.4.2}$$

Как и в классической теории, мы делаем вывод о том, что левая и правая части (2.4.2) есть константа.

Таким образом, мы переходим к спектральной задаче

$$\begin{cases} -(pX''_{xx})''_{x\sigma} + (rX'_x)'_\sigma - Q'_\sigma X(x) = -\lambda X(x)M'_\sigma(x), \\ X(0) = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases} \tag{2.4.3}$$

Как показано ранее, при условиях на коэффициенты $p(x), r(x), Q(x)$ граничная задача

$$\begin{cases} (pX''_{xx})''_{x\sigma} - (rX'_x)'_\sigma + X(x)Q'_\sigma = F'_\sigma(x), \\ X(0) = X'(0) = X(l) = 0. \end{cases} \tag{2.4.4}$$

является невырожденной, и её решение может быть представлено в виде

$$X(x) = \int_0^l K(x,s)F'_\sigma(s)\,d\sigma(s),$$

где $K(x,s)$ — функция влияния граничной задачи (2.4.4).

Отметим, что каждое собственное значение имеет алгебраическую кратность, равную единице (рассуждения можно привести в соответствии с рассуждениями в работе [69]).

Как следует из работы [69] спектральная задача (2.4.3) эквивалентна интегральному уравнению:

$$X(x) = \lambda \int_0^l K(x,s)X(s)M'_\sigma(s)\,d\sigma.$$

А поскольку $K(x,s)$, очевидно, является невырожденным ядром, и интегральный оператор $(Au)(x) = \int_0^l K(x,s)u(s)M'_\sigma(s)\,d\sigma$ компактно действует из $C[0;l]$ (пространство непрерывных на $[0;l]$ функций) в $C[0;l]$, то спектр состоит из счетного числа собственных значений.

Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ — собственные значения спектральной задачи (2.4.3). Причем, если геометрическая кратность не равна единице, то собственное значение будет встречаться столько раз, какова его кратность.

Обозначим через $\varphi_n(x)$ собственную функцию, отвечающую собственному значению λ_n; более того, мы можем считать её нормированной

$\int\limits_0^l \varphi_n^2(x) M'_\sigma(s)\, d\sigma = 1$, так как в противном случае разделим $\varphi_n(x)$ на $\int\limits_0^l \varphi_n^2(x) M'_\sigma(s)\, d\sigma$.

Применяя адаптированную классическую схему для нашего случая, легко убедиться, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k$, где $c_k = \int\limits_0^l f(x)\varphi_n(x) M'_\sigma(x)\ d\sigma$ сходится. Отсюда следует, что ряд Фурье $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ сходится равномерно и абсолютно на $[0; l]$. Для суммы $\sum\limits_{k=n}^{n+m} |c_k \varphi_k(x)|$ при некоторых n и m последовательно находим(применив при этом неравенство Коши)

$$\sum_{k=n}^{n+m} |c_k \varphi_k(x)| = \sum_{k=n}^{n+m} |c_k \sqrt{\lambda_k}(x)| \cdot |\frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k(x)}}| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=n}^{n+m} c_k^2 \lambda_k \right)^{1/2} \left(\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k} \right)^{1/2}.$$

Так как числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k$ сходится и обозначая $K = \max\limits_{x,k} |\varphi_k(x)|$, последняя оценка принимает вид

$$\sum_{k=n}^{n+m} |c_k \varphi_k(x)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k \right)^{1/2} K \left(\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k} \right)^{1/2} \leqslant K_1 \left(\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{\lambda_k} \right)^{1/2},$$

где $K_1 = \sqrt{\Phi(f)} K$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$, как показано в работе [69], сходится.

Заметим, что $\varphi_k(x)$ ортогональны с весом $M'_\sigma(x)$ (при этом интегрирование осуществляется по мере σ), поэтому для всех N справедливо

$$\int_0^l M'_\sigma(x) f^2(x) d\sigma \geqslant \sum_{k=1}^{N} c_k^2,$$

из которого следует аналог неравенства Бесселя

$$\int_0^l M'_\sigma(x) f^2(x) d\sigma \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \tag{2.4.5}$$

Так как каждое собственное значение имеет алгебраическую кратность 1, то, как нетрудно видеть, неравенство (2.4.5) превращается в равенство, т. е. система собственных функций полна.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится лемма.

Лемма. Пусть $\varphi_k(x)$— k-я амплитудная функция спектральной задачи (2.4.3) и $\int_0^l \varphi_k^2(x) M'_\sigma(x) d\sigma = 1$ для всех k.Функция $M(x)$ представима в виде $M(x) = x + M_0(x)$, при этом $M_0(x)$ — неубывающая на $[0; l]$ и σ-абсолютно непрерывна на этом отрезке. Тогда существует постоянная C^* такая, что для всех $x \in [0; l]$ и натуральных k справедливо $\mid \varphi_k(x) \mid \leqslant C^*$.

Доказательство. Предположим противное: для всякого $C^* = n$ существуют x' и k такие, что $|\varphi_k(x')| > n$. Без ограничения общности можно считать $\varphi_k(x') > 0$.

Так как $\varphi_k(x)$ непрерывна на $[0; l]$ и $\varphi_k(0) = \varphi_k(l) = 0$, то существует интервал $(\alpha'; \beta')$, содержащий точку x', и для всех x $\varphi_k(x) \geqslant n - 1$. Пусть $[\alpha; \beta]$ — максимальный отрезок, содержащий $(\alpha'; \beta')$, и такой, что $\varphi_k(x) \geqslant n - 1$ для всех x из этого отрезка.

Зафиксируем n, рассмотрим множество

$$w_n = \{x \in [\alpha; \beta] \mid n - 1 \leqslant \varphi_k(x) \leqslant n + 1\}.$$

Из (1.2.2) следует, что

$$(n-1)^2 \int_{w_n} dM \leqslant \int_{w_n} \varphi_k^2(x) M'_\sigma(x) d\sigma \leqslant (n+1)^2 \int_{w_n} dM,$$

откуда получаем, что M-мера множества не превосходит $\dfrac{1}{(n-1)^2}$

В силу непрерывности $\varphi_k(x)$ в множестве w_n существует как минимум две точки x_1 и x_2 такие, что $\varphi_k(x_1) = n-1$ и $\varphi_k(x_2) = n$. Поскольку $|M(x_1)-M(x_2)| \leqslant \dfrac{1}{(n-1)^2}$, то и $|x_1-x_2| \leqslant \dfrac{1}{(n-1)^2}$ и $|\varphi_k(x_1)-\varphi_k(x_2)| = 1$. Но последнее противоречит абсолютной непрерывности $\varphi_k(x)$.

Следствие. Пусть $\varphi_k(x)$ — амплитудная функция, нормированная $\left(\int\limits_0^l \varphi_k^2 dM = 1\right)$ и отвечающая собственной частоте λ_k. Тогда найдется такая постоянная C_2^*, что для всех k и x справедлива оценка

$$\max\left\{\max_{0\leqslant x\leqslant l}|\varphi'_{kx}(x)|, \max_{0\leqslant x\leqslant \xi}|\varphi''_{kxx}(x)|, \sup|p(\varphi''_{kxx})'_x|\right\} \leqslant C_2^*\lambda_k. \qquad (2.4.6)$$

Доказательство. Так как $\varphi_k(x)$ — амплитудная функция, то, как показано в [69]) , справедливо тождество

$$\varphi_k(x) \equiv \lambda_k \int\limits_0^l G(x,s)\varphi_k(s)dM(s), \qquad (2.4.7)$$

где $G(x,s)$ — функция влияния граничной задачи

$$\begin{cases} LX \equiv F'_\sigma, \\ X(0) = 0, \\ X'(0) = 0, \\ X(l) = 0. \end{cases}$$

$F(x)$ — произвольная σ-абсолютно непрерывная на $[0,l]$ функция и из (2.4.6) и (2.4.7) находим

$$|\varphi'_k(x)| = \lambda_k\left|\int\limits_0^l G'(x,s)\varphi'_k(s)dM(s)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x,s}|G'_x(x,s)| \cdot C_1^* \cdot \lambda_k(M(l)-M(0)).$$

Выражения $|\varphi''_{kxx}|$ и $|(p\varphi''_{kxx})'_x|$ оцениваются аналогично.

Теорема 2.4.1. *Пусть $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $M(x)$ — σ-абсолютно непрерывны; $M'_\sigma > m > 0$; пусть ψ_i — абсолютно непрерывны на $[0,l]$,*

производные ψ_i' имеют конечное на $[0,l]$ изменение, $\psi_i'(x)$ — абсолютно непрерывны на $[0,\xi]$, $\psi_i''(x)$ также абсолютно непрерывны на $[0,\xi]$; квазипроизводная $(p\psi_i'')_x'(x)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$, $(r\psi_i)'$ — σ-абсолютно непрерывна на $[\xi,l]$; функции $\dfrac{(L\psi_0)(x)}{M_\sigma'(x)}$ непрерывны на $[0,l]$, ее производная абсолютно непрерывна; $\psi_0(0)=\psi_0'(0)=\psi(l)=(L\psi_0)(0)=(L\psi_0')(0)=(L\psi_0)(l)=\psi_1(0)=\psi_1'(0)=\psi_1(l)=0$. Тогда функция

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t+\frac{B}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\right), \tag{2.4.8}$$

где $\varphi_k(x)$ — нормированная амплитудная функция, отвечающая собственному значению λ_k,

$$A_k=\int_0^l M_\sigma'(x)\varphi_k(x)\psi_0(x)d\sigma,\quad B_k=\int_0^l M_\sigma'(x)\varphi_k(x)\psi_1(x)d\sigma,$$

является решением математической модели

$$\begin{cases} M_\sigma'(x)\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=-\frac{\partial}{\partial\sigma}(pu_{xx}'')_x'+(ru')_\sigma'-uQ_\sigma', \\ u(0,t)=u_x'(0,t)=u(l,t)=0, \\ u(x,0)=\psi_0(x); \\ u_t'(x,0)=\psi_1(x). \end{cases}$$

причем ряд (2.4.8) можно дифференцировать по t дважды и на $[0;\xi]$ четырежды: сначала трижды по x, потом по σ; на $[\xi;l]$ дважды: по x и по σ; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на прямоугольнике $[0;l]\times[0;T]$.

Доказательство. Оценим коэффициенты ряда Фурье функции $\psi_0(x)$. Имеем

$$A_k=\int_0^l\psi_0(x)M_\sigma'(x)\varphi_k(x)d\sigma=$$

$$= \int_0^l \psi_0(x)\frac{1}{\lambda_k}\left((p\varphi_{kxx}'')''_{x\sigma} - (r\varphi_{kx}')'_\sigma + Q'_\sigma\varphi_k\right)d\sigma =$$

$$= \int_0^l \psi_0(x)\frac{1}{\lambda_k}(p\varphi_{kxx}'')''_{x\sigma}d\sigma - \int_0^l \psi_0(x)\frac{1}{\lambda_k}(r\varphi_{kx}')'_\sigma d\sigma +$$

$$+ \int_0^l \psi_0(x)\frac{1}{\lambda_k}(p\varphi_{kxx}'')''_{x\sigma}Q'_\sigma\varphi_k\,d\sigma.$$

Первый интеграл последнего равенства проинтегрируем по частям четырежды, второй — дважды, а также воспользуемся свойствами функции $\varphi_k(x)$. Получим:

$$A_k = \frac{1}{\lambda_k}\left(\psi_0(p\varphi_{kxx}'')'_x\Big|_0^l - \psi_{0x}'p\varphi_{kxx}''\Big|_0^l + \varphi_{kx}'p\psi_{0xx}''\Big|_0^l -\right.$$

$$- \varphi_k(p\psi_{0xx}'')'_x\Big|_0^l + \int_0^l \varphi_k(x)(p\psi_{0xx}'')''_{x\sigma}\,d\sigma - r\varphi_{kx}'\psi_0\Big|_0^l + r\psi_{0x}'\varphi_k\Big|_0^l -$$

$$\left. - \int_0^l \varphi_k(x)(r\psi_{0x}')'_\sigma d\sigma - \int_0^l \varphi_k(x)Q'_\sigma(x)\psi_0(x)d\sigma\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k}\int_0^l \varphi_k(x)L\psi_0\,d\sigma = \frac{1}{\lambda_k}\int_0^l \varphi_k(x)M'_\sigma(x)\left(\frac{L\psi_0}{M'_\sigma}\right)(x)\,d\sigma.$$

Последнее равенство означает, что числа $\lambda_k A_k$ есть коэффициенты ряда Фурье функции $\left(\dfrac{L\psi_0}{M'_\sigma}\right)(x)$, следовательно, ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k^3 A_k|$ сходится.

Оценим B_k:

$$B_k = \int_0^l M'_\sigma(x)\varphi_k(x)\psi_1(x)d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k}\int_0^l \psi_1(x)\left((p\varphi_{kxx}'')''_{x\sigma} - (r\varphi_{kx}')'_\sigma + Q'_\sigma\varphi_k\right)d\sigma.$$

Разобьем интеграл в последнем равенстве на три, первые два проинтегрируем по частям:

$$B_k = \frac{1}{\lambda_k}\left(\psi_1(p\varphi_k''{}_{xx})'_x\Big|_0^l - \ \psi_1'{}_x p\varphi_k''{}_{xx}\Big|_0^l + \ \varphi_k'{}_x p\psi_0''{}_{xx}\Big|_0^l - \varphi_k(p\psi_0''{}_{xx})'_x\Big|_0^l + \right.$$
$$+ \int_0^l \varphi_k(p\psi_0''{}_{xx})''_{x\sigma}\,d\sigma - \psi_1(r\varphi_k'{}_x)\Big|_0^l + \varphi_k(r\psi_0'{}_x)\Big|_0^l - \int_0^l \varphi_k(r\psi_0'{}_x)'_\sigma\,d\sigma +$$
$$\left. + \int_0^l \varphi_k\psi_0 Q'_\sigma\,d\sigma \right) = \frac{1}{\lambda_k}\int_0^l \varphi_k(x)M'_\sigma(x)\left(\frac{L\psi_0}{M'_\sigma}\right)(x)\,d\sigma,$$

и $\lambda_k B_k$, как и ранее, являются коэффициентами ряда Фурье непрерывной на $[0,l]$ функции $\left(\dfrac{L\psi_0}{M'_\sigma}\right)(x)$. Получаем неравенство, вытекающее из аналога неравенства Бесселя (2.4.5)

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k B_k)^2 \leqslant \int_0^l M'_\sigma(x)\left(\frac{L\psi_1(x)}{M'_\sigma(x)}\right)^2 d\sigma,$$

из которого следует, что ряд $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k B_k)^2$ сходится.

Ряды, полученные формальным дифференцированием, имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi'_k(x)\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}(p\varphi''_k)''_{x\sigma}(x)\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}(r\frac{\partial u}{\partial x}) = \sum_{k=1}^{\infty}(r\varphi'_k)(x)\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\right).$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\left(-A_k\sqrt{\lambda_k}\sin\sqrt{\lambda_k}t + B_k\cos\sqrt{\lambda_k}t\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi'_k(x)\left(-A_k\sqrt{\lambda_k}\sin\sqrt{\lambda_k}t + B_k\cos\sqrt{\lambda_k}t\right)\varphi_k(x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\left(-A_k\lambda_k\cos\sqrt{\lambda_k}t - B_k\sqrt{\lambda_k}\sin\sqrt{\lambda_k}t\right).$$

Все ряды, написанные выше, оцениваются рядом

$$K\sum_{k=1}^{\infty}\left(|A_k\lambda_k|+|B_k\sqrt{\lambda_k}|\right),$$

который сходится. Отсюда вытекает равномерная и абсолютная сходимость всех рядов, полученных из (2.4.8) почленным дифференцированием. А так как функция $u(x,t)$, определенная равенством (2.4.8), очевидно удовлетворяет граничным и начальным условиям, то $u(x,t)$ — действительно решение задачи (2.2.1). Теорема доказана.

Остается заметить, что повторяя рассуждения, проведенные в работе [38] к интегралу

$$\int_0^{T^*}\int_0^{l}\frac{\partial u}{\partial t}\left(M'_\sigma(x)u''_{tt}+(pu''_{xx})''_{x\sigma}-(ru'_x)'_\sigma\right)+uQ'_\sigma)\,d\sigma dt,$$

который был рассмотрен нами при доказательстве единственности решения математической модели, мы придем к выводу о корректности изучаемой модели.

Глава 3

Адаптация метода конечных элементов для разнопорядковых математических моделей с негладкими решениями

В этой главе метод конечных элементов адаптируется для нахождения приближенных решений изучаемых математических моделей. В первом параграфе строится алгоритм нахождения приближенного решения математической модели, которая описывает малые деформации системы, состоящей из защемленного с одной стороны стержня и припаянной к другому концу растянутой струны, второй конец которой закреплен. Во втором параграфе получена оценка погрешности. Третий параграф посвящен адаптации метода конечных элементов для нахождения приближенного решения математической модели, описывающей малые свободные колебания описанной выше системы. В четвертом — доказана оценка погрешности. В пятом параграфе приводятся результаты численных экспериментов, которые получены с помощью комплекса программ, написанных на языке Python. Шестой параграф посвящен описанию программного комплекса.

3.1 Построение алгоритма для разнопорядковой математической модели

Приближенное решение $u_N(x)$ математической модели

$$\begin{cases} (p(x)u''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_x + uQ'_\sigma = f(x), \\ u(0) = u'_x(0) = 0; \\ u(l) = 0 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

будем искать в виде

$$u_N(x;t) = \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{N} b_k\varphi_{2k}(x) + \sum_{k=2N+1}^{3N-1} a_k\varphi_k(x),$$

где a_k, b_k — значения функции и ее производной в узловой точке, $\varphi_k(x)$ — базисные функции, определенные следующим образом. Каждый из отрезков $[0;\xi]$ и $[\xi;l]$ мы разобьем на N равных частей; точки разбиения мы обозначим через $\overline{x}_i \in [0;\xi]$ и $\overline{\overline{x}}_i \in [\xi;l]$. Тогда

$$\varphi_{2i-1}(x) = \begin{cases} 1 - 3\left(\dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_i - \overline{x}_{i-1}}\right)^2 - 2\left(\dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_i - \overline{x}_{i-1}}\right)^3 & \text{для } x \in [\overline{x}_{i-1};\overline{x}_i]; \\ 1 - 3\left(\dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_{i+1} - \overline{x}_i}\right)^2 + 2\left(\dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_{i+1} - \overline{x}_i}\right)^3 & \text{для } x \in [\overline{x}_i;\overline{x}_{i+1}]; \\ 0, \text{ для остальных } x. \end{cases}$$

$$\varphi_{2i}(x) = \begin{cases} (x-\overline{x}_i)\left(1 + \dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_i - \overline{x}_{i-1}}\right)^2 & \text{для } x \in [\overline{x}_{i-1};\overline{x}_i]; \\ (x-\overline{x}_i)\left(1 - \dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_{i+1} - \overline{x}_i}\right)^2 & \text{для } x \in [\overline{x}_i;\overline{x}_{i+1}]; \\ 0, \text{ для остальных } x; \end{cases}$$

$(i = 1, 2, \ldots, N-1)$.

$$\varphi_{2N-1}(x) = \begin{cases} 1 - 3\left(\dfrac{x-\xi}{\xi - \overline{x}_{N-1}}\right)^2 - 2\left(\dfrac{\overline{\overline{x}}-\xi}{\xi - \overline{x}_{N-1}}\right)^3, & \text{для } x \in [\overline{x}_{N-1};\xi]; \\ \dfrac{x-\overline{\overline{x}}_1}{\xi - \overline{\overline{x}}_1}, & \text{для } x \in [\xi;\overline{\overline{x}}_1]; \\ 0, \text{ для остальных } x. \end{cases}$$

$$\varphi_{2N}(x) = \begin{cases} (x-\xi)\left(1+\dfrac{x-\xi}{\xi-\overline{x}_{N-1}}\right)^2, \text{ для } x \in [\overline{x}_{N-1};\xi]; \\ 0, \text{ для остальных } x; \end{cases}$$

$$\varphi_{i+2N}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\overline{\overline{x}}_{i-1}}{\overline{\overline{x}}_i - \overline{\overline{x}}_{i-1}}, \text{ для } x \in [\overline{\overline{x}}_{i-1};\overline{\overline{x}}_i]; \\ \dfrac{x-\overline{\overline{x}}_{i+1}}{\overline{\overline{x}}_i - \overline{\overline{x}}_{i+1}}, \text{для } x \in [\overline{\overline{x}}_i;\overline{\overline{x}}_{i+1}]; \\ 0, \text{ для остальных } x; \end{cases}$$

$(i = 1; \ldots N-1)$.

Вместо искомой функции $u(x)$ будем искать лишь ее значения в узловых точках и в связи с этим будем использовать в уравнениях вместо $u(x)$ функцию

$$v(x) = \sum_{i=1}^{3N-1} v_i \varphi_i(x), \tag{3.1.2}$$

где v_i — ее значение в узловой точке x_i (при этом $x_i = \overline{x}_i$, если $i \leqslant 2N$ и $x_i = \overline{\overline{x}}_{i-2N}$ в противном случае), если $i = 1, 3, \ldots, 2N-1, 2N+1, 2N+2, \ldots, 3N-2, 3N-1$, и значение ее производной, если $i = 2, 4, \ldots, 2N-2, 2N$.

Уравнение

$$(pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma$$

умножим на базисную функцию $\varphi_j(x)$ и проинтегрируем по мере σ по всему $[0;1]$:

$$\int_0^1 \left((pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma\right)\varphi_j \, d\sigma = \int_0^1 \varphi_j F'_\sigma \, d\sigma.$$

Разбивая интеграл в левой части последнего равенства на три, и проинтегрировав первый интеграл дважды по частям, второй — один раз, будем иметь

$$\int_0^1 pu''_{xx}\varphi_j{}''_{xx}\, dx + \int_0^1 ru'_x\varphi_j{}'_x\, dx + \int_0^1 u\varphi_j \, dQ = \int_0^1 \varphi_j \, dF,$$

или, так как $u(x)$ и $\varphi_j(x)$ удовлетворяют граничным условиям и $p(x) \equiv 0$ при $x \geqslant \xi$,

$$\int\limits_0^\xi p u''_{xx} \varphi_j{}''_{xx}\, dx + \int\limits_0^1 r u'_x \varphi_j{}'_x\, dx + \int\limits_0^1 u\varphi_j\, dQ = \int\limits_0^1 \varphi_j\, dF,$$

$j = 1, 2, \ldots, 3N-1$. Поставив сюда вместо $u(x)$ функцию (3.1.2), мы получим систему из $3N-1$ уравнением с $3N-1$ неизвестной

$$\sum_{i=1}^{3N-1} v_i \int\limits_0^\xi p\varphi_i{}''_{xx}\varphi_j{}''_{xx}\, dx + \sum_{i=1}^{3N-1} v_i \int\limits_0^1 r\varphi_i{}'_x\varphi_j{}'_x\, dx + \\ + \sum_{i=1}^{3N-1} v_i \int\limits_0^1 \varphi_i\varphi_j\, dQ = \int\limits_0^1 \varphi_j\, dF, \quad (3.1.3)$$

$j = 1, 2, \ldots, 3N-1$.

Следующая величина

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int\limits_0^\xi p\varphi''_{xx}\psi''_{xx}\, dx + \int\limits_0^1 r\varphi'_x\psi'_x\, dx + \int\limits_0^1 \varphi\psi\, dQ$$

является билинейным симметричным функционалом в пространстве E — абсолютно непрерывных на $[0;1]$ функций, первая производная которых суммируема с квадратом на $[0;1]$ и абсолютно непрерывна на $[0;\xi]$, вторая производная (определенная только на $[0;\xi]$) суммируема с квадратом на $[0;\xi]$, кроме того, эти функции удовлетворяют условиям $u(0) = u'_x(0) = u(1) = 0$.

Очевидно, что из положительности $p(x)$ на $[0;\xi)$ и неотрицательности $r(x)$, положительности $r(x)$ на $(\xi;1]$ и неубывания $Q(x)$, $\langle \varphi, \varphi \rangle$ является неотрицательным и невырожденным:

$$\langle \varphi, \varphi \rangle \geqslant 0 \text{ для всякой } \varphi,$$

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = 0.$$

Поэтому $\langle \varphi, \psi \rangle$ может служить скалярным произведением; коэффициенты матрицы системы (3.1.3) образуют матрицу Грамма системы линейно независимых функций $\{\varphi_i(x)\}$. Поэтому определитель системы отличен от нуля. Отсюда следует, что (3.1.3) имеет единственное решение.

3.2 Об оценке погрешности

Здесь доказывается следующая теорема.

Теорема 3.2.1. *Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели* (3.1.1)*, $v(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов при разбиении на N равных частей каждого из отрезков $[0;\xi]$ и $[\xi;1]$. Тогда справедлива оценка*

$$a(u-v,u-v) \leqslant C \cdot h,$$

где $h = \max\left\{\left(\dfrac{\xi}{N}\right)^2; \dfrac{1-\xi}{N}\right\}$, C не зависит от h, и $a(u,u)$ — энергетическая норма:

$$a(u,u) = \int\limits_0^{\xi} u''^2\,dx + \int\limits_0^1 ru'^2\,dx + \int\limits_0^1 u^2\,dQ.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что задача поиска решения математической модели (3.1.1) эквивалентна задаче минимизации квадратичного функционала $I(v) = (Lv,v) - 2(F'_\sigma, v)$, где $Lu = (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma$ и $(u,v) = \int\limits_0^1 uv\,d\sigma$, на множестве $H_0^{4,2}$ — абсолютно непрерывных на $[0,1]$ функций $u(x)$, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$, σ-абсолютно непрерывна на $[\xi,1]$; вторая производная u''_{xx}, определенная на $[0,\xi)$, имеет конечное изменение на $[0,\xi-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$; $(pu''_{xx})(x)$ абсолютна непрерывна на $[0,\xi]$; $(pu''_{xx})'_x$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$, и таких, что $u(0) = u'(0) = u(1) = 0$.

Перепишем выражение (Lv,v) в виде

$$(Lv,v) = (pv''_{xx})'_x\,v\Big|_0^1 - (pv''_{xx})\,v'_x\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 pv''^2_{xx}\,dx - \\ - (rv'_x)\,v\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 rv'^2_x\,dx + \int\limits_0^1 v^2Q'_\sigma\,d\sigma.$$

Таким образом, функционал, который необходимо минимизировать, принимает вид

$$I(v) = \int_0^1 p v''^2_{xx}\, dx + \int_0^1 r v'^2_x\, dx + \int_0^1 v^2 Q'_\sigma\, d\sigma - \int_0^1 v F'_\sigma\, d\sigma, \qquad (3.2.1)$$

так как внеинтегральные слагаемые пропадут в силу граничных условий $u(0) = u'(0) = u(1) = 0$ и $p(1) = 0$.

Решение математической модели (3.1.1) и дает минимум функционалу (3.2.1) на $H_0^{4,2}$.

Функционал (3.2.1) можно определить на функциях $u(x)$, у которых вторая производная $u''_{xx}(x)$, определенная на $[0;\xi]$, суммируема с квадратом на $[0;\xi]$, а первая производная $u'_x(x)$ суммируема с квадратом на $[0;1]$, т. е. на $\widehat{H}_0^{2,1}$ — пополнении $H_0^{4,2}$ по норме

$$\|u\|^2_{\widehat{H}_0^{2,1}} = \int_0^\xi p v''^2_{xx}\, dx + \int_0^1 r v'^2_x\, dx + \int_0^1 v^2 Q'_\sigma\, d\sigma$$

Отметим, что такое расширение не может привести к уменьшению минимума: каждое новое значение $I(v)$ есть предел $I(v_n)$, где $v_n \in H_0^{4,2}$ и $\|v_n - v\|_{\widehat{H}_0^{2,1}} \to 0$, если u — функция из $\widehat{H}_0^{2,1}$, на которой функционал $I(v)$ принимает наименьшее значение, и если $u \in H_0^{4,2}$ доставляет минимум $I(v)$, то она становится минимизирующей на $\widehat{H}_0^{2,1}$.

Доказательство в обратную сторону достаточно очевидно: минимизация $I(v)$ на $\widehat{H}_0^{2,1}$ приводит к математической модели (3.2.1).

Таким образом, $I(v)$ мы можем минимизировать на $\widehat{H}_0^{2,1}$. Другими словами, в качестве базисных функций мы можем действительно брать $\{\varphi_i(x)\}$.

Оценим разность между точным решением $u(x)$ и полученным приближенным решением $v(x)$.

Сначала оценим разность между точным решением и ее интерполянтом в энергетической норме (модуль разности между $u(x)$ и $v(x)$ будет

еще меньше). Последнее основано на аналоге классического результата теории конечным элементов [9], а именно:

предположим, что $u_0(x)$ *минимизирует* $I(u)$ *на множестве* $\widehat{H}_0^{2,1}$, H_N *— конечномерное его подпространство. Тогда*

1) *минимум* $I(v_h)$ *и минимум* $\langle u - v_h, u - v_h\rangle$, *где* v_h *пробегает подпространство* H_N, *достигается на одной и той же функции* u_h;

2) *по отношению к энергетическому скалярному произведению* u_h *есть проекция* u *на* H_N, *или, что то же самое, ошибка* $u - u_h$ *ортогональна* H_N:

$$\langle u - u_h, v_h\rangle = 0 \text{ для всех } v_h \in H_N; \tag{3.2.2}$$

3) *функция* u_h, *на которой достигается минимум, удовлетворяет условию*

$$\langle u_h, v_h\rangle = (F'_\sigma, v_h) \text{ для всех } v_h \in \widehat{H}_0^{2,1} \tag{3.2.3}$$

и

$$\langle u, v\rangle = (F'_\sigma, v) \text{ для всех } v \in H_N. \tag{3.2.4}$$

Как и в классической теории, для нас эта теорема является ключевой. Более того, все три ее части тесно связаны.

Из 1) следует 2): в пространстве со скалярным произведением функция из подпространства H_N, ближайшая к заданной функции u, всегда является ее проекцией на H_N. Наоборот, 1) вытекает из 2): $\langle u-u_h-v_h, u-u_h-v_h\rangle = \langle u-u_h, u-u_h\rangle - 2\langle u-u_h, v_h\rangle + \langle v_h, v_h\rangle$. Если справедливо равенство (3.2.2), то

$$\langle u - u_h, u - u_h\rangle \leqslant \langle u - u_h - v_h, u - u_h - v_h\rangle.$$

Равенство возможно только тогда, когда $\langle v_h, v_h\rangle = 0$, т.е. $v_h = 0$. Таким образом, u_h — единственная функция на которой $\langle u-u_h, u-u_h\rangle$ достигает минимума, и утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) непосредственно вытекает из 3): если равенство (3.2.4) справедливо для всех $v \in \widehat{H}_0^{2,1}$, то оно справедливо и для $v_h \in H_N$; вычитая из него (3.2.3), получаем утверждение второй части.

Осталось доказать утверждение 3) — из него вытекает 2), а из него следует 1). Если u_h минимизирует $I(u)$ на H_N, то $I(u_h) \leqslant I(u_h + \varepsilon v_h)$ для всех ε и v_h, или, вспоминая выражение $I(u)$ через $\langle u, u\rangle$ и (F'_σ, u):

$$\langle u_h, u_h\rangle - 2(F'_\sigma, u_h) \leqslant$$
$$\leqslant \langle u_h, u_h\rangle - 2(F'_\sigma, u_h) + 2\varepsilon\left[\langle u_h, v_h\rangle - (F'_\sigma, v_h)\right] + \varepsilon^2\langle v_h, v_h\rangle.$$

Поэтому

$$0 \leqslant 2\varepsilon\left[\langle u_h, v_h\rangle - (F'_\sigma, v_h)\right] + \varepsilon^2\langle v_h, v_h\rangle.$$

Так как это верно для сколь угодно малого числа ε любого знака, то $\langle u_h, v_h\rangle = (F'_\sigma, v_h)$, которое и означает равенство нулю первой вариации функционала $I(u)$ в точке u_h в направлении v_h. Таким образом, утверждение 3) доказано.

Интерполянт $u_I(x)$ точного решения $u(x)$ математической модели (3.1.1) можно выразить через базисные функции следующим образом

$$u_I(x) = \sum_{k=1}^{N} u(x_k)\varphi_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{N} u'_x(x_k)\varphi_{2k}(x) + \sum_{k=2N+1}^{3N-1} u(x_k)\varphi_k(x).$$

Через $w(x)$ обозначим разность $u(x) - u_I(x)$. Оценим $|w(x)|$ в энергетической норме

$$a(u,u) = \int_0^\xi u''^2\,dx + \int_0^1 ru'^2\,dx + \int_0^1 u^2\,dQ.$$

Для оценки $|w(x)|$ и $|w'(x)|$ нам понадобятся оценки $|w'''_{xxx}(x+0)|$ и $|w''_{xx}(x_k)|$.

Для $|w'''(x_k+0)|$ имеем:

$$w'''(x_k+0) = u'''(x_k+0) + u(x_{k+1})\frac{12}{h^3} - u'(x_{k+1})\frac{6}{h^2} - u(x_k)\frac{12}{h^3} - u'(x_k)\frac{6}{h^2},$$

или, после несложных преобразований,

$$w'''(x_k+0)=\frac{6}{h^3}u'''(x_k+0)\frac{h^3}{6}+\frac{6}{h^3}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k}^{s}u''(t)\,dt\,ds-$$

$$-\frac{6}{h^3}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{s}^{x_k}u''(t)\,dt\,ds=\frac{6}{h^3}u'''(x_k+0)\left(-\frac{h^3}{6}\right)+$$

$$+\frac{6}{h^3}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k}^{s}\int\limits_{x_k+0}^{t}u'''(\tau)\,d\tau\,dt\,ds+\frac{6}{h^3}u'''(x_k+0)\frac{h^3}{3}-$$

$$-\frac{6}{h^3}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{s}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k+0}^{t}u'''(\tau)\,d\tau\,dt\,ds=$$

$$=\frac{6}{h^3}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k}^{s}\int\limits_{x_k+0}^{t}(u'''(\tau)-u'''(x_k+0))\,d\tau dtds+$$

$$+\frac{6}{h^3}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{s}^{x_{k+1}}\int\limits_{x_k+0}^{t}(u'''(x_k+0)-u'''(\tau))\,d\tau\,dt\,ds.$$

Из последнего равенства находим

$$|w'''(x_k+0)|\leqslant\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(u''')\cdot 3. \tag{3.2.5}$$

Далее, оценим $|w''(x_k)|$. Из равенства

$$w''_{xx}(x_k)=u''(x_k)-\frac{6}{h^2}u(x_{k+1})+\frac{2}{h}u'(x_{k+1})+\frac{6}{h^2}u(x_k)+\frac{4}{h}u'(x_k)$$

последовательно находим

$$w''_{xx}(x_k)=u''(x_k)-\frac{2}{h^2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}(2u'(s)-2u'(x_k)+u'(s)-u'(x_{k+1}))\,ds=$$

$$=u''(x_k)-\frac{2}{h^2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\left(2\int\limits_{x_k}^{s}u''(t)\,dt-\int\limits_{s}^{x_{k+1}}u''(t)\,dt\right)ds=\frac{2}{h^2}u''(x_k)h^2-$$

$$-\frac{2}{h^2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}2\int\limits_{x_k}^{s}u''(t)\,dt\,ds-\frac{2}{h^2}u''(x_k)\frac{h^2}{2}+\frac{2}{h^2}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}\int\limits_{s}^{x_{k+1}}u''(t)\,dt\,ds=$$

$$= \frac{2}{h^2} \cdot 2 \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \int\limits_{x_k}^{s} (u''(x_k) - u''(t))\, dt\, ds + \frac{2}{h^2} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \int\limits_{s}^{x_{k+1}} (u''(t) - u''(x_k))\, dt\, ds.$$

Отсюда вытекают оценки:

$$|w''_{xx}(x_k)| \leqslant \bigvee_{x_k}^{x_{k+1}} (u'') \cdot 3 \quad \text{и} \quad |w''_{xx}(x_k)| \leqslant \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''| \cdot 6. \tag{3.2.6}$$

Оценим теперь $|w(x)|$, когда $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Так как $w(x_k) = w'_x(x_k) = 0$, то

$$w(x) = \int\limits_{x_k}^{x} \int\limits_{x_k}^{s} \left(w''_{xx}(x_k) + \int\limits_{x_k+0}^{t} w'''_{xxx}(x_k + 0) + \int\limits_{x_k+0}^{\tau} u''''_{xxx\sigma}\, d\sigma \right) d\tau\, dt\, ds =$$

$$= w''_{xx}(x_k) \frac{(x - x_k)^2}{2} + w'''_{xxx}(x_k + 0) \frac{(x - x_k)^3}{6} +$$

$$+ \int\limits_{x_k}^{x} \int\limits_{x_k}^{s} \int\limits_{x_k+0}^{t} \int\limits_{x_k+0}^{\tau} u''''_{xxx\sigma}\, d\sigma\, d\tau\, dt\, ds.$$

Поэтому, с учетом полученных ранее оценок для $|w''_{xx}(x_k)|$ и $|w'''_{xxx}(x_k{+}0)|$,

$$|w(x)| \leqslant |w''_{xx}(x_k)| \cdot \frac{h^2}{2}$$

$$+ |w'''_{xxx}(x_k + 0)| \cdot \frac{h^3}{6} + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \cdot \frac{h^3}{6} \leqslant$$

$$\leqslant 6 \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| \cdot \frac{h^2}{2} + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) \cdot 3 \cdot \frac{h^3}{6} +$$

$$+ \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma) \cdot \frac{h^3}{6}.$$

А так как h — малая величина, то можно записать

$$|w(x)| \leqslant C_{k,1} \cdot \frac{h^2}{2},$$

где

$$C_{k,1} = 6 \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma).$$

Так как

$$w'(x) = w''_{xx}(x_k)(x - x_k) + w'''_{xxx}(x_k + 0)\frac{(x - x_k)^2}{2} + \int\limits_{x_k}^{x}\int\limits_{x_k+0}^{s}\int\limits_{x_{k+0}}^{t} u'''_{xxx\sigma}\, d\sigma\, dt\, ds,$$

то

$$|w'(x)| \leqslant |w''_{xx}(x_k)| \cdot h + |w'''_{xxx}(x_k + 0)|\frac{h^2}{2} + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u'''_{xxx}(x)| \cdot \frac{h^2}{2} \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma),$$

или, с учётом оценок (3.2.6), (3.2.5),

$$|w'(x)| \leqslant 6 \cdot \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''(x)| \cdot h + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(u''') \cdot 3 \cdot \frac{h^2}{2} + \\ + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u'''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma) \cdot \frac{h^2}{2} \leqslant C_{k,1} \cdot h.$$

Далее, из равенства

$$w''_{xx}(x) = w''_{xx}(x_k) + w'''_{xxx}(x_k + 0)(x - x_k) + \int\limits_{x_k+0}^{x}\int\limits_{x_k+0}^{s} u''''_{xxx\sigma}\, d\sigma\, ds$$

вытекает оценка для вариации:

$$\bigvee_{x_k+0}^{x_k-0}(w''_{xx}) \leqslant |w'''_{xxx}(x_k + 0)| \cdot h + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}}(\sigma) \cdot h \leqslant C_{k,2} \cdot h,$$

где

$$C_{k,2} = \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(u''') \cdot 3 + \sup_{x_k < x < x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}| \cdot \bigvee_{x_{k+0}}^{x_{k+1}-0}(\sigma).$$

Оценим теперь близость $u_I(x)$ к $u(x)$ по энергетической норме, т.е. оценим $a(w, w)$:

$$a(w, w) = \int\limits_0^{\xi} w''^2_{xx}\, dx + \int\limits_0^{1} r w'^2_x\, dx + \int\limits_0^{1} w^2\, dQ.$$

Первый интеграл в правой части последнего равенства проинтегрируем по частям:

$$\int\limits_0^{\xi} w''^2_{xx}\, dx = w''_{xx} w'_x \Big|_0^{\xi} - \int\limits_0^{\xi} w'_x\, dw''_{xx} = -\int\limits_0^{\xi} w'\, dw'',$$

так как $w'_x(0) = w'_x(\xi) = 0$. Далее,

$$\int_0^\xi w'_x\,dw''_{xx} = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w'_x\,dw''_{xx}$$

$$+ w'_x(0)\Delta^+ w''_{xx}(0) + \sum_{k=1}^{N-1} w'_x(x_k)\Delta w''_{xx}(x_k) + w'_x(\xi)\Delta^- w''_{xx}(\xi).$$

Все внеинтегральные слагаемые обращаются в нуль, так как $w'_x(x_k) = 0$ для всех $k = 0,\ 1, \ldots,\ N$. На основании оценок, полученных ранее, получаем

$$\left|\int_0^\xi w'_x\,dw''_{xx}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |w'_x(x)| \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (w''_{xx}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} C_{k,1}\cdot h\cdot C_{k,2}\cdot h = h^2 \sum_{k=0}^{N-1} C_{k,1}\cdot C_{k,2},$$

или, вспоминая определения $C_{k,1}$ и $C_{k,2}$, будем иметь:

$$\left|\int_0^\xi w'_x\,dw''_{xx}\right| \leqslant h^2 \sum_{k=0}^{N-1} \left(6\cdot \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''_{xx}(x)| + \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) + \right.$$

$$\left. + \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma)\right) \times +$$

$$\times \left(\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx})\cdot 3 + \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma)\right).$$

Так как

$$\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (u'''_{xxx}) \leqslant \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} (\sigma)$$

(вытекает из равенства $u'''_{xxx} = u'''_{xxx}(x_k+0) + \int_{x_k+0}^{x} u''''_{xxx\sigma}\,d\sigma$), то последнее неравенство принимает вид

$$\left|\int_0^\xi w'_x\,dw''_{xx}\right| \leqslant h^2 \left(6\cdot \sup_{0<x<\xi} |u''_{xx}(x)| + 2\cdot \sup_{0<x<\xi} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \bigvee_0^\xi (\sigma)\right) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{N-1} 4 \cdot \sup_{x_k<x<x_{k+1}} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma) \leqslant$$

$$\leqslant h^2 \cdot 8 \cdot \left(3 \cdot \sup_{0<x<\xi} |u''_{xx}(x)| + \sup_{0<x<\xi} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{0}^{\xi}(\sigma) \right) \times$$

$$\times \sup_{0<x<\xi} |u''''_{xxx\sigma}(x)| \cdot \bigvee_{0}^{\xi}(\sigma) \leqslant h^2 \cdot \hat{C}_1, \quad (3.2.7)$$

где $\widehat{C}_1$ зависит только от коэффициентов уравнения $(pu''_{xx})''_{x\sigma} = (ru'_x)'_\sigma - uQ'_\sigma + F'_\sigma$.

Для слагаемого $\int\limits_0^1 rw'^2_x\,dx$ имеем

$$\int_0^1 rw'^2_x\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k+0}^{x_{k+1}-0} w'^2_x\,dR,$$

где $R(x) = \int\limits_0^x r(s)\,ds$. Отсюда последовательно находим

$$\left| \int_0^1 rw'^2_x\,dx \right| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \sup_{x_k<x<x_{k+1}} w'^2_x(x) \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(R) \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} C^2_{k,1} \cdot h^2 \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(R) \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_0^1(R) \cdot h^2 \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left(6 \cdot \sup_{(x_k,x_{k+1})} |\, u''_{xx}\,| \cdot h + 2h^2 \sup_{(x_k,x_{k+1})} |\, u'''_{xxx\sigma}\,| \cdot \bigvee_{x_{k+0}}^{x_{k+1}-0}(\sigma) \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_0^1(R) h^2 \cdot 4 \left(3 \sup_{[0;1]} |u''_{xx}| \cdot h + h^2 \sup_{[0;1]} |u''''_{xxx\sigma}| \cdot \bigvee_0^1(\sigma) \right) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{N-1} \left(3 \sup_{(x_k;x_{k+1})} |u''_{xx}| \cdot h + h^2 \sup_{(x_k;x_{k+1})} |u''''_{xxx\sigma}| \cdot \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_0^1(R) 4h^3 \left(3 \sup_{[0;1]} |u''_{xx}| + h \sup_{[0;1]} |u''''_{xxx\sigma}| \cdot \bigvee_0^1(\sigma) \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{k=0}^{N-1} 3 \sup_{[0;1]} |u''_{xx}| \cdot h + h^2 \cdot \sup_{[0;1]} |u''''_{xxx\sigma}| \sum_{k=0}^{N-1} \bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \bigvee_0^1(R)4h^3\left(3\sup_{[0;1]}|u''_{xx}|+\sup_{[0;1]}|u''''_{xxx\sigma}|\cdot\bigvee_0^1(\sigma)\right)\leqslant h^3\cdot\widehat{C}_2, \quad (3.2.8)$$

так как $h\leqslant 1$ и $\sum\limits_{k=0}^{N-1}h=h\cdot N=1$; $\widehat{C}_2$ не зависит от h.

Аналогично для слагаемого $\int\limits_0^1 w^2\,dQ$ последовательно находим:

$$\int_0^1 w^2\,dQ=$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\int_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}w^2\,dQ+\sum_{k=1}^{N-1}w^2(x_k)\Delta Q(x_k)+w^2(0)\Delta^+Q(0)+w^2(1)\Delta^-Q(1)=$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\int_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}w^2\,dQ\leqslant\sum_{k=0}^{N-1}\left(6\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u''_{xx}(x)|\cdot\frac{h^2}{2}+\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(u'''_{xxx})\cdot 3\cdot\frac{h^3}{6}+\right.$$

$$\left.+\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u''''_{xxx\sigma}(x)|\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma)\cdot\frac{h^3}{6}\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant h^3\left(\sup_{0<x<1}|u''_{xx}|+\bigvee_0^1(u'''_{xxx})\cdot\frac{h}{2}+\sup_{0<x<1}|u''''_{xxx\sigma}|\bigvee_0^1(\sigma)\frac{h}{2}\right)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u''_{xx}(x)|\cdot h+\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(u'''_{xxx})\frac{h^2}{2}+\right.$$

$$\left.+\sup_{x_k<x<x_{k+1}}|u''''_{xxx\sigma}|\cdot\bigvee_{x_k+0}^{x_{k+1}-0}(\sigma)\frac{h^2}{6}\right)\leqslant$$

$$\leqslant h^3\left(\sup_{0<x<1}|u''_{xx}|+\bigvee_0^1(u'''_{xxx})+\sup_{0<x<1}|u''''_{xxx\sigma}|\bigvee_0^1(\sigma)\right)^2\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{N-1}\left(h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^2}{6}\right)\leqslant h^3\cdot\widehat{C}_3, \quad (3.2.9)$$

так как

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left(h+\frac{2h^2}{3}\right)=h\cdot N+2h^2\cdot N=1+2h\leqslant 3$$

(h мало и изначально может быть взято меньшим единицы); константа $\widehat{C}_3$ от h не зависит.

Соединяя теперь неравенства (3.2.7), (3.2.8) и (3.2.9), мы получим требуемое неравенство. Теорема доказана.

3.3 Построение алгоритма для разнопорядковой математической модели

Приближенное решение $u_N(x;t)$ математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial x}(p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + \frac{\partial}{\partial\sigma}(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}) - u\frac{dQ}{d\sigma} + f(x;t), \\ u(0,t) = 0; \\ u'_x(0,t) = 0; \\ u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \psi_0(x); \\ u'_t(x,0) = \psi_1(x), \end{cases} \tag{3.3.1}$$

будем искать в виде

$$u_N(x;t) = \sum_{k=1}^{3N-1} a_k(t)\varphi_k(x), \tag{3.3.2}$$

где $a_k(t)$ — неизвестные дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_k(x)$ — базисные функции, определенные выше.

Уравнение в (3.3.1) умножим на базисную функцию $\varphi_m(x)$, проинтегрируем по мере σ по $[0;l]$:

$$\int_0^l M'_\sigma(x)u''_{tt}(x;t)\varphi_m(x)d\sigma = -\int_0^l \frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\varphi_m(x)d\sigma +$$

$$+\int_0^l \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\varphi_m(x)d\sigma - \int_0^l u\frac{dQ}{d\sigma}\varphi_m(x)d\sigma + \int_0^l f(x;t)\varphi_m(x)d\sigma.$$

Интеграл $\int_0^l \frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\varphi_m(x)d\sigma$ дважды проинтегрировав по частям, а интеграл $\int_0^l \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\varphi_m(x)d\sigma$ — один раз, и, воспользовавшись тем обстоятельством, что базисные функции и само решение

должны удовлетворять граничным условиям, будем иметь

$$\int_0^l M'_\sigma(x)u''_{tt}(x;t)\varphi_m(x)\,d\sigma + \int_0^l p(x)u''_{xx}(x;t)\varphi_m{}''_{xx}(x)dx+$$

$$+\int_0^l r(x)u'_x(x;t)\varphi_m{}'_x(x)dx+\int_0^l u(x;t)\varphi_m(x)Q'_\sigma(x)d\sigma = \int_0^l f(x;t)\varphi_m(x)d\sigma.$$

Подставляя $u_N(x;t)$, определяемое формулой (3.3.2), в последнее равенство, получим

$$\sum_{k=1}^{3N-1}\left\{a''_k(t)\int_0^l M'_\sigma(x)\varphi_k(x)\varphi_m(x)d\sigma+a_k(t)\left(\int_0^l p(x)\varphi_k{}''_{xx}(x)\varphi_m{}''_{xx}(x)dx)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int_0^l r(x)u'_x(x;t)\varphi_m{}'_x(x)dx+\int_0^l \varphi_k(x)\varphi_m(x)Q'_\sigma d\sigma\right)\right\}=\int_0^l f(x,t)\varphi_m(x)d\sigma,$$

$m = 1, 2, \ldots, 3N-1$. Таким образом, мы получаем системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$Aa''(t) + Ba = F, \tag{3.3.3}$$

где A и B — квадратные матрицы порядка $3N-1$, коэффициенты которых находятся по формулам

$$A_{km} = A_{mk} = \int_0^l \varphi_m(x)\varphi_k(x)M'_\sigma(x)d\sigma,$$

$$B_{km} = B_{mk} = \int_0^l p(x)\varphi_k{}''_{xx}(x)\varphi_m{}''_{xx}(x)dx+$$

$$+\int_0^l r(x)\varphi_m{}'_x(x)\varphi_k{}'_x(x)dx + \int_0^l \varphi_k(x)\varphi_m(x)Q'_\sigma(x)d\sigma,$$

$a(t) = (a_1(t), a_2(t), \ldots, a_{3N-1}(t))^T$ и $F = (F_1(T), F_2(T), \ldots, F_{3N-1}(t))^T$

— вектор-столбцы, компоненты $F_k(x)$ определяются равенствами

$$F_k(x) = \int_0^l f(x;t)\varphi_k(x)d\sigma.$$

Умножим каждое начальное условие $u(x;0) = \psi_0(x)$ и $u'_t(x;0) = \psi_1(x)$ на базисную функцию $\varphi_m(x)$ и проинтегрируем первое равенство по x, а второе, умножив на $M'_\sigma(x)$, — по σ в пределах от 0 до l, подставим вместо $u(x;t)$ функцию $u_N(x;t)$:

$$\sum_{k=1}^{3N-1} a_k(0) \int_0^l \varphi_k(x)\varphi_m(x)dx = \int_0^l \psi_0(x)\varphi_m(x)dx,$$

$$\sum_{k=1}^{3N-1} a'_k(0) \int_0^l \varphi_k(x)\varphi_m(x)M'_\sigma(x)d\sigma = \int_0^l \psi_1(x)\varphi_m(x)M'_\sigma(x)d\sigma,$$

или, в матричном виде,

$$C_1 a(0) = D_1, \quad C_2 a'(0) = D_2, \tag{3.3.4}$$

где C_i — квадратные матрицы с коэффициентами

$$(C_1)_{km} = \int_0^l \varphi_k(x)\varphi_m(x)dx,$$

$$(C_2)_{km} = \int_0^l \varphi_k(x)\varphi_m(x)M'_\sigma(x)d\sigma,$$

D_i — вектор-столбцы с координатами

$$(D_1)_{km} = \int_0^l \psi_0(x)\varphi_m(x)dx,$$

$$(D_2)_{km} = \int_0^l \psi_1(x)\varphi_m(x)dx.$$

Матрицы A, C_i являются матрицами Грамма системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{3N-1}$ линейно независимых систем. Поэтому A и C_i имеют обратные.

Тогда, (3.3.3) и (3.3.4) принимают вид

$$a''(t) + A^{-1}Ba = A^{-1}F, \tag{3.3.5}$$

$$a(0) = C_1^{-1}D_{-1}, \quad a'(0) = C_2^{-1}D_2. \tag{3.3.6}$$

В классической теории ОДУ доказывается, что (3.3.5), дополненная начальными условиями (3.3.6), имеет единственное решение.

Для численного решения (3.3.5),(3.3.6) можно применять различные схемы. Мы применим явную схему. Для реализации алгоритма имеем следующие формулы

$$\frac{a_k((i+1)\tau) - 2a_k(i\tau) + a_k((i-1)\tau)}{\tau^2} + \sum_{k=1}^{3N-1} \eta_{k,j} a_j(j\tau) = F_k(j\tau),$$

$i = 2, 3, \ldots; k = 1, 2, \ldots, 3N-1$. (Здесь τ — шаг по временной переменной, $\eta_{k,j}$ — коэффициенты матрицы $A^{-1}B$.)

Два начальных слоя мы найдем, используя начальные данные:

$$a_k(0) = (C_1^{-1}D_1)_k, \quad \frac{a_k(\tau) - a_k(0)}{k} = (C_2^{-1}D_2)_k \quad (k = 1, 2, \ldots, 3N-1).$$

3.4 Оценка скорости сходимости

Обозначим $w(x;t) = u(x;t) - u_N(x;t)$ и

$$u_I(x;t) = \sum_{k=1}^{N} u(x_k;t)\varphi_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{N} u'_x(x_k;t)\varphi_{2k}(x) + \sum_{k=2N+1}^{3N-1} u(x_k;t)\varphi_k(x).$$

Также введем обозначения

$$(\varphi, \psi) = \int_0^l \varphi(x)\varphi(x)M'_\sigma d\sigma, \tag{3.4.1}$$

$$[\varphi, \psi] = \int_0^l p\varphi''_{xx}\psi''_{xx}dx + \int_0^l r\varphi'_x(x)\psi'_x dx + \int_0^l \varphi\psi dQ. \tag{3.4.2}$$

Равенства (3.4.1) и (3.4.2) определяют скалярные произведения в соответствующих пространствах $L_{2,\sigma}[0;l]$ — σ-суммируемых на $[0;l]$ с квадратом функций; и $L = \{\varphi'' \in L_2\}$.

С учетом введенных обозначений очевидны равенства

$$(w''_{tt}(\cdot;t);\varphi_m(\cdot)) + [w(\cdot;t);\varphi_m(\cdot)] = 0,$$

$$(w'_t(\cdot;t);\varphi_m(\cdot)) = 0,$$

$$\int_0^l w(x;t)\varphi_m(x)dx = 0,$$

$(m = 1, 2, \ldots, 3N-1)$, где точка означает, по какому аргументу берется скалярное произведение.

Также справедливо равенство

$$\int_0^t (w''_{tt}(\cdot;\tau);w'_t(\cdot;\tau))d\tau + \int_0^t (w(\cdot;\tau);w'_t(\cdot;\tau))d\tau =$$

$$= \int_0^t (w''_{tt}(\cdot;\tau);(u(\cdot;\tau) - u_1(\cdot;\tau))'_t)\,d\tau + \int_0^t (w(\cdot;\tau);(u(\cdot;\tau) - u_1(\cdot;\tau))'_t)\,d\tau.$$

Из последнего равенства, путем несложных преобразований, получаем

$$\frac{1}{2}\left(w_t'(\cdot;t);w_t'(\cdot;t)\right)+\frac{1}{2}\left[w(\cdot;t);w(\cdot;t)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left(w_t'(\cdot;0);w_t'(\cdot;0)\right)+\frac{1}{2}\left[w(\cdot;0);w(\cdot;0)\right]+$$
$$+\left(w_t'(\cdot;t);(u(\cdot;t)-u_I(\cdot;t))_t'\right)-\left(w_t'(\cdot;0);(u(\cdot;0)-u_I(\cdot;0))_t'\right)-$$
$$-\int\limits_0^t\left(w(\cdot;\tau);(u(\cdot;\tau)-u_I(\cdot;\tau))_{tt}''\right)d\tau-\left(w_t'(\cdot;0);(u(\cdot;0)-u_I(\cdot;0))_t'\right)-$$
$$-\int\limits_0^t\left[w(\cdot;\tau);(u(\cdot;\tau)-u_I(\cdot;\tau))_t'\right]d\tau. \qquad (3.4.3)$$

Оценим каждое слагаемое в правой части последнего равенства.

Для первого последовательно находим

$$\|w_t'(\cdot;0)\|^2=\left(w_t'(\cdot;0);w_t'(\cdot;0)\right)=\left(w_t'(\cdot;0);u_t'(\cdot;0)-u_{It}'(\cdot;0)\right)+$$
$$+\left(w_t'(\cdot;0);u_I'(\cdot;0)-u_{Nt}'(\cdot;0)\right)=\left(w_t'(\cdot;0);\psi_I'(\cdot)-u_{It}'(\cdot;0)\right)+$$
$$+\left(w_t'(\cdot;0);u_I'(\cdot;0)-u_{Nt}'(\cdot;0)\right),$$

Тогда, применяя неравенство Коши–Буняковского, будем иметь

$$\|w_t'(\cdot;0)\|^2\leqslant\|w_t'(\cdot;0)\|\cdot\|\psi'1(\cdot)-u_{1t}'(\cdot;0)\|+$$
$$+\|w_t'(\cdot;0)\|\cdot\|u_{1t}'(\cdot;0)-u_{Nt}'(\cdot;0)\|,$$

или

$$\|w_t'(\cdot;0)\|\leqslant\|\psi_1'(\cdot)-u_{1t}'(\cdot;0)\|+\|u_{1t}'(\cdot;0)-u_{Nt}'(\cdot;0)\|. \qquad (3.4.4)$$

Для первого слагаемого справедлива оценка

$$|\psi_1'(\cdot)-u_{It}'(\cdot;0)\|\leqslant C_1\cdot h, \qquad (3.4.5)$$

для которой C_1 не зависит от $h=\max\left\{\frac{\xi}{N};\frac{l-\xi}{N}\right\}$. Для второго последовательно находим

$$\|u_{1t}'(\cdot;0)-u_{Nt}'(\cdot;0)\|^2=|(u_{1t}'(\cdot;0)-u_{Nt}'(\cdot;0);u_{1t}'(\cdot;0)-u_{Nt}'(\cdot;0))|=$$

$$= |(u'_{1t}(\cdot;0) - u'_{Nt}(\cdot;0); u'_{1t}(\cdot;0) - u'_t(\cdot;0))| \leqslant$$

$$\leqslant \|(u'_{1t}(\cdot;0) - u'_{Nt}(\cdot;0)\| \cdot \|u'_{1t}(\cdot;0) - u'_t(\cdot;0))\| \leqslant \|(u'_{1t}(\cdot;0) - u'_{Nt}(\cdot;0)\| \cdot C_1 h.$$

Откуда вытекает оценка

$$\|u'_{1t}(\cdot;0) - u'_{Nt}(\cdot;0)\| \leqslant C_1 \cdot h. \tag{3.4.6}$$

Тогда, соединяя (3.4.5) и (3.4.6), неравенство (3.4.4) принимает вид

$$\|w'_t(\cdot;0)\| \leqslant 2C_1 \cdot h.$$

Для второго слагаемого в правой части равенства (3.4.3) последовательно получаем

$$\|(w(\cdot;0)\|_2^2 = [w(\cdot;0); w(\cdot;0)] =$$

$$= |[w(\cdot;0); u(\cdot;0) - u_I(\cdot;0) + u_I(\cdot;0) - u_N(\cdot;0)]| =$$

$$= |[w(\cdot;0); u(\cdot;0) - u_I(\cdot;0)] + [w(\cdot;0); u_I(\cdot;0) - u_N(\cdot;0)]| \leqslant$$

$$\leqslant \|w(\cdot;0)\|_2 \cdot \|u(\cdot;0) - u_I(\cdot;0)\|_2 + \|w(\cdot;0)\|_2 \cdot \|u_I(\cdot;0) - u_N(\cdot;0)\|_2 \tag{3.4.7}$$

Из (3.4.7) вытекает

$$\|w(\cdot;0)\|_2 \leqslant \|u(\cdot;0) - u_I(\cdot;0)\|_2 + \|u_I(\cdot;0) - u_N(\cdot;0)\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant C_2 h + \|u_I(\cdot;0) - u_N(\cdot;0)\|_2, \tag{3.4.8}$$

Так как $\|u(\cdot;0) - u_I(\cdot;0)\|_2 \leqslant C_2 h$ при некоторой $C_2 > 0$, которая не зависит от h.

Для второго слагаемого в правой части (3.4.8) последовательно находим

$$\|u_I(\cdot;0) - u_N(\cdot;0)\|_2^2 = \int_0^l p(x) \left(u'_{Ix}(x;0) - u'_{Nx}(x;0)\right)^2 dx +$$

$$+ \int_0^l p(x) \left(u_I(x;0) - u_N(x;0)\right)^2 Q'_x d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c \cdot m_0}{h^2} \int\limits_0^l p(x) \left(u_I(x;0) - u_N(x;0)\right)^2 M'_\sigma d\sigma +$$

$$+ m_0 \cdot q_1 \int\limits_0^l p(x) \left(u_I(x;0) - u_N(x;0)\right)^2 M'_\sigma d\sigma \leqslant \frac{C_4}{h^2} \|u_I(\cdot;0) - u_N(\cdot;0)\|^2,$$

где $m_0 = \inf_{[0;l]} M'_\sigma > 0, q_1 = \sup Q'_\sigma < \infty$. Тогда

$$\|u_I(\cdot;0) - u_N(\cdot;0)\|_2 \leqslant \frac{\sqrt{C_4}}{h} \cdot \|u_I(\cdot;0) - u_N(\cdot;0)\|.$$

Для последней нормы имеем оценку

$$\|u_I(\cdot;0) - u_N(\cdot;0)\|^2 = (u_I(\cdot;0) - u_N(\cdot;0); u_I(\cdot;0) - u_N(\cdot;0)) =$$

$$= (u_I(\cdot;0) - u_N(\cdot;0); u_I(\cdot;0) - u(\cdot;0)) \leqslant \|u_I(\cdot;0) - u_N(\cdot;0)\| \cdot C_5 \cdot h^2,$$

при некоторой постоянной $C_5 > 0$. Отсюда

$$\|(u_I(\cdot;0) - u_N(\cdot;0)\| \leqslant C_5 h^2.$$

Следовательно, (3.4.8) принимает вид

$$\|w(\cdot;0)\|_2 \leqslant C_2 h + C_5 h = (C_2 + C_5)h.$$

Для остальных слагаемых в правой части (3.4.3) последовательно имеем

$$\left|(w'_t(\cdot;t); (u(\cdot;t) - u_I(\cdot;t))'_t) - (w'_t(\cdot;0); (u(\cdot;0) - u_I(\cdot;0))'_t) - \right.$$
$$- \int\limits_0^l (w(\cdot;\tau); (u(\cdot;\tau) - u_I(\cdot;\tau))''_{tt})\, d\tau +$$
$$\left. + \int\limits_0^l [w(\cdot;\tau); (u(\cdot;\tau) - u_I(\cdot;\tau))'_t]\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \|w'_t(\cdot;t)\| \cdot \|(u(\cdot;t) - u_I(\cdot;t))'_t\| + \|w'_t(\cdot;0)\| \cdot \|(u(\cdot;0) - u_I(\cdot;0))'_t\| +$$
$$+ \int\limits_0^l \|w(\cdot;\tau)\| \cdot \|(u(\cdot;\tau) - u_I(\cdot;\tau))''_{tt}\| d\tau +$$

$$+\int_0^l \|w'_t(\cdot;\tau)\|_2 \cdot \|(u(\cdot;\tau)-u_I(\cdot;\tau))'_t\|_2 d\tau.$$

Тогда, из приведенных выше соотношений и (3.4.3) следуют оценки скорости сходимости $v(x,t)$ к $u(x,t)$ при $h \to 0$:

$$(w(\cdot,t);w(\cdot,t)) + [w(\cdot,t);w(\cdot,t)] \leqslant c \cdot h,$$

$$\max_t \{(w(\cdot,t);w(\cdot,t)) + [w(\cdot,t);w(\cdot,t)]\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{c} \cdot \sqrt{h}. \qquad (3.4.9)$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 3.4.1. *Пусть* $M'_\sigma(x) > 0$, $Q'_\sigma(x) > 0$, $p(x) > 0$ *на* $[0;\xi]$, $r(x) > 0$ *на* $[\xi;l]$ *и начальные условия таковы, что математическая модель* (3.3.1) *имеет единственное решение в классе* E; $u(x,t)$ *и* $v(x,t)$ *— точное и приближенное, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов, решения. Тогда справедливо неравенство* (3.4.9).

3.5 Численные эксперименты

В этом параграфе приводятся численные эксперименты, проведенные с помощью программ написанных на языке программирования Python.

3.5.1 Первый пример

Рассмотрим математическую модель

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u(l) = u'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.5.1}$$

при следующих параметрах: $\xi = 0{,}4$, $Q'_\sigma = 0$, $\xi_1 = 1{,}0/3$, $\xi_2 = 1{,}0/2$, $\xi_3 = 2{,}0/3$, $\xi_4 = 3{,}0/4$, $p(x) = 1$ при $x < \xi$, и 0 при остальных x; $r(x) = 0$ при $x < \xi$, и 1 при остальных x, $F'_\sigma = 0$ при $x < \xi$, и $F'_\sigma = 17{,}25925925926$ при $x > \xi$. Точное решение имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{x^3}{3\xi}, & x < \xi; \\ -8{,}62962962963(1-x)^2 + 5{,}35555555556(1-x), & x \geqslant \xi. \end{cases}$$

Точное и приближенное (полученное при $N = 10$) решения изображены на рисунке 3.5.1, погрешность — на рисунке 3.5.2.

На рисунках 3.5.3 и 3.5.4 изображена полученная погрешность при $N = 50$ и $N = 100$ соответственно.

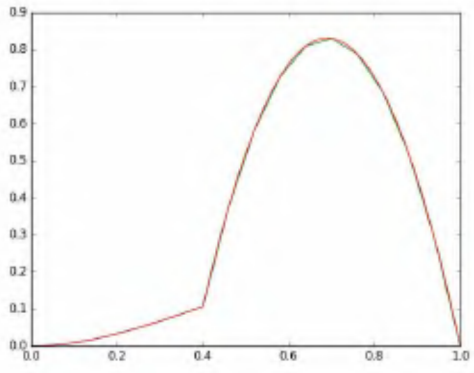

Рис. 3.5.1. *Точное и приближенное решения при* $N = 10$

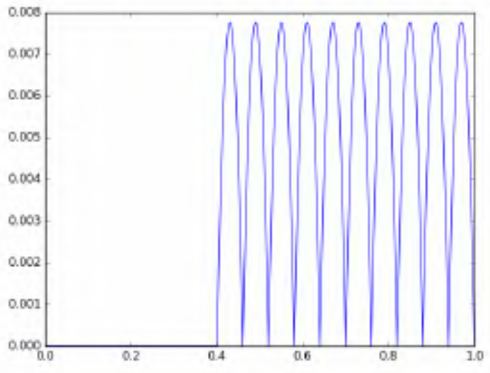

Рис. 3.5.2. *Погрешность при* $N = 10$

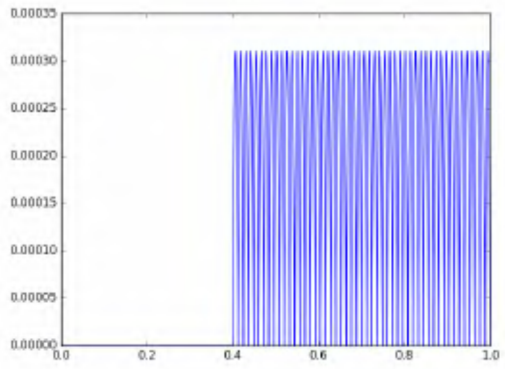

Рис. 3.5.3. *Погрешность при* $N = 50$

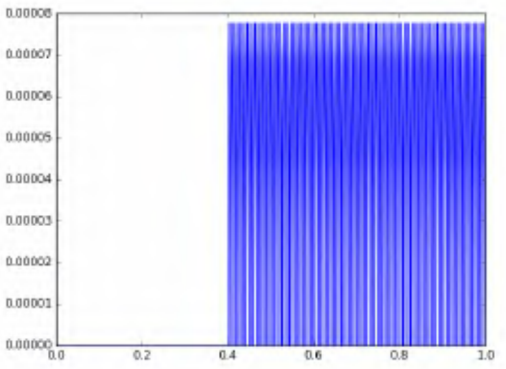

Рис. 3.5.4. *Погрешность при* $N = 100$

3.5.2 Второй пример

Здесь также рассматривается математическую модель (3.5.1) при следующих параметрах: $\xi = 0{,}4$, $\xi_1 = 1{,}0/2$, $p(x) = 1$ при $x < \xi$, и 0 при остальных x; $r(x) = 0$ при $x < \xi$, и 1 при остальных x, $Q'_\sigma = 0$, $F'_\sigma = 96(375x^2 - 200x + 24)$ при $x < \xi$, 0 при $\xi < x < 1.0/2$, -2, при $x > 1.0/2$, -2, если $x = 1.0/2$. Точное решение имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} 100x^2 \cdot (x - \xi)^4, & x < \xi; \\ 0 & x < 1{,}0/2; \\ (1.0 - x)(1.0/2 - x), & x < 1. \end{cases}$$

Точное и приближенное (полученное при $N = 10$) решения изображены на рисунке 3.5.5, погрешность — на рисунке 3.5.6.

На рисунках 3.5.7 и 3.5.8 изображена полученная погрешность при $N = 50$ и $N = 100$ соответственно.

3.5.3 Третий пример

Здесь рассматривается математическую модель (3.5.1) при следующих параметрах: $\xi = 1/3$, $p(x) = 1$ при $x < \xi$, и 0 при остальных x; $r(x) = 0$ при $x < \xi$, и 1 при остальных x, $Q'_\sigma = 1$, $F'_\sigma = -36 + x^2 \cdot 1{,}5x^4$ при $x < \xi$, $81{,}9375(1.0 - x) + 149/24.0(1.0 - x) - 437/32.0(1.0 - x)^3 - (-320\pi^2 \cdot \sin(4\pi x)(x - \xi)^5 + 800\pi \cos(4\pi x)(x - \xi)^4 + 400 * \sin(4\pi x) * (x -$

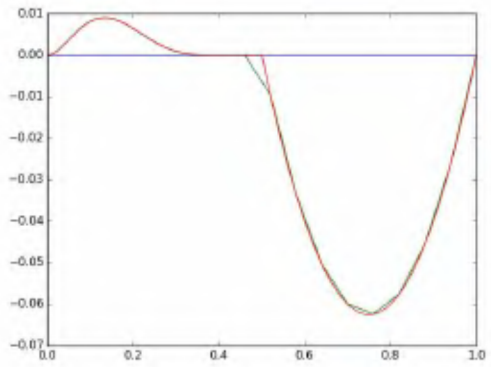

Рис. 3.5.5. *Точное и приближенное решения при* $N = 10$

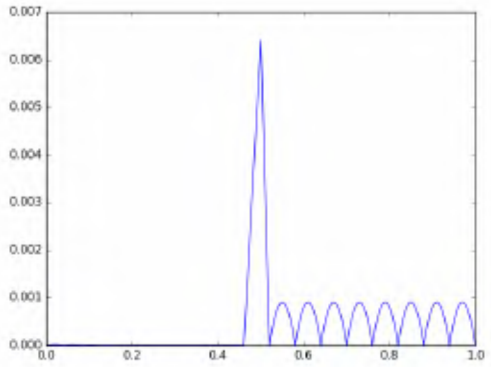

Рис. 3.5.6. *Погрешность при* $N = 10$

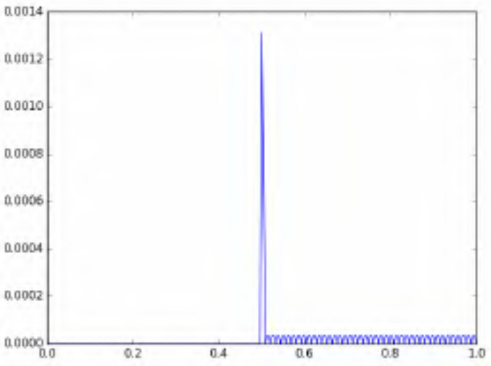

Рис. 3.5.7. *Погрешность при* $N = 50$

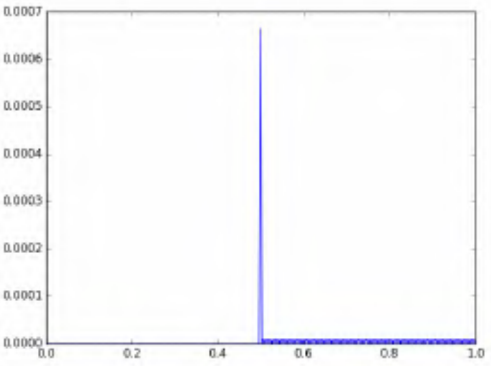

Рис. 3.5.8. *Погрешность при* $N = 100$

$\xi)^3) + (x-\xi)^5 \cdot 20\sin(4\pi x)$ при $x > \xi$. Точное решение имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} x^2 - 1{,}5x^4, & x < \xi; \\ 149/24.0(1.0-x) - 437/32.0(1.0-x)^3 + \\ +(x-\xi)^5 \cdot 20\sin(4\pi x) & \xi \leqslant x < 1. \end{cases}$$

Точное и приближенное (полученное при $N = 10$) решения изображены на рисунке 3.5.9, погрешность — на рисунке 3.5.10.

На рисунках 3.5.11 и 3.5.12 изображена полученная погрешность при $N = 50$ и $N = 100$ соответственно.

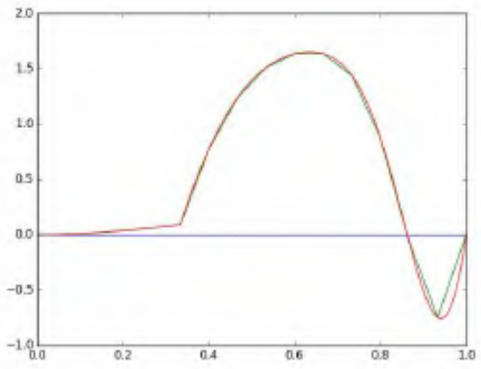

Рис. 3.5.9. *Точное и приближенное решения при* $N = 10$

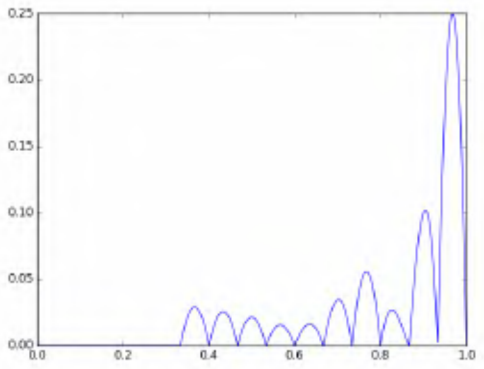

Рис. 3.5.10. *Погрешность при* $N = 10$

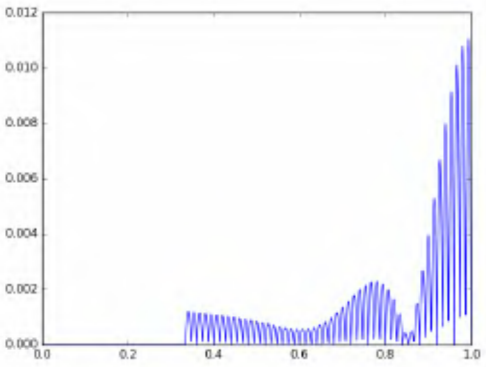

Рис. 3.5.11. *Погрешность при* $N = 50$

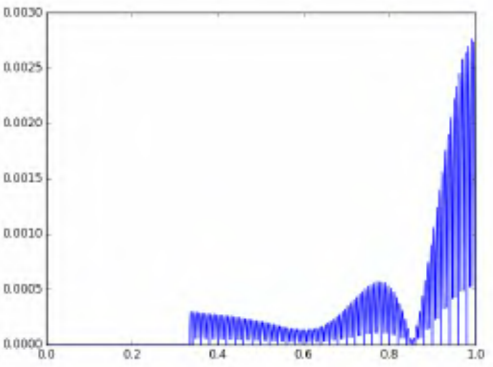

Рис. 3.5.12. *Погрешность при* $N = 100$

3.6 Комплекс программ для реализации численных экспериментов

Здесь приводится описание комплекса программ, написанных на Python, для нахождения приближенного решения.

Программа работает по следующему алгоритму. Задаются коэффициенты модели. Затем находятся коэффициенты системы, которая составляется при реализации адаптированного метода конечных элементов. Потом полученная система решается, и получается приближенное решение. Строится либо график, либо таблица значений. Схема взаимодействия модулей скрипта довольно проста, и представлена на рисунке 3.6.13.

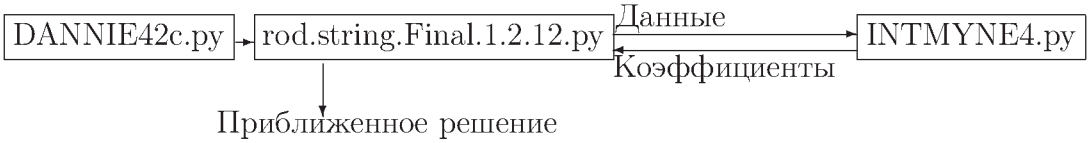

Рис. 3.6.13. *Схема взаимодействия модулей*

Общие сведения о программе. Программа называется rod.string.Final.1.2.12. Для работы программы необходим интерпретатор языка Python, пакеты math, scipy.integrate, copy, time, pylab и matplotlib.

Для нормальной работы программы необходимо порядка 1 Гб оперативной памяти. Объём исходного текста составляет 9264 байта.

Функциональное назначение. Предназначена для нахождения приближенного решения модели малых деформаций системы, состоящей из стержня и струны, по заданным параметрам модели.

Структура программы. В модуле с названием DANNIE2.py задаются параметры модели. Из консоли запускается скрипт rod.string.Final.1.2.12, который спрашивает количество шагов и необходимое действие (построить график приближенного решения или

записать значения приближенного решения в текстовый файл). Затем находятся коэффициенты системы, которая составляется при реализации адаптированного метода конечных элементов. Потом полученная система решается, и получается приближенное решение.

Требования к программному окружению. Операционная система Linux, Windows XP, 2003, 7.

Эксплуатация программы. Для запуска программы необходимо задать параметры модели: $M(x)$, $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$, $F(x)$, ξ_i, которые необходимо ввести в файл с именем DANNIE2.py, и другие параметры, которые вводятся с клавиатуры. На выходе будет получен либо график приближенного решения, либо таблица приближенного решения, которая может быть записана в файл. После задания параметров достаточно запустить скрипт с именем rod.string.Final.1.2.12.

На выходе будет получен график приближенного решения модели.

На рисунках 3.6.14 и 3.6.15 представлена работающая программа на Python'е до задания n и выбора вывода результата соответственно.

Текст программы представлен в приложении А.

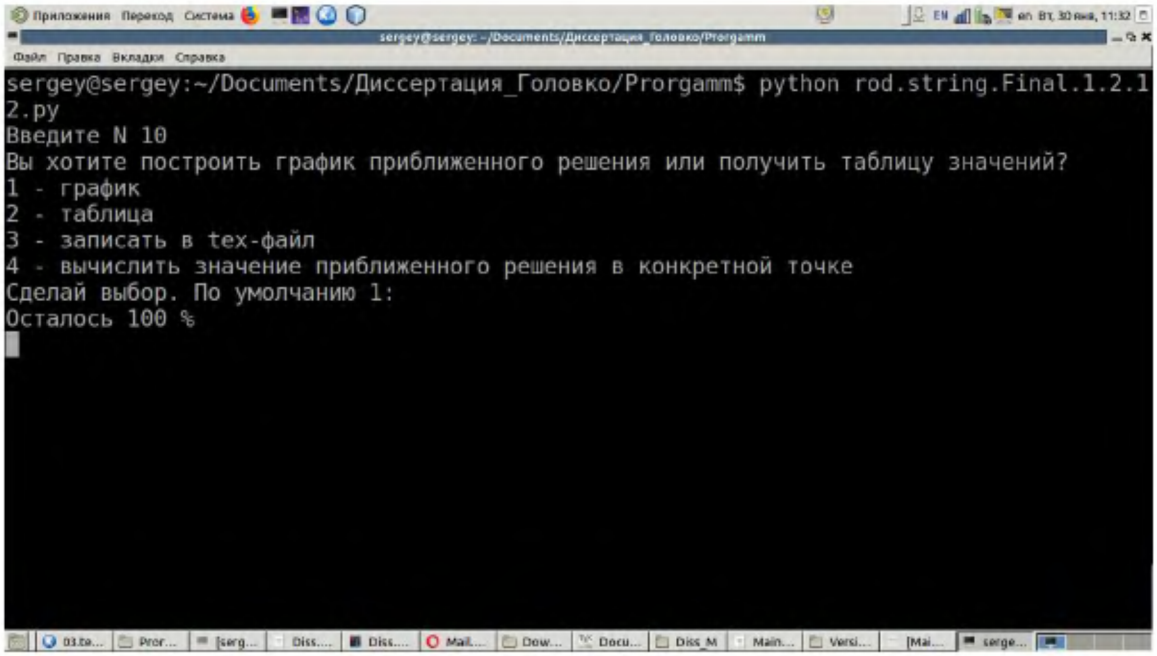

Рис. 3.6.14. *Запущенная программа на Python'е*

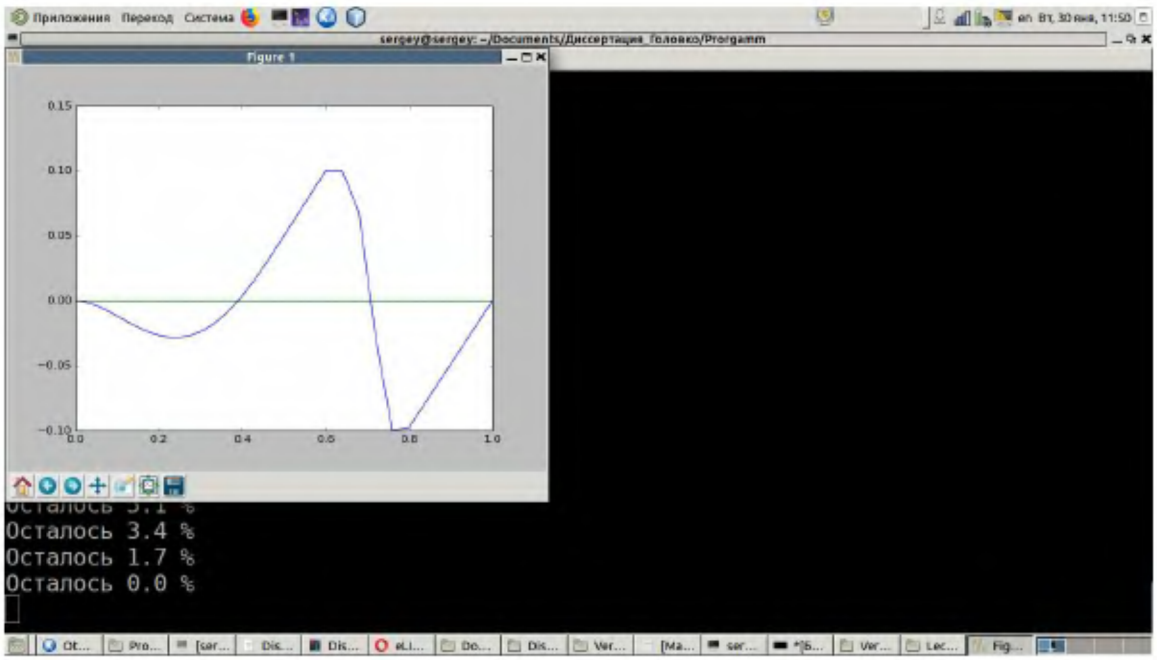

Рис. 3.6.15. *Запущенная программа на Python'е*

Заключение

В диссертационной работе представлены новые качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, которые описывают деформации и колебания системы, состоящей из струны и стержня. Современный аналитический аппарат изучения таких моделей находится в начальной стадии формирования. Полученные качественные аналитические методы исследования основываются на эффективных результатах анализа граничных задач с производными Радона–Никодима. В настоящее время численные методы для уравнений с производными по мере, их обоснование также находятся в стадии формирования. В работе получены новые результаты, относящиеся к области приближенного решения смешанных задач с производными Радона–Никодима, а также дана оценка погрешности. Представлены комплексы проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Основные результаты диссертационного исследования заключаются в следующем.

1. Вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации и колебания колебания системы, состоящей из струны и стержня, помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями, которые приводят к потере гладкости решения модели.

2. Доказательство корректности полученных математических моделей.

3. Разработка эффективных численных методов решения граничных задач для разнопорядковых уравнений (методы построения аналогов метода конечных элементов для математических моделей и оценка близости приближенного решения к точному решению).

4. Разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных задач, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Литература

[1] Albeverio, S. Bounds on variation of spectral subspaces under j-self-adjoint perturbations / S. Albeverio, A. K. Motovilov, A. A. Shkalikov // Integral Equations and Operator Theory. — 2009. — Vol. 64, no. 4. — P. 455–486.

[2] Guolan, C. On a class of second-order impulsive boundary value problem at resonance / Cai Guolan, Du Zengji, Ge Weigao // Int. J. Math. and Math. Sci. — 2006. — no. 2. — P. 1–11.

[3] Lagnese, J. E. Control of planar networks of timoshenko beams / J. E. Lagnese, G. Leugering, E.J.P.G. Schmidt // SIAM J. Control Optim. — 1993. — Vol. 31. — P. 780–811.

[4] Lagnese, J. E. Modelling analysis and control of dynamic elastic multi-link structures / J. E. Lagnese, G. Leugering, E.J.P.G. Schmidt. — Boston: Birkhauser, 1994. — P. 549.

[5] Lazarev, K. P. Solvability of the boundary-value problem for a variable-order differential equation on a geometric graph / K. P. Lazarev, T. V. Beloglazova // Mathematical Notes. — 2006. — Vol. 80, no. 1–2. — P. 57–64.

[6] Pokornyi, Y. V. A class of variable-order ordinary differential equations on graphs / Yu. V. Pokornyi, T. V. Beloglazova, K. P. Lazarev // Mathematical Notes. — 2003. — Vol. 73, no. 3. — P. 469–472.

[7] Pokornyi, Y. V. On a class of ordinary differential equations of various orders on a graph / Yu. V. Pokornyi, T. V. Beloglazova, K. P. Lazarev // Mathematical Notes. — 2003. — Vol. 73, no. 3–4. — P. 440–442.

[8] Аткинсон, Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи / Ф. Аткинсон. — М.: Мир, 1968. — С. 749.

[9] Баев, А. Д. О единственности решения математической модели вынужденных колебаний струны с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Меач Мон // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 50–55.

[10] Бахвалов, Н. С. Об уравнениях высокого порядка точности, описывающих колебания тонких стержней / Н. С. Бахвалов, М. Э. Эглит // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, № 3. — С. 457–472.

[11] Белоглазова, Т. В. О положительной обратимости разнопорядковых задач на графах: Дисс. . . кандидата наук / Воронеж. гос. ун-т ; науч. рук. Ю.В. Покорный. — 28.10.2003. — С. 128.

[12] Белоглазова, Т. В. О разрешимости одного класса разнопорядковых дифференциальных уравнений на графе с упругой опорой / Т. В. Белоглазова, С. К. Ординский // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. — 2016. — № 4. — С. 27–28.

[13] Бугакова, Н. И. Об адаптации метода конечных элементов для разнопорядковой математической модели, описывающей малые вынужденные колебания струнно-стержневой системы / Н. И. Бугакова // Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Селима Григорьевича Крейна, 13–19 ноября 2017 г. — 2017. — С. 57–60.

[14] Вагабов, А. И. Задача о колебании конечной струны с нелинейным возмущением / А. И. Вагабов // Известия высших учебных заведений. Математика. — 1999. — № 3. — С. 17–21.

[15] Владимиров, А. А. О накоплении собственных значений операторного пучка, связанного с задачей о колебаниях вязкоупругого стержня / А. А. Владимиров // Математические заметки. — 2006. — Т. 79, № 3. — С. 369–383.

[16] Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. — М.: Мир, 1984. — С. 428.

[17] Гантмахер, Ф. Р. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем / Ф. Р. Гантмахер, М. Г. Крейн. — М.–Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1950. — С. 359.

[18] Голованёва, Ф. В. Адаптация метода конечных элементов для одной математической модели второго порядка с негладкими решениями / Ф. В. Голованёва, С. А. Шабров, М. Меач // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. — 2016. — № 1 (22). — С. 89–92.

[19] Голованева, Ф. В. Адаптация метода конечных элементов для математической модели второго порядка с негладкими решениями / Ф. В. Голованева, М. Меач, С. А. Шабров // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — Т. 3. — 2015. — С. 292–295.

[20] Головко, Н. И. О корректности одной разнопорядковой математической модели / Н. И. Головко // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — Т. 2. — 2014. — С. 27–29.

[21] Головко, Н. И. Корректность разнопорядковой математической модели с негладкими решениями / Н. И. Головко // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — Т. 3. — 2015. — С. 22–26.

[22] Головко, Н. И. О применении метода Фурье к разнопорядковой математической модели / Н. И. Головко // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции. Воронежская весенняя математическая школа. — 2017. — С. 185–187.

[23] Головко, Н. И. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. — Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ. № 201761960060. 01.09.2017. — 2017.

[24] Головко, Н. И. Корректность одной разнопорядковой математической модели / Н. И. Головко, С. А. Шабров // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Международной конференции. — 2015. — С. 37–39.

[25] Дерр, В. Я. К определению решения линейного дифференциального уравнения с обобщёнными функциями в коэффициентах / В. Я. Дерр // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 298, № 2. — С. 269–272.

[26] Дифференциал Стилтьеса в моделировании колебаний струны с локализованными особенностями / А. Д. Баев, Ж. О. Залукаева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 73–83.

[27] Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный, О. М. Пенкин, В. Л. Прядиев и др. — М.: Физматлит, 2004. — С. 272.

[28] Завалищин, С. Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С. Т. Завалищин, А. Н. Сесекин. — М.: Наука, 1991. — С. 256.

[29] Залукаева, Ж. О. Метод Фурье в моделировании колебаний разрывной стилтьесовской струны / Ж. О. Залукаева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции. — 2015. — С. 92–94.

[30] Зверева, М. Б. Моделирование колебаний разрывной струны для случая третьей краевой задачи / М. Б. Зверева, Ж. О. Залукаева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 134–142.

[31] Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для задачи с разрывными решениями / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Ж. О. Залукаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 112–120.

[32] Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтьеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

[33] Иванникова, Т. А. О необходимом условии минимума квадратичного функционала с интергралом Стильтьеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала / Т. А. Иванникова, Е. В. Тимашова, С. А. Шабров // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 2, № 1. — С. 3–8.

[34] Левин, Б. Я. Распределение корней целых функций / Б. Я. Левин. — М.: Гос. изд. тех-теор. лит–ры, 1956. — С. 632.

[35] Левитан, Б. М. Введение в спектральную теорию: Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. — М.: Наука, 1970. — С. 672.

[36] Ловитт, У. В. Линейные интегральные уравнения / У. В. Ловитт. — М.: Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1957. — С. 267.

[37] Малашин, А. А. Вынужденные продольные колебания гибких деформируемых предварительно натянутых струн на частотах поперечных колебаний / А. А. Малашин // Доклады Академии наук. — 2007. — Т. 416, № 1. — С. 54–56.

[38] Меач, М. Математическое моделирование колебаний струнных и стержневых систем с локализованными особенностями: Дисс. . . кандидата наук / Воронеж. гос. ун-т ; науч. рук. С.А. Шабров. — 24.09.2014. — С. 137.

[39] Митягин, Б. С. Сходимость разложений по собственным функциям оператора Дирака / Б. С. Митягин // Докл. РАН. — 2003. — Т. 393, № 4. — С. 456–459.

[40] Мышкис, А. Д. О решениях линейного однородного двучленного дифференциального неравенства второго порядка с обобщенным коэффициентом / А. Д. Мышкис // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 32, № 5. — С. 615–619.

[41] Мышкис, А. Д. Элементы теории математических моделей / А. Д. Мышкис. — М.: КомКнига, 2007. — С. 192.

[42] О возможности применения метода Фурье к разнопорядковой математической модели / Н. И. Головко, Ф. В. Голованева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 1. — С. 91–98.

[43] О единственности классического решения математической модели вынужденных колебаний стержневой системы с особенностями / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестн. Во-

ронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 57–63.

[44] О методе конечных элементов для разнопорядковой модели / Н. И. Головко, Т. А. Иванникова, Е. В. Тимашова, С. А. Шабров // Современные методы теории краевых задач. материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXIV». — 2013. — С. 55–57.

[45] О функции Грина для локально взаимодействующей системы обыкновенных уравнений разного порядка / Ю. В. Покорный, Т. В. Белоглазова, Е. В. Дикарева, Т. В. Перловская // Математические заметки. — 2003. — Т. 74, № 1. — С. 146–149.

[46] Об одном классе дифференциальных уравнений на пространственной сети / А. В. Боровских, Р. Мустафокулов, К. П. Лазарев, Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1995. — Т. 345, № 6. — С. 730–732.

[47] Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М.: Физматлит, 2009. — С. 192.

[48] Перловская, Т. В. О позитивной обратимости одной разнопорядковой краевой задачи на графе: Дисс... кандидата наук / Воронеж. гос. ун-т ; науч. рук. Ю.В. Покорный. — 22.06.2004. — С. 103.

[49] Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // ДАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

[50] Покорный, Ю. В. О непрерывной зависимости от параметра решения краевой задачи четвертого порядка с производными по мере / Ю. В. Покорный, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вест-

ник физико-математического факультета Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина. — 2006. — № 1. — С. 70–72.

[51] Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1 (379). — С. 98–141.

[52] Решаемые модели в квантовой механике / С. Альбеверио, Ф. Гестези, Р. Хеэг-Крон, Х. Хольден. — М.: Мир, 1991. — С. 566.

[53] Рукавишников, В. А. Об оценке погрешности метода конечных элементов для третьей краевой задачи с сингулярностью в пространстве $l^*_{2,\nu+\gamma}$ / В. А. Рукавишников, Е. И. Рукавишников // Сиб. журн. вычисл. математики. — 2004. — Т. 7, № 2. — С. 177–185.

[54] Савчук, А. М. О собственных значениях и собственных функциях оператора Штурма–Лиувилля с сингулярным потенциалом / А. М. Савчук // Матем. заметки. — 2001. — Т. 69, № 2. — С. 277–285.

[55] Савчук, А. М. Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Мат. заметки. — 1999. — Т. 66, № 6. — С. 897–911.

[56] Савчук, А. М. Формула следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Матем. заметки. — 2001. — Т. 69, № 3. — С. 427–442.

[57] Савчук, А. М. Операторы Штурма–Лиувилля с потенциалами-распределениями / А. М. Савчук, А. А. Шкаликов // Тр. ММО. — 2003. — Т. 64. — С. 159–212.

[58] Савчук, А. М. О собственных значениях оператора Штурма-Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева / А. М. Савчук,

А. А. Шкаликов // Матем. заметки. — 2006. — Т. 80, № 6. — С. 864–884.

[59] Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М.: Наука, 1989. — С. 432.

[60] Самарский, А. А. Математическое моделирование / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — С. 320.

[61] Стренг, Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. — М.: Мир, 1977. — С. 351.

[62] Титчмарш, Е. Теория функций / Е. Титчмарш. — М.: Наука, 1980. — С. 464.

[63] Шабров, С. А. Качественные методы анализа граничных задач четвертого порядка / С. А. Шабров. — Saarbrucken, 2015: Математическое моделирование и качественные методы анализа граничных задач четвертого порядка с производными по мере. — С. 162.

[64] Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с негладкими решениями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 153–164.

[65] Шабров, С. А. О краевых задачах с импульсными коэффициентами: Дисс... кандидата наук / Воронеж. гос. ун-т ; науч. рук. Ю.В. Покорный. — 27.12.2000. — С. 74.

[66] Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для разнопорядковой математической модели / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, Ф. В. Голованева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 4. — С. 120–129.

[67] Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели четвертого порядка с производными по мере /

С. А. Шабров, Ф. В. Голованева, М. Меач // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Международной конференции. — 2015. — С. 190–191.

[68] Шабров, С. А. О методе конечных элементов для математической модели четвертого порядка с производными по мере / С. А. Шабров, Ф. В. Голованева, М. Меач // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции. — 2015. — С. 213–215.

[69] Шабров, С. А. О скорости роста собственных значений одной разнопорядковой спектральной задачи с производными по мере / С. А. Шабров, Н. И. Головко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 186–195.

[70] Шабров, С. А. Функция влияния разнопорядковой математической модели с производными по мере / С. А. Шабров, О. М. Родионова // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции. — 2015. — С. 219–220.

[71] Шабров, С. А. О функции влияния одной разнопорядковой математической модели с производными по мере / С. А. Шабров, О. М. Родионова, М. Б. Давыдова // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы Международной конференции. — 2015. — С. 191–192.

Приложение А

Листинги программ

А.1 Модуль INTMYNE4.py

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: UTF-8 -*-
#  Версия 2.0.1

import scipy.integrate
from decimal import *
import Nn
import PARALLEL

Ss='0'*10000

def INT(m,f,a,b,S=Ss):
    if m<=10000:
        c=PARALLEL.WORK(m,a,b,lambda x: f(x))
#        print "c",c
        c=Nn.RESULT(c)
        return c
    elif m<=100000:
        c,d=scipy.integrate.quad(lambda x: f1(x)*f2(x),a,b)
```

```
        c*=(f(a)+f(b))/2
        c=str(c)+S
        c=Decimal(c[:len(c)])
        return c

def INTF(m,f,f1,a,b):
    S='0'*10000
    c,d=scipy.integrate.quad(lambda x: f(x)*f1(x),a,b)
    c=Nn.RESULT(c)
    c=str(c)+S
    c=Decimal(c)
    return c

def INTQ(m,f,a,b):
    S='0'*m*100
    aa=Decimal(str(a)+S)
    bb=Decimal(str(b)+S)
    S1=0
```

A.2 Модуль DANNIE42c.py

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: UTF-8 -*-

# Данные для СТЕРЖНЯ

xiii=0.6

def q(x):
    return 1.0*x*(1.0-x)
```

```
def p(x):
    if x<=xiii:
        return 1.0
    else:
        return 0
def r(x):
    if x<=xiii:
        return 0
    else:
        return 1.0
xii=[1.0/3, 1.0/2, 2.0/3, 3.0/4, 4.0/5]

def f(x):
    if x<1.0/2:
        return -134.4-1.8*x**3+8.6*x**4-12.4*x**5+5.6*x**6
    elif x<xiii:
        return -0.2*x+0.7*x**2-0.5*x**3
    elif x<2.0/3:
        return 0.1*x-0.1*x**2
    elif x<3.0/4:
        return 1.7*x-4.1*x**2+2.4*x**3
    elif x<4.0/5:
        return -2.0+0.4625*x-1.9625*x**2+2.5*x**3-1.0*x**4
    else:
        return -0.4875*x+0.975*x**2-0.4875*x**3

def f1(x):
    if x<xiii:
        return 0
    else:
```

```
        return 0


fs=[0.0, 26.4, 2.4, -2.4, -0.3875]


qs=[0,0,0,0,0]
```

A.3 Модуль Nn.py

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: UTF-8 -*-
#  Версия 2.0.0

import scipy.integrate
from decimal import *
getcontext().prec = 25000
Ss='0'*10000

def RESULT(a):
    b=str(a)
    if ('e' in b) or ('E' in b):
        for i in xrange(len(b)):
            if ('e'==b[i]) or ('E'==b[i]):
                r=b[:i]
                if not ('.' in r):
                    r+='.'
                r+=Ss
                rr=b[i+1:]
```

```
                rrr=Decimal(r)*(Decimal(10)**(Decimal(rr)))
    else:
        if not('.' in b):
            b+='.'
        rrr=Decimal(b+Ss)
    return rrr
```

A.4 Модуль PARALLEL.py

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: UTF-8 -*-
#  Версия 1.0.0

import scipy.integrate
import multiprocessing
from decimal import *
import Nn
Ss='0'*10000

res=[]

result_queue = multiprocessing.Queue()
output_lock = multiprocessing.Lock()
HHH=4
def worker(m,num,n1,n2, qres):
    HHH=m
    m1=1
    if m>=25:
        m1=10
    ai=n1
```

```
    bi=n2
    ma=0
    for j in xrange(HHH):
        c1,d=scipy.integrate.quad(lambda t:\
            num(ai+(bi-ai)*j/HHH+(bi-ai)*t/HHH)*10**m1,0,1)
        ma+=Nn.RESULT(c1*(bi-ai)/HHH)/(10**m1)
    res=ma
    qres.put_nowait(res)
    return ma
def WORK(m,a,b,num):
    worker_count = multiprocessing.cpu_count()
    Mac=worker_count
    start_value = 0
    while True:
        jobs = []
        for i in xrange(worker_count):
            p = multiprocessing.Process(target=worker,\
                args=(m,lambda x:num(x),\
                a+(b-a)*1.0*i/Mac,\
                a+(b-a)*(i+1.0)/Mac,\
                result_queue))
            jobs.append(p)
            p.start()

        for w in jobs:
            w.join()
        if not result_queue.empty():
            break
    res = []
    while not result_queue.empty():
```

```
        res.append(result_queue.get())

    return res[0]+res[1]+res[2]+res[3]
```

A.5 Текст программы rod.string.Final.1.2.12

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: UTF-8 -*-
import math
import scipy.special

import scipy.integrate as spint
import copy

#import INTMYNE3
import time
import pylab
from matplotlib import mlab

from numpy import matrix
from numpy import linalg

import DANNIE42c as DANNIE42b

from decimal import *

setcontext(ExtendedContext)

a = 0.0
b = 1.0
```

```
N=5
VV=True
while VV:
    try:
        N1=input("Введите N ")
        if (not(N1>0)) or N1!=int(N1):
            print "Число должно быть натуральным"
        else:
            VV=not(N1>0)
    except:
        print "Некорректное число"
NN=N1

N2=N1
N=2*N1+N2-1
Ss=''
if N<=100:
    getcontext().prec = 100
    for i in xrange(100):
        Ss+='0'
elif N<=1000:
    getcontext().prec = 2500
    Eps=Decimal(1e-2000)
else:
    Eps=Decimal(1e-5000)
    getcontext().prec = 10000

M = 5

print "Вы хотите построить график\
```

```
приближенного решения или
получить таблицу значений?"
print "1 - график"
print "2 - таблица"
print "3 - записать в tex-файл"
print "4 - вычислить значение\
приближенного решения в конкретной точке"
Vibor=3
VV=True
while VV:
    try:
        Vibor=input("Сделай выбор. По умолчанию 1: ")
    except:
        Vibor=1
    VV=not (Vibor==1 or Vibor==2 or Vibor==3 or Vibor==4)
VV=1
Vv=1
if Vibor==3:
    while Vv:
        print "Введите имя файла для\
           значений приближенного решения"
        try:
            NAME=raw_input()
            Vv=False
        except:
            print "Неправильное имя"
tt1=time.time()

xii=[Decimal(1.0)/3, Decimal(1.0)/2,\
Decimal(2.0)/3, Decimal(3.0)/4, Decimal(4.0)/5]
```

```
xk=[]
h = (b-a)/NN
xk=[a+i*h for i in xrange(NN+1)]
xiii=DANNIE42b.xiii
q=DANNIE42b.q
p=DANNIE42b.p
r=DANNIE42b.r
f=DANNIE42b.f
fs=DANNIE42b.fs
qs=DANNIE42b.qs
Toch=DANNIE42b.Toch
xi=DANNIE42b.xii
xk=[a+m*(xiii-a)/N1 for m in xrange(N1+2)]

xk1=[a+m*(xiii-a)/N1 for m in xrange(N1+2)]

xk2=[]
for m in xrange(N2+1):
    xk2+=[xiii+m*(b-xiii)/N2]
hh=xk[1]-xk[0]
hh1=xk2[1]-xk2[0]

#   Базисная функция
def fik(m,x):
    if m<N1 and xk[m-1]<x and x<=xk[m]:
        return 1.0-3.0*((x-xk[m])/hh)**2-\
        2.0*((x-xk[m])/hh)**3
    elif m<N1 and xk[m]<x and x<=xk[m+1]:
        return 1.0-3.0*((x-xk[m])/hh)**2+2.0*((x-xk[m])/hh)**3
```

```
    elif m==N1 and xk[m-1]<x and x<=xk[m]:
        return 1.0-3.0*((x-xk[m])/hh)**2-2.0*((x-xk[m])/hh)**3
    elif m==N1 and xk[m]<x and x<=xk2[m-N1+1]:
        return (x-xk2[m-N1+1])/(xk2[m-N1]-xk2[m-N1+1])
    elif N1<m and m<2*N1 and xk1[m-N1-1]<=x and x<xk1[m-N1]:
        return (x-xk1[m-N1])*(1.0+(x-xk1[m-N1])/hh)**2
    elif N1<m and m<2*N1 and xk1[m-N1]<x and x<=xk1[m-N1+1]:
        return (x-xk1[m-N1])*(1.0-(x-xk1[m-N1])/hh)**2
    elif m==2*N1 and xk1[m-N1-1]<x and x<=xk1[m-N1]:
        return (1.0*x-xk1[m-N1])*(1.0+(x-xk1[m-N1])/hh)**2
    elif m>2*N1 and xk2[m-2*N1-1]<x and x<=xk2[m-2*N1]:
        return (1.0*x-xk2[m-2*N1-1])/\
        (xk2[m-2*N1]-xk2[m-2*N1-1])
    elif m>2*N1 and xk2[m-2*N1]<x and x<=xk2[m-2*N1+1]:
        return (1.0*x-xk2[m-2*N1+1])/\
        (xk2[m-2*N1]-xk2[m-2*N1+1])
    else:
        return 0


def fik1(m,x):
    if m<N1 and xk[m-1]<x and x<=xk[m]:
        return -6.0*(x-xk[m])/(hh**2)-6.0*((x-xk[m])/hh)**2/hh
    elif m<N1 and xk[m]<x and x<=xk[m+1]:
        return -6.0*(x-xk[m])/(hh**2)+6.0*((x-xk[m])/hh)**2/hh
    elif m==N1 and xk[m-1]<x and x<=xk[m]:
        return -6.0*(x-xk[m])/(hh**2)-6.0*((x-xk[m])/hh)**2/hh
    elif m==N1 and xk[m]<x and x<=xk2[m-N1+1]:
        return 1.0/(xk2[m-N1]-xk2[m-N1+1])
    elif N1<m and m<2*N1 and xk1[m-N1-1]<=x and x<xk1[m-N1]:
```

```
        return (1.0+(x-xk1[m-N1])/hh)**2+2.0*(x-xk1[m-N1])*\
        (1.0+(x-xk1[m-N1])/hh)/hh
    elif N1<m and m<2*N1 and xk1[m-N1]<x and x<=xk1[m-N1+1]:
        return (1.0-(1.0*x-xk1[m-N1])/hh)**2-2.0*\
        (x-xk1[m-N1])*(1.0-(x-xk1[m-N1])/hh)/hh
    elif m==2*N1 and xk1[m-N1-1]<x and x<=xk1[m-N1]:
        return (1.0+(1.0*x-xk1[m-N1])/hh)**2+2.0*\
        (x-xk1[m-N1])*(1.0+(x-xk1[m-N1])/hh)/hh
    elif m>2*N1 and xk2[m-2*N1-1]<x and x<=xk2[m-2*N1]:
        return 1.0/(xk2[m-2*N1]-xk2[m-2*N1-1])
    elif m>2*N1 and xk2[m-2*N1]<x and x<=xk2[m-2*N1+1]:
        return 1.0/(xk2[m-2*N1]-xk2[m-2*N1+1])
    else:
        return 0
def fik2(m,x):
    if m<N1 and xk[m-1]<x and x<=xk[m]:
        return -6.0/(hh**2)-12.0*(1.0*x-xk[m])/(hh**3)
    elif m<N1 and xk[m]<x and x<=xk[m+1]:
        return -6.0/(hh**2)+12.0*(1.0*x-xk[m])/(hh**3)
    elif m==N1 and xk[m-1]<x and x<=xk[m]:
        return -6.0/(hh**2)-12.0*(1.0*x-xk[m])/(hh**3)
    elif m==N1 and xk[m]<x and x<=xk2[m-N1+1]:
        return 0
    elif N1<m and m<2*N1 and xk1[m-N1-1]<=x and x<xk1[m-N1]:
        return 4*(1+(x-xk1[m-N1])/hh)/hh+\
        2*(x-xk1[m-N1])/(hh**2)
    elif N1<m and m<2*N1 and xk1[m-N1]<x and x<=xk1[m-N1+1]:
        return -4*(1-(x-xk1[m-N1])/hh)/hh+\
        2*(x-xk1[m-N1])/(hh**2)
    elif m==2*N1 and xk1[m-N1-1]<x and x<=xk1[m-N1]:
```

```
        return 4*(1+(x-xk1[m-N1])/hh)/hh+\
        2*(x-xk1[m-N1])/(hh**2)
    elif m>2*N1 and xk2[m-2*N1-1]<x and x<=xk2[m-2*N1]:
        return 0
    elif m>2*N1 and xk2[m-2*N1]<x and x<=xk2[m-2*N1+1]:
        return 0
    else:
        return 0

#  Конец ввода базисных функций

# Интервал изменения переменной по оси X
xmin = 0.0
xmax = 1.0

# Шаг между точками
if N>=1000:
    dx = 1.0/(10*N)
elif N>=100:
    dx = 1.0/(N**2)
elif N<=5:
    dx=0.001
else:
    dx = 1.0/(N**4)
dx=1/1000.0
x=[]
A=[]
for j in xrange(0,N):
    A+=[[0 for i in xrange(0,N)]]
```

```
import Nn
xii=[Nn.RESULT(xi[i]) for i in xrange(M)]

fss=[]
for i in xrange (M):
    fss+=[Nn.RESULT(fs[i])]
qss=[]
for i in xrange (M):
    qss+=[Nn.RESULT(qs[i])]

def Skach(m,n):
    global Ss
    S=0
    for ix in xrange(M):
        S+=Decimal(Nn.RESULT(fik(m,float(xii[ix]))*\
        fik(n,float(xii[ix]))))*qss[ix]
    return S
def Ska(x):
    return Decimal(Nn.RESULT(x))


H=Decimal(Nn.RESULT(h))
funk=[0 for m in xrange(N)]

print "Осталось",100,"%"

import INTMYNE4 as INT2
for m in xrange(1,N+1):
    for n in xrange(m,N+1):
        A[m-1][n-1]= INT2.INT(NN,lambda x:p(x)*\
```

```
            fik2(m,x)*fik2(n,x),0,xiii)
            A[m-1][n-1]+=INT2.INT(NN,lambda x:r(x)*\
            fik1(m,x)*fik1(n,x),xiii,1)
            A[m-1][n-1]+=INT2.INT(NN,lambda x:q(x)*\
            fik(m,x)*fik(n,x),0,1)
            A[m-1][n-1]+=Skach(m,n)
            if m!=n:
                A[n-1][m-1]=A[m-1][n-1]
        print "Осталось",int((1-(1.0*m)/(2*N))*1000)/10.0,"%"


for m in xrange(1,N+1):
        funk[m-1]= INT2.INT(NN,lambda x:f(x)*fik(m,x),0,xiii)
        funk[m-1]+=INT2.INT(NN,lambda x:f(x)*fik(m,x),xiii,1)
        for ix in xrange(M):
            funk[m-1]+=Ska(fik(m,float(xii[ix])))*fss[ix]
        print "Осталось",int((0.5-(1.0*m)/(2*N))*1000)/10.0,"%"


t2=time.time()

B=copy.deepcopy(A)
gf=copy.deepcopy(funk)
gf1=copy.deepcopy(funk)

for i in xrange(N):
        B+=[[Decimal(0) for j in xrange(N)]]
        gf+=[Decimal(0)]

for i in xrange(N):
```

```
    for j in xrange(N):
        cc=A[i][j]
        B[i][j]=Decimal(str(cc))
    gf[i]=funk[i]
xx=[Decimal(0) for i in xrange(N)]

ty2=time.time()

for k in xrange(N):
    gf[k]=gf[k]/A[k][k]
    for j in xrange(N-1,k-1,-1):
        A[k][j]=A[k][j]/A[k][k]
    for j in xrange(k+1,N):
            r=A[j][k]
            for i in xrange(k,N):
                A[j][i]=A[j][i]-r*A[k][i]
            gf[j]=gf[j]-r*gf[k];

for k in xrange(N-1,-1,-1):
    #обратный ход
    r=0
    for j in xrange(k+1,N):
        g=A[k][j]*xx[j]
        r=r+g
    xx[k]=(gf[k]-r)/A[k][k]

# Конец алгоритма

def Approx(x):
    qaql=0.0
```

```
    for m in xrange(0,N):
        ggg=xx[m]
        qaql+=float(str(ggg))*fik(m+1,x)
    return qaql

if Vibor==1:
    xlist = mlab.frange (0, 1, dx)
    ylist1 = [Approx(x) for x in xlist]
    ylist2 = [0 for x in xlist]
    pylab.plot (xlist, ylist1)
    pylab.plot (xlist, ylist2)
    pylab.show()

elif Vibor==2:
    for lk in xrange(N):
        print "x=", a+lk*1.0/N, "u=", Approx(a+lk*1.0/N)
    print "x=", b, "u=", Approx(b)
    tt2=time.time()
elif Vibor==3:
    if N<=10:
        MK=1000
    elif N<=25:
        MK=2500
    else:
        MK=10000
    tex=open(NAME,'w')
    tex.write(str(MK)+'\r')

    MAX=Approx(0.0)
    MIN=Approx(0.0)
```

```
    for lk in xrange(MK+1):
        tex.write(str(a+lk*1.0/MK)+'\r')
        tex.write(str(Approx(a+lk*1.0/MK))+'\r')
        if Approx(a+lk*1.0/MK)>MAX:
            MAX=Approx(a+lk*1.0/MK)
        if Approx(a+lk*1.0/MK)<MIN:
            MIN=Approx(a+lk*1.0/MK)
    tex.write(str(MAX)+'\r')
    tex.write(str(MIN))
    tex.close
    tt2=time.time()
elif Vibor==4:
    print "Введите число между", a, " и ", b
    print "Выход ENTER"
    try:
        Vibor=True
        while Vibor:
            klkkk=input()
            if klkkk>=a and klkkk<=b:
                print "u(",klkkk,")=",Approx(klkkk)
            else:
                print "Число должно быть между ",a, " и ", b
            print " Хотите еще?"
            print "ENTER - выход"
    except:
        print "До свидания"
```

Приложение B

Таблицы приближенного, точного решений и погрешности

Здесь представлены значения точного, приближенного решений и погрешности (при $N = 10$) для первого тестового примера.

x	точное	приближенное	погрешность
0,00	0,0	0,0	0,0
0,01	$9{,}91666666667 \cdot 10^{-05}$	$9{,}91666666668 \cdot 10^{-05}$	$1{,}16334893108 \cdot 10^{-16}$
0,02	0,000393333333333	0,000393333333334	$4{,}61328024393 \cdot 10^{-16}$
0,03	0,0008775	0,000877500000001	$1{,}02890786169 \cdot 10^{-15}$
0,04	0,00154666666667	0,00154666666667	$1{,}814087075 \cdot 10^{-15}$
0,05	0,00239583333333	0,00239583333334	$2{,}80895098848 \cdot 10^{-15}$
0,06	0,00342	0,00342	$4{,}01068067646 \cdot 10^{-15}$
0,07	0,00461416666667	0,00461416666667	$5{,}40973515983 \cdot 10^{-15}$
0,08	0,00597333333333	0,00597333333334	$7{,}00307867252 \cdot 10^{-15}$
0,09	0,0074925	0,00749250000001	$8{,}77423134149 \cdot 10^{-15}$
0,1	0,00916666666667	0,00916666666668	$1{,}07362035928 \cdot 10^{-14}$
0,11	0,0109908333333	0,0109908333333	$1{,}28733829152 \cdot 10^{-14}$
0,12	0,01296	0,01296	$1{,}51822998617 \cdot 10^{-14}$
0,13	0,0150691666667	0,0150691666667	$1{,}7657750262 \cdot 10^{-14}$
0,14	0,0173133333333	0,0173133333334	$2{,}0292795222 \cdot 10^{-14}$

x	точное	приближенное	погрешность
0,15	0,0196875	0,0196875	$2{,}30614138896 \cdot 10^{-14}$
0,16	0,0221866666667	0,0221866666667	$2{,}59792187762 \cdot 10^{-14}$
0,17	0,0248058333333	0,0248058333334	$2{,}9028862647 \cdot 10^{-14}$
0,18	0,02754	0,02754	$3{,}22276927367 \cdot 10^{-14}$
0,19	0,0303841666667	0,0303841666667	$3{,}55514229167 \cdot 10^{-14}$
0,2	0,0333333333333	0,0333333333334	$3{,}899658374 \cdot 10^{-14}$
0,21	0,0363825	0,0363825	$4{,}25215418431 \cdot 10^{-14}$
0,22	0,0395266666667	0,0395266666667	$4{,}61714000366 \cdot 10^{-14}$
0,23	0,0427608333333	0,0427608333334	$4{,}99530972142 \cdot 10^{-14}$
0,24	0,04608	0,0460800000001	$5{,}38527555882 \cdot 10^{-14}$
0,25	0,0494791666667	0,0494791666667	$5{,}78287417952 \cdot 10^{-14}$
0,26	0,0529533333333	0,0529533333334	$6{,}18879947289 \cdot 10^{-14}$
0,27	0,0564975	0,0564975000001	$6{,}59958199201 \cdot 10^{-14}$
0,28	0,0601066666667	0,0601066666667	$7{,}01730340502 \cdot 10^{-14}$
0,29	0,0637758333333	0,0637758333334	$7{,}44543315889 \cdot 10^{-14}$
0,3	0,0675	0,0675000000001	$7{,}88119569606 \cdot 10^{-14}$
0,31	0,0712741666667	0,0712741666667	$8{,}31557045444 \cdot 10^{-14}$
0,32	0,0750933333333	0,0750933333334	$8{,}76104744307 \cdot 10^{-14}$
0,33	0,0789525	0,0789525000001	$9{,}21485110439 \cdot 10^{-14}$
0,34	0,0828466666667	0,0828466666668	$9{,}67143032327 \cdot 10^{-14}$
0,35	0,0867708333333	0,0867708333334	$1{,}01266217634 \cdot 10^{-13}$
0,36	0,09072	0,0907200000001	$1{,}05859765398 \cdot 10^{-13}$
0,37	0,0946891666667	0,0946891666668	$1{,}10356168648 \cdot 10^{-13}$
0,38	0,0986733333333	0,0986733333334	$1{,}15005227563 \cdot 10^{-13}$
0,39	0,1026675	0,1026675	$1{,}19682042055 \cdot 10^{-13}$
0,4	0,106666666667	0,106666666667	$1{,}24233956456 \cdot 10^{-13}$
0,41	0,155803703704	0,151488888889	0,00431481481467
0,42	0,203214814815	0,196311111111	0,00690370370355

x	точное	приближенное	погрешность
0,43	0,2489	0,241133333334	0,00776666666649
0,44	0,292859259259	0,285955555556	0,00690370370351
0,45	0,335092592593	0,330777777778	0,00431481481461
0,46	0,3756	0,3756	$2{,}24431584428 \cdot 10^{-13}$
0,47	0,414381481481	0,410066666667	0,00431481481458
0,48	0,451437037037	0,444533333334	0,00690370370345
0,49	0,486766666667	0,479	0,00776666666641
0,5	0,52037037037	0,513466666667	0,00690370370343
0,51	0,552248148148	0,547933333334	0,00431481481453
0,52	0,5824	0,5824	$2{,}98983060532 \cdot 10^{-13}$
0,53	0,610825925926	0,606511111111	0,00431481481451
0,54	0,637525925926	0,630622222223	0,00690370370339
0,55	0,6625	0,654733333334	0,00776666666634
0,56	0,685748148148	0,678844444445	0,00690370370337
0,57	0,70727037037	0,702955555556	0,00431481481447
0,58	0,727066666667	0,727066666667	$3{,}48721052035 \cdot 10^{-13}$
0,59	0,745137037037	0,740822222223	0,00431481481446
0,6	0,761481481481	0,754577777778	0,00690370370335
0,61	0,7761	0,768333333334	0,00776666666631
0,62	0,788992592593	0,782088888889	0,00690370370334
0,63	0,800159259259	0,795844444445	0,00431481481444
0,64	0,8096	0,8096	$3{,}74145159299 \cdot 10^{-13}$
0,65	0,817314814815	0,813	0,00431481481444
0,66	0,823303703704	0,8164	0,00690370370333
0,67	0,827566666667	0,8198	0,00776666666629
0,68	0,830103703704	0,8232	0,00690370370333
0,69	0,830914814815	0,8266	0,00431481481444
0,7	0,83	0,83	$3{,}73923114694 \cdot 10^{-13}$

x	точное	приближенное	погрешность
0,71	0,827359259259	0,823044444445	0,00431481481444
0,72	0,822992592593	0,816088888889	0,00690370370334
0,73	0,8169	0,809133333334	0,0077666666663
0,74	0,809081481481	0,802177777778	0,00690370370335
0,75	0,799537037037	0,795222222223	0,00431481481446
0,76	0,788266666667	0,788266666667	$3{,}49165141245 \cdot 10^{-13}$
0,77	0,77527037037	0,770955555556	0,00431481481447
0,78	0,760548148148	0,753644444445	0,00690370370337
0,79	0,7441	0,736333333334	0,00776666666634
0,8	0,725925925926	0,719022222223	0,00690370370339
0,81	0,706025925926	0,701711111111	0,00431481481451
0,82	0,6844	0,6844	$2{,}99427149741 \cdot 10^{-13}$
0,83	0,661048148148	0,656733333334	0,00431481481453
0,84	0,63597037037	0,629066666667	0,00690370370343
0,85	0,609166666667	0,6014	0,0077666666664
0,86	0,580637037037	0,573733333334	0,00690370370345
0,87	0,550381481481	0,546066666667	0,00431481481458
0,88	0,5184	0,5184	$2{,}24487095579 \cdot 10^{-13}$
0,89	0,484692592593	0,480377777778	0,00431481481461
0,9	0,449259259259	0,442355555556	0,00690370370351
0,91	0,4121	0,404333333334	0,00776666666649
0,92	0,373214814815	0,366311111111	0,00690370370355
0,93	0,332603703704	0,328288888889	0,00431481481467
0,94	0,290266666667	0,290266666667	$1{,}24511512212 \cdot 10^{-13}$
0,95	0,246203703704	0,241888888889	0,00431481481471
0,96	0,200414814815	0,193511111111	0,00690370370362
0,97	0,1529	0,145133333333	0,0077666666666
0,98	0,103659259259	0,0967555555556	0,00690370370366

x	точное	приближенное	погрешность
0,99	0,0526925925926	0,0483777777778	0,00431481481479
1,0	0,0	0,0	0,0

Здесь представлены значения точного, приближенного решений и погрешности (при $N = 10$) для второго тестового примера.

x	точное	приближенное	погрешность
0.0	0.0	0.0	0.0
0.01	0.0002313441	0.0002239488	$7.3953 \cdot 10^{-06}$
0.02	0.0008340544	0.0008211456	$1.29088 \cdot 10^{-05}$
0.03	0.0016867449	0.001679616	$7.1289 \cdot 10^{-06}$
0.04	0.0026873856	0.0026873856	$1.30104260698 \cdot 10^{-18}$
0.05	0.0037515625	0.0037466368	$4.9257 \cdot 10^{-06}$
0.06	0.0048108096	0.0048022528	$8.5568 \cdot 10^{-06}$
0.07	0.0058110129	0.0058063104	$4.70249999999 \cdot 10^{-06}$
0.08	0.0067108864	0.0067108864	$7.8062556419 \cdot 10^{-18}$
0.09	0.0074805201	0.007477632	$2.8881 \cdot 10^{-06}$
0.1	0.0081	0.0080950272	$4.9728 \cdot 10^{-06}$
0.11	0.0085581001	0.008555392	$2.7081 \cdot 10^{-06}$
0.12	0.0088510464	0.0088510464	$1.21430643318 \cdot 10^{-17}$
0.13	0.0089813529	0.0089800704	$1.28249999998 \cdot 10^{-06}$
0.14	0.0089567296	0.0089545728	$2.15679999998 \cdot 10^{-06}$
0.15	0.0087890625	0.0087879168	$1.14569999998 \cdot 10^{-06}$
0.16	0.0084934656	0.0084934656	$1.90819582357 \cdot 10^{-17}$
0.17	0.0080874049	0.008087296	$1.08899999983 \cdot 10^{-07}$
0.18	0.0075898944	0.0075897856	$1.08799999982 \cdot 10^{-07}$
0.19	0.0070207641	0.0070207488	$1.52999999788 \cdot 10^{-08}$
0.2	0.0064	0.0064	$2.34187669257 \cdot 10^{-17}$
0.21	0.0057471561	0.0057477888	$6.32700000021 \cdot 10^{-07}$

x	точное	приближенное	погрешность
0.22	0.0050808384	0.0050820096	$1.17120000002 \cdot 10^{-06}$
0.23	0.0044182609	0.004418944	$6.83100000024 \cdot 10^{-07}$
0.24	0.0037748736	0.0037748736	$3.16587034366 \cdot 10^{-17}$
0.25	0.0031640625	0.0031650048	$9.42300000033 \cdot 10^{-07}$
0.26	0.0025969216	0.0025986048	$1.68320000004 \cdot 10^{-06}$
0.27	0.0020820969	0.0020830464	$9.49500000036 \cdot 10^{-07}$
0.28	0.0016257024	0.0016257024	$3.9248118644 \cdot 10^{-17}$
0.29	0.0012313081	0.001232128	$8.19900000041 \cdot 10^{-07}$
0.3	0.0009	0.0009014272	$1.42720000004 \cdot 10^{-06}$
0.31	0.0006305121	0.000631296	$7.83900000047 \cdot 10^{-07}$
0.32	0.0004194304	0.0004194304	$4.97648797171 \cdot 10^{-17}$
0.33	0.0002614689	0.0002617344	$2.65500000052 \cdot 10^{-07}$
0.34	0.0001498176	0.0001502208	$4.03200000055 \cdot 10^{-07}$
0.35	$7.65625 \cdot 10^{-05}$	$7.67488000001 \cdot 10^{-05}$	$1.86300000058 \cdot 10^{-07}$
0.36	$3.31776 \cdot 10^{-05}$	$3.31776000001 \cdot 10^{-05}$	$6.07966368221 \cdot 10^{-17}$
0.37	$1.10889 \cdot 10^{-05}$	$1.03680000001 \cdot 10^{-05}$	$7.20899999937 \cdot 10^{-07}$
0.38	$2.3104 \cdot 10^{-06}$	$9.21600000066 \cdot 10^{-07}$	$1.38879999993 \cdot 10^{-06}$
0.39	$1.521 \cdot 10^{-07}$	$-6.91199999931 \cdot 10^{-07}$	$8.43299999931 \cdot 10^{-07}$
0.4	0	$7.10330035426 \cdot 10^{-17}$	$7.10330035426 \cdot 10^{-17}$
0.41	0	$-1.0015087985 \cdot 10^{-16}$	$1.0015087985 \cdot 10^{-16}$
0.42	0	$-2.71334763242 \cdot 10^{-16}$	$2.71334763242 \cdot 10^{-16}$
0.43	0	$-4.42518646634 \cdot 10^{-16}$	$4.42518646634 \cdot 10^{-16}$
0.44	0	$-6.13702530026 \cdot 10^{-16}$	$6.13702530026 \cdot 10^{-16}$
0.45	0	$-7.84886413419 \cdot 10^{-16}$	$7.84886413419 \cdot 10^{-16}$
0.46	0	$-9.56070296811 \cdot 10^{-16}$	$9.56070296811 \cdot 10^{-16}$
0.47	0	-0.0016	0.0016
0.48	0	-0.0032	0.0032
0.49	0	-0.00479999999999	0.00479999999999

x	точное	приближенное	погрешность
0.5	0.0	-0.00639999999999	0.00639999999999
0.51	-0.0049	-0.00799999999999	0.00309999999999
0.52	-0.0096	-0.00959999999998	$1.59039448278 \cdot 10^{-14}$
0.53	-0.0141	-0.0136	0.000500000000019
0.54	-0.0184	-0.0176	0.000800000000022
0.55	-0.0225	-0.0216	0.000900000000025
0.56	-0.0264	-0.0256	0.000800000000028
0.57	-0.0301	-0.0296	0.000500000000031
0.58	-0.0336	-0.0336	$3.40977246438 \cdot 10^{-14}$
0.59	-0.0369	-0.0364	0.000500000000036
0.6	-0.04	-0.0392	0.000800000000038
0.61	-0.0429	-0.042	0.00090000000004
0.62	-0.0456	-0.0448	0.000800000000042
0.63	-0.0481	-0.0476	0.000500000000044
0.64	-0.0504	-0.0504	$4.64836502623 \cdot 10^{-14}$
0.65	-0.0525	-0.052	0.000500000000048
0.66	-0.0544	-0.0536	0.000800000000049
0.67	-0.0561	-0.0552	0.00090000000005
0.68	-0.0576	-0.0567999999999	0.000800000000051
0.69	-0.0589	-0.0583999999999	0.000500000000052
0.7	-0.06	-0.0599999999999	$5.31311106222 \cdot 10^{-14}$
0.71	-0.0609	-0.0603999999999	0.000500000000053
0.72	-0.0616	-0.0607999999999	0.000800000000053
0.73	-0.0621	-0.0611999999999	0.000900000000054
0.74	-0.0624	-0.0615999999999	0.000800000000054
0.75	-0.0625	-0.0619999999999	0.000500000000054
0.76	-0.0624	-0.0623999999999	$5.40262279358 \cdot 10^{-14}$
0.77	-0.0621	-0.0615999999999	0.000500000000053

x	точное	приближенное	погрешность
0.78	-0.0616	-0.0607999999999	0.000800000000052
0.79	-0.0609	-0.0599999999999	0.000900000000052
0.8	-0.06	-0.0591999999999	0.000800000000051
0.81	-0.0589	-0.0584	0.00050000000005
0.82	-0.0576	-0.0576	$4.91620633092 \cdot 10^{-14}$
0.83	-0.0561	-0.0556	0.000500000000047
0.84	-0.0544	-0.0536	0.000800000000046
0.85	-0.0525	-0.0516	0.000900000000044
0.86	-0.0504	-0.0496	0.000800000000042
0.87	-0.0481	-0.0476	0.00050000000004
0.88	-0.0456	-0.0456	$3.85386167423 \cdot 10^{-14}$
0.89	-0.0429	-0.0424	0.000500000000036
0.9	-0.04	-0.0392	0.000800000000033
0.91	-0.0369	-0.036	0.00090000000003
0.92	-0.0336	-0.0328	0.000800000000028
0.93	-0.0301	-0.0296	0.000500000000025
0.94	-0.0264	-0.0264	$2.2166296576 \cdot 10^{-14}$
0.95	-0.0225	-0.022	0.000500000000018
0.96	-0.0184	-0.0176	0.000800000000015
0.97	-0.0141	-0.0132	0.000900000000011
0.98	-0.0096	-0.00879999999999	0.000800000000007
0.99	-0.0049	-0.0044	0.000500000000004
1.0	-0.0	0.0	0.0

Свидетельство о регистрации программ для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2017619660

«rod.string.Final.1.2.12»

Правообладатель: ***Головко Надежда Игорьевна (RU)***

Автор: ***Головко Надежда Игорьевна (RU)***

Заявка № **2017616581**
Дата поступления **06 июля 2017 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ ***01 сентября 2017 г.***

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев