Крымский Федеральный Университет им. В.И. Вернадского

На правах рукописи

Коваль Карина Александровна

Операторный подход к краевым, спектральным и начально-краевым задачам сопряжения

Специальность 01.01.02 —

Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., проф. Копачевский Н. Д.

Симферополь

2018

Оглавление

Введение

Задачи сопряжения с 60-х годов XX века рассматривались во многих работах (см., например, [4], [36]). Такими задачами занимались Б.З. Каценеленбаум, Н.Н. Войтович, А.Н. Сивов ([12], [42]). Эти задачи не всегда являлись самосопряжёнными, но иногда они были "бесконечно близкими" к самосопряжённым задачам.

Исходным для исследования краевых и спектральных задач в липшицевых областях, а также соответствующих задач сопряжения стали работы М.С. Аграновича (см. [3], [4], [42]) и его лекции в ежегодной Крымской Осенней Математической Школе (Ласпи-Батилиман). С другой стороны, многочисленные приложения, в частности, в задачах гидродинамики (колебания жидкости в частично заполненном сосуде, колебания жидкого топлива в баке космической ракеты), которыми много лет занимался научный руководитель автора Копачевский Н.Д. (см. [6], [7], [44], [25], [47], [48]), требовали детального рассмотрения краевых задач в негладких, в частности, в липшицевых областях.

Общие подходы, которые применялись при исследовании этих проблем, побуждали рассматривать их на базе абстрактной формулы Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа) и теории слабых (вариационных) решений краевых задач. Отсюда возник интерес к развитию теории абстрактной формулы Грина.

Один из первых вариантов формулы Грина доказал Ж.-П. Обэн (см. [33], глава 6, а также [43]). Другой вариант этой формулы предложен С.Г. Крейном (см. [26], с. 263). Далее, в монографии Р. Шоуволтера [51] существенно использовалась абстрактная формула Грина в форме Ж.-П. Обэна без ссылки на [33] или [43]. Дальнейшее исследование в этом направлении, а также применение этой теории в приложениях отражено, в частности, в работах [9]- [11], [18]- [21], [37]- [39].

Работа начинается с введения понятия абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств $\{E,\ (\cdot,\cdot)_E\}$, $\{F,\ (\cdot,\cdot)_F\}$ и $\{G,\ (\cdot,\cdot)_G\}$ с введёнными на них скалярными произведениями, а также для оператора следа γ.

Для них должны быть выполнены следующие условия.

1.° Пространство F плотно вложено в E (обозначение $F \hookrightarrow E$), т.е. F плотно в E и

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F,\ a > 0,\ \forall u \in F.$$

Иными словами, пространства F и E с указанными свойствами образуют гильбертову пару $(F; E)$.

2.° На F задан оператор γ, называемый (абстрактным) *оператором следа* и ограниченно действующий из F в G, причем γ отображает F на плотное множество $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+ \subset G$:

$$\gamma : F \to G_+ \hookrightarrow G,\ \|\gamma u\|_G \leqslant b\|u\|_F,\ b > 0,\ \forall u \in F.$$

3.° Ядро оператора γ, т.е. $\ker\gamma =: N$, плотно вложено в E:

$$N \hookrightarrow E,\ \|u\|_E \leqslant c\|u\|_F,\ c > 0,\ \forall u \in N.$$

Тогда имеет место абстрактная формула Грина

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F, \tag{1}$$

где $Lu \in F^*$ — абстрактное дифференциальное выражение, $\partial u \in (G_+)^*$ — абстрактная производная по внешней нормали, определяемая однозначно по $u \in F$ и $Lu \in F^*$.

Далее выводится обобщённая формула Грина для смешанных краевых задач и из её вывода становится ясно, что её вид следует выбирать исходя из вида области и характера краевых условий на границе (данные утверждения более подробно описаны в пп. 1.1.1-1.1.4, а также в работе [18]).

Для исследования в данной работе полезными будут следующие обобщённые формулы Грина. Рассмотрим область $\Omega \in \mathbb{R}^m$ и будем считать, что её липшицева граница Γ односвязна. Разобьем её на односвязные открытые части (липшицевы куски)

$\Gamma_k,\ k=\overline{1,l}$, с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$. Получаем, что для тройки пространств $L_2(\Omega),\ H^1(\Omega),\ L_2(\Gamma),\ \Gamma=\partial\Omega$, и оператора следа $\gamma:\widehat{H}^1(\Omega)\subset H^1(\Omega)\to L_2(\Gamma),\ \gamma\eta:=\eta|_\Gamma,\ \eta\in\widehat{H}^1(\Omega)$, в области $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ с липшицевой границей Γ, разбитой на липшицевы куски $\Gamma_k,\ k=\overline{1,l}$, справедлива следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач:

$$\langle\eta,u-\triangle u\rangle_{L_2(\Omega)}=(\eta,u)_{H^1(\Omega)}-\sum_{k=1}^{l}\langle\gamma_k\eta,\partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)},\ \ \forall\ \eta,\ u\in\widehat{H}^1(\Omega),\tag{2}$$

$$u-\triangle u\in(H^1(\Omega))^*,\ \gamma_k\eta:=\eta\,|_{\Gamma_k}\in\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),$$

$$\partial_k u=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k}\in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k=\overline{1,l}.\tag{3}$$

В этой формуле следы функций $\gamma_k\eta\in\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, то есть они продолжи́мы нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$. Подробнее об этом изложено в п. 1.1.3

В другой формуле Грина, которая используется в работе, производные $\partial_k u_n$ по внешней нормали для $u=u_0+u_h$ продолжи́мы нулем:

$$\partial_k u_h\in\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k=\overline{1,l},$$

$$u_0\in H^1_0(\Omega):=\{u\in H^1(\Omega):\gamma u=0(\text{на }\partial\Omega)\},$$

$$u_h\in H^1_h(\Omega):=\{u\in H^1(\Omega):u-\triangle u=0\}.$$

Для тройки пространств $L_2(\Omega),\ \check{H}^1(\Omega)\subset H^1(\Omega),\ L_2(\Gamma),\ \Gamma=\partial\Omega$, и оператора следа $\gamma:\check{H}^1(\Omega)\to H^{1/2}(\Gamma),\ \gamma\eta:=\eta|_\Gamma$, в области $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ с липшицевой границей Γ, разбитой липшицевы куски $\Gamma_k,\ k=\overline{1,l}$, справедлива следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач:

$$(\eta,u)_{H^1(\Omega)}=\langle\eta,u-\triangle u\rangle_{L_2(\Omega)}+\sum_{k=1}^{l}\langle\gamma_k\eta,\partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)},\ \ \forall\ \eta,\ u\in\check{H}^1(\Omega),\tag{4}$$

$$u-\triangle u\in(H^1(\Omega))^*,\ \gamma_k\eta:=\eta\,|_{\Gamma_k}\in H^{1/2}(\Gamma_k),\tag{5}$$

$$u=u_0+u_h,\ \gamma u_0=0,\ \partial_k u_h=(\partial u_h/\partial n)_{\Gamma_k}\in\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k=\overline{1,l},$$

(см. п. 1.1.4). Здесь $\check{H}(\Omega):=H^1_0(\Omega)\oplus\check{H}^1_h(\Omega)$,

$$\check{H}^1_h(\Omega)=(\dot{+})^l_{k=1}\check{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega),\ \ \check{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega):=H^1_h(\Omega)\cap H^1_{\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega),$$

$$H^1_{\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = 0(\text{на}\Gamma \setminus \Gamma_k)\}.$$

Главная цель данной работы — вывести общую схему решения смешанных краевых задач сопряжения и показать, что она также работает для спектральных и начально-краевых задач и для разных конфигураций областей. Схема заключается в том, что решение неоднородной задачи сопряжения мы разыскиваем в виде суммы решений вспомогательных задач, содержащих неоднородность лишь в одном месте — либо в уравнении, либо в одном из краевых условий.

Для начала эта схема проверяется и подробно описывается на примере абстрактной задачи сопряжения (см. пп. 1.2.1–1.2.2), а затем для конкретной задачи математической физики: конфигурации областей, которая названа "дважды разрезанный банан"(п. 1.2.3). В абстрактной задаче необходимо найти такие элементы $u_j \in F_j,\ j = \overline{1,3}$, что для них выполнены уравнения

$$L_j u_j := f_j,\ j = \overline{1,3}, \tag{6}$$

внешние граничные условия Дирихле

$$\gamma_{jj} u_j = \varphi_j,\ j = \overline{1,3}, \tag{7}$$

и условия сопряжения на стыках:

$$\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = \varphi_{21},\ \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{21}, \tag{8}$$

$$\gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = \varphi_{32},\ \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3 = \psi_{32}, \tag{9}$$

где f_j — заданные элементы из $E_j,\ j = \overline{1,3},\ \varphi_j$ — заданные элементы на внешних границах $G_{jj},\ j = \overline{1,3}$, функции φ_{21} и φ_{32} задают разрывы следов, а ψ_{21} и ψ_{32} — разрывы производных по внешним нормалям на границах стыка областей.

Для решения этой задачи понадобятся следующие формулы Грина для смешанных краевых задач:

$$(\eta_1, u_1)_{F_1} = \langle \eta_1, L_1 u_1 \rangle_{E_1} + \langle \gamma_{11}\eta_1, \partial_{11}u_1 \rangle_{G_{11}} + \langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_1 \rangle_{G_{21}},\quad \forall \eta_1, u_1 \in F_1, \tag{10}$$

$$(\eta_2, u_2)_{F_2} = \langle \eta_2, L_2 u_2 \rangle_{E_2} + \langle \gamma_{22}\eta_2, \partial_{22}u_2 \rangle_{G_{22}} +$$

$$+\langle \gamma_{12}\eta_2, \partial_{12}u_2\rangle_{G_{12}} + \langle \gamma_{32}\eta_2, \partial_{32}u_2\rangle_{G_{32}}, \quad \forall \eta_2, u_2 \in F_2, \tag{11}$$

$$(\eta_3, u_3)_{F_3} = \langle \eta_3, L_3u_3\rangle_{E_3} + \langle \gamma_{33}\eta_3, \partial_{33}u_3\rangle_{G_{33}} + \langle \gamma_{23}\eta_3, \partial_{23}u_3\rangle_{G_{23}}, \quad \forall \eta_3, u_3 \in F_3. \tag{12}$$

Теперь необходимо получить необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (7)-(10), а также представить решение через операторы вспомогательных (абстрактных) краевых задач. При этом мы будем использовать принцип суперпозиции, позволяющий представить решение задачи в виде суммы решений вспомогательных краевых задач, содержащих неоднородности (заданные элементы) лишь в одном месте, т.е. либо в уравнении, либо в одном из краевых условий.

Эта общая схема состоит из четырех этапов. Слабое (вариационное) решение задачи (7)-(10), т.е.

$$u = (u_1,\ u_2,\ u_3) \in \bigoplus_{k=1}^{3} F_k =: F, \tag{13}$$

будем разыскивать в виде суммы

$$(u_1,\ u_2,\ u_3) = \sum_{j=1}^{4} (u_{j1},\ u_{j2},\ u_{j3}), \tag{14}$$

где $u_j = (u_{j1},\ u_{j2},\ u_{j3}),\ j = \overline{1,4}$, — слабые решения формулируемых ниже вспомогательных задач.

Для начала рассматриваем первую вспомогательную задачу Зарембы в виде

$$L_1u_{11} = 0,\ \gamma_{11}u_{11} = \varphi_1;\ \partial_{21}u_{11} = 0, \tag{15}$$

$$L_2u_{12} = 0,\ \gamma_{22}u_{12} = \varphi_2;\ \partial_{12}u_{12} = 0,\ \partial_{32}u_{12} = 0, \tag{16}$$

$$L_3u_{13} = 0,\ \gamma_{33}u_{13} = \varphi_3;\ \partial_{23}u_{23} = 0. \tag{17}$$

Здесь уравнения и условия Неймана на стыке однородные, а условия Дирихле на внешних границах неоднородные. При этом задача (15) распадается на три независимые задачи Зарембы для функций $u_{1k},\ k = \overline{1,3}$.

С помощью соответствующей формулы Грина находим слабое решение этой проблемы и получаем следующий результат.

Теорема 0.1. *Каждая из задач Зарембы (15)–(17) имеет единственное слабое решение* $u_{1k} \in M_k \subset F_k,\ k = \overline{1,3}$, *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\varphi_k \in (G_+)_{kk} \subset G_{kk},\ k = \overline{1,3}, \tag{18}$$

$$M_k = F_k \ominus N_k,\ N_k := \ker \gamma_k \subset F_k.$$

$\square$

Теперь рассмотрим вторую вспомогательную задачу Стеклова.

$$\begin{gathered} L_k u_{2k} = 0,\ \gamma_{kk} u_{2k} = 0,\ k = \overline{1,3}, \\ \gamma_{21} u_{21} - \gamma_{12} u_{22} = \widetilde{\varphi}_{21} := \varphi_{21} - \gamma_{21} u_{11} + \gamma_{12} u_{12}, \\ \partial_{21} u_{21} + \partial_{12} u_{22} = 0, \\ \gamma_{32} u_{22} - \gamma_{23} u_{23} = \widetilde{\varphi}_{32} := \varphi_{32} - \gamma_{32} u_{12} + \gamma_{23} u_{13}, \\ \partial_{32} u_{22} + \partial_{23} u_{23} = 0. \end{gathered} \tag{19}$$

Здесь φ_{21} и φ_{32} — заданные элементы, а $u_{11},\ u_{12}$ и u_{13} — компоненты решения $u_{(1)}$ первой вспомогательной задачи (15)–(17).

Получаем следующий результат.

Теорема 0.2. *Задача Стеклова (19) имеет единственное слабое решение*

$$u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}; u_{23})^\tau \in \bigoplus_{k=1}^{3} M_{0,G_{kk}} \subset \bigoplus_{k=1}^{3} F_k,\ k = \overline{1,3},$$

$$M_{0,G_{kk}} = F_{0,G_{kk}} \cap M_k,\ F_{0,G_{kk}} := \{\eta_k \in F_k : \gamma_{kk}\eta_k = 0\},$$

тогда и только тогда, когда выполнены условия предыдущей теоремы, а также условия

$$\varphi_{21} \in (G_+)_{21},\ \ \varphi_{32} \in (G_+)_{32}. \tag{20}$$

При этом имеет место следующее представление для её решения:

$$u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}; u_{23})^\tau = (V_{21}\chi_{21}; V_{32}\chi_{32} - V_{12}\chi_{21}; -V_{32}\chi_{32})^\tau, \tag{21}$$

$$\chi = (\chi_{21}; \chi_{32})^\tau = C^{-1}(\varphi_{21} - \gamma_{21}\widetilde{\gamma}_{11}^{-1}\varphi_1 + \gamma_{12}\widetilde{\gamma}_{22}^{-1}\varphi_2;\ \varphi_{32} - \gamma_{32}\widetilde{\gamma}_{22}^{-1}\varphi_2 + \gamma_{23}\widetilde{\gamma}_{33}^{-1}\varphi_3)^\tau.$$

Здесь V_{jk} *— операторы вспомогательных абстрактных задач,*

$$u_{21} =: V_{21}\chi_{21} \in M_{0,G_{11}} \subset M_1 \subset F_1,\ \ V_{21} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21},\ M_{0,G_{11}});$$

$$u_{22} = V_{12}(-\chi_{21}) + V_{32}(\chi_{32}), \ \ V_{12} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21}, \ M_{0,G_{22}}), \ V_{32} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32}, \ M_{0,G_{22}}),$$

$$u_{23} = V_{23}(-\chi_{32}), \ V_{23} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32}, \ M_{0,G_{33}});$$

операторы $\widetilde{\gamma}_{kk}^{-1}$*:*

$$u_{(1)} = (u_{11}; u_{12}; u_{13}), \ u_{1k} = \widetilde{\gamma}_{kk}^{-1}\varphi_k, \ k = \overline{1,3};$$

операторная матрица C *(матрица Стеклова) задана формулами*

$$C\chi = \widetilde{\varphi}, \quad C := (C_{jk})^2_{j,k=1},$$

$$\begin{aligned} C_{11} &:= \gamma_{21}V_{21} + \gamma_{12}V_{12} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21}, (G_+)_{21}), \\ C_{12} &:= -\gamma_{12}V_{32} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32}, (G_+)_{21}), \\ C_{21} &:= -\gamma_{32}V_{12} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21}, (G_+)_{32}), \\ C_{22} &:= \gamma_{32}V_{32} + \gamma_{23}V_{23} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32}, (G_+)_{32}); \end{aligned}$$

а γ_{jk} *— оператор следа из* F_k *на* $(G_+)_{jk}$*.* □

Далее сформулируем первую вспомогательную задачу Крейна:

$$\begin{aligned} L_k u_{3k} &= f_k, & \gamma_{kk}u_{3k} &= 0, \ k = \overline{1,3}, \\ \gamma_{21}u_{31} - \gamma_{12}u_{32} &= 0, & \partial_{21}u_{31} + \partial_{12}u_{32} &= 0, \\ \gamma_{32}u_{32} - \gamma_{23}u_{33} &= 0, & \partial_{32}u_{32} + \partial_{23}u_{33} &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь все граничные условия однородные, а уравнения неоднородные.

Здесь используется подпространство, отвечающее "главным" краевым условиям:

$$W_{0,\gamma} := \{u = (u_1; u_2; u_3)^\tau \in \bigoplus_{k=1}^{3} F_k : \gamma_{kk}u_k = 0, \ k = \overline{1,3};$$

$$\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = 0, \ \gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = 0\} \subset \bigoplus_{k=1}^{3} F_{0,G_{kk}} \subset \bigoplus_{k=1}^{3} F_k. \tag{23}$$

В результате рассмотрения задачи (22) получаем следующий вывод.

Теорема 0.3. *Первая вспомогательная задача С.Крейна (22) имеет единственное слабое решение* $u_{(3)} = (u_{31}; u_{32}; u_{33})^\tau \in W_{0,\gamma}$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f := (f_1; f_2; f_3)^\tau \in (W_{0,\gamma})^*. \tag{24}$$

В этом случае решение выражается формулой

$$u_{(3)} = A^{-1} f, \tag{25}$$

где A *— оператор гильбертовой пары* $(W_{0,\gamma}; E)$, $E := \bigoplus_{k=1}^{3} E_k$.

В частности, если

$$f := (f_1; f_2; f_3)^{\tau} \in E := \bigoplus_{k=1}^{3} E_k,$$

то задача (22) имеет единственное обобщенное решение, выражаемое той же формулой (25). □

Последняя вспомогательная задача — вторая вспомогательная задача Крейна:

$$\begin{aligned}
L_1 u_{41} &= 0, & \gamma_{11} u_{41} &= 0,\\
L_2 u_{42} &= 0, & \gamma_{22} u_{42} &= 0,\\
L_3 u_{43} &= 0, & \gamma_{33} u_{43} &= 0,\\
\gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} &= 0, & \partial_{21} u_{41} + \partial_{12} u_{42} &= \psi_{21},\\
\gamma_{32} u_{42} - \gamma_{23} u_{43} &= 0, & \partial_{32} u_{42} + \partial_{23} u_{43} &= \psi_{32}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Здесь неоднородными являются лишь граничные условия типа Неймана.

В ходе её рассмотрения получаем следующий результат.

Теорема 0.4. *Вторая вспомогательная задача С.Крейна (26) имеет единственное слабое решение* $u_{(4)} \in W_{0,\gamma}$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\psi_{21} \in (G_+)^*_{21}, \ \psi_{32} \in (G_+)^*_{32}. \tag{27}$$

Это решение имеет вид

$$u_{(4)} = B_{21}\psi_{21} + B_{32}\psi_{32},$$

$$B_{21} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21}; M_{0,\gamma}), \ B_{32} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32}; M_{0,\gamma}),$$

$$M_{0,\gamma} = W_{0,\gamma} \cap M_0, \ M_0 := \bigoplus_{k=1}^{3} M_{0,G_{kk}},$$

$$M_{0,G_{kk}} = F_{0,G_{kk}} \cap M_k, \quad F_{0,G_{kk}} = \{\eta_k \in F_k : \gamma_{kk}\eta_k = 0\}.$$

□

Итогом рассмотрения исходной смешанной краевой задачи сопряжения (7)-(10) является следующее утверждение.

Теорема 0.5. *Пусть выполнены условия, обеспечивающие существование абстрактных формул Грина. Тогда задача сопряжения (7)-(10) имеет единственное слабое решение в том и только в том случае, когда выполнены условия теорем 0.1-0.4. При этом*

$$u = (u_1; u_2; u_3)^\tau = \sum_{j=1}^{4} (u_{j1}; u_{j2}; u_{j3})^\tau =: \sum_{j=1}^{4} u_{(j)},$$

где $u_{(j)}$ при $j = \overline{1,4}$, выражаются через исходные данные через операторы введённых выше абстрактных краевых задач. □

Далее эта описанная выше схема применяется к различным конфигурациям пристыкованных областей.

Конфигурация "дважды разрезанный банан"

Теперь задача, сформулированная в абстрактной форме, рассматривается для конфигурации заданных областей из $\mathbb{R}^m$.

Сначала изучается простой пример задачи сопряжения для проблемы математической физики, порожденной оператором Лапласа, точнее дифференциальным выражением $u - \Delta u$. Будем считать, что конфигурация областей, в которых рассматривается эта задача, представляет собой дважды разрезанный банан (см. рис. 1).

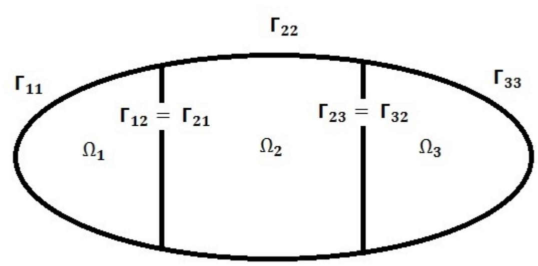

Рис 1

Обозначим через Γ_{jj}, $j = \overline{1,3}$, внешние свободные границы, а через Γ_{kj} $(k \neq j)$ — ту часть границы $\Gamma_j = \partial\Omega_j$, которая стыкуется с частью Γ_{jk} границы $\Gamma_k = \partial\Omega_k$. При этом очевидно, что $\Gamma_{jk} = \Gamma_{kj}$. Полагаем, что области $\Omega_k \subset \mathbb{R}^m$ имеют липшицевы границы, разбитые на липшицевы куски Γ_{kj}. Будем обозначать через $\gamma_{kj} u_j$ след функции u_j, заданной в области Ω_j, на границе Γ_{kj}, а через $\partial_{kj}u_j$ – соответствующую производную по внешней нормали.

Сформулируем теперь постановку задачи сопряжения для данной совокупности областей $\Omega_j,\ j=\overline{1,3}$.

$$\begin{aligned}
&u_1-\triangle u_1=f_1\ \ (\text{в }\Omega_1), &&\gamma_{11}u_1=\varphi_1\ \ (\text{на }\Gamma_{11}),\\
&u_2-\triangle u_2=f_2\ \ (\text{в }\Omega_2), &&\gamma_{22}u_2=\varphi_2\ \ (\text{на }\Gamma_{22}),\\
&u_3-\triangle u_3=f_3\ \ (\text{в }\Omega_3), &&\gamma_{33}u_3=\varphi_3\ \ (\text{на }\Gamma_{33});\\
&\gamma_{21}u_1-\gamma_{12}u_2=\varphi_{21}, &&\partial_{21}u_1+\partial_{12}u_2=\psi_{21}\ (\text{на }\Gamma_{12}=\Gamma_{21}),\\
&\gamma_{32}u_2-\gamma_{23}u_3=\varphi_{32}, &&\partial_{32}u_2+\partial_{23}u_3=\psi_{32}\ (\text{на }\Gamma_{23}=\Gamma_{32}).
\end{aligned}\tag{28}$$

Её решение ищем в виде набора $u=(u_1;u_2;u_3)^\tau$,

$$u=(u_1;u_2;u_3)^\tau=\sum_{j=1}^{4}(u_{j1};u_{j2};u_{j3})^\tau=:\sum_{j=1}^{4}u_{(j)},$$

где $u_{(j)},\ j=\overline{1,4}$, — решения четырех вспомогательных задач (Зарембы, Стеклова, первая и вторая вспомогательные задачи Крейна).

В работе установлено, что если выполнены необходимые и достаточные условия существования слабого решения каждой из вспомогательных задач, то и исходная задача (28) имеет единственное слабое решение.

Другая конфигурация областей

Теперь рассмотрим более простой случай. Будем считать, что область $\Omega_1\subset\mathbb{R}^m$ $(m\geqslant 3)$ с внешней липшицевой границей Γ_{11} содержит внутри себя две области Ω_2 и Ω_3 с липшицевыми границами $\Gamma_{12}=\Gamma_{21}$ и $\Gamma_{13}=\Gamma_{31}$, находящимися друг от друга и от Γ_{11} на положительном расстоянии (см. рис. 2).

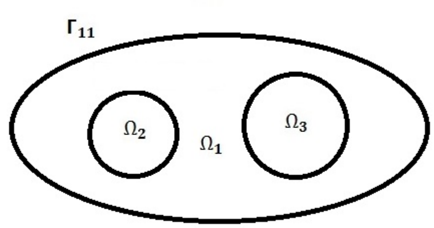

Рис 2

Для искомых функций $u_1(x)$, $u_2(x)$ и $u_3(x)$ здесь имеем следующую задачу сопряжения:

$$u_1 - \triangle u_1 = f_1 \text{ (в } \Omega_1), \;\; \gamma_{11} u_1 = \varphi_1 \text{ (на } \Gamma_{11}), \tag{29}$$

$$u_2 - \triangle u_2 = f_2 \text{ (в } \Omega_2), \;\; u_3 - \triangle u_3 = f_3 \text{ (в } \Omega_3), \tag{30}$$

$$\begin{aligned} &\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 = \varphi_{21}, \;\; \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 = \psi_{21} \text{ (на } \Gamma_{21}), \\ &\gamma_{31} u_1 - \gamma_{13} u_3 = \varphi_{31}, \;\; \partial_{31} u_1 + \partial_{13} u_3 = \psi_{31} \text{ (на } \Gamma_{31}). \end{aligned} \tag{31}$$

В этом случае по вышеизложенной схеме также находится слабое решение задачи (29)-(31) (с соответствующими упрощениями, см. п. 1.2.4).

Одна область с границей, гомеоморфной сфере с тремя разрезанными ручками

Затем мы доказываем, что можно исследовать теми же методами задачу сопряжения и в случае, когда имеется лишь одна область, в которой разыскивается искомая функция, а условия сопряжения задаются на двух или более примыкающих друг к другу участках границы этой области. Так будет, в частности, если область Ω односвязна, а граница $\partial\Omega$ этой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 3)$ гомеоморфна сфере с тремя разрезанными ручками (см. рис. 3).

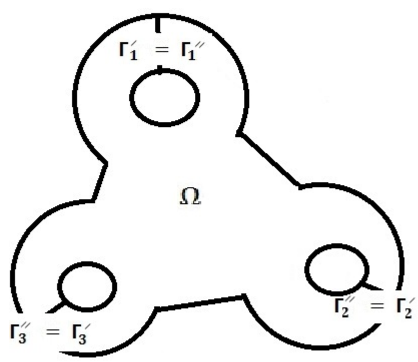

Рис. 3

Обозначим часть $\partial\Omega$ вне стыков через Γ_0, а на стыках Γ_k выделим экземпляры Γ_k' и Γ_k'', по которым можно достичь этих стыков по непрерывности изнутри Ω. При этом, очевидно, на $\Gamma_k = \Gamma_k' = \Gamma_k''$ возможны разрывы с двух сторон как у предельных функций $\gamma_k' u$ и $\gamma_k'' u$, так и у производных по внешней нормали $\partial_k' u$ и $\partial_k'' u$. Будем считать также, как обычно, что куски Γ_k $(k = \overline{1,3})$ — липшицевы.

В итоге возникает следующая задача сопряжения. Необходимо найти функцию $u(x),\ x \in \Omega$, из уравнения и граничных условий:

$$\begin{gathered} u - \Delta u = f \ (\text{в } \Omega), \qquad\qquad \gamma_0 u = \varphi_0 \ (\text{на } \Gamma_0), \\ \gamma_k' u - \gamma_k'' u = \varphi_k, \quad \partial_k' u + \partial_k'' u = \psi_k \ (\text{на } \Gamma_k),\ k = \overline{1,3}. \end{gathered} \tag{32}$$

Здесь заданными функциями являются f, а также $\varphi_0,\ \varphi_k$ $(k = \overline{1,3})$ и ψ_k $(k = \overline{1,3})$.

Снова устанавливаем, что решение данной задачи представлено в виде суммы решений четырёх вспомогательных задач (см. п. 1.2.5).

Трижды разрезанный арбуз

Применим теперь рассмотренную выше схему к области, разбитой на три части (см. рис. 4). Пусть $\Gamma_{jj},\ j = \overline{1,3},$ — внешние свободные границы, а Γ_{kj} ($k \neq j$) – та часть границы $\Gamma_j = \partial\Omega_j$, которая стыкуется с частью Γ_{jk} границы $\Gamma_k = \partial\Omega_k$. При этом очевидно, что $\Gamma_{jk} = \Gamma_{kj}$. Полагаем, что области $\Omega_k \subset \mathbb{R}^m$ имеют липшицевы границы, разбитые на липшицевы куски Γ_{kj}. Снова будем обозначать через $\gamma_{kj} u_j$ след функции u_j, заданной в области Ω_j, на границе Γ_{kj}, а через $\partial_{kj} u_j$ – соответствующую производную по внешней нормали.

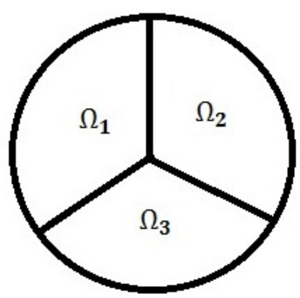

Рис.4

Для данной совокупности областей $\Omega_j,\ j = \overline{1,3}$, требуется найти такие функции $u_j(x) \in H^1(\Omega_j),\ j = \overline{1,3}$, что для них выполнены уравнения и внешние условия

Дирихле:

$$\begin{aligned} &u_1 - \triangle u_1 = f_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11}u_1 = \varphi_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &u_2 - \triangle u_2 = f_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \gamma_{22}u_2 = \varphi_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22}),\\ &u_3 - \triangle u_3 = f_3 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \gamma_{33}u_3 = \varphi_3 \quad (\text{на } \Gamma_{33}); \end{aligned} \tag{33}$$

а на границах стыка заданы скачки функций и нормальных производных:

$$\begin{aligned} &\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = \varphi_{12}, \quad \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{12} \; (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\\ &\gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = \varphi_{23}, \quad \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3 = \psi_{23} \; (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}),\\ &\gamma_{13}u_3 - \gamma_{31}u_1 = \varphi_{31}, \quad \partial_{13}u_3 + \partial_{31}u_1 = \psi_{31} \; (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{aligned} \tag{34}$$

В данной проблеме f_j – заданные функции в Ω_j, $j = \overline{1,3}, \varphi_j$ – заданные функции на внешних границах Γ_{jj}, $j = \overline{1,3}$, функции φ_{21}, φ_{32} и φ_{13} задают разрывы следов, а ψ_{21}, ψ_{32} и ψ_{13} – разрывы производных по внешним нормалям на границах стыка областей.

Слабое решение задачи (33)-(34) разыскивается в виде набора функций

$$u = (u_1; u_2; u_3) \in H^1(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{3} H^1(\Omega_k).$$

Снова будем искать решение этой задачи с помощью уже рассмотренной выше схемы, т.е. в виде суммы решений четырех вспомогательных задач, содержащих неоднородности лишь в одном месте: либо в уравнении, либо в краевом условии. И снова эта схема работает и мы находим решение исходной задачи. Итогом рассмотрения задачи (33)-(34) является утверждение о её разрешимости при выполнении необходимых и достаточных условий (теорема 1.22).

Далее в работе на основе вышеизложенного подхода рассматриваются спектральные задачи сопряжения (глава 2). Сначала рассматривается спектральная проблема для одной области.

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega =: \Gamma$, разбитой на четыре липшицевых куска Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1,4}$, рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$u - \Delta u = \lambda u =: f \; (\text{в } \Omega), \quad \gamma_1 u := u|_{\Gamma_1} = 0 \; (\text{на } \Gamma_1), \tag{35}$$

$$\partial_2 u = \mu\gamma_2 u =: \psi_2 \; (\text{на } \Gamma_2), \quad \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u =: \psi_3 \; (\text{на } \Gamma_3), \tag{36}$$

$$\partial_4 u = \lambda^{-1}\gamma_4 u =: \psi_4 \text{ (на } \Gamma_4), \quad \partial_k u := (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k}. \tag{37}$$

Здесь на Γ_1 задано однородное условие Дирихле, на Γ_2 —условие М.С.Аграновича (см. [42]), или условие, возникающее в задачах дифракции, на Γ_3 — условие типа Стефана (или Стеклова), на Γ_4 — условие типа С.Крейна, появившееся в задачах о нормальных движениях тяжёлой вязкой жидкости в частично заполненном сосуде. В этой проблеме имеется два параметра λ и μ, один из которых можно считать спектральным, а второй — фиксированным. В частности, в задачах дифракции спектральным является параметр $\mu \in \mathbb{C}$ (см. [42]). Другой вариант, когда спектральным является $\lambda \in \mathbb{C}$, рассматривается в работах В.И.Горбачук (см. [15]).

В силу однородного условия Дирихле на Γ_1, слабое решение задачи (36)-(37) естественно искать в пространстве

$$H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1)\}.$$

Решение $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ будем искать в виде суммы решений четырех задач, т.е.

$$u = \sum_{k=1}^{4} u_k, \ u_k \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega),$$

где u_k — слабые решения таких задач соответственно:

$$u_1 - \triangle u_1 = f := \lambda u \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_1 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \ \partial_2 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_2),$$
$$\partial_3 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_4);$$

$$u_2 - \triangle u_2 = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_1 u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \partial_2 u_2 = \psi_2 := \mu\gamma_2 u \text{ (на } \Gamma_2),$$
$$\partial_3 u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_4);$$

$$u_3 - \triangle u_3 = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_1 u_3 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \partial_2 u_3 = 0 \text{ (на } \Gamma_2),$$
$$\partial_3 u_3 = \psi_3 := \lambda\gamma_3 u \text{ (на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_3 = 0 \text{ (на } \Gamma_4);$$

$$u_4 - \triangle u_4 = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_1 u_4 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \partial_2 u_4 = 0 \text{ (на } \Gamma_2),$$
$$\partial_3 u_4 = 0 \text{ (на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_4 = \psi_4 := \lambda^{-1}\gamma_4 u \text{ (на } \Gamma_4).$$

С помощью соответствующих формул Грина находим слабые решения каждой из этих задач. Мы получаем, что слабое решение u задачи (36)-(37) должно быть решением следующей спектральной проблемы:

$$u = \lambda(A^{-1} + V_3\gamma_3)u + \mu V_2\gamma_2 u + \lambda^{-1}V_4\gamma_4 u, \ u \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega). \tag{38}$$

Это уравнение можно привести к более симметричной форме, воспользовавшись тем, что имеют место свойства

$$A^{1/2}V_k = (\gamma_k A^{-1/2})^* \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k);\ L_2(\Omega)),\ k = \overline{2,4}.$$

Представим элемент $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2}),\ \mathcal{R}(A^{1/2}) = L_2(\Omega)$, в виде

$$u = A^{-1/2}v,\ v \in L_2(\Omega),$$

подставим это выражение в (38) и подействуем на обе части полученного соотношения оператором $A^{1/2}$. Тогда взамен возникает спектральная задача

$$L(\lambda,\mu)v := (I - \mu B_2 - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \tag{39}$$

$$A > 0,\ B_k := (A^{1/2}V_k)(\gamma_k A^{-1/2}) = B_k^* \geqslant 0,\ B_k \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)),\ \ k = \overline{2,4}, \tag{40}$$

для операторного пучка $L(\lambda,\mu)$ с параметрами λ и μ, один из которых можем считать спектральным, другой — фиксированным.

Аналогично формулируются спектральные задачи для двух и трёх примыкающих областей. Установлено, что и в этом случае возникает операторный пучок такого же вида, как и в случае одной области.

Операторный пучок $L(\lambda,\mu)$ из (39) содержит два параметра: λ и μ. Это позволяет исследовать два класса задач: при фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ возникают задачи со спектральным параметром λ в уравнении, а при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ — задачи со спектральным параметром μ в краевом условии на границе сопряжения.

Рассмотрим случай, когда в пучке $L(\lambda,\mu)$ параметр λ фиксирован, а μ — спектральный и принимает отрицательные значения. В этом случае мы получаем следующий результат.

Теорема 0.6. *При $\lambda < 0$ задача (39), (40) имеет дискретный спектр, состоящий из положительных конечнократных собственных значений $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $+\infty$. Собственные элементы $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$, после проектирования на подпространство $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$, т.е. элементы $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^\infty,\ \varphi_{1k} = P_1\varphi_k,\ \ P_1 : L_2(\Omega) \to L_{2,h}(\Omega)$, образуют базис Рисса в H_1, причём*

$$\varphi_{1k} = (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}\psi_{1k},$$

где $\{\psi_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ *— ортономированный базис, отвечающий оператору* $\widehat{B}_2$. *Более того, элементы* φ_{1k} *для* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *образуют* p *– базис в* H_1 *при* $p > p_0 = m - 1$. *Здесь*

$$T(\lambda) := \lambda(A^{-1} + B_3) + \lambda^{-1}B_4,$$

$$T_1(\lambda) = P_1T(\lambda)P_1 + P_1T(\lambda)P_0(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)^{-1}P_1T(\lambda)P_1.$$

□

Будем теперь считать, что в задаче (39), (40) параметр λ положителен, однако принимает неисключительные значения

$$\lambda \notin \sigma(I - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - P_0T(\lambda)P_0), \tag{41}$$

$P_0 : L_2(\Omega) \to L_{2,0}(\Omega) := \ker B_2$ — ортопроектор. В этом случае получаем следующий вывод.

Теорема 0.7. *Пусть* $\lambda > 0$ *и выполнено условие (41), причём имеет место разложение*

$$H_1 = \Pi_{\kappa_1} = \Pi_- \oplus \Pi_+, \ \ \Pi_- = H_-, \ \ \Pi_+ = H_+, \ \ \dim \Pi_- = \kappa_1, \ \ \dim \Pi_+ = \infty.$$

Тогда спектр исходной задачи (39), (40) вещественный, дискретный и состоит из κ_1 *штук отрицательных собственных значений, а остальные положительны и имеют предельную точку* $\mu = +\infty$:

$$\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant ... \leqslant \mu_{\kappa_1} < 0 < \mu_{\kappa_1+1} \leqslant ... \leqslant \mu_k \leqslant ..., \ \ \lim_{k\to\infty} \mu_k = +\infty.$$

При этом собственные элементы (присоединённых нет) образуют ортонормированный по форме $I_1 - T_1(\lambda)$ *базис и базис Рисса в* $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$. *Элементы базиса можно выбрать удовлетворяющими соотношениям*

$$((I_1 - T_1(\lambda))\varphi_{1k}, \ \varphi_{1j})_{H_1} = \begin{cases} -\delta_{kj}, & 1 \leqslant k, \ j \leqslant \kappa_1, \\ \delta_{kj}, & k, \ j \geqslant \kappa_1 + 1, \\ 0, & k \geqslant \kappa_1, \ \ j \geqslant \kappa_1 + 1, \end{cases}$$

$$(\widetilde{B}_2\varphi_{1k}, \ \varphi_{1j})_{H_1} = |\mu_k^{-1}|\delta_{kj}.$$

□

Далее рассмотрен более общий случай, когда

$$\mathrm{Im}\lambda \neq 0, \quad \lambda \notin \sigma(I - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0). \tag{42}$$

Теорема 0.8. *Пусть в задаче (39), (40) выполнены условия (42). Тогда спектр этой задачи дискретен, состоит из конечнократных собственных значений* $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ *с предельной точкой* $\mu = \infty$. *Сколь бы ни было мало* $\varepsilon > 0$, *все собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в угле*

$$\Lambda_\varepsilon(\mu) := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \varepsilon, \ sign\ Im\ \mu = -sign\ Im\ \lambda\}.$$

Система собственных и присоединённых элементов $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\varphi_{1k} = P_1\varphi_k$, *после их проектирования на* $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$, *является полной в* H_1, *более того, она образует базис Абеля – Лидского порядка* $\alpha > m - 1$ *в* H_1. *Наконец, собственные значения* $\mu_k = \mu_k(\lambda)$ *имеют асимптотическое поведение*

$$\mu_k(\lambda) = \lambda_k^{-1}(B_2)[1 + o(1)], \quad k \to \infty,$$

$$\lambda_k(B_2) = (d_{m,2}(\Gamma_2))^{1/(m-1)} k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)], \quad k \to \infty, \ d_{m,2}(\Gamma_2) > 0, \ d_{3,2}(\Gamma_2) = \frac{|\Gamma_2|}{4\pi}.$$

□

Далее в работе рассматривается второй вариант, когда в задаче (39), (40) $\mu \in \mathbb{C}$ фиксирован и неположителен, а λ — спектральный. Этот случай приводится к задаче на собственные значения известного операторного пучка Крейна. Получаем следующий результат.

Теорема 0.9. *Пусть в задаче (39), (40) выполнено условие*

$$4\|A^{-1} + B_3\| \cdot \|B_4\| < 1.$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

1°. *Задача (39), (40) при* $\mu \leqslant 0$ *имеет дискретный вещественный спектр с предельными точками* 0 *и* $+\infty$.

2°. *Предельной точке* $\lambda = 0$ *отвечает ветвь* $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ *изолированных конечнократных собственных значений, расположенных на отрезке*

$$(0, r_-), \quad r_\pm := (1 \pm \sqrt{1 - 4\|A^{-1} + B_3\| \cdot \|B_4\|})/(2\|A^{-1} + B_3\|).$$

Соответствующая система собственных элементов (присоединённых нет) после проектирования на подпространство $H_1 = L_2(\Omega)\ominus H_0,\ H_0 := \ker(I-\mu B_2)^{-1/2}B_2(I-\mu B_2)^{-1/2}$*, образует базис Рисса в* H_1*. Более того, эта система элементов образует в* H_1 p *– базис при* $p > p_0 = (m-1)/2$.

3°. *Предельной точке* $\lambda = +\infty$ *отвечает ветвь изолированных конечнократных собственных значений* $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$*, расположенных на промежутке* $(r_+, +\infty)$*, а отвечающая этой ветви система собственных элементов задачи образует базис Рисса в* $H = L_2(\Omega)$ *и даже* p *– базис при тех же* $p > p_0 = (m-1)/2$.

4°. *Собственные значения* λ_k^0 *имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k^0 = \lambda_k(B_4)[1+o(1)] = (d_{m,3}(\Gamma_4))^{-1/(m-1)}k^{1/(m-1)}[1+o(1)],\ \ k\to\infty,$$

а собственные значения λ_k^∞ *— асимптотическое поведение*

$$\lambda_k^\infty = \lambda_k^{-1}(A^{-1}+B_3)[1+o(1)] = \lambda_k^{-1}(B_3)[1+o(1)] = (d_{m,3}(\Gamma_3))^{-1/(m-1)}k^{1/(m-1)}[1+o(1)],$$

$$k\to\infty.$$

□

И, наконец, рассмотрен случай, когда

$$\mathrm{Re}\mu \leqslant 0,\ \mathrm{Im}\mu \neq 0. \tag{43}$$

Здесь, как и в предыдущем случае, возникает спектральная задача для пучка С. Крейна, однако теперь этот пучок не является самосопряжённым. Итогом рассмотрения является следующее утверждение.

Теорема 0.10. *Пусть в задаче (39), (40) выполнены условия (43), а также условие*

$$4\|A^{-1}+B_3\|\cdot\|B_4\| < 1.$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

1°. *Задача (39), (40) имеет дискретный спектр, состоящий из двух ветвей конечнократных собственных значений с предельными точками* $\lambda = 0$ *и* $\lambda = \infty$ *соответственно.*

$2°$. *Предельной точке* $\lambda = 0$ *отвечает ветвь* $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ *конечнократных собственных значений, расположенных в области*

$$|\lambda| \leqslant r_-, \;\; r_{\pm} = (1 - \sqrt{1 - 4\|A^{-1} + B_3\| \cdot \|B_4\|})/(2\|A^{-1} + B_3\|),$$

причём для $\forall \varepsilon > 0$ *все собственные значения* λ_k^0, *кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе*

$$|arg\lambda| < \varepsilon. \tag{44}$$

При этом система собственных и присоединённых (корневых) элементов $\{\varphi_k^0\}_{k=1}^{\infty}$, *отвечающая собственным значениям* $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^{\infty}$, *после её проектирования на подпространство* $H_1 = H \ominus H_0, \; H = L_2(\Omega), \; H_0 = \ker B_4$, *является полной в* H_1 *и образует в* H_1 *базис Абеля–Лидского порядка* $\alpha > m - 1$.

$3°$. *Предельной точке* $\lambda = \infty$ *отвечает ветвь* $\{\lambda_k^{\infty}\}_{k=1}^{\infty}$ *конечнократных собственных значений, расположенных в области* $|\lambda| \geqslant r_+$, *причём для* $\forall \varepsilon > 0$ *все собственные значения* λ_k^{∞}, *кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе (44).*

При этом система корневых элементов $\{\varphi_k^{\infty}\}_{k=1}^{\infty}$, *отвечающая собственным значениям* $\{\lambda_k^{\infty}\}_{k=1}^{\infty}$, *является полной в* $H = L_2(\Omega)$ *и образует в* H *базис Абеля–Лидского порядка* $\alpha > m - 1$. □

Для спектральных задач сопряжения в случае двух и трёх примыкающих областей в итоге имеем такие же результаты, как и для одной области.

Спектральные задачи вида (35)-(37) порождаются начально-краевыми проблемами, в которых производные по времени входят не только в уравнение, но и в краевые условия. Рассмотрим первую такую начально-краевую задачу.

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, разбитой на 3 липшицевых куска $\Gamma_1, \; \Gamma_2$ и Γ_3 с липшицевыми контурами $\partial\Gamma_1, \; \partial\Gamma_2$ и $\partial\Gamma_3$, сформулируем сначала спектральную проблему

$$L_0 u = \lambda u \text{ (в } \Omega), \; \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \; \partial_2 u = \mu\gamma_2 u \text{ (на } \Gamma_2), \;\; \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u \text{ (на } \Gamma_3),$$

$$L_0 u = u - \triangle u, \; \partial_k u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k}, \; \gamma_k u = u|_{\Gamma_k}, \; k = \overline{1,3}, \tag{45}$$

где λ и μ — параметры, один из которых можно считать спектральным, а второй — фиксированным.

Если рассматривать начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L_0 u = f \ (\text{в } \Omega),\ \gamma_1 u = 0 \ (\text{на } \Gamma_1),\ \partial_2 u = \mu\gamma_2 u + \psi_2 \ (\text{на } \Gamma_2),$$

$$\partial_3 u + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_3 u) = \psi_3 \ (\text{на } \Gamma_3), \ \ u(0,x) = u^0(x),\ x \in \Omega, \tag{46}$$

и разыскивать её решения при $f \equiv 0,\ \psi_2 \equiv 0,\ \psi_3 \equiv 0$ в виде

$$u(t,x) = \exp(-\lambda t)u(x),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

то для амплитудной функции $u(x),\ x \in \Omega$, возникает спектральная проблема (45), где λ — искомый спектральный параметр, μ — фиксированный.

Опираясь на уже приенённую схему, а также на использованные выше операторы вспомогательных краевых задач, можно исследовать задачу (46) и доказать теорему о её сильной разрешимости на произвольном конечном промежутке времени. На этом пути получено уравнение, которому удовлетворяет решение задачи (46) в виде

$$u = A^{-1}(f - \frac{\partial u}{\partial t}) + V_2(\mu\gamma_2 u + \psi_2) + V_3(\psi_3 - \frac{\partial}{\partial t}\gamma_3 u), \tag{47}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega);\ L_2(\Omega))$, а V_2 и V_3 — операторы вспомогательных задач Неймана (при $\Gamma_4 = \varnothing$, см. (38)). Тогда возникает дифференциальное уравнение для функции $u = u(t)$ со значениями в пространстве $H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$:

$$(A^{-1} + V_3\gamma_3)\frac{du}{dt} + (I - \mu V_2\gamma_2)u = A^{-1}f + V_2\psi_2 + V_3\psi_3.$$

Псоле замен

$$u(t) = A^{-1/2}\eta(t),\ \ \eta \in L_2(\Omega),\ (A^{-1} + B_3)\eta =: w,$$

получаем задачу Коши

$$\frac{dw}{dt} + (I - \mu B_2)(A^{-1} + B_3)^{-1}w = f_1(t),\ \ w(0) = (A^{-1} + B_3)A^{1/2}u^0, \tag{48}$$

где операторные коэффициенты определены в (**??**0.38)).

Итогом рассмотрения этой задачи является следующий результат.

Теорема 0.11. *Пусть в исходной задаче (46) выполнены условия*

$$f(t,x) \in C^\beta([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*),\ \psi_2(t,x) \in C^\beta([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_2)),$$

$$\psi_3(t,x) \in C^\beta([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3)),\ 0 < \beta \leqslant 1,\ \ u^0(x) \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega),$$

а также условие

$$\mu \notin \sigma(I - \mu B_2).$$

Тогда задача (48) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. *При этом исходная начально-краевая задача имеет единственное решение на отрезке* $[0,T]$,

$$u(t,x) \in C([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)),$$

причём для этого решения выполнено уравнение в Ω, *где все слагаемые являются элементами из* $C([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$, *граничные условия на* $\Gamma_k,\ k = 2,3$, *где все слагаемые являются элементами из* $C([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$, *а также начальное условие.*

Далее в работе рассматриваются другие виды начально-краевых задач сопряжения: когда параметр μ — спектральный, а λ — фиксированный и когда внешняя граница разбита не на 3, а на 4 части (см. пп. 3.1.2–3.1.4). Также изучены такие же начально-краевые задачи для двух и трёх примыкающих областей. Они приводятся к таким же задачам Коши, как и в более простом случае с одной областью.

Результаты диссертации трижды докладывались автором на международной конференции «Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам», Батилиман, 2015–2017 гг. (см. [55], [57], [61], [64]), на международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-VI"в Ростове-на-Дону, 2016 г. (см. [58]), на XXIV международной конференции "Математика. Экономика. Образование."Абрау Дюрсо, 2016 г. (см. [59]), на научных конференциях "Дни науки КФУ" в КФУ им. В.И. Вернадского, Симферополь, 2014–2017 гг. (см. [66]), на семинаре кафедры математического анализа КФУ им. В.И. Вернадского.

Эти результаты содержатся в трёх работах [60], [65], [67], опубликованных в ведущем научном журнале из списка, рекомендованного ВАК. Также по теме диссертации опубликованы статьи [52], [53], [54], [62], [68].

Данная диссертация написана при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Основные результаты работы сформулированы в виде теорем. Вспомогательные утверждения сформулированы в виде лемм.

Общий объем диссертации составляет 150 страниц. Список литературы содержит 68 наименований.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Николаю Дмитриевичу Копачевскому за постановку интересных задач, помощь в поиске их решения, постоянное внимание и поддержку, полезные обсуждения и ценные советы, замечания и комментарии.

Основные обозначения и определения

Символом $\langle \eta, u\rangle_E$ обозначается значение функционала $u \in F^*$ на элементе $\eta \in F$. Аналогичный смысл имеют другие выражения с косыми скобками.

Символом $\hookrightarrow$ обозначается плотное вложение. Пространство F плотно вложено в E, если F плотно в E и

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F,\ a > 0,\ \forall u \in F.$$

Иными словами, пространства F и E с указанными свойствами образуют гильбертову пару $(F;E)$. Оператор A называется порождающим оператором гильбертовой пары $(F;E)$, если

$$(u,v)_F = (u, Av)_E,\ u \in F,\ v \in \mathcal{D}(A) \subset F.$$

Будем говорить, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ имеет липшицеву границу $\partial\Omega$, если для каждой точки границы существует такая её окрестность и в ней такая ортогональная система координат $Oy_1, ...y_m$, что уравнение части границы $\partial\Omega$, попадающей в эту окрестность, имеет вид $y_m = f(y_1, ...y_{m-1})$, где f — функция, удовлетворяющая условию Липшица по переменным $y_1, ...y_{m-1}$:

$$|f(y_1, ...y_{m-1}) - f(z_1, ...z_{m-1})| \leqslant C\Big(\sum_{k=1}^{m-1} |y_k - z_k|^2\Big)^{1/2}.$$

$\gamma_k\eta$ — абстрактный аналог следа элемента η на часть Γ_k границы Γ. $\partial_k u$ — соответствующий аналог производной по внешней нормали на этой части границы.

Сужение элемента φ на часть границы Γ_k: $\rho_k\varphi := \varphi_k := \varphi|_{\Gamma_k}$; продолжение нулём элемента φ с части границы Γ_k: $\omega_k\varphi := (\varphi_k, 0, 0)$.

Обозначим через $\widetilde{H}^s(\Gamma_k),\ |s| \leqslant 1$, множество (линеал), состоящее из (обобщенных) функций с носителем в $\overline{\Gamma}_k$. Как указано в [1] , с. 76, $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$ – это пополнение множества функций из $C_0^\infty(\Gamma_k)$, для которых имеется продолжение нулём вне Γ_k в классе $H^s(\Gamma)$.

Пространство $H^1(\Omega)$ со стандартной нормой имеет ортогональное разложение, которое называют разложением Вейля:

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_h^1(\Omega),$$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = 0\},\ H_h^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v - \Delta v = 0\}.$$

Для простоты $H_h^1(\Omega)$ будем называть подпространством гармонических элементов из $H^1(\Omega)$.

Назовём след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$ регулярным следом первого типа по отношению к разбиению $\Gamma = \partial\Omega$ на липшицевы куски $\Gamma_k,\ k = \overline{1,l}$, если для любого k элемент $\gamma_k u = \rho_k \gamma u \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, т.е. он продолжи́м нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Назовём след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$ регулярным следом второго типа, если для любого $k \in \overline{1,l}$ элемент

$$\partial_k u = \omega_k^* \partial u = (\partial u / \partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),$$

т.е. он продолжи́м нулем на всю Γ в классе $H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*$.

В задачах сопряжения внешние границы стыка обозначаются Γ_{ii}, внутренние — $\Gamma_{kj},\ k \neq j$, причём $\Gamma_{kj} = \Gamma_{jk}$. След функции u_j, заданной в области Ω_j на границе Γ_{kj}, обозначаем $\gamma_{kj} u_j$, а соответствующую производную по внешней нормали — $\partial_{kj} u_j$ (совпадают второй индекс у следа и индекс функции). Если граница Γ_{kj} ещё разбита на куски $\Gamma_{kj,i}$, то $\partial\Gamma_{kj}^0$ — объединение внутренних границ при разбиении на части.

Разрывы следов функций (на границе $\Gamma_{21} = \Gamma_{12}$) задаются:

$$\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 = \varphi_{21} \text{ (на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}),$$

и снова совпадают вторые индексы у следов функций, а у заданной функции φ_{21} индекс такой же, как у первого следа.

Разрывы производных по внешним нормалям (они противоположно направлены) задаются:

$$\partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 = \psi_{21} \text{ (на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}).$$

Схема расстановки индексов такая же, как и в случае со следами.

Пусть $(F; E)$ — гильбертова пара пространств, A — порождающий оператор этой пары. Рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f. \tag{49}$$

Пусть $f \in E$, так как $\exists\, A^{-1}$, то при любом $f \in E$ существует единственное решение $u = A^{-1}f$, которое будем называть обобщённым решением задачи (49). Для обобщённых решений выполнено тождество

$$(v, u)_F = (v, f)_E,\ \forall v \in F = \mathcal{D}(A^{1/2}).$$

Если же элемент $f \in F^* = E^{-1/2} \supset E$, то решение задачи (49) называют слабым решением и для него выполнено тождество

$$(v, u)_F = \langle v, f \rangle_E,\ \forall v \in F = \mathcal{D}(A^{1/2}).$$

Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ называется регулярной точкой оператора $A \in \mathcal{L}(H)$, если существует определённый на всём H ограниченный оператор

$$R_\lambda(A) := (A - \lambda I)^{-1},$$

называемый резольвентой. Множество $\rho(A)$ всех регулярных точек оператора A называется резольвентным множеством, оно всегда открыто.

Спектром $\sigma(A)$ оператора A называется дополнение резольвентного множества $\rho(A)$ до всей комплексной плоскости:

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Спектру принадлежат те числа $\lambda = \lambda_0$, при которых уравнение

$$A(\lambda)\varphi := (A - \lambda I)\varphi = 0$$

имеет нетривиальное решение $\varphi = \varphi_0 \neq 0$. В этом случае элемент φ_0 называют собственным элементом оператора A, отвечающим собственному значению λ_0.

Элемент $\varphi \in H,\ \varphi \neq 0$, называется корневым элементом оператора A, отвечающим собственному значению λ_0, если

$$A^n(\lambda_0)\varphi := (A - \lambda_0 I)^n \varphi = 0$$

при некотором натуральном n. Если уравнение имеет нетривиальное решение при $n = 2$ и $A(\lambda_0)\varphi \neq 0$, то элемент $\varphi_1 = \varphi$ называется первым присоединённым элементом к собственному элементу $\varphi_0 := A(\lambda_0)\varphi \neq 0$. Аналогично определяется последующие присоединённые элементы: второй $(n = 3)$, третий $(n = 4)$ и т.д.

Последовательность $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ элементов гильбертова пространства H называется базисом этого пространства, если любой элемент $\varphi \in H$ разлагается единственным образом в ряд

$$\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \varphi_j,$$

сходящийся по норме пространства H, т.е.

$$\|\varphi - \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j\| \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

При этом коэффициенты c_j находятся по элементу φ однозначно, т.е. $c_j = c_j(\varphi),\ j = 1, 2, ...$

Базис $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$, для элементов которого выполнены свойства

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \delta_{jk},$$

где δ_{jk} — символ Кронекера ($\delta_{jk} = 0$ при $j \neq k$ и $\delta_{jj} = 1$), называется ортонормированным.

Базис $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$, получаемый из ортонормированного $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ по закону

$$\psi_j = A\varphi_j,\ j = 1, 2, ...,$$

где A — некоторый линейный ограниченный и ограниченно обратимый оператор $(A,\ A^{-1} \in \mathcal{L}(H))$, называется базисом, эквивалентным ортонормированному, или базисом Рисса.

Будем говорить, что базис Рисса $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty} \subset H$ является p–базисом, $0 < p \leqslant \infty$, если

$$\psi_j = (I + T)\varphi_j,\ j = 1, 2, ...,\ \ T \in \mathfrak{S}_p(H),$$

где $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H.

Пусть в системе $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ корневых элементов оператора L нет присоединённых элементов, отвечающих собственным значениям $\mu_j \in \Lambda_\theta$ (по крайней мере начиная с некоторого номера j). В этом случае будем говорить, что $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ — базис для метода суммирования Абеля–Лидского порядка α, если существует такая последовательность номеров

$$0 = m_0 < m_1 < ... < m_l < ...,$$

что для любого $\varphi \in H$ при $t > 0$ сходится ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=m_l+1}^{m_{l+1}} c_j e_j(t) \varphi_j$$

и его сумма $\varphi(t)$ стремится к φ в H при $t \to +0$. Здесь функция $e_i(t) = e_j(t, \alpha) := \exp(-(\mu_j)^\alpha t)$, если $\mu_j \in \Lambda_\theta$, причём все члены, отвечающие одному и тому же собственному значению μ_j, содержатся в одном слагаемом суммы по l. Для тех j, для которых $\mu_j \notin \Lambda_\theta$ (например, для $\mu_j = 0$, если 0 — собственное значение), полагают $e_j(t) \equiv 1$.

Пусть $\mathcal{E}$ — линейное пространство, не обязательно нормированное. Зададим на $\mathcal{E}$ полутора-линейную форму (в вещественном $\mathcal{E}$ форма называется билинейной) $[\cdot, \cdot] : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{C}$, для которой выполнены следующие требования:

1). $[x, x] \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathcal{E}$;

2). $[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z]$, $\forall x, y, z \in \mathcal{E}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

3). $[x, y] = \overline{[y, x]}, \forall x, y \in \mathcal{E}$. Полутора-линейную форму $[\cdot, \cdot]$ называют также индефинитной метрикой, а пространство $\{\mathcal{E},\ [\cdot, \cdot]\}$ — пространством с индефинитной метрикой.

Пространство $\{\mathcal{E},\ [\cdot, \cdot]\}$ называется пространством Понтрягина с κ положительными квадратами и обозначается Π_κ, если выполнены следующие аксиомы:

(i) в $\mathcal{E}$ нет нулевого вектора, ортогонального всему $\mathcal{E}$, т.е. $[x_0, x] = 0,\ \forall x \in \mathcal{E}$, влечёт $x_0 = 0$;

(ii) в $\mathcal{E}$ существует хотя бы одно κ-мерное $\kappa \in \mathbb{N}$, положительное подпространство;

(iii) для любых $\kappa + 1$ векторов $\{x_j\}_{j=1}^{\kappa+1}$ квадратичная форма $\sum_{k,j=1}^{\kappa+1} [x_j, x_k] \xi_j \overline{\xi_k}$ имеет не более κ неотрицательных квадратов;

(iv) существует разложение
$$\mathcal{E} =: \Pi_\kappa = \Pi_+[\dot{+}]\Pi_-,$$
с $\Pi_+ > 0,\ \Pi_- < 0,\ [x_+, x_-] = 0$ при всех $x_\pm \in \Pi_\pm$,
$$\dim \Pi_+ = \kappa,$$
и пространства $\{\Pi_\pm,\ \pm[x, y]\}$ гильбертовы. На практике используются пространства Понтрягина Π_κ как с κ положительными квадратами, так и с κ отрицательными квадратами, которые определяются естественным образом.

Функция $u(t)$ называется непрерывной в точке t_0, если
$$\|u(t) - u(t_0)\|_E \to 0\ \ (t \to t_0),$$
и непрерывной на $[0, T]$, если она непрерывна в каждой точке t_0 отрезка $[0, T]$. Множество всех непрерывных на $[0, T]$ функций со значениями в E образует линейное пространство. Оно обозначается через $C([0, T];\ E)$, а норма в нём вводится по формуле
$$\|u\|_{C([0,T];\ E)} := \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\|_E.$$

Функция $u = u(t)$ со значениями в E называется сильным решением дифференциального уравнения
$$\frac{du}{dt} = Au,\ \ u = u(t), \tag{50}$$
если она непрерывно дифференцируема по t на $[0, \infty]$ и удовлетворяет уравнению (50) для любого $t \leqslant 0$.

Задачей Коши для уравнения (50) называется задача вида
$$\frac{du}{dt} = Au,\ \ u(0) = u^0 \in E.$$

Пусть E — банахово пространство и $\mathcal{L}(E)$ — множество линейных ограниченных операторов, действующих в E. Семейство оператор–функций $\{U(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ со значениями в $\mathcal{L}(E)$ назовём сильно непрерывной однопараметрической полугруппой операторов (или (C_0)–полугруппой) на E, если выполнены следующие условия:

1). $U(t)U(s) = U(t + s)$ для всех $t,\ s \in \mathbb{R}_+$, 2). $U(0) = I$,

3). $U(t)u^0 \in C(\mathbb{R}_+, E)$ для любого $u^0 \in E$.

Сжимающей (C_0)–полугруппой $\{U(t)\}$ на E называется такая (C_0)–полугруппа на E, что все операторы $\{U(t)\}$ являются сжатиями:

$$\|U(t)\| \leqslant 1 \ \ (\forall t \in \mathbb{R}_+).$$

Пусть $U(t)$ является (C_0)–полугруппой на E. Формулой

$$Av := \lim_{t \to +0} \frac{U(t)v - v}{t} = \frac{d}{dt}(U(t)v)\Big|_{t=0}$$

определим генератор полугруппы.

Глава 1

Смешанные краевые задачи сопряжения

1.1 Формула Грина для смешанных краевых задач

1.1.1 Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и оператора следа

Приведем сначала необходимые сведения, которые будут далее использоваться в работе. Доказательства соответствующих утверждений можно найти в [22].

Пусть $\{E,\ (\cdot,\cdot)_E\}$, $\{F,\ (\cdot,\cdot)_F\}$ и $\{G,\ (\cdot,\cdot)_G\}$ — сепарабельные гильбертовы пространства с введёнными в них скалярными произведениями. Будем считать, что для этой тройки пространств выполнены следующие условия.

1.° Пространство F плотно вложено в E (обозначение $F \hookrightarrow E$), т.е. F плотно в E и

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F,\ a > 0,\ \forall u \in F.$$

Иными словами, пространства F и E с указанными свойствами образуют гильбертову пару $(F; E)$.

2.° На F задан оператор γ, называемый (абстрактным) *оператором следа* и ограниченно действующий из F в G, причем γ отображает F на плотное множество

$\mathcal{R}(\gamma) =: G_+ \subset G$:

$$\gamma : F \to G_+ \hookrightarrow G,\ \|\gamma u\|_G \leqslant b\|u\|_F,\ b > 0,\ \forall u \in F.$$

3.° Ядро оператора γ, т.е. $\ker\gamma =: N$, плотно вложено в E:

$$N \hookrightarrow E,\ \|u\|_E \leqslant c\|u\|_F,\ c > 0,\ \forall u \in N.$$

Теорема 1.1. *Пусть для тройки гильбертовых пространств E, F, G (с введенными на них скалярными произведениями) и для оператора следа γ выполнены условия 1°- 3°. Тогда существует абстрактное дифференциальное выражение $Lu \in F^*$ и абстрактная производная по внешней нормали $\partial u \in (G_+)^*$ такие, что имеет место абстрактная формула Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа)*

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.1}$$

При этом ∂u по элементам $u \in F$ и $Lu \in F^*$ определяются однозначно. □

Следствие 1.1. *Как сказано при доказательстве этой теоремы (см. [22]) дифференциальное выражение Lu и производная ∂u строятся неоднозначно. Именно, их сужения на подпространство $M = F \ominus N$ определяются однозначно, а сужения на N связаны линейной связью с сужениями на G_+. Однако в приложениях, в частности, в задачах математической физики, конкретный вид дифференциального выражения Lu определяется однозначно, исходя из исследуемого физического процесса. Поэтому далее будем считать, что выражение для $Lu \in F^*$ в формуле Грина (1.1) задано, а потому однозначно определено и $\partial u \in (G_+)^*$. В связи с этим все дальнейшие построения будут проводиться на базе выбранной формулы Грина. Отметим еще, что уже в классической работе [28] указывалось, что краевые задачи Дирихле, Неймана и др. следует изучать относительно выбранной формула Грина, а неоднозначность выбора дифференциального выражения Lu подробно обсуждалось в [49], а также в [1].*

Следствие 1.2. *Типичным примером, когда выполнены условия 1°- 3°, является тройка пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, с* *введенными на них стандартными нормами и обычным оператором следа:*

$$\gamma u := u|_{\Gamma},\ \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.2}$$

При этом область Ω имеет липшицеву границу $\Gamma = \partial\Omega$. В этом случае имеем три пары гильбертовых пространств

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega),\ H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma),\ N := H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega), \tag{1.3}$$

причем вложения в (1.3) компактные. Отметим еще, что в этом примере имеет место свойство

$$(H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma), \tag{1.4}$$

см., например, [49] , с. 98, [40] , с. 149.

Теорема 1.2. *Для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, и оператора следа γ (см. (1.2)) имеет место следующая обобщенная формула Грина для оператора Лапласа:*

$$\int_{\Omega}(\nabla\eta\cdot\nabla u+\eta u)d\Omega =: (\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u-\Delta u\rangle_{L_2(\Omega)}+\langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)},\ \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{1.5}$$

$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*,\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

(Здесь, как и в (1.1), символом $\langle \eta, v\rangle_E$ обозначается значение функционала $v \in F^*$ на элементе $\eta \in F$, аналогичный смысл имеют другие выражения с косыми скобками.)

□

Другие примеры обобщенных формул Грина для равномерно эллиптического дифференциального выражения, для систем линейных эллиптических уравнений, для уравнений линейной теории упругости приведены в п. 1.3 работы [22].

1.1.2 Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач

В математической физике часто рассматривают такие краевые задачи, когда на одной части границы $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ задают краевое условие Дирихле, на другой — условие Неймана, а на третьей — так называемое третье краевое условие, или условие Ньютона. Задачи подобного вида называют смешанными. Для таких задач функционал, связанный с $\Gamma = \partial\Omega$ и фигурирующий в формуле Грина (1.5), естественно разбить на части, отвечающие тому или иному краевому условию.

Переходя к рассмотрению этой проблемы в абстрактной форме, приходим к выводу, что в формуле (1.1) желательно выражение $\langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G$ заменить при определенных дополнительных условиях на выражение $\sum_{k=1}^{l}\langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{G_k}$, где $\gamma_k\eta$ – абстрактный аналог следа элемента $\eta \in F$ на части Γ_k границы Γ, а $\partial_k u$ – соответствующий аналог производной по внешней нормали на этой части границы.

Предположим, что для тройки пространств E, F, G и оператора γ выполнены условия 1°- 3° п. 1.1, а также следующие условия.

4.° Имеет место ортогональное разложение и оснащения:

$$G = \bigoplus_{k=1}^{l} G_k,\ \exists (G_+)_k,\ (G_+)_k^* : (G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*,\ k = \overline{1,l}.$$

5.° В пространстве G_+ действуют прямые ограниченные проекторы

$$p_k : G_+ \to \widehat{(G_+)}_k,\ \sum_{k=1}^{l} p_k = I_+, \tag{1.6}$$

причем

$$p_k = \omega_k \rho_k,\ k = \overline{1,l},$$

где $\rho_k : G_+ \to (G_+)_k$ – абстрактный оператор сужения на часть границы, а $\omega_k : (G_+)_k \to \widehat{(G_+)}_k$ — абстрактный оператор продолжения нулем из $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k \subset G_+$. Кроме того, будем предполагать, что

$$\rho_k \omega_k = (I_+)_k,\ k = \overline{1,l}. \tag{1.7}$$

Требуется также, чтобы ρ_k и ω_k были ограниченными операторами, а потому и $p_k = \omega_k \rho_k$ – ограничены.

Теорема 1.3. *Пусть для тройки пространств E, F, G и оператора следа γ выполнены условия $1° – 3°$ п. 1.1, а также условия $4°$ и $5°$. Тогда имеет место абстрактная* *формула Грина для смешанных краевых задач в следующем виде:*

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu \rangle_E + \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k}, \quad \forall \eta, u \in F,$$

$$\gamma_k \eta := \rho_k \gamma \eta \in (G_+)_k, \quad \partial_k u := \omega_k^* \partial u \in (G_+)_k^*, \ k = \overline{1, l}.$$

Здесь γ_k — абстрактный оператор следа на часть границы области, а ∂_k — абстрактный оператор производной по внешней нормали, действующий на этой части границы. $\square$

Для иллюстрации свойств 4° и 5° вернемся к рассмотрению примера из замечания 1.2, т.е. к тройке пространств $L_2(\Omega),\ H^1(\Omega),\ L_2(\Gamma),\ \Gamma = \partial\Omega$, и оператора следа (1.2). Будем считать, что липшицева граница Γ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ неодносвязна и состоит из трех частей: внешней границы Γ_1 и двух внутренних границ Γ_2 и Γ_3, причем все $\Gamma_k,\ k = \overline{1,3}$, находятся на положительном расстоянии друг от друга.

Тогда, очевидно,

$$L_2(\Gamma) = \bigoplus_{k=1}^{3} L_2(\Gamma_k), \ H^{1/2}(\Gamma) = (\dot{+})_{k=1}^{3} H^{1/2}(\Gamma_k),$$

и так же, как и для односвязной области (см. (1.4)), имеют место соотношения

$$(H^{1/2}(\Gamma_k))^* = H^{-1/2}(\Gamma_k), \ k = \overline{1,3}.$$

Отсюда следует, что для этого примера имеют место свойства 4°.

Переходя к рассмотрению свойств 5°, введем для любого $\varphi = (\varphi_1; \varphi_2; \varphi_3) \in H^{1/2}(\Gamma)$ операторы

$$\rho_k \varphi := \varphi_k := \varphi|_{\Gamma_k}, \ k = \overline{1,3}.$$

Введем также операторы ω_k продолжения нулем на оставшуюся часть границы:

$$\omega_k \varphi_k := (\varphi_k; 0; 0), \ k = \overline{1,3}.$$

Исходя из определения нормы в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$, можно проверить (см. [22], с. 92-94), что $\rho_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma_k)$ – ограниченный оператор с нормой, не превышающей единицы, а $\omega_k : H^{1/2}(\Gamma_k) \to H^{1/2}(\Gamma)$ – при условии $\mathrm{dist}(\Gamma_k, \Gamma_j) \geqslant d > 0$ –

также ограничен. Кроме того, очевидно, что для ω_k и ρ_k выполнено свойство (1.7), т.е. $\rho_k \omega_k$ – единичный оператор в $H^{1/2}(\Gamma_k)$. Отсюда следует, что $p_k = \omega_k \rho_k,\ k = \overline{1,3}$, является ограниченным проектором: $p_k : H^{1/2}(\Gamma) \to \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, где $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ – подпространство в $H^{1/2}(\Gamma)$, у которого ненулевые элементы имеются лишь на $\Gamma_k,\ k = \overline{1,3}$. Эти факты показывают, что в разбираемом примере выполнены также свойства 5°, сформулированные выше (см. (1.6)-(1.7)).

Опираясь на разобранный пример, а также теорему 1.3, сформулируем следующий вывод.

Теорема 1.4. *Пусть для тройки пространств $L_2(\Omega),\ H^1(\Omega),\ L_2(\Gamma),\ \Gamma = \partial\Omega,\ \Omega \in \mathbb{R}^m$ и оператора следа γ (см. (1.2)), липшицева граница Γ неодносвязна и разбита на части $\Gamma_k,\ k = \overline{1,l}$, находящиеся на положительном расстоянии друг от друга, т.е. $dist(\Gamma_k, \Gamma_j) \geqslant d > 0,\ k, j = \overline{1,l},\ k \neq j$. Тогда имеет место следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач:*

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u \rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall\ \eta,\ u \in H^1(\Omega), \tag{1.8}$$

$$\gamma_k \eta := \eta\ |_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \partial_k u = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \tag{1.9}$$

□

1.1.3 Случай примыкающих друг к другу областей

Будем теперь считать, в отличие от примера, рассмотренного в п. 1.1.2, что липшицева граница Γ области $\Omega \in \mathbb{R}^m$ односвязна. Разобьем её на односвязные открытые части $\Gamma_k,\ k = \overline{1,l}$, с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$. Такое разбиение называют разбиением на липшицевы куски.

Как известно, функции $\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k)$ не всегда продолжимы нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$ (см. [28] , с. 78, а также [13] , с. 116-117). Введем важные понятия, связанные с этим обстоятельством. Пусть $r(x),\ x \in \Gamma_k$, – гладкая функция в $\overline{\Gamma}_k$, строго положительная в Γ_k, положительно определенная вне некоторой окрестности границы $\partial\Gamma_k$, а в окрестности этой границы эквивалентная (в смысле двусторонних оценок) расстоянию от точки $x \in \Gamma_k$ до $\partial\Gamma_k$.

Обозначим через $\widetilde{H}^s(\Gamma_k),\ |s| \leqslant 1$, множество (линеал), состоящее из (обобщенных) функций с носителем в $\overline{\Gamma}_k$. Как указано в [1] , с. 76, $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$ – это пополнение множества функций из $C_0^\infty(\Gamma_k)$, для которых имеется продолжение нулём вне Γ_k в классе $H^s(\Gamma)$.

Лемма 1.1. *Справедливо соотношение*

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) = \{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma_k) : r^{-1/2}\varphi \in L_2(\Gamma_k)\}.$$

При этом следующая норма эквивалентна стандартной норме (которая наследуется из $H^{1/2}(\Gamma)$) на классе $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$:

$$\|\varphi\|^2_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} = \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_k)} + \|r^{-1/2}\varphi\|^2_{L_2(\Gamma_k)}.$$

$\square$

Лемма 1.2. *При любом $s \in \mathbb{R},\ |s| \leqslant 1$, пространства $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$ и $H^{-s}(\Gamma_k)$ дуальны относительно спаривания в $L_2(\Gamma_k)$. В частности,*

$$(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k))^* = H^{-1/2}(\Gamma_k),\ (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \tag{1.10}$$

$\square$

Как хорошо известно, пространство $H^1(\Omega)$ со стандартной нормой имеет ортогональное разложение, которое называют разложением Вейля:

$$H^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus H_h^1(\Omega), \tag{1.11}$$

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = 0\},\ H_h^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) : v - \Delta v = 0\}. \tag{1.12}$$

Для простоты $H_h^1(\Omega)$ будем называть подпространством гармонических элементов из $H^1(\Omega)$.

При исследовании линейных смешанных краевых задач, содержащих заданные функции как в уравнениях, так и в краевых условиях на разных частях границы, естественно решения таких задач разыскивать в виде суперпозиции решений вспомогательных краевых задач, в которых заданные функции (неоднородности) содержатся лишь в одном месте, т.е. в уравнении либо в одном из краевых условий. В связи с этим при использовании обобщенных формул Грина вида (1.8) следует выделять такие множества (подпространства) из $H^1(\Omega)$, для которых указанное свойство суперпозиции имеет место.

Переходя к рассмотрению этого подхода, введем следующие классы функций:

$$\widehat{H}^{1/2}(\Gamma) := \{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma) : \rho_k\varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}\} \subset H^{1/2}(\Gamma), \tag{1.13}$$

$$\widehat{H}^1(\Omega) := H_0^1(\Omega) \oplus \{(\dot{+})_{k=1}^l H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega)\} \subset H^1(\Omega), \tag{1.14}$$

$$H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega) := \{u \in H_h^1(\Omega) : \gamma u = 0 \text{ на } \Gamma\backslash\Gamma_k\} = \ker((I_+ - \rho_k)\gamma),\ k = \overline{1,l}. \tag{1.15}$$

Определение 1.1. *Назовём след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$ регулярным следом первого типа по отношению к разбиению $\Gamma = \partial\Omega$ на липшицевы куски $\Gamma_k,\ k = \overline{1,l}$, если для любого k элемент $\gamma_k u = \rho_k \gamma u \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, т.е. он продолжи́м нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.* □

Нетрудно видеть, учитывая свойства (1.10), что регулярным следом первого типа обладают слабые решения $w \in H_h^1(\Omega)$ смешанной краевой задачи

$$w - \Delta w = 0 \text{ (в } \Omega),\ w = 0 \text{ (на } \Gamma\backslash\Gamma_k),\ \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} = \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k).$$

Отметим еще, что, согласно определениям (1.13)-(1.15), элементы из $\widehat{H}^1(\Omega)$ имеют регулярный след первого типа: для любого $u \in \widehat{H}^1(\Omega)$ получаем представление

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^{l} u_k,\ u_0 \in H_0^1(\Omega),\ u_k \in H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega),\ k = \overline{1,l},$$

$$\gamma u_0 = 0,\ \gamma_k u_k =: \varphi_k \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\ \gamma_k u_j = 0 \quad (k \neq j),\ j,k = \overline{1,l}.$$

При этом элементы $\gamma u \in \widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ имеют сужения на Γ_k, продолжимые нулём на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Итогом проведенных рассмотрений является следующее утверждение.

Теорема 1.5. *Для тройки пространств $L_2(\Omega),\ H^1(\Omega),\ L_2(\Gamma),\ \Gamma = \partial\Omega$, и оператора следа $\gamma : \widehat{H}^1(\Omega) \to L_2(\Gamma),\ \gamma\eta := \eta|_\Gamma,\ \eta \in \widehat{H}^1(\Omega)$, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей Γ, разбитой на липшицевы куски $\Gamma_k,\ k = \overline{1,l}$, справедлива следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач:*

$$\langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)},\ \ \forall\, \eta,\ u \in \widehat{H}^1(\Omega), \tag{1.16}$$

$$u - \triangle u \in (H^1(\Omega))^*,\ \gamma_k\eta := \eta\,|_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),$$
$$\partial_k u = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \tag{1.17}$$

□

1.1.4 Более общая формулировка абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач

Формулировка абстрактной формулы Грина, выраженная теоремой 1.3, не всегда соответствует тем классам смешанных краевых задач, которые встречаются в приложениях. Именно, оператор ω_k продолжения нулём с $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k$, как было видно из рассмотрений пп. 1.1.2, 1.1.3, полезно использовать в случаях, когда односвязные куски Γ_k границы $\Gamma = \partial\Omega$ расположены на положительном расстоянии либо когда на разных кусках границы ставят краевые условия Дирихле с заданными функциями класса $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$. Поэтому целесообразно получить другую форму абстрактной формулы Грина с тем, чтобы можно было использовать и краевые условия Неймана либо Ньютона.

Переходя к рассмотрению этого вопроса в абстрактной форме, будем считать, что выполнены свойства 4° п. 1.1.2, т.е.

$$G = \bigoplus_{k=1}^{l} G_k,\ (G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*,\ k = \overline{1,l}, \tag{1.18}$$

а также следующие свойства.

$(5^\circ)'$. Для операторов $p_k : G_+ \to \widehat{(G_+)}_k$ имеем соотношения

$$p_k = \omega_k\rho_k,\ k = \overline{1,l},\ \rho_k\omega_k = (I_+)_k,\ k = \overline{1,l},\ \sum_{k=1}^{l} p_k = I_+, \tag{1.19}$$

где $(I_+)_k$ — единичный оператор в $(G_+)_k$. При этом ρ_k — оператор сужения с G_+ на $(G_+)_k$, а ω_k — оператор продолжения с $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k$, но *не обязательно нулем*. Предполагается также, что $\rho_k : G_+ \to (G_+)_k$ и $\omega_k : (G_+)_k \to \widehat{(G_+)}_k$ — непрерывные операторы.

Заметим, что в сформулированных предположениях

$$p_k^* = \rho_k^* \omega_k^*,\ \rho_k^* : (G_+)_k^* \to (G_+)^*,\ \omega_k^* : \widehat{(G_+)}_k^* \to (G_+)_k^*,\ k = \overline{1,l}, \tag{1.20}$$

где ω_k^* — ограниченный оператор сужения с $\widehat{(G_+)}_k^*$ на $(G_+)_k^*$, а ρ_k^* — ограниченный оператор продолжения с $(G_+)_k^*$ на $(G_+)^*$.

Теорема 1.6. *Пусть для тройки пространств E, F, G и оператора следа γ выполнены условия $1^\circ - 3^\circ$ п. 1.1.1, условие 4° п. 1.1.2 (см. (1.18)), а также условие $(5^\circ)'$ (см. (1.19)) либо условие (1.20). Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующей форме:*

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k},\quad \forall \eta, u \in F,$$

$$\gamma_k \eta := \rho_k \gamma \eta \in (G_+)_k,\quad \partial_k u := \omega_k^* \partial u \in (G_+)_k^*,$$

где ρ_k и ω_k^* — операторы со свойствами (1.19),(1.20). □

Вернёмся снова к тройке пространств $L_2(\Omega),\ H^1(\Omega)$ и $L_2(\Gamma),\ \Gamma = \partial\Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — область с липшицевой границей Γ, разбитой на липшицевы куски $\Gamma_k,\ k = \overline{1,l}$. Введем одно важное понятие, относящееся к возможности продолжения элементов из $H^s(\Gamma_k),\ |s| \leqslant 1$, до элементов из $H^s(\Gamma)$. Оказывается, при сформированных выше предположениях такое продолжение возможно многими способами, однако один из них является универсальным, и он предложен в работе [50] для случая, когда функции из $H^s(\Omega)$ продолжаются до функций из $H^s(\mathbb{R}^m)$. Как указано в работе [40], аналогичный факт имеет место и для продолжения функций из $H^s(\Gamma_k),\ |s| \leqslant 1$, до функций из $H^s(\Gamma)$. При этом в обоих случаях оператор продолжения не зависит от s. Сформулируем итоговое утверждение в виде леммы, которая понадобится в дальнейшем.

Лемма 1.3. *(см. В.С. Рычков [50], а также М.С. Агранович [40]). Пусть липшицева граница $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ разбита на липшицевы куски $\Gamma_k,\ k = \overline{1,l}$. Тогда существует линейный оператор ω_k (оператор В.С. Рычкова) продолжения функций из $H^s(\Gamma_k)$ с Γ_k на всю Γ функциями из $H^s(\Gamma)$. При этом*

$$\|\omega_k \varphi_k\|_{H^s(\Gamma)} \leqslant c_k \|\varphi_k\|_{H^s(\Gamma_k)},\ \forall \varphi_k \in H^s(\Gamma_k),\ |s| \leqslant 1,$$

причем c_k не зависит от s. $\square$

Введем теперь операторы сужения и продолжения такие, что для них выполнены общие требования из теоремы 1.6. Пусть $\rho_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma_k)$ — ограниченный оператор сужения ($\|\rho_k\|_{H^{1/2}(\Gamma)\to H^{1/2}(\Gamma_k)} \leqslant 1$), а $\rho_k^* : (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \to (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma)$ — сопряженный ему ограниченный *оператор продолжения нулем:*

$$\rho_k^* \psi_k = \begin{cases} \psi_k \text{ (на } \Gamma_k), \quad \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \\ 0 \text{ (на } \Gamma \backslash \Gamma_k). \end{cases}$$

Введем также ограниченный оператор продолжения (оператор Рычкова) $\omega_k : H^{1/2}(\Gamma_k) \to H^{1/2}(\Gamma)$. Тогда

$$\omega_k^* : (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma) \to (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$$

— ограниченный *оператор сужения.*

Введем ещё пространство

$$\check{H}^{-1/2}(\Gamma) := (\dot{+})_{k=1}^{l} \check{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \subset H^{-1/2}(\Gamma), \tag{1.21}$$

$$\check{H}^{-1/2}(\Gamma_k) := \{\rho_k^* \psi_k : \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)\} \subset H^{-1/2}(\Gamma),$$

а также ограниченные операторы

$$p_k^* = \rho_k^* \omega_k^* : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma).$$

Очевидно, операторы p_k^* обладают свойствами

$$\omega_k^* \rho_k^* \psi_k = \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l},$$

а потому в пространстве $\check{H}^{-1/2}(\Gamma)$ имеем

$$p_k^* = (p_k^*)^2,\ p_k^* p_j^* = 0\ (k \neq j),\ \sum_{k=1}^{l} p_k^* = (\check{I}_-),$$

где $(\check{I}_-)$ – единичный оператор в $\check{H}^{-1/2}(\Gamma)$.

Таким образом, в пространстве $\check{H}^{-1/2}(\Gamma)$ выполнены общие требования (1.18)-(1.20), где

$$(G_+)_k = H^{1/2}(\Gamma_k),\ G_k = L_2(\Gamma_k),\ (G_+)_k^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}.$$

Введем теперь по аналогии с (1.13)-(1.15) классы функций, связанных не с задачей Дирихле, а с задачей Неймана. Именно, введем пространство (1.21), а также пространство

$$\check{H}^1(\Omega) = H_0^1(\Omega) \oplus \check{H}_h^1(\Omega) := H_0^1(\Omega) \oplus \{(\dot{+})_{k=1}^l \check{H}_{h,\Gamma_k}^1(\Omega)\} \subset H^1(\Omega), \tag{1.22}$$

$$\check{H}_{h,\Gamma_k}^1(\Omega) = H_h^1(\Omega) \cap H_{\Gamma\setminus\Gamma_k}^1(\Omega), \tag{1.23}$$

$$H_{\Gamma\setminus\Gamma_k}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma\setminus\Gamma_k} = 0\}. \tag{1.24}$$

Определение 1.2. *Назовём след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$ регулярным следом второго типа, если для любого $k \in \overline{1,l}$ элемент $u = u_0 + u_h,\ u_0 \in H_0^1(\Omega),\ u_h \in H_h^1(\Omega)$, обладает свойствами*

$$\partial_k u_h = \omega_k^* \partial u_h = (\partial u_h/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}.$$

Т.е. $(\partial u_h/\partial n)_{\Gamma_k}$ продолжи́м нулем на всю Γ в классе $H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*$. □

Согласно определениям (1.22)-(1.24) элементы из $\check{H}^1(\Omega)$ имеют регулярный след второго типа: для любого $u \in \check{H}^1(\Omega)$ имеет место представление

$$u = u_0 + \sum_{k=1}^l u_k,\ u_0 \in H_0^1(\Omega),\ u_k \in \check{H}_{h,\Gamma_k}^1(\Omega),\ k = \overline{1,l},$$

$$\gamma u_0 = 0,\ \partial_k u_k = (\partial u_k/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),$$

$$\partial_k u_j = 0\ (k \neq j),\ k,j \in \overline{1,l}.$$

В качестве следствия из теоремы 1.6 и проведенных выше построений приходим к такому выводу.

Теорема 1.7. *Для тройки пространств $L_2(\Omega),\ \check{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega),\ L_2(\Gamma),\ \Gamma = \partial\Omega$, и оператора следа $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma),\ \gamma\eta := \eta|_\Gamma$, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей Γ, разбитой липшицевы куски $\Gamma_k,\ k = \overline{1,l}$, справедлива следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач:*

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^l \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)},\ \ \forall\ \eta,\ u \in \check{H}^1(\Omega), \tag{1.25}$$

$$\gamma_k \eta := \eta \mid_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k),\ u = u_0 + u_h,\ \gamma u_0 = 0,\ \partial_k u_h = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \tag{1.26}$$

□

Рассмотрения этого параграфа (см. теоремы 1.3 – 1.7) показывают, что вид обобщенной формулы Грина для смешанных краевых задач при исследовании классических проблем следует выбирать, исходя из вида области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ и характера краевых условий, заданных на $\Gamma = \partial\Omega$.

1.2 Общая схема рассмотрения абстрактных краевых задач сопряжения

1.2.1 К постановке задачи

Рассмотрим сначала простой пример задачи сопряжения для проблемы математической физики, порожденной оператором Лапласа, точнее дифференциальным выражением $u - \Delta u$. Будем считать, что конфигурация областей, в которых рассматривается эта задача, представляет собой дважды разрезанный банан (см. рис. 1.1)

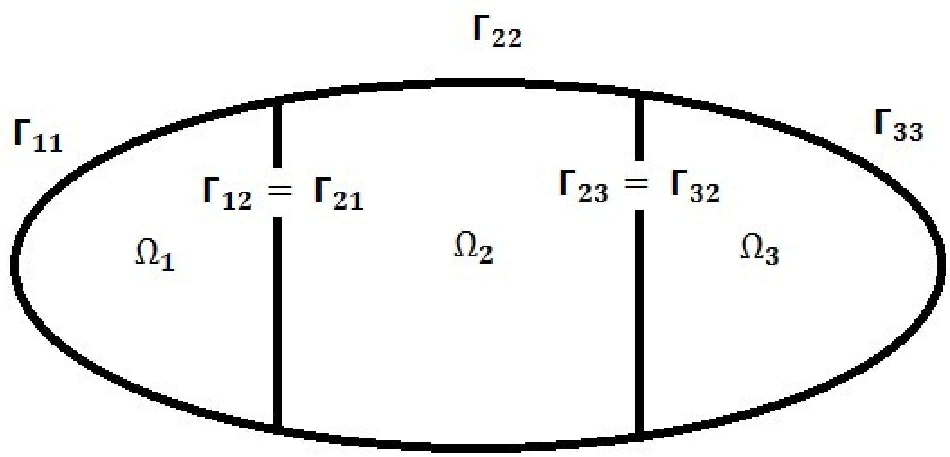

Рис 1.1

Обозначим через $\Gamma_{jj},\ j = \overline{1,3}$, внешние свободные границы, а через Γ_{kj} $(k \neq j)$ — ту часть границы $\Gamma_j = \partial\Omega_j$, которая стыкуется с частью Γ_{jk} границы $\Gamma_k = \partial\Omega_k$.

При этом очевидно, что $\Gamma_{jk} = \Gamma_{kj}$. Полагаем, что области $\Omega_k \subset \mathbb{R}^m$ имеют липшицевы границы, разбитые на липшицевы куски Γ_{kj}. Будем обозначать через $\gamma_{kj}u_j$ след функции u_j, заданной в области Ω_j, на границе Γ_{kj}, а через $\partial_{kj}u_j$ – соответствующую производную по внешней нормали.

Сформулируем теперь постановку задачи сопряжения для данной совокупности областей $\Omega_j,\ j=\overline{1,3}$.

Требуется найти такие функции $u_j(x) \in H^1(\Omega_j),\ j=\overline{1,3}$, что для них выполнены уравнения

$$u_j - \Delta u_j = f_j \ (\text{в } \Omega_j),\ j=\overline{1,3}, \tag{1.27}$$

внешние граничные условия Дирихле

$$\gamma_{jj}u_j = \varphi_j \ (\text{на } \Gamma_{jj}),\ j=\overline{1,3}, \tag{1.28}$$

а также условия сопряжения на стыках:

$$\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = \varphi_{21},\ \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{21} \ (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}), \tag{1.29}$$

$$\gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = \varphi_{32},\ \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3 = \psi_{32} \ (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}). \tag{1.30}$$

Здесь f_j — заданные функции в $\Omega_j,\ j=\overline{1,3}, \varphi_j$ — заданные функции на внешних границах $\Gamma_{jj},\ j=\overline{1,3}$, функции φ_{21} и φ_{32} задают разрывы следов, а ψ_{21} и ψ_{32} — разрывы производных по внешним нормалям на границах стыка областей.

Приведем теперь формулировку абстрактной задачи сопряжения, частным случаем которой является проблема (1.27)–(1.30).

Пусть имеется набор пространств $E_j,\ F_j,\ G_j$ и операторов следа $\gamma_j,\ j=\overline{1,3}$, таких, что для них выполнены условия теоремы 1.1 и потому имеется три абстрактные формулы Грина:

$$\langle \eta_j, L_j u_j\rangle_{E_j} = (\eta_j, u_j)_{F_j} - \langle \gamma_j\eta_j, \partial_j u_j\rangle_{G_j},\ \ \forall \eta_j, u_j \in F_j.$$

Более того, будем считать, что для каждого $j=\overline{1,3}$ выполнены свойства (1.18)– (1.20) и потому справедливы утверждения теоремы 1.6. Тогда по аналогии с проблемой (1.27)–(1.30) (см. рис. 2.1) будем считать, что для граничных пространств $G_j,\ j=\overline{1,3}$, выполнены соотношения

$$G_1 = G_{11} \oplus G_{21},\ G_2 = G_{22} \oplus G_{12} \oplus G_{32},\ G_3 = G_{33} \oplus G_{23}, \tag{1.31}$$

причем каждое из этих подпространств имеет оснащение:

$$
\begin{gathered}
(G_+)_{jj} \hookrightarrow G_{jj} \hookrightarrow (G_+)^*_{jj},\ j=\overline{1,3},\\
(G_+)_{21}=(G_+)_{12} \hookrightarrow G_{21}=G_{12} \hookrightarrow (G_+)^*_{21}=(G_+)^*_{12},\\
(G_+)_{32}=(G_+)_{23} \hookrightarrow G_{32}=G_{23} \hookrightarrow (G_+)^*_{32}=(G_+)^*_{23}.
\end{gathered}
\tag{1.32}
$$

При этих предположениях по теореме 1.6 будем иметь следующие тождества (абстрактные формулы Грина для смешанных краевых задач):

$$
(\eta_1,u_1)_{F_1}=\langle\eta_1,L_1u_1\rangle_{E_1}+\langle\gamma_{11}\eta_1,\partial_{11}u_1\rangle_{G_{11}}+\langle\gamma_{21}\eta_1,\partial_{21}u_1\rangle_{G_{21}},\ \ \forall\eta_1,u_1\in F_1, \tag{1.33}
$$

$$
\begin{gathered}
(\eta_2,u_2)_{F_2}=\langle\eta_2,L_2u_2\rangle_{E_2}+\langle\gamma_{22}\eta_2,\partial_{22}u_2\rangle_{G_{22}}+\\
+\langle\gamma_{12}\eta_2,\partial_{12}u_2\rangle_{G_{12}}+\langle\gamma_{32}\eta_2,\partial_{32}u_2\rangle_{G_{32}},\ \ \forall\eta_2,u_2\in F_2,
\end{gathered}
\tag{1.34}
$$

$$
(\eta_3,u_3)_{F_3}=\langle\eta_3,L_3u_3\rangle_{E_3}+\langle\gamma_{33}\eta_3,\partial_{33}u_3\rangle_{G_{33}}+\langle\gamma_{23}\eta_3,\partial_{23}u_3\rangle_{G_{23}},\ \ \forall\eta_3,u_3\in F_3. \tag{1.35}
$$

Формулировка абстрактной задачи сопряжения в рассматриваемом случае такова: требуется найти элементы $u_j\in F_j,\ j=\overline{1,3}$, для которых выполнены уравнения

$$
L_ju_j=f_j\ (j=\overline{1,3}), \tag{1.36}
$$

внешние граничные условия

$$
\gamma_{jj}u_j=\varphi_j\ (j=\overline{1,3}), \tag{1.37}
$$

а также условия сопряжения на стыковых граничных пространствах:

$$
\gamma_{21}u_1-\gamma_{12}u_2=\varphi_{21},\ \partial_{21}u_1+\partial_{12}u_2=\psi_{21}\ (\text{на}\ \Gamma_{21}=\Gamma_{12}), \tag{1.38}
$$

$$
\gamma_{32}u_2-\gamma_{23}u_3=\varphi_{32},\ \partial_{32}u_2+\partial_{23}u_3=\psi_{32}\ (\text{на}\ \Gamma_{32}=\Gamma_{23}). \tag{1.39}
$$

Элементы f_j и φ_{jj} заданы, $j=\overline{1,3}$, а $\varphi_{21},\ \varphi_{32},\ \psi_{21}$ и ψ_{32} задают разрывы следов элементов u_j и их производных по нормали.

Таким образом, абстрактная задача сопряжения, порожденная проблемой (1.27)–(1.30), состоит в решении проблемы (1.36)–(1.39) на основе использования абстрактных формул Грина (1.33)–(1.35).

1.2.2 Общая схема исследования абстрактных задач сопряжения

Целью дальнейших рассмотрений является получение необходимых и достаточных условий разрешимости задачи (1.36)–(1.39), а также представление этого решения через операторы вспомогательных (абстрактных) краевых задач. При этом будет использован, как уже упоминалось, принцип суперпозиции, позволяющий представить решение задачи (1.36)–(1.39) в виде суммы решений вспомогательных краевых задач, содержащих неоднородности (заданные элементы) лишь в одном месте, т.е. либо в уравнении, либо в одном из краевых условий.

Эта общая схема состоит из четырех этапов. Именно, слабое (вариационное) решение задачи (1.36)–(1.39), т.е.

$$u = (u_1,\ u_2,\ u_3) \in \bigoplus_{k=1}^{3} F_k =: F, \tag{1.40}$$

будем разыскивать в виде суммы

$$(u_1,\ u_2,\ u_3) = \sum_{j=1}^{4} (u_{j1},\ u_{j2},\ u_{j3}), \tag{1.41}$$

где $u_j = (u_{j1},\ u_{j2},\ u_{j3}),\ j = \overline{1,4}$, – слабые решения формулируемых ниже вспомогательных задач.

Первая вспомогательная задача (задача Зарембы)

$$L_1 u_{11} = 0,\ \gamma_{11} u_{11} = \varphi_1;\ \partial_{21} u_{11} = 0, \tag{1.42}$$

$$L_2 u_{12} = 0,\ \gamma_{22} u_{12} = \varphi_2;\ \partial_{12} u_{12} = 0,\ \partial_{32} u_{12} = 0, \tag{1.43}$$

$$L_3 u_{13} = 0,\ \gamma_{33} u_{13} = \varphi_3;\ \partial_{23} u_{23} = 0. \tag{1.44}$$

Здесь уравнения и условия Неймана на стыке однородные, а условия Дирихле на внешних границах неоднородные. При этом задача (1.42) распадается на три независимые задачи Зарембы для функций $u_{1k},\ k = \overline{1,3}$.

Переходя к рассмотрению задачи (1.42)–(1.44), заметим, что для её решения $u_{11} \in F_1$ должно выполняться необходимое условие (см. (1.32))

$$\gamma_{11} u_{11} = \varphi_1 \in (G_+)_{11} \subset G_{11}. \tag{1.45}$$

Будем считать, что это условие выполнено, и воспользуемся оператором продолжения $\omega_{11} : (G_+)_{11} \to (G_+)_1$, который в условиях теоремы 1.6 существует и ограничен. Тогда элемент $\widehat{\varphi}_1 := \omega_{11}\varphi_1 \in (G_+)_1$. Будем разыскивать решение задачи (1.42) в виде суммы

$$u_{11} = v_{11} + w_{11},$$

где v_{11} и w_{11} – слабые решения задач

$$L_1 v_{11} = 0,\ \gamma_1 v_{11} = \widehat{\varphi}_1, \tag{1.46}$$

$$L_1 w_{11} = 0,\ \gamma_{11} w_{11} = 0,\ \partial_{21} w_{11} = -\partial_{21} v_{11} =: \delta_{21}. \tag{1.47}$$

Напомним (см. [22]), что имеет место ортогональное разложение

$$F_1 = N_1 \oplus M_1,\ N_1 := \ker \gamma_1,\ M_1 = \ker L_1,$$

причем между элементами $v_{11} \in M_1$ и их следами $\gamma_1 v_{11}$ имеет место изоморфизм и даже изометрия при соответствующем выборе нормы в $(G_+)_1$. Отсюда следует, что при любом $\widehat{\varphi}_1 \in (G_+)_1$ задача (1.46) имеет единственное решение $v_{11} = \widetilde{\gamma}_1^{-1}\widehat{\varphi}_1 = \widetilde{\gamma}_1^{-1}\omega_{11}\varphi_1 \in M_1 \subset F_1$, где $\widetilde{\gamma}_1 = \gamma_1|_{M_1}$. Тогда, как следует из рассмотрений первого параграфа,

$$\delta_{21} := -\partial_{21} v_{11} \in (G_+)^*_{21}. \tag{1.48}$$

Назовем слабым решением задачи (1.47) такой элемент $w_{11} \in M_1$, для которого выполнено тождество

$$(\eta_1, w_{11})_{F_1} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \delta_{21} \rangle_{G_{21}},\ \forall \eta_1 \in F_{0,G_{11}}, \tag{1.49}$$

$$F_{0,G_{11}} := \{\eta_1 \in F_1 : \gamma_{11}\eta_1 = 0\}.$$

В (1.49) правая часть является линейным ограниченным функционалом в $(G_+)_{21}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.48). Поэтому задача (1.49) имеет единственное слабое решение

$$w_{11} \in F_{0,G_{11}} \cap M_1 =: M_{0,G_{11}} \subset F_1. \tag{1.50}$$

Эти рассмотрения, а также аналогичные рассмотрения задач (1.43), (1.44) приводят к следующему выводу.

Теорема 1.8. *Каждая из задач Зарембы (1.42)–(1.44) имеет единственное слабое решение* $u_{1k} \in M_k \subset F_k,\ k = \overline{1,3}$, *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\varphi_k \in (G_+)_{kk} \subset G_{kk},\ k = \overline{1,3}. \tag{1.51}$$

□

Отсюда следует, что решение задачи (1.42) - (1.44) имеет вид

$$u_{(1)} = (u_{11}; u_{12}; u_{13}),\ u_{1k} = \widetilde{\gamma}_{kk}^{-1}\varphi_k,\ k = \overline{1,3}, \tag{1.52}$$

где $\widetilde{\gamma}_{kk}^{-1} : (G_+)_{kk} \to M_k \subset F_k$ – ограниченные (и ограниченно обратимые) операторы, $\widetilde{\gamma}_{kk} := \gamma|_{G_{kk}}$.

Вторая вспомогательная задача (задача Стеклова)

Найти набор элементов

$$u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}; u_{23}) \in F = \bigoplus_{k=1}^{3} F_k \tag{1.53}$$

из следующей системы уравнений и краевых условий:

$$\begin{gathered} L_k u_{2k} = 0,\ \gamma_{kk} u_{2k} = 0,\ k = \overline{1,3}, \\ \gamma_{21}u_{21} - \gamma_{12}u_{22} = \widetilde{\varphi}_{21} := \varphi_{21} - \gamma_{21}u_{11} + \gamma_{12}u_{12}, \\ \partial_{21}u_{21} + \partial_{12}u_{22} = 0, \\ \gamma_{32}u_{22} - \gamma_{23}u_{23} = \widetilde{\varphi}_{32} := \varphi_{32} - \gamma_{32}u_{12} + \gamma_{23}u_{13}, \\ \partial_{32}u_{22} + \partial_{23}u_{23} = 0. \end{gathered} \tag{1.54}$$

Здесь φ_{21} и φ_{32} — заданные элементы, а $u_{11},\ u_{12}$ и u_{13} — компоненты решения $u_{(1)}$ первой вспомогательной задачи (1.42)–(1.44).

Представим последнюю группу условий на стыках в виде

$$\partial_{21}u_{21} = -\partial_{12}u_{22} =: \chi_{21},\ \partial_{32}u_{22} = -\partial_{23}u_{23} =: \chi_{32}.$$

Если элементы χ_{21} и χ_{32} известны, то для нахождения $u_{2k},\ k = \overline{1,3}$, возникают три задачи вида (1.47):

$$L_1 u_{21} = 0,\ \gamma_{11}u_{21} = 0;\ \partial_{21}u_{21} = \chi_{21}; \tag{1.55}$$

$$L_2 u_{22} = 0,\ \gamma_{22}u_{22} = 0;\ \partial_{12}u_{22} = -\chi_{21},\ \partial_{32}u_{22} = \chi_{32}; \tag{1.56}$$

$$L_3 u_{23} = 0,\ \gamma_{33} u_{23} = 0;\ \partial_{23} u_{23} = -\chi_{32}. \tag{1.57}$$

Определим, как и в (1.49), слабое решение задачи (1.55) посредством тождества

$$(\eta_1, u_{21})_{F_1} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{21}\rangle_{G_{21}},\ \forall \eta_1 \in F_{0,G_{11}}. \tag{1.58}$$

Если $\chi_{21} \in (G_+)^*_{21}$, то существует единственное слабое решение

$$u_{21} =: V_{21}\chi_{21} \in M_{0,G_{11}} \subset M_1 \subset F_1, \tag{1.59}$$

где $V_{21} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21},\ M_{0,G_{11}})$, т.е. является линейным ограниченным оператором, действующим из $(G_+)^*_{21}$ в $M_{0,G_{11}}$. Заметим ещё, что если $\chi_{21} \in G_{21}$ (см. (1.31), (1.32)), то задача (1.55) имеет единственное обобщенное решение.

Аналогичным образом, представляя решение задачи (1.56) в виде суммы двух слагаемых, которые определяются элементами $-\chi_{21}$ и χ_{32}, используя формулу Грина (1.34) и определяя для этих слагаемых слабые решения посредством тождеств вида (1.58), приходим к выводу, что при условиях

$$\chi_{21} \in (G_+)^*_{21},\ \chi_{32} \in (G_+)^*_{32}$$

задача (1.56) имеет единственное слабое решение, выражаемое формулой

$$u_{22} = V_{12}(-\chi_{21}) + V_{32}(\chi_{32}), \tag{1.60}$$

$$V_{12} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21},\ M_{0,G_{22}}),\ V_{32} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32},\ M_{0,G_{22}}),$$

$$M_{0,G_{22}} = F_{0,G_{22}} \cap M_2,\quad F_{0,G_{22}} = \{\eta_2 \in F_2 : \gamma_{22}\eta_2 = 0\}. \tag{1.61}$$

Если $\chi_{21} \in G_{21},\ \chi_{32} \in G_{32}$ (см. (1.31)), то задача (1.56) имеет единственное обобщенное решение, также выражаемое формулой (1.60).

Наконец, при условии $\chi_{32} \in (G_+)^*_{32}$ задача (1.57), аналогично задаче (1.55), имеет единственное слабое решение

$$u_{23} = V_{23}(-\chi_{32}),\ V_{23} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32},\ M_{0,G_{33}}), \tag{1.62}$$

а при $\chi_{32} \in G_{32}$ формула (1.62) даёт её обобщенное решение.

Имея представления (1.59), (1.60) и (1.62) для слабых решений вспомогательных задач (1.55)–(1.57) и опираясь на первую группу граничных условий на стыке в (1.54), получим следующие уравнения для нахождения неизвестных до сих пор элементов χ_{21} и χ_{32}:

$$\gamma_{21}V_{21}\chi_{21} - \gamma_{12}(V_{12}(-\chi_{21}) + V_{32}\chi_{32}) = \widetilde{\varphi}_{21},$$
$$\gamma_{32}(V_{12}(-\chi_{21}) + V_{32}\chi_{32}) - \gamma_{23}(-V_{23}\chi_{32}) = \widetilde{\varphi}_{32}. \tag{1.63}$$

Перепишем эту систему в виде:

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{21} \\ \chi_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_{21} \\ \widetilde{\varphi}_{32} \end{pmatrix}, \tag{1.64}$$

$$\begin{gathered} C_{11} := \gamma_{21}V_{21} + \gamma_{12}V_{12} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21}, (G_+)_{21}), \\ C_{12} := -\gamma_{12}V_{32} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32}, (G_+)_{21}), \\ C_{21} := -\gamma_{32}V_{12} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21}, (G_+)_{32}), \\ C_{22} := \gamma_{32}V_{32} + \gamma_{23}V_{23} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32}, (G_+)_{32}), \end{gathered} \tag{1.65}$$

и будем рассматривать (1.64) как отображение

$$C\chi = \widetilde{\varphi}, \quad C := (C_{jk})^2_{j,k=1}, \tag{1.66}$$

$$\widetilde{\varphi} := (\widetilde{\varphi}_{21}; \widetilde{\varphi}_{32})^\tau \in (G_+)_{21}(\dot{+})(G_+)_{32};$$

$$\chi := (\chi_{21}; \chi_{32})^\tau \in (G_+)^*_{21}(\dot{+})(G_+)^*_{32}.$$

Назовём операторную матрицу C матрицей В.А. Стеклова; в задаче (1.54) она переводит данные Неймана в данные Дирихле.

Опираясь на свойства операторов $\gamma_{jk} = \rho_{jk}\gamma_k$, V_{jk}, а также слабых и обобщенных решений вспомогательных задач (1.55)–(1.57), изучим общие свойства оператора Стеклова из (1.66), (1.65).

Лемма 1.4. *Операторы* $\gamma_{jk} : F_k \to G_{jk}$ *и* $V_{jk} : (G_{jk})^* \to M_{0,G_{kk}} \subset F_k$ *взаимно сопряжены.*

Доказательство. Проверим сначала, что γ_{21} и V_{21} взаимно сопряжены. С этой целью подставим представление (1.59) для слабого решения вспомогательной задачи (1.55) в тождество (1.58); будем иметь соотношение

$$(\eta_1, V_{21}\chi_{21})_{F_1} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{21} \rangle_{G_{21}}, \ \forall \eta_1 \in F_{0,G_{11}}, \ \forall \chi_{21} \in (G_+)^*_{21}. \tag{1.67}$$

Аналогично проверяется, исходя из тождества

$$(\eta_3, u_{23})_{F_3} = \langle \gamma_{23}\eta_3, (-\chi_{32})\rangle_{G_{32}},\ \forall \eta_3 \in F_{0,G_{33}},\ \forall \chi_{32} \in (G_+)^*_{32}, \tag{1.68}$$

а также представления (1.62) для u_{23}, что γ_{23} и V_{23} тоже взаимно сопряжены. Наконец, свойства взаимной сопряженности γ_{12} и V_{12}, а также γ_{32} и V_{32}, следуют из тождеств

$$(\eta_2, v_{22})_{F_2} = \langle \gamma_{12}\eta_2, (-\chi_{21})\rangle_{G_{21}},\ \forall \eta_2 \in F_{0,G_{22}},\ \forall \chi_{21} \in (G_+)^*_{21}, \tag{1.69}$$

$$(\eta_2, w_{22})_{F_2} = \langle \gamma_{32}\eta_2, \chi_{32}\rangle_{G_{32}},\ \forall \eta_2 \in F_{0,G_{22}},\ \forall \chi_{32} \in (G_+)^*_{32}, \tag{1.70}$$

а также соотношений (см. (1.60))

$$v_{22} = V_{12}(-\chi_{21}),\ w_{22} = V_{32}\chi_{32},\ u_{22} = v_{22} + w_{22}, \tag{1.71}$$

которые выполнены для слабых решений задачи (1.56). □

Лемма 1.5. *Оператор C из (1.65), (1.66),*

$$C : (G_+)^*_{21}(\dot{+})(G_+)^*_{32} \to (G_+)_{21}(\dot{+})(G_+)_{32},$$

является положительным оператором:

$$\langle C\chi, \chi\rangle = \sum_{k=1}^{3} \|u_{2k}\|^2_{F_k}, \tag{1.72}$$

где $u_{2k},\ k = \overline{1,3}$, — слабые решения вспомогательных задач (1.55)– (1.57).

Доказательство. Оно основано на тождествах (1.58), (1.69), (1.70), представлениях (1.59), (1.62), (1.71) и свойствах взаимной сопряженности операторов γ_{jk} и V_{jk}. Имеем

$$\langle C\chi, \chi\rangle = \langle C_{11}\chi_{21}, \chi_{21}\rangle_{G_{21}} + \langle C_{12}\chi_{32}, \chi_{21}\rangle_{G_{21}} + \langle C_{21}\chi_{21}, \chi_{32}\rangle_{G_{32}} +$$

$$+\langle C_{22}\chi_{32}, \chi_{32}\rangle_{G_{32}} = \langle \gamma_{21}V_{21}\chi_{21}, \chi_{21}\rangle_{G_{21}} + \{-\langle \gamma_{12}(V_{32}\chi_{32} + V_{12}(-\chi_{21})), \chi_{21}\rangle_{G_{21}} +$$

$$+\langle \gamma_{32}(V_{32}\chi_{32} + V_{12}(-\chi_{21})), \chi_{32}\rangle_{G_{32}}\} + \langle \gamma_{23}V_{23}(-\chi_{32}), (-\chi_{32})\rangle_{G_{32}} =$$

$$= \|V_{21}\chi_{21}\|^2_{F_1} + \|V_{32}\chi_{32} + V_{12}(-\chi_{21})\|^2_{F_2} + \|V_{23}(-\chi_{32})\|^2_{F_3} = \sum_{k=1}^{3} \|u_{2k}\|^2_{F_k}.$$

□

Из тождества (1.72), а также из (1.31), (1.32), получаем, что существует обратный оператор C^{-1}, действующий из $(G_+)_{21}(\dot{+})(G_+)_{32}$ на $(G_+)^*_{21}(\dot{+})(G_+)^*_{32}$, тогда этот оператор по теореме Банаха ограничен. Поэтому задача (1.66) имеет единственное решение

$$\chi = (\chi_{21}; \chi_{32})^\tau = C^{-1}\widetilde{\varphi} = C^{-1}(\widetilde{\varphi}_{21}; \widetilde{\varphi}_{32})^\tau.$$

Итогом проведенных рассмотрений является такой вывод.

Теорема 1.9. *Задача Стеклова (1.53) имеет единственное слабое решение*

$$u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}; u_{23})^\tau \in \bigoplus_{k=1}^{3} M_{0,G_{kk}} \subset \bigoplus_{k=1}^{3} F_k,\ k = \overline{1,3},$$

тогда и только тогда, когда выполнены условия (1.51), а также условия

$$\varphi_{21} \in (G_+)_{21}, \quad \varphi_{32} \in (G_+)_{32}. \tag{1.73}$$

При этом имеет место следующее представление для её решения:

$$u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}; u_{23})^\tau = (V_{21}\chi_{21}; V_{32}\chi_{32} - V_{12}\chi_{21}; -V_{32}\chi_{32})^\tau, \tag{1.74}$$

$$\chi = (\chi_{21}; \chi_{32})^\tau = C^{-1}(\varphi_{21} - \gamma_{21}\widetilde{\gamma}_{11}^{-1}\varphi_1 + \gamma_{12}\widetilde{\gamma}_{22}^{-1}\varphi_2;\ \varphi_{32} - \gamma_{32}\widetilde{\gamma}_{22}^{-1}\varphi_2 + \gamma_{23}\widetilde{\gamma}_{33}^{-1}\varphi_3)^\tau.$$

Здесь операторы V_{jk} введены в (1.59), (1.60), (1.62), операторы $\widetilde{\gamma}_{kk}^{-1}$ — в (1.52), операторная матрица C задана формулами (1.66), (1.65), а γ_{jk} — оператор следа из F_k на $(G_+)_{jk}$ (см. (1.31), (1.32)). □

Первая вспомогательная задача С.Крейна

Такое название происходит от подхода, применённого С.Крейном при исследовании проблемы колебаний тяжелой вязкой жидкости в открытом сосуде (см. [26], [27], а также [25] ,гл.6).

Эта задача в исследуемой проблеме состоит в нахождении набора элементов

$$u_{(3)} = (u_{31}; u_{32}; u_{33})^\tau \in \bigoplus_{k=1}^{3} F_k,$$

которые являются решением следующей системы уравнений и краевых условий:

$$\begin{aligned} L_k u_{3k} &= f_k, & \gamma_{kk} u_{3k} &= 0,\ k = \overline{1,3}, \\ \gamma_{21}u_{31} - \gamma_{12}u_{32} &= 0, & \partial_{21}u_{31} + \partial_{12}u_{32} &= 0, \\ \gamma_{32}u_{32} - \gamma_{23}u_{33} &= 0, & \partial_{32}u_{32} + \partial_{23}u_{33} &= 0. \end{aligned} \tag{1.75}$$

Здесь все граничные условия однородные, а уравнения неоднородные.

Для исследования проблемы (1.75) введём в рассмотрение подпространство, отвечающее "главным" краевым условиям:

$$W_{0,\gamma} := \{u = (u_1; u_2; u_3)^\tau \in \bigoplus_{k=1}^{3} F_k : \gamma_{kk} u_k = 0,\ k = \overline{1,3};$$

$$\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 = 0,\ \gamma_{32} u_2 - \gamma_{23} u_3 = 0\} \subset \bigoplus_{k=1}^{3} F_{0,G_{kk}} \subset \bigoplus_{k=1}^{3} F_k. \tag{1.76}$$

Для элементов $\eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3)^\tau$ и $u = (u_1; u_2; u_3)^\tau$ из $W_{0,\gamma}$ из тождеств (1.33)–(1.34) получаем следующую формулу Грина

$$\sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_k)_{F_k} = \sum_{k=1}^{3} \langle \eta_k, L_k u_k \rangle_{E_k} + \langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 \rangle_{G_{21}} +$$

$$+ \langle \gamma_{32}\eta_2, \partial_{32} u_2 + \partial_{23} u_3 \rangle_{G_{32}}. \tag{1.77}$$

На её основе определим слабое решение задачи (1.77) как такой элемент $u_{(3)} = (u_{31}; u_{32}; u_{33})^\tau$ из $W_{0,\gamma}$, для которого имеет место тождество

$$\sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{3k})_{F_k} = \sum_{k=1}^{3} \langle \eta_k, f_k \rangle_{E_k},\ \forall \eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3)^\tau \in W_{0,\gamma}. \tag{1.78}$$

Теорема 1.10. *Первая вспомогательная задача С.Крейна (1.75) имеет единственное слабое решение $u_{(3)} \in W_{0,\gamma}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f := (f_1; f_2; f_3)^\tau \in (W_{0,\gamma})^*. \tag{1.79}$$

В этом случае решение выражается формулой

$$u_{(3)} = A^{-1} f, \tag{1.80}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(W_{0,\gamma}; E),\ E := \bigoplus_{k=1}^{3} E_k$.

В частности, если

$$f := (f_1; f_2; f_3)^\tau \in E, \tag{1.81}$$

то задача (1.75) имеет единственное обобщенное решение, выражаемое той же формулой (1.80).

Доказательство. Перепишем коротко тождество (1.78) в виде

$$(\eta, u_{(3)})_F = \langle \eta, f \rangle_E, \ \forall \eta \in W_{0,\gamma}. \tag{1.82}$$

Заметим теперь, что $W_{0,\gamma}$ плотно вложено в $E := \bigoplus_{k=1}^{3} E_k$, так как

$$N := \bigoplus_{k=1}^{3} N_k \subset W_{0,\gamma} \subset F = \bigoplus_{k=1}^{3} F_k,$$

а N_k и F_k плотно вложены в E_k (см. свойства 1° и 3° из п. 1.1.1). Поэтому $W_{0,\gamma}$ и E образуют гильбертову пару пространств.

Отсюда следует, что правая часть в (1.82) является линейным ограниченным функционалом в $W_{0,\gamma}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (1.79). Поэтому по теореме Ф.Рисса получаем, что существует единственный элемент $u_{(3)} \in W_{0,\gamma}$, для которого выполнено тождество (1.82).

Пусть A – оператор гильбертовой пары $(W_{0,\gamma}; E)$. Тогда из (1.82) и определения оператора этой пары имеем

$$(\eta, u_{(3)})_F = \langle \eta, Au_{(3)} \rangle_E = \langle \eta, f \rangle_E, \ \forall \eta \in W_{0,\gamma}.$$

Отсюда и следует представление (1.80). Если же $f \in E$ (см. (1.81)), то можно считать, что оператор A задан на области определения $\mathcal{D}(A) \subset W_{0,\gamma} = \mathcal{D}(A^{1/2}) \subset E$ и имеет область значений $\mathcal{R}(A) = E$. В этом случае $\langle \eta, f \rangle_E = (\eta, f)_E$ и $u_{(3)} = A^{-1} f \in \mathcal{D}(A)$ – обобщенное решение задачи (1.75). $\square$

Вторая вспомогательная задача С.Крейна

Эта проблема является аналогом неоднородной задачи Неймана для уравнения Лапласа, в то время как первая вспомогательная задача С.Крейна — аналог однородной задачи Неймана для уравнения Пуассона.

Требуется найти такой набор элементов

$$u_{(4)} = (u_{41}; u_{42}; u_{43})^{\tau} \in W_{0,\gamma},$$

которые являются решением следующей системы уравнений и граничных условий:

$$\begin{aligned} L_1u_{41} &= 0, & \gamma_{11}u_{41} &= 0,\\ L_2u_{42} &= 0, & \gamma_{22}u_{42} &= 0,\\ L_3u_{43} &= 0, & \gamma_{33}u_{43} &= 0,\\ \gamma_{21}u_{41} - \gamma_{12}u_{42} &= 0, & \partial_{21}u_{41} + \partial_{12}u_{42} &= \psi_{21},\\ \gamma_{32}u_{42} - \gamma_{23}u_{43} &= 0, & \partial_{32}u_{42} + \partial_{23}u_{43} &= \psi_{32}. \end{aligned} \tag{1.83}$$

Здесь неоднородными являются лишь граничные условия типа Неймана.

Из формулы Грина (1.77) получаем определение слабого решения задачи (1.83): это такой элемент $u_{(4)} \in W_{0,\gamma}$, для которого выполнено тождество

$$(\eta, u_{(4)})_F = \sum_{k=1}^{3}(\eta_k, u_{4k})_{F_k} = \langle\gamma_{21}\eta_1, \psi_{21}\rangle_{G_{21}} + \langle\gamma_{32}\eta_2, \psi_{32}\rangle_{G_{32}},\ \forall\eta \in W_{0,\gamma}. \tag{1.84}$$

Теорема 1.11. *Вторая вспомогательная задача С.Крейна (1.83) имеет единственное слабое решение $u_{(4)} \in W_{0,\gamma}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\psi_{21} \in (G_+)^*_{21},\ \psi_{32} \in (G_+)^*_{32}. \tag{1.85}$$

Это решение имеет вид

$$u_{(4)} = B_{21}\psi_{21} + B_{32}\psi_{32}, \tag{1.86}$$

$$B_{21} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{21}; M_{0,\gamma}),\ B_{32} \in \mathcal{L}((G_+)^*_{32}; M_{0,\gamma}), \tag{1.87}$$

$$M_{0,\gamma} = W_{0,\gamma} \cap M_0,\ M_0 := \bigoplus_{k=1}^{3} M_{0,G_{kk}}.$$

(Определение подпространств $M_{0,G_{kk}}$ см. в (1.50), (1.61).)

Доказательство. Оно проводится по схеме доказательства существования слабого решения задачи (1.56) и основано на том, что правая часть в (1.84) является суммой линейных ограниченных функционалов в $W_{0,\gamma}$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (1.85). Поэтому слабое решение задачи (1.83) представляется в виде суммы двух слагаемых и имеет вид (1.86) со свойствами операторов из (1.87). □

Лемма 1.6. *Операторы B_{21} и B_{32} из (1.86), (1.87) обладают свойствами*

$$\gamma_{21}\rho_1 = \gamma_{12}\rho_2 = (B_{21})^*,\ \gamma_{32}\rho_2 = \gamma_{23}\rho_3 = (B_{32})^*, \tag{1.88}$$

где $\rho_k : F \to F_k,\ k = \overline{1,3},$ – операторы сужения.

Доказательство. Свойства $\gamma_{21}\rho_1 = \gamma_{12}\rho_2$ и $\gamma_{32}\rho_2 = \gamma_{23}\rho_3$ следуют из определения (1.76) подпространства $W_{0,\gamma}$, а свойства $\gamma_{21}\rho_1 = (B_{21})^*$ и $\gamma_{32}\rho_2 = (B_{32})^*$ — из определения слабых решений двух слагаемых, сумма которых даёт слабое решение задачи (1.83):

$$u_{(4)} = v_{(4)} + w_{(4)},$$
$$(\eta, v_{(4)})_F = \langle \gamma_{21}\rho_1\eta, \psi_{21}\rangle_{G_{21}}, \quad (\eta, w_{(4)})_F = \langle \gamma_{32}\rho_2\eta, \psi_{32}\rangle_{G_{32}}, \ \forall \eta \in W_{0,\gamma},$$
$$v_{(4)} = B_{21}\psi_{21}, \ w_{(4)} = B_{32}\psi_{32}.$$

□

Итоговый результат

Итогом рассмотрения исходной смешанной краевой задачи сопряжения (1.36)–(1.39) является следующее утверждение.

Теорема 1.12. *Пусть выполнены условия (см. параграф 1, теорема 1.6), обеспечивающие существование абстрактных формул Грина (1.33)–(1.35). Тогда задача сопряжения (1.36)–(1.39) имеет единственное слабое решение в форме (1.40), (1.41) в том и только в том случае, когда выполнены условия теорем 2.1 - 2.4, т.е. условия (1.51), (1.73), (1.79), (1.85). При этом*

$$u = (u_1; u_2; u_3)^\tau = \sum_{j=1}^{4} (u_{j1}; u_{j2}; u_{j3})^\tau =: \sum_{j=1}^{4} u_{(j)},$$

где $u_{(j)}$ при $j = \overline{1,4}$, даются соответственно формулами (1.52), (1.74), (1.80) и (1.86), т.е. выражаются через исходные данные через операторы введённых выше абстрактных краевых задач. □

Следствие 1.3. *То, что сумма решений четырех вспомогательных краевых задач (Зарембы, Стеклова и двух задач С.Крейна) действительно даёт решение исходной задачи (1.36)–(1.39), легко проверяется непосредственно. Кроме того, можно проверить, опираясь на формулы Грина (1.33)–(1.35), что однородная задача имеет лишь нулевое решение. Отсюда следует единственность представления решения исходной задачи в виде суммы решений упомянутых четырех вспомогательных задач, выражаемых приведенными итоговыми формулами.*

1.2.3 Скалярные искомые функции, оператор Лапласа, конфигурация "дважды разрезанный банан"

Вернёмся к задаче (1.27)–(1.30) (см. рис. 2.1) и применим к её исследованию общую схему, изложенную в пп. 1.2.2. При этом будем использовать обобщённые формулы Грина в форме (1.16), (1.17) (теорема 1.5) либо в форме (1.25), (1.26) (теорема 1.7), а также уточним функциональные пространства, в которых будет происходить рассмотрение вспомогательных краевых задач.

Итак, в составной области, представленной на рис. 1.1, рассмотрим следующую задачу сопряжения:

$$\begin{aligned}
&u_1 - \triangle u_1 = f_1 \ \ (\text{в } \Omega_1), \qquad \gamma_{11}u_1 = \varphi_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11}),\\
&u_2 - \triangle u_2 = f_2 \ \ (\text{в } \Omega_2), \qquad \gamma_{22}u_2 = \varphi_2 \ \ (\text{на } \Gamma_{22}),\\
&u_3 - \triangle u_3 = f_3 \ \ (\text{в } \Omega_3), \qquad \gamma_{33}u_3 = \varphi_3 \ \ (\text{на } \Gamma_{33});\\
&\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = \varphi_{21}, \quad \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{21} \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\\
&\gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = \varphi_{32}, \quad \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3 = \psi_{32} \ (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}).
\end{aligned} \tag{1.89}$$

Её решение ищем в виде набора $u = (u_1; u_2; u_3)^\tau$, причём

$$u = (u_1; u_2; u_3)^\tau = \sum_{j=1}^{4}(u_{j1}; u_{j2}; u_{j3})^\tau =: \sum_{j=1}^{4} u_{(j)},$$

где $u_{(j)},\ j = \overline{1,4}$, — решения четырех вспомогательных задач, которые сейчас будут рассмотрены.

Для $u_{(1)} = (u_{11}; u_{12}; u_{13})^\tau$ имеем задачу Зарембы, которая распадается на три независимые задачи:

$$u_{11} - \triangle u_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1),\ \gamma_{11}u_{11} = \varphi_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}),\ \partial_{21}u_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}); \tag{1.90}$$

$$\begin{gathered}
u_{12} - \triangle u_{12} = 0 \ (\text{в } \Omega_2),\ \gamma_{22}u_{12} = \varphi_2 \ (\text{на } \Gamma_{22}),\\
\partial_{12}u_{12} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\ \partial_{32}u_{12} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23});
\end{gathered} \tag{1.91}$$

$$u_{13} - \triangle u_{13} = 0 \ (\text{в } \Omega_3),\ \gamma_{33}u_{13} = \varphi_3 \ (\text{на } \Gamma_{33}),\ \partial_{23}u_{13} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}). \tag{1.92}$$

Рассматривая первую из них, т.е. задачу (1.90), будем считать, что её решение $u_{11}(x)$ есть функция из $H_h^1(\Omega_1)$ (см. (1.11),(1.12)). Тогда её след $\gamma_1 u_{11}(x)$ на $\partial\Omega_1$ есть функция из $H^{1/2}(\partial\Omega_1)$, а на Γ_{11} — след является функцией из $H^{1/2}(\Gamma_{11})$. Таким образом, необходимым условием разрешимости задачи (1.90) является условие

$$\varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{11}). \tag{1.93}$$

Покажем, что это условие является и достаточным для существования слабого решения задачи (1.90).

Продолжим функцию φ_1, заданную на Γ_{11}, на всю границу $\partial\Omega_1$ липшицевой области Ω_1. Это можно сделать, согласно лемме 1.3, так как по предположению $\partial\Gamma_{11}$ — липшицева граница липшицевой поверхности Γ_{11}. Тогда функция $\widehat{\varphi}_1 := \omega_{11}\varphi_1 \in H^{1/2}(\partial\Omega_1)$, где $\omega_{11} : H^{1/2}(\Gamma_{11}) \to H^{1/2}(\partial\Omega_1)$ — ограниченный оператор продолжения В.С. Рычкова. Поскольку между элементами из $H^1_h(\Omega_1)$ и $H^{1/2}(\partial\Omega_1)$ имеет место взаимно однозначное соответствие (и даже изометрия при соответствующем выборе эквивалентной нормы в $H^{1/2}(\partial\Omega_1)$), то существует единственный элемент

$$v_{11} = \widehat{\gamma}_1^{-1}\omega_{11}\varphi_1 \in H^1_h(\Omega_1), \tag{1.94}$$

который является решением задачи

$$v_{11} - \Delta v_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_1 v_{11} = \omega_{11}\varphi_1 \ (\text{на } \partial\Omega_1). \tag{1.95}$$

Для функции $w_{11} := u_{11} - v_{11}$ из (1.90), (1.95) возникает задача Неймана

$$w_{11} - \Delta w_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11} w_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}),$$

$$\partial_{21} w_{11} = -\partial_{21} v_{11} \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}). \tag{1.96}$$

Её слабое решение естественно рассматривать в пространстве

$$H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) := \{u_1 \in H^1(\Omega_1) : \gamma_{11} u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11})\}. \tag{1.97}$$

Из условия на Γ_{11} в (1.96) следует, что $\gamma_{21} w_{11} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21})$ (см. п. 1.3), и тогда по лемме 1.2 получаем, что в задаче (1.96) должно быть выполнено необходимое условие

$$\partial_{21} v_{11} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}). \tag{1.98}$$

Покажем, что это условие является и достаточным для существования слабого решения задачи (1.96), причём оно действительно имеет место.

Воспользуемся формулой Грина

$$(\eta_1,\ w_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1,\ w_{11} - \triangle w_{11}\rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_{21}\eta_1,\ \partial_{21}w_{11}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}, \tag{1.99}$$

$$\gamma_{21}\eta_1 \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21}),\ \partial_{21}w_{11} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}),\ \forall \eta_1,\ w_{11} \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1), \tag{1.100}$$

которая следует из формулы (1.16) (теорема 1.5). На её основе естественно определяется слабое решение $w_{11} \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1)$ задачи (1.96) как такая функция, для которой выполнено тождество

$$(\eta_1,\ w_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{21}\eta_1,\ (-\partial_{21}v_{11})\rangle_{L_2(\Gamma_{21})},\ \forall \eta_1 \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1). \tag{1.101}$$

Здесь в силу (1.98) и леммы 1.2 правая часть является линейным ограниченным функционалом в $H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1)$. Поэтому при любом $\varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{11})$ существует единственная функция $w_{11} \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1)$, являющаяся слабым решением задачи (1.96):

$$w_{11} =: V_{21}(-\partial_{21}v_{11}) = -V_{21}\partial_{21}\widehat{\gamma}_1^{-1}\omega_{11}\varphi_1,$$

где $V_{21} : H^{-1/2}(\Gamma_{21}) \to H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1)$ – ограниченный оператор.

Окончательно приходим к выводу, что условие (1.93) является необходимым и достаточным условием существования слабого решения $u_{11} \in H^1_h(\Omega_1)$, и это решение выражается формулой

$$u_{11} = v_{11} + w_{11} = \widehat{\gamma}_1^{-1}\omega_{11}\varphi_1 - V_{21}\partial_{21}\widehat{\gamma}_1^{-1}\omega_{11}\varphi_1 =: \widehat{\gamma}_{11}^{-1}\varphi_1, \tag{1.102}$$

где $\widehat{\gamma}_{11}^{-1} : H^{1/2}(\Gamma_{11}) \to H^1_h(\Omega_1)$ – ограниченный оператор.

Аналогично рассматриваются задачи (1.91) и (1.92), и итогом рассмотрения является следующее утверждение.

Теорема 1.13. *Каждая из задач Зарембы (1.90)–(1.92) имеет единственное слабое решение $u_{1k} \in H^1_{0,\Gamma_{kk}}(\Omega_k) \cap H^1_h(\Omega_k)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_{kk}),\ k = \overline{1,3}, \tag{1.103}$$

и это решение выражается формулой (см. (1.102))

$$u_{1k} = \widehat{\gamma}_{kk}^{-1}\varphi_k,\ \widehat{\gamma}_{kk}^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_{kk});\ H^1_h(\Omega_k)),\ k = \overline{1,3}. \tag{1.104}$$

□

Перейдем теперь ко второму этапу — рассмотрению задачи Стеклова применительно к проблеме (1.89). Как следует из абстрактной постановки этой задачи (см. (1.53), (1.54)), необходимо исследовать проблему нахождения набора $u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}; u_{23})^{\tau}$ из следующих уравнений и краевых условий:

$$\begin{aligned} &u_{21} - \triangle u_{21} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11}u_{21} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &u_{22} - \triangle u_{22} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \gamma_{22}u_{22} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22}),\\ &u_{23} - \triangle u_{23} = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \gamma_{33}u_{23} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{33}), \end{aligned} \tag{1.105}$$

$$\begin{gathered} \gamma_{21}u_{21} - \gamma_{12}u_{22} = \widetilde{\varphi}_{21} := \varphi_{21} - \gamma_{21}u_{11} + \gamma_{12}u_{12},\\ \partial_{21}u_{21} = -\partial_{12}u_{22} (=: \chi_{21}) \quad (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}),\\ \gamma_{32}u_{22} - \gamma_{23}u_{23} = \widetilde{\varphi}_{32} := \varphi_{32} - \gamma_{32}u_{12} + \gamma_{23}u_{13},\\ \partial_{32}u_{22} = -\partial_{23}u_{23} (=: \chi_{32}) \quad (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}). \end{gathered} \tag{1.106}$$

Здесь $(u_{11}; u_{12}; u_{13})^{\tau} = u_{(1)}$ — решение задачи Зарембы (см. (1.90)– (1.92)), а φ_{21} и φ_{32} — заданные функции.

Если функции χ_{21} и χ_{32} известны, то вместо (1.105), (1.106) возникают три распадающиеся задачи Неймана. В частности, для функции u_{21} имеем задачу

$$u_{21} - \Delta u_{21} = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \ \gamma_{11}u_{21} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \ \partial_{21}u_{21} = \chi_{21} \ (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}),$$

слабое решение которой будем разыскивать в пространстве

$$H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1) =: H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1).$$

Эта задача уже рассмотрена выше (см. (1.96)-(1.101)). Для её слабой разрешимости необходимо и достаточно (см. (1.98)), чтобы выполнялось условие

$$\chi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}),$$

а тогда решение выражается формулой

$$u_{21} = V_{21}\chi_{21}, \ V_{21} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21}); \ H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)). \tag{1.107}$$

Аналогичное рассмотрение двух других задач Неймана, возникающих из проблемы (1.105), (1.106) и основанное на обобщенных формулах Грина

$$(\eta_2, \ u_{22})_{H^1(\Omega_2)} = \langle \eta_2, \ u_{22} - \Delta u_{22}\rangle_{L_2(\Omega_2)} + \langle \gamma_{12}\eta_2, \ \partial_{12}u_{22}\rangle_{L_2(\Gamma_{12})} +$$

$$+\langle\gamma_{32}\eta_2,\ \partial_{32}u_{22}\rangle_{L_2(\Gamma_{32})},\ \forall\eta_2,\ u_{22}\in H^1_{0,\Gamma_{22}}(\Omega_2),$$

$$(\eta_3,\ u_{23})_{H^1(\Omega_3)}=\langle\eta_3,\ u_{23}-\Delta u_{23}\rangle_{L_2(\Omega_3)}+\langle\gamma_{23}\eta_3,\ \partial_{23}u_{23}\rangle_{L_2(\Gamma_{23})},\ \forall\eta_3,\ u_{23}\in H^1_{0,\Gamma_{33}}(\Omega_3),$$

приводит к следующему выводу:

$$\begin{gathered}u_{22}=V_{12}\chi_{21}-V_{32}\chi_{32},\\ V_{12}\in\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21});\ H^1_{0,\Gamma_{22},h}(\Omega_2)),\ V_{32}\in\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{32});\ H^1_{0,\Gamma_{22},h}(\Omega_2)),\\ u_{23}=-V_{23}\chi_{32},\ V_{23}\in\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{32});\ H^1_{0,\Gamma_{33},h}(\Omega_3)).\end{gathered}\tag{1.108}$$

Имея представления (1.107), (1.108), из главных граничных условий в (1.106) приходим к системе уравнений (см. (1.63), (1.64)):

$$\begin{pmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi_{21}\\ \chi_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\widetilde{\varphi}_{21}\\ \widetilde{\varphi}_{32}\end{pmatrix},\tag{1.109}$$

$$\begin{gathered}C_{11}:=\gamma_{21}V_{21}+\gamma_{12}V_{12}\ \in\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21});\ \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21})),\\ C_{12}:=-\gamma_{12}V_{32}\ \in\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{32});\ \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21})),\\ C_{21}:=-\gamma_{32}V_{12}\ \in\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21});\ \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32})),\\ C_{22}:=\gamma_{32}V_{32}+\gamma_{23}V_{23}\ \in\mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{32});\ \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32})).\end{gathered}\tag{1.110}$$

Здесь матрица Стеклова

$$C:=(C_{jk})^2_{j,k=1}\tag{1.111}$$

отображает $H^{-1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})H^{-1/2}(\Gamma_{32})$ на $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32})$ и является положительным оператором: подсчёт, основанный на преобразованиях, описанных в лемме 1.5 и на определениях операторов V_{jk}, аналогичных (1.67)–(1.71) (см. лемму 1.4), приводит к формуле (см. (1.72))

$$\langle C\chi,\chi\rangle=\sum_{k=1}^{3}\|u_{2k}\|^2_{H^1(\Omega_k)}.$$

Отсюда следует, что существует обратный оператор

$$C^{-1}\in\mathcal{L}(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32});\ H^{-1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})H^{-1/2}(\Gamma_{32})),$$

и тогда решение задачи (1.109) существует и единственно при

$$\widetilde{\varphi}=(\widetilde{\varphi}_{21};\widetilde{\varphi}_{32})^{\tau}\ \in\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32}).$$

Теорема 1.14. *Пусть в задаче (1.105), (1.106) выполнены условия (1.103), а также условия согласования*

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_{21} &:= \varphi_{21} - \gamma_{21}u_{11} + \gamma_{12}u_{12} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21}), \\ \widetilde{\varphi}_{32} &:= \varphi_{32} - \gamma_{32}u_{12} + \gamma_{23}u_{13} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32}), \end{aligned} \tag{1.112}$$

где $(u_{11}; u_{12}; u_{13})^\tau$ — слабое решение вспомогательной задачи Зарембы (1.90)–(1.92). Тогда задача Стеклова (1.105), (1.106) имеет единственное слабое решение

$$u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}; u_{23})^\tau \in H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)(\dot{+})H^1_{0,\Gamma_{22},h}(\Omega_2)(\dot{+})H^1_{0,\Gamma_{33},h}(\Omega_3),$$

представимое формулами

$$\begin{gathered} u_{(2)} = (V_{21}\chi_{21};\ V_{32}\chi_{32} - V_{12}\chi_{21};\ -V_{32}\chi_{32})^\tau, \\ \chi := (\chi_{21};\ \chi_{32})^\tau = C^{-1}(\widetilde{\varphi}_{21}; \widetilde{\varphi}_{32})^\tau, \end{gathered} \tag{1.113}$$

где операторы V_{jk} введены формулами (см. (1.67), (1.69)-(1.71))

$$(\eta_1, V_{21}\chi_{21})_{H^1(\Omega_1)} := \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})},\ \forall \eta_1 \in H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1),\ \forall \chi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}); \tag{1.114}$$

$$(\eta_3, V_{23}\chi_{32})_{H^1(\Omega_3)} := \langle \gamma_{23}\eta_3, \chi_{32}\rangle_{L_2(\Gamma_{32})},\ \forall \eta_3 \in H^1_{0,\Gamma_{33}}(\Omega_3),\ \forall \chi_{32} \in H^{-1/2}(\Gamma_{32});$$

$$\begin{gathered} (\eta_2, V_{12}\chi_{21})_{H^1(\Omega_2)} := \langle \gamma_{12}\eta_2, \chi_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})},\quad (\eta_2, V_{32}\chi_{32})_{H^1(\Omega_2)} := \langle \gamma_{32}\eta_2, \chi_{32}\rangle_{L_2(\Gamma_{32})}, \\ \forall \eta_2 \in H^1_{0,\Gamma_{22}}(\Omega_1),\ \forall \chi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}),\ \forall \chi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}). \end{gathered}$$

Соответственно операторная матрица Стеклова C (см. (1.111)) введена посредством её элементов (1.110), а операторы γ_{jk} — это операторы следа из $H^1_{0,\Gamma_{kk}}(\Omega_k)$ на $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{jk})$ $(j \neq k)$. □

Третьим этапом, согласно общей схеме параграфа 2, является рассмотрение первой вспомогательной задачи С.Крейна, порожденной проблемой (1.89), (1.90):

$$u_{(3)} = (u_{31}; u_{32}; u_{33})^\tau \in \bigoplus_{k=1}^{3} H^1(\Omega_k) =: H^1(\Omega),$$

$$u_{3k} - \triangle u_{3k} = f_k \text{ (в } \Omega_k),\quad \gamma_{kk}u_{3k} = 0 \text{ (на } \Gamma_{kk}),\ k = \overline{1,3}; \tag{1.115}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{21}u_{31} - \gamma_{12}u_{32} = 0,&\quad \partial_{21}u_{31} + \partial_{12}u_{32} = 0 \text{ (на } \Gamma_{21}), \\ \gamma_{32}u_{32} - \gamma_{23}u_{33} = 0,&\quad \partial_{32}u_{32} + \partial_{23}u_{33} = 0 \text{ (на } \Gamma_{32}). \end{aligned} \tag{1.116}$$

Введём в $H^1(\Omega)$ подпространство $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ наборов элементов $(u_{31}; u_{32}; u_{33})$, для которых выполнены главные (с вариационной точки зрения) краевые условия задачи (1.115), (1.116), т.е.

$$H^1_{0,\Gamma}(\Omega) := \{(u_1; u_2; u_3) \in H^1(\Omega),\ \gamma_{kk}u_k = 0 \ (\text{на } \Gamma_{kk}),\ k = \overline{1,3},$$

$$\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21}),\ \gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{32})\}.$$

Это подпространство плотно вложено в

$$L_2(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{3} L_2(\Omega_k),$$

так как оно содержит подпространство

$$H^1_{0,\Gamma}(\Omega) := \{(u_1; u_2; u_3) :\ u_k \in H^1_0(\Omega_k),\ k = \overline{1,3}\},$$

где $H^1_0(\Omega_k)$ плотно вложено в $L_2(\Omega_k),\ k = \overline{1,3}$. Поэтому $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega);\ L_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств.

Для функций $\eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3)^\tau$ и $u_{(3)} = (u_{31}; u_{32}; u_{33})$ из $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ имеем следующую обобщенную формулу Грина:

$$\sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{3k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{3} \langle \eta_k, u_{3k} - \Delta u_{3k} \rangle_{L_2(\Omega_k)} +$$

$$+ \langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_{31} + \partial_{12}u_{32} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{32}\eta_2, \partial_{32}u_{32} + \partial_{23}u_{23} \rangle_{L_2(\Gamma_{32})}.$$

Отсюда и из (1.115), (1.116) естественно дается определение слабого решения этой задачи: это такой набор $u_{(3)} = (u_{31}; u_{32}; u_{33})^\tau \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$, для которого выполнено тождество

$$\sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{3k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{3} \langle \eta_k, f_k \rangle_{L_2(\Omega_k)},\ \forall u_{(3)} \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega).$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1.10, приходим к следующему результату.

Теорема 1.15. *Первая вспомогательная задача С.Крейна (1.115), (1.116) имеет единственное слабое решение $u_{(3)} \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f := (f_1; f_2; f_3)^\tau \in (H^1_{0,\Gamma}(\Omega))^*. \tag{1.117}$$

Это решение выражается формулой

$$u_{(3)} = A^{-1}f, \tag{1.118}$$

где A *— оператор гильбертовой пары* $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega);\ L_2(\Omega))$.

Если, в частности,

$$f := (f_1; f_2; f_3)^\tau \in L_2(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^{3} L_2(\Omega_k),$$

то задача (1.115), (1.116) имеет единственное обобщенное решение

$$u_{(3)} \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = H^1_{0,\Gamma}(\Omega),$$

выражаемое той же формулой (1.118). □

Рассмотрим, наконец, четвертый этап — вторую вспомогательную задачу С.Крейна, порожденную проблемой (1.89), (1.90). Здесь для набора функций

$$u_{(4)} = (u_{41}; u_{42}; u_{43})^\tau \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$$

следует рассмотреть следующую задачу:

$$u_{4k} - \triangle u_{4k} = 0 \ (\text{в } \Omega_k), \ \ \gamma_{kk}u_{4k} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{kk}), \ k = \overline{1,3}; \tag{1.119}$$

$$\begin{gathered} \gamma_{21}u_{41} - \gamma_{12}u_{42} = 0, \ \ \partial_{21}u_{41} + \partial_{12}u_{42} = \psi_{21} \ (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}), \\ \gamma_{32}u_{42} - \gamma_{23}u_{43} = 0, \ \ \partial_{32}u_{42} + \partial_{23}u_{43} = \psi_{32} \ (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}). \end{gathered} \tag{1.120}$$

Согласно условиям (1.120) для решений из $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ имеем свойства

$$\gamma_{21}u_{41} = \gamma_{12}u_{42} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21}), \ \gamma_{32}u_{42} = \gamma_{23}u_{43} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32}),$$

а потому необходимые условия разрешимости задачи (1.119), (1.120) таковы:

$$\psi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}), \ \psi_{32} \in H^{-1/2}(\Gamma_{32}). \tag{1.121}$$

При этом слабое решение определяется из тождества

$$\sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{4k})_{H^1(\Omega_k)} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \psi_{21}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{32}\eta_2, \psi_{32}\rangle_{L_2(\Gamma_{32})},$$

$$\forall \eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3)^\tau \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega).$$

Теорема 1.16. *Вторая вспомогательная задача С.Крейна (1.119)–(1.120) имеет единственное слабое решение $u_{(4)} \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (1.121). Это решение имеет вид*

$$u_{(4)} = B_{21}\psi_{21} + B_{32}\psi_{32}, \tag{1.122}$$

$$B_{21} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21});\ H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega)),\ B_{32} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{32});\ H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega)), \tag{1.123}$$

$$H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega) := H^1_{0,\Gamma}(\Omega) \cap H^1_h(\Omega),\ H^1_h(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{3} H^1_h(\Omega_k). \tag{1.124}$$

При этом операторы B_{21} и B_{32} обладают свойствами (см. (1.88))

$$\gamma_{21}\rho_1 = \gamma_{12}\rho_2 = (B_{21})^*,\ \gamma_{32}\rho_2 = \gamma_{23}\rho_3 = (B_{32})^*, \tag{1.125}$$

где $\rho_k\eta = \rho_k(\eta_1;\eta_2;\eta_3) := \eta_k,\ k = \overline{1,3},$ – операторы сужения.

Доказательство. Оно проводится по схеме доказательства теоремы 1.11 и леммы 1.6. □

Подводя итог рассмотрения четырех вспомогательных задач, порожденных исходной задачей сопряжения (1.89), приходим к следующему выводу.

Теорема 1.17. *Пусть области Ω_k ($k = \overline{1,3}$) из $\mathbb{R}^m$ имеют липшицевы границы $\partial\Omega_k$, разбитые на липшицевы куски Γ_{jk}, и примыкают друг к другу, как это показано на рис. 2.1 (конфигурация — дважды разрезанный банан). Пусть, кроме того, выполнены условия существования решений четырех вспомогательных задач (см. задачи (1.90) - (1.92), (1.105)–(1.106), (1.115)–(1.116), (1.119)–(1.120)), т.е. условия (1.103), (1.112), (1.117), (1.121). Тогда задача сопряжения (1.89) имеет единственное слабое решение*

$$u = (u_1; u_2; u_3)^\tau = \sum_{j=1}^{4}(u_{j1}; u_{j2}; u_{j3})^\tau =: \sum_{j=1}^{4} u_{(j)} \in H^1(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{3} H^1(\Omega_k),$$

где слагаемые $u_{(j)}$ при $j = \overline{1,4}$, представлены соответственно формулами (1.102), (1.104); (1.113), (1.114); (1.118); (1.122)–(1.124). □

Следствие 1.4. *Если, в частности, в задаче (1.89) граничные условия Дирихле на внешних границах* Γ_{kk}, $k=\overline{1,3}$, *однородные, т.е. на них выполнены условия*

$$\gamma_{kk}u_k = 0 \ (\text{на}\, \Gamma_{kk}),\ k=\overline{1,3},$$

то решение задачи Зарембы нулевое, т.е. $u_{(1)}=0$. *В этом случае вместо условий согласования заданных граничных функций (1.112) имеем лишь естественные необходимые и достаточные условия*

$$\varphi_{21}\in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21}),\ \varphi_{32}\in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32}).$$

Следствие 1.5. *Если конфигурация примыкающих друг к другу липшицевых областей будет представлять собой не дважды разрезанный банан, как это показано на рис. 2.1, а аналогичную фигуру, разрезанную n раз, то приведенный в данном параграфе подход применúм и в этом случае. Отличием является лишь тот факт, что матрица Стеклова во второй вспомогательной задаче будет задана как оператор, действующий из прямой суммы не двух, а n экземпляров пространств функционалов, заданных на границах стыка (производных по нормали от решений на этих границах), в прямую сумму n экземпляров следов решений на границах стыка. При этом все общие свойства решений всех четырех вспомогательных задач и соответствующие утверждения об их разрешимости сохраняются.*

1.2.4 Другой пример конфигурации трёх пристыкованных областей

Рассмотрим теперь кратко задачу, в математическом отношении более простую, чем разобранная выше задача сопряжения (1.89).

Будем считать, что область $\Omega_1\subset\mathbb{R}^m$ $(m\geqslant 3)$ с внешней липшицевой границей Γ_{11} содержит внутри себя две области Ω_2 и Ω_3 с липшицевыми границами $\Gamma_{12}=\Gamma_{21}$ и $\Gamma_{13}=\Gamma_{31}$, находящимися друг от друга и от Γ_{11} на положительном расстоянии (см. рис. 1.2).

В этой составной области рассмотрим задачу сопряжения снова на основе дифференциального выражения для оператора Лапласа, хотя аналогичные общие постро-

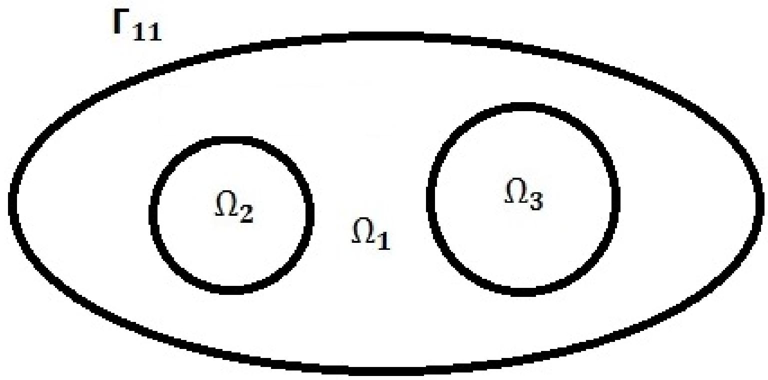

Рис 1.2

ения можно провести и на основе равномерно эллиптического дифференциального выражения, а также для соответствующих дифференциальных выражений, возникающих для векторных полей в теории упругости, гидродинамике и в других проблемах математической физики.

Итак, для искомых функций $u_1(x)$, $u_2(x)$ и $u_3(x)$ имеем следующую задачу сопряжения:

$$u_1 - \triangle u_1 = f_1 \ (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11} u_1 = \varphi_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \tag{1.126}$$

$$u_2 - \triangle u_2 = f_2 \ (\text{в } \Omega_2), \quad u_3 - \triangle u_3 = f_3 \ (\text{в } \Omega_3), \tag{1.127}$$

$$\begin{aligned} &\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 = \varphi_{21}, \quad \partial_{21} u_1 + \partial_{12} u_2 = \psi_{21} \ (\text{на } \Gamma_{21}), \\ &\gamma_{31} u_1 - \gamma_{13} u_3 = \varphi_{31}, \quad \partial_{31} u_1 + \partial_{13} u_3 = \psi_{31} \ (\text{на } \Gamma_{31}). \end{aligned} \tag{1.128}$$

Как и ранее, будем разыскивать слабое решение в виде

$$u = (u_1; u_2; u_3)^\tau = \sum_{j=1}^{4} u_{(j)} = \sum_{j=1}^{4} (u_{j1}; u_{j2}; u_{j3})^\tau \subset H^1(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^{3} H^1(\Omega_k). \tag{1.129}$$

Здесь на первом этапе в проблеме Зарембы возникает краевая задача лишь для функции u_{11}, и формально можно считать, что $u_{12} = 0$, $u_{13} = 0$. Имеем задачу

$$\begin{gathered} u_{11} - \triangle u_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11} u_{11} = \varphi_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ \partial_{21} u_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \qquad \partial_{31} u_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{31}). \end{gathered}$$

Как и при рассмотрении задачи (1.90), приходим к выводу, что условие

$$\varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{11}) \tag{1.130}$$

является необходимым и достаточным для существования слабого решения $u_{11} \in H^1_h(\Omega_1)$, и оно выражается формулой (см. (1.102))

$$u_{11} = \widehat{\gamma}_{11}^{-1}\varphi_1, \ \ \widehat{\gamma}_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_{11});\ H^1_h(\Omega_1)). \tag{1.131}$$

На втором этапе, т.е. для вспомогательной задачи Стеклова, возникает проблема

$$\begin{gathered}
u_{21} - \triangle u_{21} = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \qquad \gamma_{11}u_{21} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\
u_{22} - \triangle u_{22} = 0 \ (\text{в } \Omega_2), \qquad u_{23} - \triangle u_{23} = 0 \ (\text{в } \Omega_3), \\
\gamma_{21}u_{21} - \gamma_{12}u_{22} = \widetilde{\varphi}_{21} := \varphi_{21} - \gamma_{21}u_{11}, \ \ \partial_{21}u_{21} = -\partial_{12}u_{22}(=: \chi_{21}) \ (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}), \\
\gamma_{31}u_{21} - \gamma_{13}u_{23} = \widetilde{\varphi}_{31} := \varphi_{31} - \gamma_{31}u_{11}, \ \ \partial_{31}u_{21} = -\partial_{13}u_{23}(=: \chi_{31}) \ (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}).
\end{gathered} \tag{1.132}$$

Упрощающей особенностью задачи (1.126)–(1.128) является тот факт, что здесь, как и в (1.4), имеют место свойства

$$(H^{1/2}(\Gamma_{11}))^* = H^{-1/2}(\Gamma_{11}),\ (H^{1/2}(\Gamma_{21}))^* = H^{-1/2}(\Gamma_{21}),\ (H^{1/2}(\Gamma_{31}))^* = H^{-1/2}(\Gamma_{31}).$$

Поэтому, используя соответствующие формулы Грина вида (1.8), (1.9) для областей $\Omega_k,\ k = \overline{1,3}$, а также общие рассуждения для задачи Стеклова, приходим к выводу, что

$$u_{21} = V_{21}\chi_{21} + V_{31}\chi_{31},\ u_{22} = -V_{12}\chi_{21},\ u_{23} = -V_{13}\chi_{31}, \tag{1.133}$$

$$\begin{gathered}
V_{21} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21});\ H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)),\ V_{31} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{31});\ H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)), \\
V_{12} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21});\ H^1_h(\Omega_2)),\ V_{13} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{31});\ H^1_h(\Omega_3)).
\end{gathered}$$

Соответствующая операторная матрица Стеклова

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{21}V_{21} + \gamma_{12}V_{12} & \gamma_{21}V_{21} \\ \gamma_{31}V_{21} & \gamma_{31}V_{31} + \gamma_{13}V_{13} \end{pmatrix}$$

действует из $H^{-1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})H^{-1/2}(\Gamma_{31})$ на $H^{1/2}(\Gamma_{21})(\dot{+})H^{1/2}(\Gamma_{31})$ и обладает свойством

$$\langle C\chi, \chi\rangle = \sum_{k=1}^{3} \|u_{2k}\|^2_{H^1(\Omega_k)}, \quad \chi = (\chi_{21}, \chi_{31})^\tau.$$

Отсюда следует, что

$$(\widetilde{\varphi}_{21}; \widetilde{\varphi}_{31})^\tau = C^{-1}\chi, \tag{1.134}$$

и потому слабое решение $u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}; u_{23})^\tau$ задачи (1.132) существует, единственно и выражается формулами (1.133), (1.134). При этом необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (1.130), а также условия

$$\varphi_{21} \in H^{1/2}(\Gamma_{21}),\ \varphi_{31} \in H^{1/2}(\Gamma_{31}). \tag{1.135}$$

Заметим, что в этой задаче не требуется выполнения условий согласования типа (1.107).

Рассмотрим теперь третий этап, связанный с проблемой (1.126)-(1.128), — первую вспомогательную задачу С.Крейна:

$$\begin{gathered} u_{3k} - \triangle u_{3k} = f_k \ (\text{в } \Omega_k), \quad \gamma_{11} u_{31} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ \gamma_{21} u_{31} - \gamma_{12} u_{32} = 0, \quad \partial_{21} u_{31} + \partial_{12} u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21}), \\ \gamma_{31} u_{31} - \gamma_{13} u_{33} = 0, \quad \partial_{31} u_{31} + \partial_{13} u_{33} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{31}). \end{gathered} \tag{1.136}$$

Введём подпространство

$$H^1_{0,\Gamma}(\Omega) := \{(u_1; u_2; u_3)^\tau \in H^1(\Omega) : \gamma_{11} u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}),$$

$$\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21}),\ \gamma_{31} u_1 - \gamma_{13} u_3 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{31})\},$$

содержащее плотное в $L_2(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^3 L_2(\Omega_k)$ подпространство $H^1_0(\Omega) := \bigoplus_{k=1}^3 H^1_0(\Omega_k)$. Как и ранее, для задачи (1.136) приходим к следующему выводу. Задача (1.136) имеет единственное слабое решение $u_{(3)} \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда

$$f := (f_1; f_2; f_3)^\tau \in (H^1_{0,\Gamma}(\Omega))^*. \tag{1.137}$$

При этом $u_{(3)} = A^{-1} f$, где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$. Если $f \in L_2(\Omega)$, то $u_{(3)} = A^{-1} f \subset \mathcal{D}(A)$ — обобщенное решение задачи (1.136).

Вторая вспомогательная задача С.Крейна для проблемы (1.126)-(1.128) формулируется следующим образом:

$$\begin{gathered} u_{4k} - \triangle u_{4k} = 0 \ (\text{в } \Omega_k),\ k = \overline{1,3}, \quad \gamma_{11} u_{41} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ \gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} = 0, \quad \partial_{21} u_{41} + \partial_{12} u_{42} = \psi_{21} \ (\text{на } \Gamma_{21}), \\ \gamma_{31} u_{41} - \gamma_{13} u_{43} = 0, \quad \partial_{31} u_{41} + \partial_{13} u_{43} = \psi_{31} \ (\text{на } \Gamma_{31}). \end{gathered} \tag{1.138}$$

Здесь для определения слабого решения используем обобщенную формулу Грина

$$\sum_{k=1}^{3}(\eta_k, u_{4k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{3}\langle \eta_k, u_{4k} - \triangle u_{4k}\rangle_{L_2(\Omega_k)} + \langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21}u_{41} + \partial_{12}u_{42}\rangle_{L_2(\Gamma_{21})}+$$

$$+\langle \gamma_{31}\eta_1, \partial_{31}u_{41} + \partial_{13}u_{43}\rangle_{L_2(\Gamma_{31})},$$

$$\forall \eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3)^\tau,\ u_{(4)} = (u_{41}; u_{42}; u_{43})^\tau \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega),$$

и обычным образом устанавливаем, что задача (1.138) имеет слабое решение из $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\psi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}),\ \psi_{31} \in H^{-1/2}(\Gamma_{31}). \tag{1.139}$$

Таким образом, приходим к следующему итогу. Задача сопряжения (1.126)–(1.128) имеет слабое решение $u = (u_1; u_2; u_3)^\tau \in H^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (1.130), (1.135), (1.137), (1.139). Это решение выражается формулами (1.129), (1.131), (1.133), (1.134) $u_{(3)} = A^{-1}f$ а также формулами

$$u_{(4)} = B_{21}\psi_{21} + B_{31}\psi_{31},$$

$$B_{21} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{21}); H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega)),\quad B_{31} \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_{31}); H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega)),$$

причем для B_{21} и B_{31} выполнены свойства, аналогичные свойствам (1.125).

Отметим еще раз, что в проблеме сопряжения (1.126)–(1.128) никаких условий согласования заданных граничных функций не требуется.

1.2.5 Третья конфигурация: одна область с границей, гомеоморфной сфере с тремя разрезанными ручками

Задачу сопряжения по предполагаемой схеме можно исследовать и в случае, когда имеется лишь одна область, в которой разыскивается искомая функция, а условия сопряжения задаются на двух или более примыкающих друг к другу участках границы этой области. Так будет, в частности, если область Ω односвязна, а граница $\partial\Omega$ этой области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 3)$ гомеоморфна сфере с тремя разрезанными ручками (см. рис. 1.3)

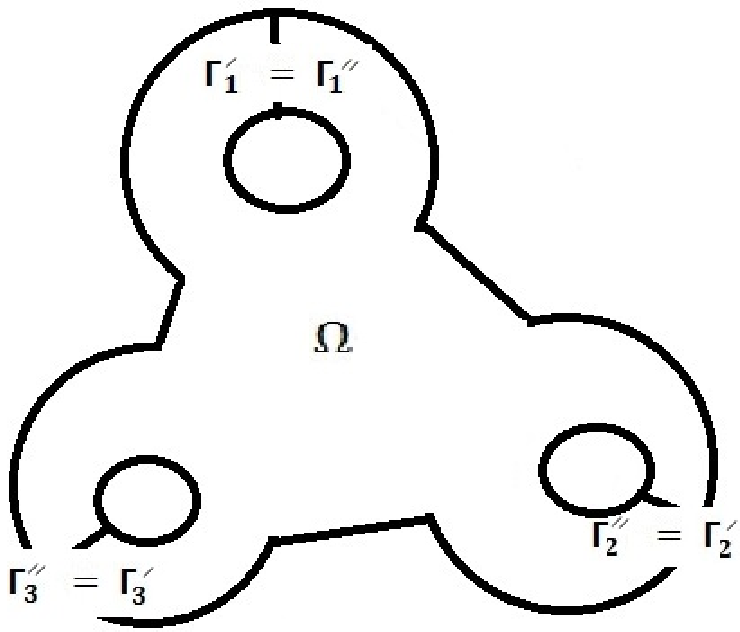

Рис. 1.3

Обозначим часть $\partial\Omega$ вне стыков через Γ_0, а на стыках Γ_k выделим экземпляры Γ_k' и Γ_k'', по которым можно достичь этих стыков по непрерывности изнутри Ω. При этом, очевидно, на $\Gamma_k = \Gamma_k' = \Gamma_k''$ возможны разрывы с двух сторон как у предельных функций $\gamma_k' u$ и $\gamma_k'' u$, так и у производных по внешней нормали $\partial_k' u$ и $\partial_k'' u$. Будем считать также, как обычно, что куски Γ_k $(k = \overline{1,3})$ — липшицевы.

В итоге возникает следующая задача сопряжения. Необходимо найти функцию $u(x),\ x \in \Omega$, из уравнения и граничных условий:

$$\begin{gathered}
u - \Delta u = f \ (\text{в } \Omega), \qquad\qquad \gamma_0 u = \varphi_0 \ (\text{на } \Gamma_0), \\
\gamma_k' u - \gamma_k'' u = \varphi_k, \quad \partial_k' u + \partial_k'' u = \psi_k \ (\text{на } \Gamma_k),\ k = \overline{1,3}.
\end{gathered} \tag{1.140}$$

Здесь заданными функциями являются f, а также $\varphi_0,\ \varphi_k\ (k = \overline{1,3})$ и $\psi_k\ (k = \overline{1,3})$.

Будем разыскивать слабое решение задачи (1.140) из пространства $H^1(\Omega)$ по общей схеме, предложенной выше. Тогда на первом этапе возникает задача Зарембы для функции $u_1(x)$:

$$\begin{gathered} u_1 - \Delta u_1 = 0 \text{ (в } \Omega), \qquad \gamma_0 u_1 = \varphi_0 \text{ (на } \Gamma_0), \\ \partial'_k u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma'_k) \qquad \partial''_k u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma''_k),\ k = \overline{1,3}. \end{gathered} \tag{1.141}$$

Если слабое решение этой задачи принадлежит $H^1_h(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, то его след на $\partial\Omega$ является функцией из $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Поэтому возникает следующее дополнительное условие: существует функция $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ такая, что её сужение на Γ_0 совпадает с φ_0, т.е.

$$\rho_0\varphi = \varphi_0 \in H^{1/2}(\Gamma_0), \tag{1.142}$$

где $\rho_0 : H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma_0)$ – оператор сужения (он ограничен).

Тогда так же, как для рассмотренной выше задачи (1.90), в частности, для задачи (1.96), приходим к выводу, что задача (1.141) имеет единственное слабое решение $u_1 \in H^1_h(\Omega)$, выражаемое формулой

$$u_1 = \widehat{\gamma}_0^{-1}\varphi_0,\ \widehat{\gamma}_0^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_0); H^1_h(\Omega)). \tag{1.143}$$

Здесь при доказательстве (1.143), как и в (1.99), (1.100), снова используется обобщенная формула Грина в форме (1.16):

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{3} \langle \gamma'_k\eta, \partial'_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)} + \sum_{k=1}^{3} \langle \gamma''_k\eta, \partial''_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \tag{1.144}$$

$$\eta,\ u \in \widehat{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega),\ \gamma'_k\eta,\ \gamma''_k\eta \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),$$

$$\partial'_k u,\ \partial''_k u \in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,3}.$$

На втором этапе исследования проблемы (1.140) возникает следующая задача Стеклова:

$$u_2 - \Delta u_2 = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_0 u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_0),$$

$$(\gamma'_k - \gamma''_k)u_2 = \widetilde{\varphi}_k := \varphi_k - (\gamma'_k - \gamma''_k)u_1,\ \ \partial'_k u_2 = -\partial''_k u_2 (=: \chi_k) \text{ (на } \Gamma_k),\ k = \overline{1,3}. \tag{1.145}$$

С использованием формулы Грина (1.144) её решение через функции χ_k выражается в виде

$$u_{(2)} = \sum_{k=1}^{3} (V'_k - V''_k)\chi_k,$$

$$V_k' = (\gamma_k')^* \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_k'); H^1_{0,\Gamma_0,h}(\Omega)), \quad V_k'' = (\gamma_k'')^* \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_k''); H^1_{0,\Gamma_0,h}(\Omega)), \quad (1.146)$$

а условия для следов функций на стыках дают уравнение

$$\begin{pmatrix} \gamma_1' - \gamma_1'' \\ \gamma_2' - \gamma_2'' \\ \gamma_3' - \gamma_3'' \end{pmatrix} (V_1' - V_1'';\ V_2' - V_2'',\ V_3' - V_3'') \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_1 \\ \widetilde{\varphi}_2 \\ \widetilde{\varphi}_3 \end{pmatrix} \qquad (1.147)$$

для нахождения неизвестных $\chi_k,\ k = \overline{1,3}$. В силу (1.146) матрица C из (1.147), очевидно, самосопряженная, т.е.

$$\langle C\chi, \widehat{\chi}\rangle = \overline{\langle C\widehat{\chi}, \chi\rangle}, \quad \chi,\ \widehat{\chi} \in (\dot{+})_{k=1}^3 H^{-1/2}(\Gamma_k),$$

и, кроме того, положительна:

$$\langle C\chi, \chi\rangle = \Big\| \sum_{k=1}^3 (V_k' - V_k'')\chi_k \Big\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u_2\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Поэтому система уравнений (1.147) имеет единственное решение

$$\chi := (\chi_1; \chi_2; \chi_3)^\tau = C^{-1}\widetilde{\varphi},\ \widetilde{\varphi} := (\widetilde{\varphi}_1; \widetilde{\varphi}_2, \widetilde{\varphi}_3)^\tau \in (\dot{+})_{k=1}^3 \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k).$$

Значит, при выполнении этого требования на $\widetilde{\varphi}$ задача (1.145) имеет единственное слабое решение $u_{(2)} \in H^1_{0,\Gamma_0,h}(\Omega)$.

На третьем этапе имеем проблему

$$\begin{gathered} u_3 - \Delta u_3 = f \ (\text{в } \Omega), \quad \gamma_0 u_3 = 0 \ (\text{на } \Gamma_0), \\ (\gamma_k' - \gamma_k'')u_3 = 0,\ \ (\partial_k' + \partial_k'')u_3 = 0 \ (\text{на } \Gamma_k),\ k = \overline{1,3}. \end{gathered} \qquad (1.148)$$

Введем подпространство

$$H^1_{0,\Gamma}(\Omega) := \{u \in H^1_{0,\Gamma_0}(\Omega) : (\gamma_k' - \gamma_k'')u = 0 \ (\text{на } \Gamma_k)\},$$

плотное в $L_2(\Omega)$, т.е. $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$ – гильбертова пара. Из формулы Грина (1.144) для элементов из $H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ будем иметь тождество

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^3 \langle \gamma_k'\eta, (\partial_k' + \partial_k'')u\rangle_{L_2(\Gamma_k)}.$$

Отсюда, определяя слабое решение задачи (1.148), получаем, что при $f \in (H^1_{0,\Gamma}(\Omega))^*$ эта задача имеет решение $u_{(3)} = A^{-1}f$, где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega); L_2(\Omega))$.

Наконец, на четвертом этапе возникает задача

$$u_4 - \Delta u_4 = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_0 u_4 = 0 \text{ (на } \Gamma_0),$$
$$(\gamma_k' - \gamma_k'')u_4 = 0, \ \ (\partial_k' + \partial_k'')u_4 = \psi_k \text{ (на } \Gamma_k), \ k = \overline{1,3}.$$

слабое решение которой при условиях $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \ k = \overline{1,3}$, существует, единственно и выражается формулой

$$u_{(4)} = \sum_{k=1}^{3} B_k \psi_k, \ B_k \in \mathcal{L}(H^{-1/2}(\Gamma_k); H^1_{0,\Gamma,h}(\Omega)).$$

Подводя итоги рассмотрения задачи (1.140), приходим к выводу, что при предположении (1.142), а также при других необходимых условиях эта задача имеет единственное слабое решение $u = \sum_{k=1}^{4} u_k \in H^1(\Omega)$, где составляющие u_k выражаются приведенными выше формулами.

Следствие 1.6. *Проведенные построения показывают, что аналогичным образом рассматривается проблема в области с границей, гомеоморфной сфере с произвольным числом n разрезанных ручек.*

Следствие 1.7. *По такой же схеме можно рассмотреть проблемы, в которых для области Ω вместо разрезов с поверхностями $\Gamma_k = \Gamma_k' = \Gamma_k''$ имеются разведенные липшицевы куски Γ_k' и Γ_k'' с одинаковыми свойствами, т.е. имеются оснащения*

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k') = \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k'') \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma_k') = L_2(\Gamma_k'') \hookrightarrow\hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_k') = H^{-1/2}(\Gamma_k''), \ k = \overline{1,n}.$$

1.2.6 Конфигурация "трижды разрезанный арбуз"

Применим теперь рассмотренную выше схему к области, разбитой на три части (см. рис. 1.4).

Обозначим через $\Gamma_{jj}, \ j = \overline{1,3}$, внешние свободные границы, а через Γ_{kj} ($k \neq j$) – ту часть границы $\Gamma_j = \partial\Omega_j$, которая стыкуется с частью Γ_{jk} границы $\Gamma_k = \partial\Omega_k$. При этом очевидно, что $\Gamma_{jk} = \Gamma_{kj}$. Полагаем, что области $\Omega_k \subset \mathbb{R}^m$ имеют липшицевы границы, разбитые на липшицевы куски Γ_{kj}. Снова будем обозначать через $\gamma_{kj}u_j$ след функции u_j, заданной в области Ω_j, на границе Γ_{kj}, а через $\partial_{kj}u_j$ – соответствующую производную по внешней нормали.

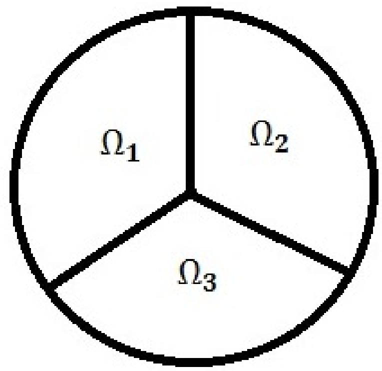

Рис.1.4

Сформулируем теперь постановку задачи сопряжения для данной совокупности областей $\Omega_j,\ j=\overline{1,3}$.

Требуется найти такие функции $u_j(x)\in H^1(\Omega_j),\ j=\overline{1,3}$, что для них выполнены уравнения

$$\begin{aligned} &u_1-\triangle u_1=f_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11}u_1=\varphi_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &u_2-\triangle u_2=f_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \gamma_{22}u_2=\varphi_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22}),\\ &u_3-\triangle u_3=f_3 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \gamma_{33}u_3=\varphi_3 \quad (\text{на } \Gamma_{33}). \end{aligned} \tag{1.149}$$

На границах стыка заданы скачки функций и нормальных производных:

$$\begin{aligned} &\gamma_{21}u_1-\gamma_{12}u_2=\varphi_{12}, \quad \partial_{21}u_1+\partial_{12}u_2=\psi_{12}\ (\text{на } \Gamma_{12}=\Gamma_{21}),\\ &\gamma_{32}u_2-\gamma_{23}u_3=\varphi_{23}, \quad \partial_{32}u_2+\partial_{23}u_3=\psi_{23}\ (\text{на } \Gamma_{23}=\Gamma_{32}),\\ &\gamma_{13}u_3-\gamma_{31}u_1=\varphi_{31}, \quad \partial_{13}u_3+\partial_{31}u_1=\psi_{31}\ (\text{на } \Gamma_{31}=\Gamma_{13}). \end{aligned} \tag{1.150}$$

Здесь f_j – заданные функции в $\Omega_j,\ j=\overline{1,3}, \varphi_j$ – заданные функции на внешних границах $\Gamma_{jj},\ j=\overline{1,3}$, функции φ_{21}, φ_{32} и φ_{13} задают разрывы следов, а ψ_{21}, ψ_{32} и ψ_{13} – разрывы производных по внешним нормалям на границах стыка областей.

Будем искать слабое решение задачи (1.149) - (1.150) в виде

$$u=(u_1;u_2;u_3)\in H^1(\Omega):=\bigoplus_{k=1}^{3}H^1(\Omega_k).$$

В силу линейности задачи будем искать это решение с помощью уже рассмотренной схемы в виде суммы решений четырех вспомогательных задач, содержащих неоднородности лишь в одном месте, т.е. либо в уравнении, либо в краевом условии.

Получаем, что $u_{(1)} := (u_{11}; u_{12}; u_{13})^{\tau}$ - решение следующей задачи Зарембы

$$\begin{aligned} &u_{11} - \triangle u_{11} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11} u_{11} = \varphi_1 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\ &u_{12} - \triangle u_{12} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \gamma_{22} u_{12} = \varphi_2 \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \\ &u_{13} - \triangle u_{13} = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \gamma_{33} u_{13} = \varphi_3 \quad (\text{на } \Gamma_{33}), \end{aligned} \tag{1.151}$$

$$\begin{aligned} &\partial_{21} u_{11} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \quad \partial_{31} u_{11} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}), \\ &\partial_{12} u_{12} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \quad \partial_{32} u_{12} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}), \\ &\partial_{13} u_{13} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{13} = \Gamma_{31}), \quad \partial_{23} u_{13} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}). \end{aligned}$$

В этой задаче уравнения и условия Неймана на стыке однородные, а условия на внешних границах неоднородные.

Мы имеем три распадающиеся задачи Зарембы. Рассмотрим первую задачу для функции u_{11}:

$$\begin{aligned} &u_{11} - \triangle u_{11} = 0 \ \ (\text{в } \Omega_1), \qquad \gamma_{11} u_{11} = \varphi_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11}), \\ &\partial_{21} u_{11} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \quad \partial_{31} u_{11} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{aligned} \tag{1.152}$$

Будем считать, что $u_{11} \in \check{H}^1(\Omega_1)$, тогда $\partial_{11} u_{11} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11})$, $\ \gamma_{11} u_{11} \in H^{1/2}(\Gamma_{11})$.

Для задачи (1.152) естественно воспользоваться формулой Грина в следующем виде

$$(\eta_1, u_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1, u_{11} - \triangle u_{11} \rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_1 \eta_1, \partial_{11} u_{11} \rangle_{L_2(\Gamma_{11})} +$$

$$+ \langle \gamma_{21} \eta_1, \partial_{21} u_{11} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})} + \langle \gamma_{31} \eta_1, \partial_{31} u_{11} \rangle_{L_2(\Gamma_{31})}, \quad \forall \eta_1, u_{11} \in \check{H}^1(\Omega_1).$$

Рассмотрим наряду с (1.152) следующую вспомогательную задачу Неймана:

$$u_{11} - \triangle u_{11} = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \ \ \partial_{11} u_{11} = \psi_1 \ (\text{на } \Gamma_{11}), \ \ \partial_{21} u_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21}), \tag{1.153}$$

$$\partial_{31} u_{11} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{31}).$$

Её слабое решение определяется из тождества:

$$(\eta_1, u_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1, u_{11} - \triangle u_{11} \rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_{21} \eta_1, \widetilde{\psi}_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{31} \eta_1, \widetilde{\psi}_{31} \rangle_{L_2(\Gamma_{31})}, \ \eta_1, \ u_{11} \in \check{H}^1(\Omega_1). \tag{1.154}$$

Имеем:

$$(\eta_1, u_{11})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{11} \eta_1, \psi_1 \rangle_{L_2(\Gamma_{11})}, \ \forall \eta_1 \in \check{H}^1(\Omega_1). \tag{1.155}$$

Так как для элементов η_1 из $\check{H}^1(\Omega_1)$ выполнено свойство $\gamma_{11}\eta_1 \in H^{1/2}(\Gamma_{11})$, то правая часть в (1.155) будет линейным ограниченным функционалом в $\check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1)$ тогда и только тогда, когда

$$\psi_1 \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11}).$$

В этом случае задача (1.153) имеет единственное слабое решение

$$u_{11} =: V_{11}\psi_1,\ V_{11} \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11}); \check{H}^1_h(\Omega_1)),$$

$$\check{H}^1_h(\Omega_1) = \check{H}^1(\Omega_1) \cap H^1_h(\Omega_1).$$

Введем теперь оператор

$$C_{11} := \gamma_{11}V_{11} \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11}); H^{1/2}(\Gamma_{11})), \tag{1.156}$$

который называют оператором Стеклова.

Лемма 1.7. *Операторы*

$$\gamma_{11} : H^1_h(\Omega_1) \to H^{1/2}(\Gamma_{11}),\ \ V_{11} : \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11}) \to \check{H}^1_h(\Omega_1) \tag{1.157}$$

взаимно сопряжены, а оператор C_{11} из 1.156 обладает свойством положительности:

$$\langle C_{11}\psi_1, \psi_1\rangle_{L_1(\Gamma_{11})} = \|u_{11}\|^2_{H^1(\Omega_1)},\ \ u_{11} = V_{11}\psi_1.$$

При этом оператор

$$C_{11}^{-1} : H^{1/2}(\Gamma_{11}) \to \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11})$$

является оператором гильбертовой пары $(H^{1/2}(\Gamma_{11}); L_2(\Gamma_{11}))$.

Доказательство. Свойство взаимной сопряженности (1.157) следует непосредственно из (1.155):

$$(\eta_1, V_{11}\psi_1)_{H^1(\Omega_1)} = \langle\gamma_{11}\eta_1, \psi_1\rangle_{L_2(\Gamma_{11})},\ \forall\eta_1 \in H^1_{\Gamma_{11},h}(\Omega_1),\ \forall\psi_1 \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{11}). \tag{1.158}$$

Отсюда получаем свойство положительности C_{11}:

$$\langle C_{11}\psi_1, \psi_1\rangle_{L_2(\Gamma_{11})} = (V_{11}\psi_1, V_{11}\psi_1)_{H^1(\Omega_1)} = \|u_{11}\|^2_{H^1(\Omega_1)}.$$

Значит, оператор C_{11} имеет обратный оператор C_{11}^{-1}, заданный на области значений $\mathcal{R}(C_{11}) = H^{1/2}(\Gamma_{11})$. Тогда $\psi_1 = C_{11}^{-1}\varphi_1$, и решение имеет вид:

$$u_{11} = V_{11}\psi_1 = V_{11}C_{11}^{-1}\varphi_1 = V_{11}(\gamma_{11}V_{11})^{-1}\varphi_1 = T_{11}T_{11}^{-1}\gamma_{11}^{-1}\varphi_1 =: \widetilde{\gamma}_{11}^{-1}\varphi_1.$$

Учитывая предыдущие выкладки, получаем, что слабое решение задачи (1.151) представляется в виде

$$u_{11} = \widetilde{\gamma}_{11}^{-1}\varphi_1, \;\; \widetilde{\gamma}_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_{11});\; \check{H}_h^1(\Omega_1)).$$

Из (1.158), как и выше (см. п. 1.2.3), выводим, что C_{11}^{-1} — оператор гильбертовой пары $(H^{1/2}(\Gamma_{11});\; L_2(\Gamma_{11}))$. □

Аналогичные выкладки можно проделать для решений $u_{12},\; u_{13}$ и получить финальную формулу

$$u_{1k} = \widetilde{\gamma}_{kk}^{-1}\varphi_k,\; k = \overline{1,3}.$$

Отсюда приходим к следующему результату.

Теорема 1.18. *Каждая из задач Зарембы имеет единственное слабое решение из подпространства* $\check{H}^1_{\Gamma_{kk}}(\Omega_k),\; k = \overline{1,3}$, *тогда и только тогда, когда*

$$\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_{kk}),\; k = \overline{1,3}.$$

При этом решение имеет вид

$$u_{1k} = \widetilde{\gamma}_{kk}^{-1}\varphi_k,$$

где $\widetilde{\gamma}_{kk}^{-1} \in \mathcal{L}(H^{1/2}(\Gamma_{kk}), \check{H}^1_{\Gamma_{kk}}(\Omega_k)),\; k = \overline{1,3}.$ □

Переходя ко второму этапу, сформулируем вспомогательную задачу типа Стеклова для набора функций $u_{(2)} := (u_{21}; u_{22}; u_{23})^\tau$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} &u_{21} - \triangle u_{21} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11}u_{21} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\ &u_{22} - \triangle u_{22} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \gamma_{22}u_{22} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22}),\\ &u_{23} - \triangle u_{23} = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \gamma_{33}u_{23} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{33}),\end{aligned} \tag{1.159}$$

$$\gamma_{21}u_{21} - \gamma_{12}u_{22} = \widetilde{\varphi}_{12} := \varphi_{12} - \gamma_{21}u_{11} + \gamma_{12}u_{12},$$
$$\partial_{21}u_{21} + \partial_{12}u_{22} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),$$
$$\gamma_{32}u_{22} - \gamma_{23}u_{23} = \widetilde{\varphi}_{23} := \varphi_{23} - \gamma_{32}u_{12} + \gamma_{23}u_{13},$$
$$\partial_{32}u_{22} + \partial_{23}u_{23} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}),$$
$$\gamma_{13}u_{23} - \gamma_{31}u_{21} = \widetilde{\varphi}_{31} := \varphi_{31} - \gamma_{13}u_{13} + \gamma_{31}u_{11},$$
$$\partial_{13}u_{23} + \partial_{31}u_{21} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}).$$

Здесь все уравнения однородные, внешние условия Дирихле однородные, производные по нормали на границе стыка противоположно направлены. Имеется разрыв лишь в условиях Дирихле на внутренних границах стыка, который задается функциями $\widetilde{\varphi}_{ij}$ с учетом построения решения $u_{(1)}$ на первом этапе.

Введем вспомогательные условия Неймана:

$$\partial_{21}u_{21} = -\partial_{12}u_{22} =: \chi_{12} \ \ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),$$

$$\partial_{32}u_{22} = -\partial_{23}u_{23} =: \chi_{23} \ \ (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}),$$

$$\partial_{13}u_{23} = -\partial_{31}u_{21} =: \chi_{31} \ (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}).$$

Если функции $\chi_{jk} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{jk})$ известны, то для нахождения $u_{2k}, k = \overline{1,3}$, возникают три задачи:

1. $u_{21} - \triangle u_{21} = 0$ (в Ω_1), $\gamma_{11}u_{21} = 0$ (на Γ_{11}), $\partial_{21}u_{21} = \chi_{12}$ (на $\Gamma_{21} = \Gamma_{12}$), $\partial_{31}u_{21} = -\chi_{31}$ (на $\Gamma_{31} = \Gamma_{13}$), $u_{21} \in \check{H}^1_{\Gamma_{11}}(\Omega_1)$;

2. $u_{22} - \triangle u_{22} = 0$ (в Ω_2), $\gamma_{22}u_{22} = 0$ (на Γ_{22}), $\partial_{12}u_{22} = -\chi_{12}$ (на $\Gamma_{21} = \Gamma_{12}$), $\partial_{32}u_{22} = \chi_{23}$ (на $\Gamma_{32} = \Gamma_{23}$), $u_{22} \in \check{H}^1_{\Gamma_{22}}(\Omega_2)$;

3. $u_{23} - \triangle u_{23} = 0$ (в Ω_3), $\gamma_{33}u_{23} = 0$ (на Γ_{33}), $\partial_{13}u_{23} = \chi_{31}$ (на $\Gamma_{31} = \Gamma_{13}$), $\partial_{23}u_{23} = -\chi_{23}$ (на $\Gamma_{32} = \Gamma_{23}$), $u_{23} \in \check{H}^1_{\Gamma_{33}}(\Omega_3)$.

Здесь можно считать, что функции χ_{jk}, заданные на Γ_{jk}, продолжи́мы нулём на другие куски границы и тогда они должны принадлежать $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{jk})$. Поэтому слабые решения этих задач ищем в пространствах $\check{H}_h(\Omega_k) \cap H^1_{0,\Gamma_{kk}}(\Omega_k)$.

Далее разобьем каждое из $u_{2k},\ k=\overline{1,3}$, на два слагаемых (с неоднородностью лишь в одном месте), определим их слабые решения и получим, что

$$\begin{aligned} u_{21} &= V_{21}(\chi_{12}) + V_{31}(-\chi_{31}),\\ u_{22} &= V_{12}(-\chi_{12}) + V_{32}(\chi_{23}),\\ u_{23} &= V_{13}(\chi_{31}) + V_{23}(-\chi_{23}), \end{aligned} \tag{1.160}$$

где V_{ij} – соответствующие операторы, $V_{ij} \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{ij});\ \check{H}^1(\Omega_k)) \cap H^1_{0,\Gamma_{kk}}(\Omega_k)$. Теперь $\chi_{ij},\ i,j=\overline{1,3}$, находим из системы уравнений, которая является условиями сопряжения Дирихле в задаче (1.159):

$$\begin{aligned} \gamma_{21}(T_{21}\chi_{12} - T_{31}\chi_{31}) - \gamma_{12}(-T_{12}\chi_{12} + T_{32}\chi_{23}) &= \widetilde{\varphi}_{12},\\ \gamma_{32}(-T_{12}\chi_{12}) + T_{32}\chi_{23}) - \gamma_{23}(T_{13}\chi_{31} - T_{23}\chi_{23}) &= \widetilde{\varphi}_{23},\\ -\gamma_{31}(T_{21}\chi_{12} - T_{31}\chi_{31}) + \gamma_{13}(T_{13}\chi_{31} - T_{23}\chi_{23}) &= \widetilde{\varphi}_{31}. \end{aligned}$$

Пусть $\chi = (\chi_{12};\chi_{23};\chi_{31})^\tau,\ \widetilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi}_{12};\widetilde{\varphi}_{23};\widetilde{\varphi}_{31})^\tau$. Получаем из предыдущего систему уравнений для операторной матрицы типа Стеклова: $C\chi = \widetilde{\varphi},\ C : H_- \to H_+$,

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

где $C_{11} := \gamma_{21}V_{21} + \gamma_{12}V_{12},\ C_{12} := -\gamma_{12}V_{32},\ C_{13} := -\gamma_{21}V_{31},\ C_{21} := -\gamma_{32}V_{12},\ C_{22} := \gamma_{32}V_{32} + \gamma_{23}V_{23},\ C_{23} := -\gamma_{23}V_{13},\ C_{31} := -\gamma_{31}V_{21},\ C_{32} := -\gamma_{13}V_{23},\ C_{33} := \gamma_{31}V_{31} + \gamma_{13}V_{13}$. Как и в п. 1.2.3 получаем следующие свойства оператора C.

1°. Операторы γ_{jk} и V_{jk} взаимно сопряжены.

Доказательство. Доказательство этого факта следует из соответствующих определений слабых решений. Например, для u_{21} получаем слабое решение из пространства $\check{H}^1(\Omega_k) \cap H^1_{0,\Gamma_{kk}}(\Omega_k)$ на основе формулы Грина:

$$(\eta_1, u_{21})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \eta_1, u_{21} - \triangle u_{21}\rangle_{L_2(\Omega_1)} + \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{12}\rangle_{L_2(\Gamma_{12})} +$$

$$+\langle \gamma_{31}\eta_1, -\chi_{31}\rangle_{L_2(\Gamma_{31})},\ \chi_{12} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{12}),\ \chi_{31} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{31}).$$

В частности, для слабого решения u_{21} при $\chi_{31} = 0$ имеем:

$$(\eta_1, u_{21})_{\check{H}^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{12} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})}, \ \forall \eta_1, \ u_{21} \in \check{H}^1(\Omega_1) \cap H^1_{0,\Gamma_{11}}(\Omega_1).$$

Следовательно, существует единственное $u_{21} = V_{21}\chi_{12}$:

$$(\eta_1, V_{21}\chi_{12})_{H^1(\Omega_1)} = \langle \gamma_{21}\eta_1, \chi_{12} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})}.$$

Таким образом, $(V_{21})^* = \gamma_{21}$. Аналогично для других сочетаний. Вообще имеем, как и в общей схеме, связанной с выводом абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств (см. [22]), $(\gamma_{jk})^* = V_{jk} = (\partial_{jk})^{-1}$. $\square$

2°. Если считать, что C действует в $L_2(\Gamma) := L_2(\Gamma_{12} \cup \Gamma_{23} \cup \Gamma_{31})$, то $0 < C = C^* \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Gamma))$. Приведенный выше C есть его расширение по непрерывности на $H_- := \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{12}) \times \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{23}) \times \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{31})$, а $\mathcal{R}(C) = H_+ := H^{1/2}(\Gamma_{12}) \times H^{1/2}(\Gamma_{23}) \times H^{1/2}(\Gamma_{31})$.

3°. Оператор C обладает свойством положительности

$$\langle C\chi, \chi \rangle_{L_2(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{3} \|u_{2k}\|^2_{H^1(\Omega_k)} \geqslant 0, \forall \chi \in H_-.$$

В итоге для исходной задачи Стеклова (1.159) получаем следующий результат.

Теорема 1.19. *Сформулированная вспомогательная задача Стеклова в условиях теоремы 1.18 имеет единственное слабое решение* $u_{(2)} \in \bigoplus_{k=1}^{3}(\check{H}^1_h(\Omega_k) \cap H^1_{0,\Gamma_{kk}}(\Omega))$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\varphi_{12} \in H^{1/2}(\Gamma_{12}), \ \varphi_{23} \in H^{1/2}(\Gamma_{23}), \ \varphi_{31} \in H^{1/2}(\Gamma_{31}).$$

Решения этой задачи имеют вид (1.160) , где χ_{ij} *находятся по формуле*

$$\chi = C^{-1}\widetilde{\varphi}.$$

$\square$

Доказательство этого утверждения уже проведено в рассуждениях выше.

Теперь сформулируем аналог первой вспомогательной задачи С. Г. Крейна для набора функций $u_{(3)} := (u_{31}; u_{32}; u_{33})^\tau$:

$$
\begin{aligned}
&u_{31} - \triangle u_{31} = f_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11} u_{31} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}),\\
&u_{32} - \triangle u_{32} = f_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \gamma_{22} u_{32} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22}),\\
&u_{33} - \triangle u_{33} = f_3 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \gamma_{33} u_{33} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{33}),
\end{aligned} \tag{1.161}
$$

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{21} u_{31} - \gamma_{12} u_{32} = 0, \quad \partial_{21} u_{31} + \partial_{12} u_{32} = 0 \; (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\\
&\gamma_{32} u_{32} - \gamma_{23} u_{33} = 0, \quad \partial_{32} u_{32} + \partial_{23} u_{33} = 0 \; (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}),\\
&\gamma_{13} u_{33} - \gamma_{31} u_{31} = 0, \quad \partial_{13} u_{33} + \partial_{31} u_{31} = 0 \; (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}).
\end{aligned}
$$

В этой задаче все граничные условия однородные, а уравнения неоднородные.

Как и в п. 1.2.3, введем в рассмотрение подпространство

$$
\begin{aligned}
H^1_\Gamma(\Omega) := \{u = (u_1; u_2; u_3) \in H^1(\Omega) :\ &\gamma_{jj} u_j = 0 \; (\text{на } \Gamma_{jj}),\ j = \overline{1,3};\\
&\gamma_{jk} u_k - \gamma_{kj} u_j = 0 \; (\text{на } \Gamma_{jk}), \ \ j,k = \overline{1,3}\} \subset H^1(\Omega),
\end{aligned}
$$

учитывающее главные (с вариационной точки зрения) краевые условия задачи (1.161). Запишем формулу Грина для этой задачи:

$$
\begin{aligned}
(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{3k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{3} \langle \eta_k, u_{3k} - \triangle u_{3k} \rangle_{L_2(\Omega_k)} + \\
+ \langle \gamma_{21}\eta_1, \partial_{21} u_{31} + \partial_{12} u_{32} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{32}\eta_2, \partial_{32} u_{32} + \partial_{23} u_{33} \rangle_{L_2(\Gamma_{32})} + \\
+ \langle \gamma_{13}\eta_3, \partial_{13} u_{33} + \partial_{31} u_{31} \rangle_{L_2(\Gamma_{13})}, \quad \forall \eta_k, u_{3k} \in H^1_\Gamma(\Omega_k).
\end{aligned} \tag{1.162}
$$

Слабое решение определяем согласно тождеству

$$
\sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_3 k)_{H^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{3} \langle \eta_k, f_k \rangle_{L_2(\Omega_k)}, \forall\ \eta_k \in H^1_\Gamma(\Omega_k). \tag{1.163}
$$

На его основе для задачи (1.161) докажем следующее утверждение.

Теорема 1.20. *Первая вспомогательная задача С. Крейна (1.161) имеет единственное слабое решение $u_{(3)} \in H^1_\Gamma(\Omega_k)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$
f := (f_1; f_2; f_3) \in (H^1_\Gamma(\Omega))^*.
$$

В этом случае решение дается формулой

$$u_3 = A^{-1} f,$$

где A - оператор гильбертовой пары $(H^1_\Gamma(\Omega),\ L_2(\Omega))$, $H^1_\Gamma(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow (H^1_\Gamma(\Omega))^*$. В частности, если

$$f = (f_1; f_2; f_3) \in \bigoplus_{k=1}^{3} L_2(\Omega_k) \hookrightarrow (H^1_\Gamma(\Omega))^*,$$

то эта задача имеет единственное обобщенное решение. $\square$

Рассмотрим теперь аналог второй вспомогательной задачи Крейна для набора функций $u_{(4)} := (u_{41}; u_{42}; u_{43})^\tau$:

$$\begin{aligned} &u_{41} - \triangle u_{41} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \gamma_{11} u_{41} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{11}), \\ &u_{42} - \triangle u_{42} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \gamma_{22} u_{42} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{22}), \\ &u_{43} - \triangle u_{43} = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \gamma_{33} u_{43} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_{33}), \end{aligned} \tag{1.164}$$

$$\begin{aligned} &\gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} = 0, \quad \partial_{21} u_{41} + \partial_{12} u_{42} = \psi_{12} \quad (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ &\gamma_{32} u_{42} - \gamma_{23} u_{43} = 0, \quad \partial_{32} u_{42} + \partial_{23} u_{43} = \psi_{23} \quad (\text{на } \Gamma_{23} = \Gamma_{32}), \\ &\gamma_{13} u_{43} - \gamma_{31} u_{41} = 0, \quad \partial_{13} u_{43} + \partial_{31} u_{41} = \psi_{31} \quad (\text{на } \Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{aligned}$$

Здесь уравнения однородные, на внешних границах условия Дирихле однородные, на внутренних границах следы функций совпадают, а производные по нормали терпят заданный разрыв.

Запишем формулу Грина для задачи (1.164):

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{4k})_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{3} \langle \eta_k, u_{4k} - \triangle u_{4k} \rangle_{L_2(\Omega_k)} + \sum_{k=1}^{3} \langle \gamma_{kk} \eta_k, \partial_{kk} u_{4k} \rangle_{L_2(\Gamma_{kk})} + \\ &+ \langle \gamma_{21} \eta_1, \partial_{21} u_{41} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{12} \eta_2, \partial_{12} u_{42} \rangle_{L_2(\Gamma_{12})} + \langle \gamma_{31} \eta_1, \partial_{31} u_{41} \rangle_{L_2(\Gamma_{31})} + \\ &+ \langle \gamma_{13} \eta_3, \partial_{13} u_{43} \rangle_{L_2(\Gamma_{13})} + \langle \gamma_{32} \eta_2, \partial_{32} u_{42} \rangle_{L_2(\Gamma_{32})} + \langle \gamma_{23} \eta_3, \partial_{23} u_{43} \rangle_{L_2(\Gamma_{23})}, \end{aligned}$$

$\forall \eta, u_4 \in H^1_\Gamma(\Omega), \quad \varphi_{ij} \in H^{1/2}(\Gamma_{ij}), \quad \psi_{ij} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{ij}),\ i,j = \overline{1,3}.$

С помощью формулы Грина определим слабое решение задачи (1.164):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_{4k})_{H^1(\Omega_k)} &= \langle \gamma_{21} \eta_1, \psi_{21} \rangle_{L_2(\Gamma_{21})} + \langle \gamma_{32} \eta_2, \psi_{32} \rangle_{L_2(\Gamma_{32})} + \\ &+ \langle \gamma_{13} \eta_3, (-\psi_{13}) \rangle_{L_2(\Gamma_{13})}, \forall \eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3) \ \in H^1_\Gamma(\Omega). \end{aligned} \tag{1.165}$$

В итоге рассмотрения этой задачи получаем следующий результат.

Теорема 1.21. *Вторая вспомогательная задача С. Крейна (1.164) имеет единственное слабое решение* $u_{(4)} \in H^1_\Gamma(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\psi_{21} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21}),\ \psi_{32} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{32}),\ \psi_{13} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{13}).$$

Это решение имеет вид

$$u_{(4)} = W_{21}\psi_{21} + W_{32}\psi_{32} + W_{13}\psi_{13},$$

где $W_{ij}:\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{ij}) \to H^1_\Gamma(\Omega),\ i,j = \overline{1,3}.$

Итогом рассмотрения исходной смешанной краевой задачи (1.149)-(1.150) сопряжения является следующее утверждение.

Теорема 1.22. *Исходная задача (1.149)-(1.150) имеет единственное слабое решение из пространства*

$$H^1(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^{3} H^1(\Omega_k)$$

тогда и только тогда, когда выполнены условия теорем 1.18-. Решение задачи (1.149)-(1.150) является суммой решений вспомогательных поэтапных задач (1.151), (1.159), (1.161), (1.164). □

Таким образом, в данной главе был реализован общий подход для рассмотрения абстрактных смешанных краевых задач сопряжения на основе оператора Лапласа Δ. Он заключается в том, что решение общей неоднородной задачи ищется в виде суммы решений вспомогательных задач, содержащих неоднородность в одном месте, либо в уравнении, либо в краевых условиях. Этот подход применён к различным конфигурациям областей и получено решение каждой из этих задач.

Глава 2

Смешанные спектральные задачи сопряжения

2.1 Спектральные проблемы, порожденные смешанными краевыми задачами сопряжения

2.1.1 Смешанная спектральная задача в одной области

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega =: \Gamma$, разбитой на четыре липшицевых куска Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1,4}$, рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$u - \Delta u = \lambda u =: f \ (\text{в } \Omega), \quad \gamma_1 u := u|_{\Gamma_1} = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \tag{2.1}$$

$$\partial_2 u = \mu \gamma_2 u =: \psi_2 \ (\text{на } \Gamma_2), \quad \partial_3 u = \lambda \gamma_3 u =: \psi_3 \ (\text{на } \Gamma_3), \tag{2.2}$$

$$\partial_4 u = \lambda^{-1} \gamma_4 u =: \psi_4 \ (\text{на } \Gamma_4), \quad \partial_k u := (\partial u / \partial n)_{\Gamma_k}. \tag{2.3}$$

Здесь на Γ_1 задано однородное условие Дирихле, на Γ_2 —условие М.С.Аграновича (см. [42]), или условие, возникающее в задачах дифракции, на Γ_3 — условие типа Стефана (или Стеклова), на Γ_4 — условие типа С.Крейна, появившееся в задачах о нормальных движениях тяжёлой вязкой жидкости в частично заполненном сосуде. В этой проблеме имеется два параметра λ и μ, один из которых можно считать спектральным, а второй — фиксированным. В частности, в задачах дифракции спектральным является параметр $\mu \in \mathbb{C}$ (см. [42]). Другой вариант, когда спектральным является $\lambda \in \mathbb{C}$, рассматривается в работах В.И.Горбачук (см. [15]).

Задачу (2.1)-(2.3) будем исследовать с помощью общего подхода, который был сформулирован в предыдущей главе. По этой схеме будем использовать одну так называемую первую вспомогательную задачу С.Крейна и три вторых вспомогательных задач С.Крейна (см. ниже (2.5)- (2.8)).

В силу однородного условия Дирихле на Γ_1, слабое решение задачи (2.1)-(2.3) естественно искать в пространстве

$$H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1)\}.$$

Решение $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ будем искать в виде суммы решений четырех задач, т.е.

$$u = \sum_{k=1}^{4} u_k, \ u_k \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \tag{2.4}$$

где u_k — слабые решения таких задач соответственно:

$$\begin{gathered} u_1 - \triangle u_1 = f := \lambda u \text{ (в } \Omega), \ \ \gamma_1 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \ \partial_2 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_4); \end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered} u_2 - \triangle u_2 = 0 \text{ (в } \Omega), \ \ \gamma_1 u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \ \ \partial_2 u_2 = \psi_2 := \mu\gamma_2 u \text{ (на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_4); \end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered} u_3 - \triangle u_3 = 0 \text{ (в } \Omega), \ \ \gamma_1 u_3 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \ \ \partial_2 u_3 = 0 \text{ (на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_3 = \psi_3 := \lambda\gamma_3 u \text{ (на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_3 = 0 \text{ (на } \Gamma_4); \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered} u_4 - \triangle u_4 = 0 \text{ (в } \Omega), \ \ \gamma_1 u_4 = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \ \ \partial_2 u_4 = 0 \text{ (на } \Gamma_2), \\ \partial_3 u_4 = 0 \text{ (на } \Gamma_3), \ \partial_4 u_4 = \psi_4 := \lambda^{-1}\gamma_4 u \text{ (на } \Gamma_4). \end{gathered} \tag{2.8}$$

Сама постановка задач (2.5)-(2.8) учитывает, что функции $\partial_k u$, заданные на Γ_k, продолжимы нулём на остальные куски границы. Для элементов из $H^1(\Omega)$ эти производные по нормали, как известно, принадлежат классам $H^{-1/2}(\Gamma_k)$. Если же они продолжимы нулём на оставшуюся часть границы $\partial\Omega$ в классе $H^{-1/2}(\Gamma)$, то они являются элементами из $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \subset H^{-1/2}(\Gamma_k)$, а те функции из $H^1(\Omega)$, у которых

$\partial_k u \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$, обозначаются как $\check{H}^1(\Omega)$ (см. п. 1.1). В нашем случае

$$\check{H}^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \partial_k u = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,4}\}.$$

Более того, с учётом граничного условия на Γ_1 следует в задачах использовать подпространство

$$\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) := \check{H}^1(\Omega) \cap H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega). \tag{2.9}$$

Для элементов из $\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ имеем формулу Грина (см. пп. 1.1.4)

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=2}^{4} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall\ \eta,\ u \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \tag{2.10}$$

$$u - \triangle u \in (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*, \quad \gamma_k \eta \in H^{1/2}(\Gamma_k),\ \partial_k u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{2,4}.$$

Из этой формулы следует, что слабое решение задачи (2.5) определяется тождеством

$$(\eta, u_1)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, f\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \eta, \lambda u\rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \forall\ \eta \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega),$$

и это слабое решение имеет вид

$$u_1 = A^{-1} f = \lambda A^{-1} u, \tag{2.11}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega);\ L_2(\Omega))$.

Далее, слабое решение задачи (2.6) определяется тождеством

$$(\eta, u_2)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_2 \eta, \psi_2\rangle_{L_2(\Gamma_2)} = \langle \gamma_2 \eta, \mu \gamma_2 u\rangle_{L_2(\Gamma_2)}, \quad \forall\ \eta \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega).$$

Это решение задается формулой

$$\begin{gathered} u_2 = V_2 \psi_2 = \mu V_2 \gamma_2 u,\ V_2 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_2);\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)),\ V_2 = \gamma_2^*, \\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega) := \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) \cap H^1_h(\Omega), \quad H^1_h(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u - \Delta u = 0\}. \end{gathered} \tag{2.12}$$

Аналогично рассматриваются задачи (2.7) и (2.8), и их решения выражаются формулами

$$\begin{gathered} u_3 = V_3 \psi_3 = \lambda V_3 \gamma_3 u,\ V_3 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3);\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)),\ V_3 = \gamma_3^*, \\ u_4 = V_4 \psi_4 = \lambda^{-1} V_4 \gamma_4 u,\ V_4 \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_4);\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega)),\ V_4 = \gamma_4^*. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Складывая левые и правые части соотношений (2.11), (2.12), (2.13), получаем, что слабое решение u задачи (2.1)-(2.3) должно быть решением следующей спектральной проблемы:

$$u = \lambda(A^{-1} + V_3\gamma_3)u + \mu V_2\gamma_2 u + \lambda^{-1}V_4\gamma_4 u,\ u \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega). \tag{2.14}$$

Это уравнение можно привести к более симметричной форме, воспользовавшись тем, что имеют место свойства (см. лемму 1.4 пп. 1.2.2)

$$A^{1/2}V_k = (\gamma_k A^{-1/2})^* \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k);\ L_2(\Omega)),\ k = \overline{2,4}. \tag{2.15}$$

Действительно, представим элемент $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2}),\ \mathcal{R}(A^{1/2}) = L_2(\Omega)$, в виде

$$u = A^{-1/2}v,\ v \in L_2(\Omega), \tag{2.16}$$

подставим это выражение в (2.14) и подействуем на обе части полученного соотношения оператором $A^{1/2}$ (это можно сделать в силу (2.15)). Тогда взамен (2.14) возникает спектральная задача

$$L(\lambda,\mu)v := (I - \mu B_2 - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \tag{2.17}$$

$$A > 0,\ \ B_k := (A^{1/2}V_k)(\gamma_k A^{-1/2}) = B_k^* \geqslant 0,\ B_k \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)),\ \ k = \overline{2,4}, \tag{2.18}$$

для операторного пучка $L(\lambda,\mu)$ с параметрами λ и μ, один из которых можем считать спектральным, другой — фиксированным.

Задача (2.17), (2.18) содержит в себе известные спектральные проблемы, встречающиеся в приложениях. Они будут более подробно разобраны в п. 2.2.

2.1.2 Спектральная задача для двух примыкающих областей

Теперь рассмотрим конфигурацию из двух примыкающих областей. На отдельных участках границы этих областей заданы однородные условия, содержащие спектральный либо фиксированный параметр.

Будем считать, что две области Ω_1 и Ω_2 из $\mathbb{R}^m$ с липшицевыми границами примыкают друг к другу, как это показано на рис. 2.1.

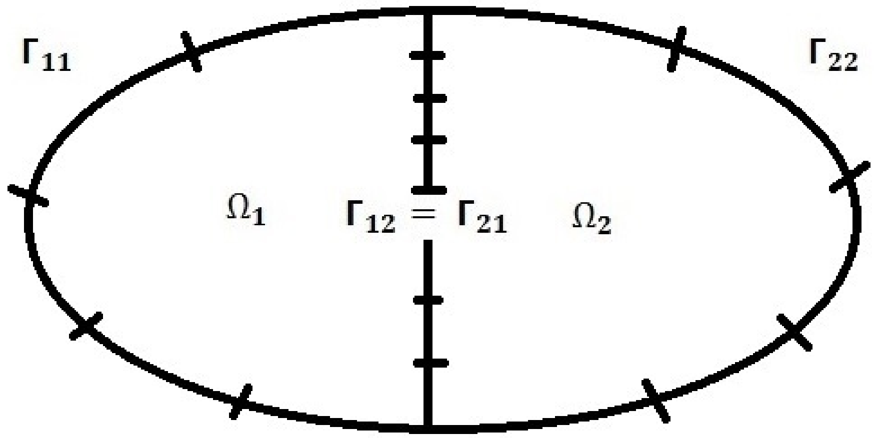

Рис. 2.1

Их внешние границы Γ_{11} и Γ_{22} являются липшицевыми кусками и сами разбиты на липшицевы куски:

$$\Gamma_{kk} = (\bigcup_{j=1}^{4} \Gamma_{kk,j}) \cup \partial\Gamma^0_{kk},\ k = 1, 2,$$

а граница стыка $\Gamma_{12} = \Gamma_{21}$ разбита на семь липшицевых кусков:

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = (\bigcup_{j=1}^{7} \Gamma_{21,j}) \cup \partial\Gamma^0_{21},\ \Gamma_{21,j} = \Gamma_{12,j}.$$

Здесь символом $\partial\Gamma^0_{kl}$ обозначено объединение внутренних границ при разбиении Γ_{kl} на части $\Gamma_{kl,j}$.

Сформулируем постановку спектральной задачи сопряжения для искомых функций $u_k(x)$, заданных в областях $\Omega_k,\ k = 1, 2$, с соответствующими граничными условиями. Имеем: в областях Ω_1 и Ω_2 —

$$u_1 - \triangle u_1 = f_1 := \lambda u_1 \ \ (\text{в } \Omega_1), \quad u_2 - \triangle u_2 = f_2 := \lambda u_2 \ \ (\text{в } \Omega_2); \tag{2.19}$$

на внешних границах:

$$\gamma_{11,1} u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11,1}),\ \gamma_{22,1} u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22,1}); \tag{2.20}$$

$$\begin{gathered}
\partial_{11,2} u_1 = \psi_{11,2} := \mu\gamma_{11,2} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11,2}), \qquad \partial_{22,2} u_2 = \psi_{22,2} := \mu\gamma_{22,2} u_2 \ \ (\text{на } \Gamma_{22,2}); \\
\partial_{11,3} u_1 = \psi_{11,3} := \lambda\gamma_{11,3} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11,3}), \qquad \partial_{22,3} u_2 = \psi_{22,3} := \lambda\gamma_{22,3} u_2 \ \ (\text{на } \Gamma_{22,3}); \\
\partial_{11,4} u_1 = \psi_{11,4} := \lambda^{-1}\gamma_{11,4} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11,4}), \quad \partial_{22,4} u_2 = \psi_{22,4} := \lambda^{-1}\gamma_{22,4} u_2 \ \ (\text{на } \Gamma_{22,4});
\end{gathered} \tag{2.21}$$

на границах стыка:

$$\gamma_{21,1}u_1 - \gamma_{12,1}u_2 = 0, \quad \partial_{21,1}u_1 + \partial_{12,1}u_2 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,1}), \tag{2.22}$$

$$\gamma_{21,2}u_1 - \gamma_{12,2}u_2 = 0, \ \ \partial_{21,2}u_1 + \partial_{12,2}u_2 = \psi_{21,2} := \mu\gamma_{21,2}u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,2}), \tag{2.23}$$

$$\gamma_{21,3}u_1 - \gamma_{12,3}u_2 = 0, \ \partial_{21,3}u_1 + \partial_{12,3}u_2 = \psi_{21,3} := \lambda\gamma_{21,3}u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,3}), \tag{2.24}$$

$$\gamma_{21,4}u_1 - \gamma_{12,4}u_2 = 0, \ \ \partial_{21,4}u_1 + \partial_{12,4}u_2 = \psi_{21,4} := \lambda^{-1}\gamma_{21,4}u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,4}), \tag{2.25}$$

$$\partial_{21,5}u_1 = -\partial_{12,5}u_2 = \psi_{21,5} := \mu(\gamma_{21,5}u_1 - \gamma_{12,5}u_2) \ \ (\text{на } \Gamma_{21,5}), \tag{2.26}$$

$$\partial_{21,6}u_1 = -\partial_{12,6}u_2 = \psi_{21,6} := \lambda(\gamma_{21,6}u_1 - \gamma_{12,6}u_2) \ (\text{на } \Gamma_{21,6}), \tag{2.27}$$

$$\partial_{21,7}u_1 = -\partial_{12,7}u_2 = \psi_{21,7} := \lambda^{-1}(\gamma_{21,7}u_1 - \gamma_{12,7}u_2) \ \ (\text{на } \Gamma_{21,7}). \tag{2.28}$$

Здесь λ и μ, как и в задаче (2.1)-(2.3), — параметры, один из которых является спектральным, а другой — фиксированным. Отметим еще, что условия (2.23), (2.25), (2.27) называют условиями первой задачи сопряжения, а (2.24), (2.26), (2.28) — условиями второй задачи сопряжения (см. [42]).

Из постановки задачи (2.19)-(2.28) видно (см. (2.20)), что её слабое решение $u = (u_1; u_2)$ естественно искать в пространстве $H^1_{0,\Gamma_{11,1}}(\Omega_1) \oplus H^1_{0,\Gamma_{22,1}}(\Omega_2)$. Более того, это решение должно принадлежать подпространству $\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega)$ тех элементов, для которых выполнены главные (с вариационной точки зрения) однородные краевые условия на стыках — это группа первых условий в (2.22)-(2.25). Значит,

$$\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega) := \{(u_1; u_2) \in H^1_{0,\Gamma_{11,1}}(\Omega_1) \oplus H^1_{0,\Gamma_{22,1}}(\Omega_2) : \gamma_{21,k}u_1 - \gamma_{12,k}u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21,k}), \ k = \overline{1,4}\}.$$

Представим решение задачи в виде суммы решений вспомогательных задач, в которых неоднородности, т.е. формально считаемые заданными функции в (2.19)-(2.28), содержатся либо в уравнениях, либо в одном из краевых условий. Для элементов из $\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega)$ воспользуемся обобщенной формулой Грина в следующем виде:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^{2} (\eta_k, u_k)_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{2} \langle \eta_k, u_k - \triangle u_k \rangle_{L_2(\Omega_k)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=2}^{4} \langle \gamma_{kk,j}\eta_k, \partial_{kk,j}u_k \rangle_{L_2(\Gamma_{kk,j})} + \sum_{j=1}^{4} \langle \gamma_{21,j}\eta_1, \partial_{21,j}u_1 + \partial_{12,j}u_2 \rangle_{L_2(\Gamma_{21,j})} +$$

$$+\sum_{j=5}^{7}\langle\gamma_{21,j}\eta_1-\gamma_{12,j}\eta_2,\partial_{21,j}u_1\rangle_{L_2(\Gamma_{21,j})}, \tag{2.29}$$

где следы $\gamma_{kl,j}\eta_l \in H^{1/2}(\Gamma_{kl,j})$, а производные по нормали $\partial_{kl,j}u_l \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{kl,j})$, т.е. из сопряженного пространства (см. (2.9), (2.10)).

Отметим еще, что пространство $\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega) := L_2(\Omega_1)\oplus L_2(\Omega_2)$, так как оно содержит подпространство $H^1_0(\Omega_1)\oplus H^1_0(\Omega_2)$, плотное в $L_2(\Omega)$.

Идя по схеме, уже изложенной для задачи (2.1)-(2.3), приходим к выводу, что первая вспомогательная задача Крейна, отвечающая неоднородным членам лишь в уравнениях (2.19) с заданными f_1 и f_2, определяется как слабое решение $u_{(1)}=(u_{11};u_{12})$ на основе тождества

$$(\eta,u_{(1)})_{H^1(\Omega)}=\sum_{k=1}^{2}\langle\eta_k,f_k\rangle_{L_2(\Omega_k)},\ \eta=(\eta_1;\eta_2)\in\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega),$$

следующего из формулы Грина (2.29). Поэтому

$$u_{(1)}=A^{-1}f=\lambda A^{-1}u,\ f=(f_1,f_2)\in(\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega))^*,$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_\Gamma(\Omega);L_2(\Omega))$.

Далее, заданным функциям $\psi_{11,2}$ и $\psi_{22,2}$ из (2.27) отвечают слабые решения $u^I_{(2)}$ и $u^{II}_{(2)}$ соответственно, определяемые тождествами

$$(\eta,u^I_{(2)})_{H^1(\Omega)}=\langle\gamma_{11,2}\eta_1,\psi_{11,2}\rangle_{L_2(\Gamma_{11,2})},\ \forall\eta\in\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega),$$

$$(\eta,u^{II}_{(2)})_{H^1(\Omega)}=\langle\gamma_{22,2}\eta_2,\psi_{22,2}\rangle_{L_2(\Gamma_{22,2})},\ \forall\eta\in\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega).$$

Обозначая эти решения через $V_{11,2}\psi_{11,2}$ и $V_{22,2}\psi_{22,2}$, приходим к выводу, что

$$u_{(2)}=u^I_{(2)}+u^{II}_{(2)}=\mu(V_{11,2}\gamma_{11,2}p_1+V_{22,2}\gamma_{22,2}p_2)u,$$

где $p_ku=p_k(u_1;u_2):=u_k,\ k=1,2$. Отметим еще, что имеют место свойства (см. лемму 1.4)

$$V_{kk,2}=(\gamma_{kk,2}p_k)^*,\ k=1,2.$$

Аналогично определяются слабые решения задач, отвечающие элементам $\psi_{11,3}$ и $\psi_{11,4}$ соответственно. Тогда

$$u_{(3)}=\lambda(V_{11,3}\gamma_{11,3}p_1+V_{22,3}\gamma_{22,3}p_2)u,\ \ V_{kk,3}=(\gamma_{kk,3}p_k)^*,\ k=1,2.$$

Таким же образом имеем

$$u_{(4)} = \lambda^{-1}(V_{11,4}\gamma_{11,4}p_1 + V_{22,4}\gamma_{22,4}p_2)u, \;\; V_{kk,4} = (\gamma_{kk,4}p_k)^*, \; k = 1, 2.$$

Рассмотрим теперь вспомогательные задачи, отвечающие заданным элементам $\psi_{21,j}$ из (2.23)-(2.25), $j = \overline{2,4}$. Решение, соответствующее $\psi_{21,2}$, определяется из тождества

$$(\eta, u_{(5)})_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_{21,2}\eta_1, \psi_{21,2}\rangle_{L_2(\Gamma_{21,2})}, \; \eta \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega),$$

и при $\psi_{21,2} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21,2})$ имеем единственное решение

$$u_{(5)} = V_{21,2}\psi_{21,2} = \mu V_{21,2}\gamma_{21,2}p_1 u, \;\; V_{21,2} = (\gamma_{21,2}p_1)^*.$$

Аналогично получаем формулы, отвечающие $\psi_{21,3}$ и $\psi_{21,4}$:

$$u_{(6)} = \lambda V_{21,3}\gamma_{21,3}p_1 u, \quad V_{21,3} = (\gamma_{21,3}p_1)^*,$$

$$u_{(7)} = \lambda^{-1} V_{21,4}\gamma_{21,4}p_1 u, \quad V_{21,4} = (\gamma_{21,4}p_1)^*.$$

Перейдем теперь к рассмотрению решений, отвечающих элементам $\psi_{21,j}, \; j = \overline{5,7}$, из (2.26)-(2.28). Решение $u_{(8)}$, отвечающее $\psi_{21,5}$, как следует из формулы Грина (2.29), определено тождеством

$$(\eta, u_{(8)})_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_{21,5}\eta_1 - \gamma_{12,5}\eta_2, \psi_{21,5}\rangle_{L_2(\Gamma_{21,5})}, \; \forall \eta \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega).$$

При любом $\psi_{21,5} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21,5})$ существует единственное решение

$$u_{(8)} = V_{21,5}\psi_{21,5} = \mu V_{21,5}(\gamma_{21,5}p_1 - \gamma_{12,5}p_2)u, \;\; V_{21,5} = (\gamma_{21,5}p_1 - \gamma_{12,5}p_2)^*.$$

Аналогичным образом получаем формулы для оставшихся двух решений $u_{(9)}$ и $u_{(10)}$ вспомогательных задач, отвечающих заданным $\psi_{21,6}$ и $\psi_{21,7}$ соответственно из (2.27), (2.28). Имеем

$$u_{(9)} = \lambda V_{21,6}(\gamma_{21,6}p_1 - \gamma_{12,6}p_2)u, \quad V_{21,6} = (\gamma_{21,6}p_1 - \gamma_{12,6}p_2)^*,$$

$$u_{(10)} = \lambda^{-1} V_{21,7}(\gamma_{21,7}p_1 - \gamma_{12,7}p_2)u, \quad V_{21,7} = (\gamma_{21,7}p_1 - \gamma_{12,7}p_2)^*.$$

Итогом проведенных построений является такой вывод. Слабое решение $u = (u_1; u_2)$ задачи (2.19)-(2.28) удовлетворяет уравнению

$$u = \sum_{j=1}^{10} u_{(j)} = \lambda(A^{-1} + C_3)u + \mu C_2 u + \lambda^{-1} C_4 u, \quad u \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega), \tag{2.30}$$

$$C_2 := V_{11,2}V^*_{11,2} + V_{22,2}V^*_{22,2} + V_{21,2}V^*_{21,2} + V_{21,5}V^*_{21,5},$$

$$C_3 := V_{11,3}V^*_{11,3} + V_{21,3}V^*_{21,3} + V_{21,6}V^*_{21,6},$$

$$C_4 := V_{11,4}V^*_{11,4} + V_{22,4}V^*_{22,4} + V_{21,4}V^*_{21,4} + V_{21,7}V^*_{21,7}.$$

Таким образом, для спектральной проблемы сопряжения (2.19)-(2.28) получилось уравнение (2.30) такого же общего вида, как уравнение (2.14) для более простой спектральной проблемы (2.1)-(2.3).

Осуществляя еще в (2.30) такую же замену, как в (2.16), т.е.

$$u = A^{-1/2}v, \ v \in L_2(\Omega) = L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2),$$

и действуя оператором $A^{1/2}$, приходим окончательно к спектральной задаче

$$L(\lambda, \mu)v := (I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \mu B_2 - \lambda^{-1} B_4)v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \tag{2.31}$$

$$A > 0, \ \ 0 \leqslant B_k = A^{1/2} C_k A^{-1/2} = B_k^* \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \ k = \overline{2,4}, \tag{2.32}$$

равносильной исходной проблеме (2.19)-(2.28).

Очевидно, что решение задачи (2.31), (2.32) обладает теми же общими свойствами, что и (2.17).

2.1.3 Спектральная задача для трёх примыкающих областей

Наконец, рассмотрим смешанную спектральную задачу сопряжения для трёх примыкающих областей. На частях границы заданы однородные условия со спектральным или фиксированным параметром.

Пусть области $\Omega_k, \ k = \overline{1,3}$ из $\mathbb{R}^m$ с липшицевыми границами $\partial\Omega_k, \ k = \overline{1,3}$ примыкают друг к другу как на рис. 2.2

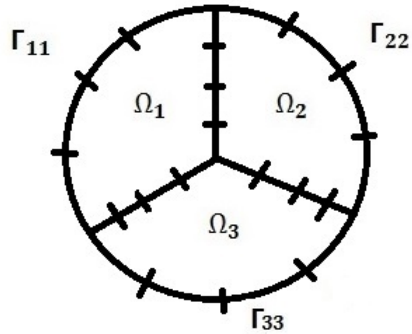

Рис. 2.2

Внешние границы $\Gamma_{kk},\ k=\overline{1,3}$ — липшицевы куски и сами разбиты на четыре липшицевых куска каждая:

$$\Gamma_{kk}=\left(\bigcup_{j=1}^{4}\Gamma_{kk,j}\right)\cup\partial\Gamma_{kk}^{\circ},\quad k=\overline{1,3}.$$

Каждая граница стыка также разбита на четыре липшицевых куска:

$$\Gamma_{kj}=\Gamma_{jk}=\left(\bigcup_{i=1}^{4}\Gamma_{kj,i}\right)\cup\partial\Gamma_{kj}^{\circ},\ \Gamma_{kj,i}=\Gamma_{jk,i},\quad k,j=\overline{1,3},\ k\neq j,\ i=\overline{1,3}.$$

Здесь символом $\partial\Gamma_{kl}^{\circ}$ обозначено объединение внутренних границ при разбиении Γ_{kk} и Γ_{kj} на части $\Gamma_{kl,i},\ k=l,\ k\neq l$.

Получаем следующую спектральную задачу сопряжения для искомых функций $u_k(x)$ в областях $\Omega_k,\ k=\overline{1,3}$ с соответствующими условиями на границах.

$$u_1-\triangle u_1=f_1:=\lambda u_1\ \ (\text{в }\Omega_1),\ \ u_2-\triangle u_2=f_2:=\lambda u_2\ \ (\text{в }\Omega_2),\ \ u_3-\triangle u_3=f_3:=\lambda u_3\ \ (\text{в }\Omega_3); \tag{2.33}$$

на внешних границах:

$$\begin{gathered}
\gamma_{11,1}u_1=0\ (\text{на }\Gamma_{11,1}),\\
\partial_{11,2}u_1=\psi_{11,2}:=\mu\gamma_{11,2}u_1\ \ (\text{на }\Gamma_{11,2}),\\
\partial_{11,3}u_1=\psi_{11,3}:=\lambda\gamma_{11,3}u_1\ \ (\text{на }\Gamma_{11,3}),\\
\partial_{11,4}u_1=\psi_{11,4}:=\lambda^{-1}\gamma_{11,4}u_1\ \ (\text{на }\Gamma_{11,4});
\end{gathered} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}
&\gamma_{22,1}u_2 = 0 \text{ (на } \Gamma_{22,1}),\\
&\partial_{22,2}u_2 = \psi_{22,2} := \mu\gamma_{22,2}u_2 \ \text{ (на } \Gamma_{22,2}),\\
&\partial_{22,3}u_2 = \psi_{22,3} := \lambda\gamma_{22,3}u_2 \ \text{ (на } \Gamma_{22,3}),\\
&\partial_{22,4}u_2 = \psi_{22,4} := \lambda^{-1}\gamma_{22,4}u_2 \ \text{ (на } \Gamma_{22,4});
\end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
&\gamma_{33,1}u_3 = 0 \text{ (на } \Gamma_{33,1}),\\
&\partial_{33,2}u_3 = \psi_{33,2} := \mu\gamma_{33,2}u_3 \ \text{ (на } \Gamma_{33,2}),\\
&\partial_{33,3}u_3 = \psi_{33,3} := \lambda\gamma_{33,3}u_3 \ \text{ (на } \Gamma_{33,3}),\\
&\partial_{33,4}u_3 = \psi_{33,4} := \lambda^{-1}\gamma_{33,4}u_3 \ \text{ (на } \Gamma_{33,4});
\end{aligned} \tag{2.36}$$

на границах стыка:

$$\begin{gathered}
\gamma_{21,1}u_1 - \gamma_{12,1}u_2 = 0, \quad \partial_{21,1}u_1 + \partial_{12,1}u_2 = 0 \ \text{ (на } \Gamma_{21,1}),\\
\gamma_{21,2}u_1 - \gamma_{12,2}u_2 = 0, \quad \partial_{21,2}u_1 + \partial_{12,2}u_2 = \psi_{21,2} := \mu\gamma_{21,2}u_1 \ \text{ (на } \Gamma_{21,2}),\\
\gamma_{21,3}u_1 - \gamma_{12,3}u_2 = 0, \ \ \partial_{21,3}u_1 + \partial_{12,3}u_2 = \psi_{21,3} := \lambda\gamma_{21,3}u_1 \ \text{ (на } \Gamma_{21,3}),\\
\partial_{21,4}u_1 = -\partial_{12,4}u_2 = \psi_{21,4} := \lambda^{-1}(\gamma_{21,4}u_1 - \gamma_{12,4}u_2) \ \text{ (на } \Gamma_{21,4});
\end{gathered} \tag{2.37}$$

$$\begin{gathered}
\gamma_{32,1}u_2 - \gamma_{23,1}u_3 = 0, \ \ \partial_{32,1}u_2 + \partial_{23,1}u_3 = 0 \ \text{ (на } \Gamma_{32,1}),\\
\gamma_{32,2}u_2 - \gamma_{23,2}u_3 = 0, \ \ \partial_{32,2}u_2 + \partial_{23,2}u_3 = \psi_{32,2} := \mu\gamma_{32,2}u_2 \ \text{ (на } \Gamma_{32,2}),\\
\gamma_{32,3}u_2 - \gamma_{23,3}u_3 = 0, \ \ \partial_{32,3}u_2 + \partial_{23,3}u_3 = \psi_{32,3} := \lambda\gamma_{32,3}u_2 \ \text{ (на } \Gamma_{32,3}),\\
\partial_{32,4}u_2 = -\partial_{23,4}u_3 = \psi_{32,4} := \lambda^{-1}(\gamma_{32,4}u_2 - \gamma_{23,4}u_3) \text{ (на } \Gamma_{32,4});
\end{gathered} \tag{2.38}$$

$$\begin{gathered}
\gamma_{13,1}u_3 - \gamma_{31,1}u_1 = 0, \ \partial_{13,1}u_3 + \partial_{31,1}u_1 = 0 \ \text{ (на } \Gamma_{13,1}),\\
\gamma_{13,2}u_3 - \gamma_{31,2}u_1 = 0, \ \partial_{13,2}u_3 + \partial_{31,2}u_1 = \psi_{13,2} := \mu\gamma_{13,2}u_3 \ \text{ (на } \Gamma_{13,2}),\\
\gamma_{13,3}u_3 - \gamma_{31,3}u_1 = 0, \ \ \partial_{13,3}u_3 + \partial_{31,3}u_1 = \psi_{13,3} := \lambda\gamma_{13,3}u_3 \ \text{ (на } \Gamma_{13,3}),\\
\partial_{13,4}u_3 = -\partial_{31,4}u_1 = \psi_{13,4} := \lambda^{-1}(\gamma_{13,4}u_3 - \gamma_{31,4}u_1) \ \text{ (на } \Gamma_{13,4}).
\end{gathered} \tag{2.39}$$

Здесь λ и μ, как и в случаях с одной и двумя областями — параметры. Один из них спектральный, другой — фиксированный.

Слабое решение, согласно постановке задачи (2.33)-(2.39), будем искать из пространства

$$H^1_{0,\Gamma_{11,1}(\Omega_1)} \oplus H^1_{0,\Gamma_{22,1}(\Omega_2)} \oplus H^1_{0,\Gamma_{33,1}(\Omega_3)}.$$

Это решение должно принадлежать пространству $\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega)$, т.е. выполняются главные (с вариационной точки зрения) однородные краевые условия на стыках. Таким образом,

$$\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega) := \{(u_1; u_2; u_3) \in H^1_{0,\Gamma_{11,1}}(\Omega_1) \oplus H^1_{0,\Gamma_{22,1}}(\Omega_2) \oplus H^1_{0,\Gamma_{33,1}}(\Omega_3) :$$

$$\gamma_{kj,i} u_j - \gamma_{jk,i} u_k = 0 \text{ (на } \Gamma_{kj,i} = \Gamma_{jk,i}),\ k = \overline{1,3}\}.$$

Пользуясь общей схемой изучения смешанных краевых задач сопряжения (см. пп. 1.2), будем искать решение задачи (2.33)-(2.39) в виде суммы решений вспомогательных задач, содержащих неоднородность либо в уравнениях, либо в одном их краевых условий. Нам понадобится следующая обобщенная формула Грина для элементов из $\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega)$

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \sum_{k=1}^{3} (\eta_k, u_k)_{H^1(\Omega_k)} = \sum_{k=1}^{3} \langle \eta_k, u_k - \triangle u_k \rangle_{L_2(\Omega_k)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{4} \langle \gamma_{kk,i} \eta_k, \partial_{kk,i} u_k \rangle_{L_2(\Gamma_{kk,i})} + \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} \langle \gamma_{kj,i} \eta_j, \partial_{kj,i} u_j + \partial_{jk,i} u_k \rangle_{L_2(\Gamma_{kj,i})} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \langle \gamma_{kj,3} \eta_j - \gamma_{jk,3} \eta_k, \partial_{kj,3} u_j \rangle_{L_2(\Gamma_{kj,3})}. \tag{2.40}$$

Здесь следы $\gamma_{kj,i} \eta_j \in H^{1/2}(\Gamma_{kj,i})$, а производные по нормали $\partial_{kj,i} u_j \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{kj,i})$, т.е. продолжимы нулём с части границы на всю. Как и в п. 2.1.2, пространство $\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega) := L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2) \oplus L_2(\Omega_3)$.

Воспользовавшись уже известной схемой для задач (2.1)-(2.3), (2.19)- (2.28), получаем решение первой вспомогательной задачи Крейна с помощью тождества

$$(\eta, u_{(1)})_{H^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{3} \langle \eta_k, f_k \rangle_{L_2(\Omega_k)},\ \eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3) \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega),$$

следующего из формулы Грина (2.40). Поэтому

$$u_{(1)} = A^{-1} f = \lambda A^{-1} u,\ f = (f_1, f_2, f_3) \in (\mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega))^*,$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_\Gamma(\Omega); L_2(\Omega))$.

Теперь, считая заданными функции $\psi_{kk,2},\ k=\overline{1,3}$,получаем тождества:

$$(\eta, u^k_{(2)})_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_{kk,2}\eta_k, \psi_{kk,2}\rangle_{L_2(\Gamma_{kk,2})},\ \forall \eta \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega),\ k=\overline{1,3}.$$

Обозначим эти решения $V_{kk,2},\ k=\overline{1,3}$ и получаем, что

$$u_{(2)} = u^1_{(2)} + u^2_{(2)} + u^3_{(2)} = \mu(V_{11,2}\gamma_{11,2}p_1 + V_{22,2}\gamma_{22,2}p_2 + V_{33,2}\gamma_{33,2}p_3)u,$$

где $p_k u = p_k(u_1; u_2; u_3) := u_k,\ k=\overline{1,3}$. Также имеют место свойства

$$V_{kk,2} = (\gamma_{kk,2}p_k)^*,\ k=\overline{1,3}.$$

Аналогичным образом находим слабые решения задач, отвечающие элементам $\psi_{22,3}$ и $\psi_{22,4}$. Получаем

$$u_{(3)} = \lambda(V_{11,3}\gamma_{11,3}p_1 + V_{22,3}\gamma_{22,3}p_2 + V_{33,3}\gamma_{33,3}p_3)u,$$

$$V_{kk,3} = (\gamma_{kk,3}p_k)^*,\ k=\overline{1,3};$$

$$u_{(4)} = \lambda^{-1}(V_{11,4}\gamma_{11,4}p_1 + V_{22,4}\gamma_{22,4}p_2 + V_{33,4}\gamma_{33,4}p_3)u,$$

$$V_{kk,4} = (\gamma_{kk,4}p_k)^*,\ k=\overline{1,3}.$$

Теперь запишем тождество для вспомогательных задач, отвечающих элементам $\psi_{kj,2},\ k,j=\overline{1,3},\ k\neq j$.

$$(\eta, u_{(5)})_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_{21,2}\eta_1, \psi_{21,2}\rangle_{L_2(\Gamma_{21,2})},\ \eta \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega),$$

$\psi_{21,2} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21,2})$. Получаем единственное слабое решение

$$u_{(5)} = V_{21,2}\psi_{21,2} = \mu V_{21,2}\gamma_{21,2}p_1 u,\ \ V_{21,2} = (\gamma_{21,2}p_1)^*.$$

Аналогично находим решения, отвечающие $\psi_{32,2}$ и $\psi_{13,2}$:

$$u_{(6)} = \mu V_{32,2}\gamma_{32,2}p_2 u, \quad V_{32,2} = (\gamma_{32,2}p_2)^*,$$

$$u_{(7)} = \mu V_{13,2}\gamma_{13,2}p_3 u, \quad V_{13,2} = (\gamma_{13,2}p_3)^*.$$

Рассмотрим теперь решения, отвечающие элементам $\psi_{kj,3},\ k,j=\overline{1,3},\ k\neq j$. Из формулы Грина (2.40) получаем тождество

$$(\eta, u_{(8)})_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_{21,3}\eta_1 - \gamma_{12,3}\eta_2, \psi_{21,3}\rangle_{L_2(\Gamma_{21,3})},\ \forall \eta \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega).$$

Отсюда следует, что при любом $\psi_{21,3} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21,3})$ существует единственное решение

$$u_{(8)} = V_{21,3}\psi_{21,3} = \lambda V_{21,3}(\gamma_{21,3}p_1 - \gamma_{12,3}p_2)u, \ \ V_{21,3} = (\gamma_{21,3}p_1 - \gamma_{12,3}p_2)^*.$$

Аналогичным образом находим

$$u_{(9)} = \lambda V_{32,3}(\gamma_{32,3}p_2 - \gamma_{23,3}p_3)u, \quad V_{32,3} = (\gamma_{32,3}p_2 - \gamma_{23,3}p_3)^*,$$

$$u_{(10)} = \lambda V_{13,3}(\gamma_{13,3}p_3 - \gamma_{31,3}p_1)u, \quad V_{13,3} = (\gamma_{13,3}p_3 - \gamma_{31,3}p_1)^*.$$

И, наконец, рассмотрим решения, отвечающие элементам $\psi_{kj,4}, \ k,j = \overline{1,3}, \ k \neq j$. Из формулы Грина (2.40) получаем тождество

$$(\eta, u_{(11)})_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_{21,4}\eta_1 - \gamma_{12,4}\eta_2, \psi_{21,4}\rangle_{L_2(\Gamma_{21,4})}, \ \forall \eta \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega).$$

Значит, при любом $\psi_{21,4} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_{21,4})$ существует единственное решение

$$u_{(11)} = V_{21,4}\psi_{21,4} = \lambda^{-1} V_{21,4}(\gamma_{21,4}p_1 - \gamma_{12,4}p_2)u, \ \ V_{21,4} = (\gamma_{21,4}p_1 - \gamma_{12,4}p_2)^*.$$

Аналогичным образом получаем

$$u_{(12)} = \lambda^{-1} V_{32,4}(\gamma_{32,4}p_2 - \gamma_{23,4}p_3)u, \quad V_{32,4} = (\gamma_{32,4}p_2 - \gamma_{23,4}p_3)^*,$$

$$u_{(13)} = \lambda^{-1} V_{13,4}(\gamma_{13,4}p_3 - \gamma_{31,4}p_1)u, \quad V_{13,4} = (\gamma_{13,4}p_3 - \gamma_{31,4}p_1)^*.$$

В итоге приходим к выводу, что слабое решение $u = (u_1; u_2; u_3)$ задачи (2.33)-(2.39) удовлетворяет уравнению

$$u = \sum_{j=1}^{10} u_{(j)} = \lambda(A^{-1} + D_3)u + \mu D_2 u + \lambda^{-1} D_4 u, \quad u \in \mathbb{H}^1_\Gamma(\Omega), \tag{2.41}$$

$$D_2 := V_{11,2}V_{11,2}^* + V_{22,2}V_{22,2}^* + V_{33,2}V_{33,2}^* + V_{21,2}V_{21,2}^* + V_{32,2}V_{32,2}^* + V_{13,2}V_{13,2}^*,$$

$$D_3 := V_{11,3}V_{11,3}^* + V_{22,3}V_{22,3}^* + V_{33,3}V_{33,3}^* + V_{21,3}V_{21,3}^* + V_{32,3}V_{32,3}^* + V_{13,3}V_{13,3}^*,$$

$$D_4 := V_{11,4}V_{11,4}^* + V_{22,4}V_{22,4}^* + V_{33,4}V_{33,4}^* + V_{21,4}V_{21,4}^* + V_{32,4}V_{32,4}^* + V_{13,4}V_{13,4}^*.$$

Получено уравнение такого же общего вида, как и для задач (2.1)-(2.3) и (2.19)-(2.28).

После замены, как и в пп. 2.1.1 и 2.1.2, имеем спектральную задачу

$$L(\lambda,\mu)v := (I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \mu B_2 - \lambda^{-1}B_4)v = 0, \quad v \in L_2(\Omega),$$

$$A > 0, \ \ 0 \leqslant B_k = A^{1/2}D_kA^{-1/2} = B_k^* \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)), \ k = \overline{2,4},$$

равносильную исходной проблеме (2.33)-(2.39).

2.2 О свойствах решений спектральных проблем

2.2.1 Свойства решений при спектральном параметре μ

Рассмотрим для простоты полученную спектральную задачу для одной области (см. (2.17), (2.18)):

$$L(\lambda,\mu)\varphi := (I - \mu B_2 - \lambda(A^{-1}+B_3) - \lambda^{-1}B_4)\varphi = 0, \quad \varphi \in H, \ \ \lambda, \ \mu \in \mathbb{C}, \tag{2.42}$$

$$H = L_2(\Omega), \ \ 0 \leqslant B_k = B_k^* \in \mathfrak{S}_\infty(H), \ k = \overline{2,4}, \ 0 < A = A^* \in \mathfrak{S}_\infty(H). \tag{2.43}$$

Операторный пучок $L(\lambda,\mu)$ содержит два параметра: λ и μ. Это позволяет исследовать два класса задач: при фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ возникают задачи со спектральным параметром λ в уравнении, а при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ — задачи со спектральным параметром μ в краевом условии на границе сопряжения.

Рассмотрим сначала случай, когда в пучке $L(\lambda,\mu)$ параметр λ фиксирован, а μ — спектральный.

Отрицательные значения параметра.

Пусть в задаче (2.42)-(2.43) параметр $\lambda < 0$. Обозначим

$$T(\lambda) := \lambda(A^{-1}+B_3) + \lambda^{-1}B_4. \tag{2.44}$$

Так как $T(\lambda) < 0$, то оператор $I - T(\lambda) \geqslant I$ равномерно по λ. Значит существует обратный оператор $(I - T(\lambda))^{-1}$, $\|(I-T(\lambda))^{-1}\| \leqslant 1$.

Заметим теперь, что оператор $B_2 = (A^{1/2}V_2)(\gamma_2 A^{-1/2})$ ограниченно действует из $L_2(\Omega)$ в подпространство

$$L_{2,h}(\Omega) := \{\varphi \in L_2(\Omega) : \varphi = A^{1/2}u_2, \ u_2 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega) \subset H^1(\Omega)\}$$

(см. (2.12)) и потому $\ker B_2 = L_{2,0}(\Omega) = L_2(\Omega) \ominus L_{2,h}(\Omega)$.

Кроме того, этот оператор неотрицателен и компактен в $L_2(\Omega)$. Далее, $T(\lambda)$ также компактен и отрицателен. Это позволяет преобразовать проблему (2.42), (2.43) к спектральной задаче на собственные значения компактного положительного оператора и воспользоваться теоремой Гильберта – Шмидта.

Пусть P_0 и P_1 — взаимно дополнительные ортопроекторы, отвечающие разложению:

$$H = H_0 \oplus H_1,\ H_0 := \ker B_2 = L_{2,0}(\Omega),\ H_1 = H \ominus H_0 = \overline{\mathcal{R}(B_2)} = L_{2,h}(\Omega),$$

а I_0 и I_1 — единичные операторы в H_0 и H_1 соответственно. Тогда $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$:

$$(I - T(\lambda))(\varphi_0 + \varphi_1) = \mu B_2(\varphi_0 + \varphi_1) = \mu B_2\varphi_0 + \mu\widetilde{B_2}\varphi_1 = \mu\widetilde{B_2}\varphi_1, \tag{2.45}$$

где $\widetilde{B_2} = P_1 B_2 P_1,\ B_2\varphi_0 = 0,\ \varphi_0 = P_0\varphi_0,\ \varphi_1 = P_1\varphi_1,\ B_2 = P_1 B_2$.

Применим к обеим частям уравнения (2.45) ортопроекторы P_0 и P_1, имеем

$$P_0(I - T(\lambda))P_0\varphi_0 + P_0(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = \mu P_0\widetilde{B_2}\varphi_1 = 0, \tag{2.46}$$

$$P_1(I - T(\lambda))P_0\varphi_0 + P_1(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = \mu P_1\widetilde{B_2}\varphi_1 = \mu\widetilde{B_2}\varphi_1. \tag{2.47}$$

Оператор $P_0(I - T(\lambda))P_0 = I_0 - P_0 T(\lambda) P_0 \geqslant I_0$ в H_0, и потому существует его обратный, причём $\|(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}\| \leqslant 1$ равномерно по $\lambda < 0$. Тогда из (2.46) имеем

$$\varphi_0 = -(P_0(I - T(\lambda))P_0)^{-1}(P_0(I - T(\lambda))P_1\varphi_1). \tag{2.48}$$

Подставим полученное выражение в (2.47) и будем иметь уравнение для φ_1:

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = \mu\widetilde{B}_2\varphi_1,\ \varphi_1 \in H_1, \tag{2.49}$$

$$T_1(\lambda) = P_1 T(\lambda) P_1 + P_1 T(\lambda) P_0 (I_0 - P_0 T(\lambda) P_0)^{-1} P_1 T(\lambda) P_1. \tag{2.50}$$

Лемма 2.1. *Имеет место свойство*

$$\ker(I_1 - T_1(\lambda)) = \{0\}.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = 0, \tag{2.51}$$

где $T_1(\lambda)$ определен в (2.50). Введём φ_0 по формуле (2.48) и подставим в (2.51). Тогда будем иметь формулу (2.47) с $\mu = 0$:

$$P_1(I - T(\lambda))P_0\varphi_0 + P_1(I - T(\lambda))P_1\varphi_1 = 0, \tag{2.52}$$

а из (2.51) получаем (2.46).

Полученное уравнение (2.52) или система уравнений (2.46), (2.47) с $\mu = 0$ равносильны уравнению

$$(I - T(\lambda))\varphi = 0, \;\; \varphi = \varphi_0 + \varphi_1,$$

которое имеет тривиальное решение $\varphi = 0$, так как $I - T(\lambda) \geqslant I \gg 0$. Поэтому и $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. □

Заметим теперь, что при $\lambda < 0$ оператор $I_1 - T_1(\lambda)$ из (2.50) самосопряжён и положительно определён. В самом деле, если имеется связь (2.48), то

$$((I - T(\lambda))(\varphi_0 + \varphi_1),\; \varphi_0 + \varphi_1)_{L_2(\Omega)} = ((I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1,\; \varphi_1)_{L_2(\Omega)} \geqslant$$
$$\geqslant \alpha\Big(\|\varphi_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\varphi_1\|^2_{L_2(\Omega)}\Big) \geqslant \alpha\|\varphi_1\|^2_{L_2(\Omega)}, \;\; \alpha > 0, \tag{2.53}$$

так как $I - T(\lambda) \gg 0$. Отсюда и следует свойство

$$I_1 - T_1(\lambda) \gg 0.$$

Опираясь на этот факт, осуществим в (2.49) замену

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{1/2}\varphi_1 = \psi_1 \tag{2.54}$$

и подействуем слева (ограниченным) оператором $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}$. Тогда возникает задача

$$\psi_1 = \mu\widehat{B}_2\psi_1, \;\; \psi_1 \in H_1 = L_{2,h}(\Omega), \tag{2.55}$$
$$\widehat{B}_2 := (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}P_1B_2P_1(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} = \widehat{B}_2^* > 0, \;\; \widehat{B}_2 \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)).$$

Теорема 2.1. *При $\lambda < 0$ задача (2.42) имеет дискретный спектр, состоящий из положительных конечнократных собственных значений $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ с предельной точкой $+\infty$. Собственные элементы $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$, после проектирования на подпространство $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$, т.е. элементы $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^\infty$, $\varphi_{1k} = P_1\varphi_k$, образуют базис Рисса в H_1, причём $\varphi_{1k} = (I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2}\psi_{1k}$, где $\{\psi_{1k}\}_{k=1}^\infty$ — ортономированный базис, отвечающий оператору $\widehat{B}_2$ из (2.55). Более того, элементы φ_{1k} для $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ образуют p – базис в H_1 при*

$$p > p_0 = m - 1. \tag{2.56}$$

Доказательство. Первое утверждение о дискретном и положительном спектре и базисе Рисса следует из теоремы Гильберта – Шмидта, применённой к проблеме (2.55), и свойства $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} \in \mathcal{L}(H_1)$.

Докажем теперь свойство (2.56). Из формулы (2.44) следует, что $T(\lambda)$ принадлежит классу компактных операторов $\mathfrak{S}_p(L_2(\Omega))$, где

$$p > p_0 = \max(p_{A^{-1}};\ p_{B_3};\ p_{B_4}). \tag{2.57}$$

Однако можно убедиться, что собственные значения $\lambda_k(A^{-1})$ положительного самосопряжённого компактного оператора A^{-1} суть последовательные максимумы вариационного отношения

$$\|A^{-1/2}\varphi\|^2_{L_2(\Omega)}\Big/\|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} = \|u\|^2_{L_2(\Omega)}/\|u\|^2_{H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)},\ u = A^{-1/2}\varphi \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega).$$

Поэтому их асимптотика при $k \to \infty$ даётся классической формулой Вейля

$$\lambda_k(A^{-1}) = (a_m(\Omega))^{2/m}k^{-2/m}[1 + o(1)]\ \ (k \to \infty),\ \ a_m(\Omega) > 0,\ \ a_3(\Omega) = \frac{|\Omega|}{6\pi^2}, \tag{2.58}$$

и потому $p_{A^{-1}} > m/2$.

Для оператора B_3 аналогично устанавливаем, что его положительные собственные значения суть последовательные максимумы вариационного отношения

$$\|\gamma_3 A^{-1/2}\varphi\|_{L_2(\Gamma)}/\|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)} = \int_{\Gamma_3} |u|^2 d\Gamma_3/\int_\Omega (|u|^2 + |\nabla u|^2)d\Omega,\ \ u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega).$$

Отсюда и из [14] получаем, что асимптотическое поведение собственных значений $\lambda_k(B_3)$ таково:

$$\lambda_k(B_3) = (d_{m,3}(\Gamma_3))^{1/(m-1)}k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)]\ \ (k \to \infty),\ \ d_{m,3}(\Gamma_3) > 0,\ d_{3,3}(\Gamma_3) = \frac{|\Gamma_3|}{4\pi}. \tag{2.59}$$

Значит, $p_{B_3} > m - 1$.

Для оператора B_4 те же рассуждения приводят к формуле

$$\lambda_k(B_4) = (d_{m,4}(\Gamma_4))^{1/(m-1)}k^{-1/(m-1)}[1 + o(1)]\ \ (k \to \infty),\ \ d_{m,4}(\Gamma_4) > 0,\ d_{3,4}(\Gamma_4) = \frac{|\Gamma_4|}{4\pi}, \tag{2.60}$$

и потому $p_{B_4} > m - 1$. Из (2.58), (2.59), (2.60) и из (2.57) теперь следует, что $T(\lambda)$ из (2.44) принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$ при $p > p_0 = m - 1$.

Заметим, наконец, что

$$(I_1 - T_1(\lambda))^{-1/2} = I_1 + \widetilde{T}_1(\lambda),\ \widetilde{T}_1(\lambda) \in \mathfrak{S}_p,\ p > p_0 = m - 1.$$

Отсюда и из (2.54) следует свойство p – базисности элементов $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$ при $p > m - 1$. □

Положительные значения параметра λ.

Будем теперь считать, что в задаче (2.42), (2.43) параметр λ положителен, однако

$$\lambda \notin \sigma(I - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0). \tag{2.61}$$

Тогда так же, как и в предыдущем случае, можно перейти от проблемы (2.42) путём проектирования на подпространства $H_0 = L_{2,0}(\Omega)$ и $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$ и исключения φ_0 (см. (2.46)-(2.48)) к уравнению (2.49) с $T_1(\lambda)$ из (2.50).

Здесь снова справедливо утверждение леммы 2.1, причём $T_1(\lambda)$ — компактный самосопряжённый оператор, действующий в H_1. Отсюда следует, что оператор $I_1 - T_1(\lambda)$ может иметь не более конечного числа (с учётом их кратностей) отрицательных собственных значений, а остальные положительны и имеют предельную точку $+\infty$. Обозначая количество отрицательных собственных значений через κ_1, приходим к выводу, что квадратичная форма оператора $I_1 - T_1(\lambda)$ индефинитна, а всё пространство H_1 разбивается на ортогональную сумму κ_1 – мерного отрицательного подпространства H_- и бесконечномерного положительного подпространства H_+. Таким образом, возникает индефинитная метрика — пространство Понтрягина

$$H_1 = \Pi_{\kappa_1} = \Pi_- \oplus \Pi_+,\ \ \Pi_- = H_-,\ \ \Pi_+ = H_+,\ \ \dim \Pi_- = \kappa_1,\ \ \dim \Pi_+ = \infty. \tag{2.62}$$

Теорема 2.2. *Пусть $\lambda > 0$ и выполнено условие (2.61), причём имеет место разложение (2.62). Тогда спектр исходной задачи (2.42), (2.43) вещественный, дискретный и состоит из κ_1 штук отрицательных собственных значений, а остальные положительны и имеют предельную точку $\mu = +\infty$:*

$$\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant ... \leqslant \mu_{\kappa_1} < 0 < \mu_{\kappa_1+1} \leqslant ... \leqslant \mu_k \leqslant ...,\ \ \lim_{k\to\infty} \mu_k = +\infty. \tag{2.63}$$

При этом собственные элементы (присоединённых нет) задачи (2.49) образуют ортонормированный по форме $I_1 - T_1(\lambda)$ базис и базис Рисса в $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$. Элементы базиса можно выбрать удовлетворяющими соотношениям

$$((I_1 - T_1(\lambda))\varphi_{1k},\ \varphi_{1j})_{H_1} = \begin{cases} -\delta_{kj}, & 1 \leqslant k,\ j \leqslant \varkappa_1, \\ \delta_{kj}, & k,\ j \geqslant \varkappa_1 + 1, \\ 0, & k \leqslant \varkappa_1,\ \ j \geqslant \varkappa_1 + 1, \end{cases} \tag{2.64}$$

$$(\widetilde{B}_2\varphi_{1k},\ \varphi_{1j})_{H_1} = |\mu_k^{-1}|\delta_{kj}.$$

Доказательство. Учитывая (2.61) и (2.62), представим оператор $I_1 - T_1(\lambda)$ в виде

$$I_1 - T_1(\lambda) = |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2} J_{\varkappa_1} |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2}, \tag{2.65}$$

где $J_{\varkappa_1}$ — каноническая симметрия:

$$J_{\varkappa_1} = J_{\varkappa_1}^* = J_{\varkappa_1}^{-1}. \tag{2.66}$$

Тогда с учётом (2.65) задача (2.49) преобразуется к виду

$$v_1 = \mu J_{\varkappa_1} \widetilde{B_2}(\lambda) v_1, \tag{2.67}$$

$$v_1 = |I_1 - T_1(\lambda)|^{1/2}\varphi_1,\ \ \widetilde{B_2}(\lambda) := |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2}\widetilde{B_2}|I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2}. \tag{2.68}$$

Так как оператор $\widetilde{B_2}(\lambda)$ компактен и положителен, то оператор $J_{\varkappa_1}\widetilde{B_2}(\lambda)$ — компактный и $J_{\varkappa_1}$ – положительный, т.е.

$$[J_\varkappa \widetilde{B_2}(\lambda) v_1,\ v_1] := (J_\varkappa(J_\varkappa \widetilde{B_2}(\lambda))v_1,\ v_1) = (\widetilde{B_2}(\lambda)v_1,\ v_1) > 0,\ \ v_1 \neq 0.$$

Поэтому по теореме Л.С. Понтрягина (см. [34]) получаем, что задача (2.67), (2.68) имеет дискретный вещественный спектр $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ со свойствами (2.63), а собственные элементы $\{v_{1k}\}_{k=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$, образуют базис Рисса в H_1. Отсюда, а также из замены (2.68) приходим к выводу, что собственные элементы $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^\infty$ $\varphi_{1k} = |I_1 - T_1(\lambda)|^{-1/2} v_{1k}$ образуют базис Рисса в H_1. Наконец, из условий ортонормировки

$$[v_{1k}, v_{1j}] = (J_{\varkappa_1}\varphi_{1k}, \varphi_{1j})_{H_1} = \pm\delta_{kj},\ \ (\widetilde{B_2}\varphi_{1k}, \varphi_{1j})_{H_1} = |\mu_k^{-1}|\delta_{kj},$$

получаем, что справедливы формулы (2.64). □

Случай общего положения Рассмотрим теперь более общий случай, когда

$$\mathrm{Im}\lambda \neq 0, \quad \lambda \notin \sigma(I - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0). \tag{2.69}$$

Как хорошо известно, операторный пучок типа С.Г. Крейна

$$I - T(\lambda) := I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1} B_4; \quad A^{-1},\ B_3,\ B_4\ \in \mathfrak{S}_\infty, \tag{2.70}$$

может иметь вне вещественной оси не более конечного числа невещественных собственных значений, симметрично расположенных относительно вещественной оси в правой комплексной полуплоскости.

В частности, если $\mathrm{Re}\lambda \leqslant 0$, то из неравенства

$$\|(I - T(\lambda))\varphi\|_H \cdot \|\varphi\|_H \geqslant |((I - T(\lambda))\varphi, \varphi)_H| \geqslant \mathrm{Re}((I - T(\lambda))\varphi, \varphi)_H \geqslant \|\varphi\|_H^2 \tag{2.71}$$

получаем, что при $\mathrm{Re}\lambda \leqslant 0, \ \ \mathrm{Im}\lambda \neq 0$,

$$\|(I - T(\lambda))^{-1}\| \leqslant 1 \tag{2.72}$$

равномерно по λ. При этом также

$$\|(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0)^{-1}\| \leqslant 1,$$

так как в силу (2.71)

$$((I_0 - P_0 T(\lambda) P_0)\varphi_0,\ \varphi_0)_H = ((I - T(\lambda))\varphi_0, \varphi_0)_H \geqslant \|\varphi_0\|_H^2,\ \varphi_0 \in H_0.$$

Отсюда снова следует, что от исходной задачи (2.42), (2.43) можно в рассматриваемом случае перейти к уравнению (2.49) с $T_1(\lambda)$ из (2.50), причём для связи (2.48) снова оператор $I_1 - T_1(\lambda)$ ограниченно обратим. Тогда задачу (2.49) можно переписать в виде

$$\varphi_1 = \mu(I_1 - T_1(\lambda))^{-1} \widetilde{B}_2 \varphi_1, \quad \varphi_1 \in H_1 = L_{2,h},\ \widetilde{B}_2 = P_1 B_2 P_1. \tag{2.73}$$

Теорема 2.3. *Пусть в задаче (2.42), (2.43) выполнены условия (2.69). Тогда спектр этой задачи дискретен, состоит из конечнократных собственных значений* $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ *с предельной точкой* $\mu = \infty$. *Сколь бы ни было мало* $\varepsilon > 0$, *все собственные значения, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в угле*

$$\Lambda_\varepsilon(\mu) := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \varepsilon,\ sign\ Im\, \mu = -sign\ Im\, \lambda\}. \tag{2.74}$$

Система собственных и присоединённых элементов $\{\varphi_{1k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\varphi_{1k} = P_1\varphi_k$, *т.е. система собственных и присоединённых элементов задачи (2.42), (2.43), после их проектирования на* $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$, *является полной в* H_1, *более того, она образует базис Абеля – Лидского порядка* $\alpha > m-1$ *в* H_1. *Наконец, собственные значения* $\mu_k = \mu_k(\lambda)$ *имеют асимптотическое поведение*

$$\mu_k(\lambda) = \lambda_k^{-1}(B_2)[1+o(1)], \quad k \to \infty, \tag{2.75}$$

$$\lambda_k(B_2) = (d_{m,2}(\Gamma_2))^{1/(m-1)}k^{-1/(m-1)}[1+o(1)], \quad k\to\infty,\ d_{m,2}(\Gamma_2)>0,\ d_{3,2}(\Gamma_2) = \frac{|\Gamma_2|}{4\pi}. \tag{2.76}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что асимптотическая формула (2.76), так же, как и асимптотические формулы (2.58), (2.59), следует из работы [14]. Далее, из условий (2.69) получаем, что от задачи (2.42) можно перейти к задаче (2.49) и затем к (2.73).

Поэтому к проблеме (2.73) можно применить теоремы М.В. Келдыша (см. [17]), так как в силу (2.76) оператор $\widetilde{B}_2 = P_1B_2P_1$ имеет те же ненулевые собственные значения, что и оператор B_2, а потому $\widetilde{B}_2$ — полный положительный компактный оператор класса $\mathfrak{S}_p$ при $p > m-1$. Кроме того, оператор $(I_1 - T_1(\lambda))^{-1} = I_1 + T_2(\lambda)$, $T_2(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$ и, очевидно, обратим. Отсюда и следуют первые утверждения теоремы.

В частности, свойство из (2.74), определяющее связь знаков $\mathrm{Im}\mu$ и $\mathrm{Im}\lambda$, следует непосредственно из соотношения

$$((I - T(\lambda))\varphi,\ \varphi)_H = \mu(B_2\varphi, \varphi)_H$$

с учётом формулы (2.70) для $T(\lambda)$ и свойств операторов $A^{-1},\ B_2,\ B_3,\ B_4$.

Свойство базисности по Абелю – Лидскому порядка $\alpha > m-1$ следует также из (2.76) и утверждения из [42], с. 292. Наконец, асимптотическая формула (2.75) следует из результатов А.С. Маркуса и В.И. Мацаева (см. [30]), примененных к уравнению

$$(I_1 - T_1(\lambda))\varphi_1 = \mu\widetilde{B}_2\varphi_1,$$

так как $T_1(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$, а числа $\lambda_k(\widetilde{B}_2) = \lambda_k(B_2)$ и имеют асимптотику (2.76). $\square$

2.2.2 Свойства решений при спектральном параметре λ

Рассмотрим теперь случай, когда в задаче

$$L(\lambda,\mu)\varphi := (I-\mu B_2-\lambda(A^{-1}+B_3)-\lambda^{-1}B_4)\varphi = 0, \quad \varphi\in H=L_2(\Omega), \tag{2.77}$$

параметр $\mu\in\mathbb{C}$ фиксирован, а λ — спектральный.

Неположительные значения фиксированного параметра Если $\mu\leqslant 0$, то $I-\mu B_2\geqslant I\gg 0$ и $\|(I-\mu B_2)^{-1}\|\leqslant 1$. Осуществим в этом случае в (2.77) замену

$$(I-\mu B_2)^{1/2}\varphi=\psi. \tag{2.78}$$

Тогда возникает задача

$$\psi=\lambda(I-\mu B_2)^{-1/2}(A^{-1}+B_3)(I-\mu B_2)^{-1/2}\psi+\lambda^{-1}(I-\mu B_2)^{-1/2}B_4(I-\mu B_2)^{-1/2}\psi, \tag{2.79}$$

т.е. задача на собственные значения для операторного пучка С. Крейна. В самом деле, здесь оператор $(I-\mu B_2)^{-1/2}(A^{-1}+B_3)(I-\mu B_2)^{-1/2}$ компактный и положительный, а $(I-\mu B_2)^{-1/2}B_4(I-\mu B_2)^{-1/2}$ — компактный и неотрицательный.

Будем далее предполагать, что выполнено условие

$$4\|A^{-1}+B_3\|\cdot\|B_4\|<1. \tag{2.80}$$

Тогда имеет место неравенство

$$4\|(I-\mu B_2)^{-1/2}(A^{-1}+B_3)(I-\mu B_2)^{-1/2}\|\cdot\|(I-\mu B_2)^{-1/2}B_4(I-\mu B_2)^{-1/2}\|\leqslant$$
$$\leqslant 4\|(I-\mu B_2)^{-1}\|^2\cdot\|A^{-1}+B_3\|\cdot\|B_4\|\leqslant 4\|A^{-1}+B_3\|\cdot\|B_4\|<1, \tag{2.81}$$

достаточное для факторизации операторного пучка

$$I-\lambda(I-\mu B_2)^{-1/2}(A^{-1}+B_3)(I-\mu B_2)^{-1/2}-\lambda^{-1}(I-\mu B_2)^{-1/2}B_4(I-\mu B_2)^{-1/2}, \tag{2.82}$$

отвечающего задаче (2.79) (см., например, [23], с. 82 – 86).

Теорема 2.4. *Пусть в задаче (2.77) выполнено условие (2.80). Тогда имеют место следующие утверждения.*

1°. *Задача (2.77) при $\mu\leqslant 0$ имеет дискретный вещественный спектр с предельными* *точками* 0 *и* $+\infty$.

2°. *Предельной точке* $\lambda = 0$ *отвечает ветвь* $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ *изолированных конечнократных собственных значений, расположенных на отрезке*

$$(0, r_-), \quad r_\pm := (1 \pm \sqrt{1 - 4\|A^{-1} + B_3\| \cdot \|B_4\|})/(2\|A^{-1} + B_3\|). \tag{2.83}$$

Соответствующая система собственных элементов (присоединённых нет) после проектирования на подпространство $H_1 = L_2(\Omega) \ominus H_0$, $H_0 := \ker(I - \mu B_2)^{-1/2} B_2 (I - \mu B_2)^{-1/2}$, *образует базис Рисса в* H_1. *Более того, эта система элементов образует в* H_1 p *– базис при* $p > p_0 = (m-1)/2$.

3°. *Предельной точке* $\lambda = +\infty$ *отвечает ветвь изолированных конечнократных собственных значений* $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^{\infty}$, *расположенных на промежутке* $(r_+, +\infty)$, *а отвечающая этой ветви система собственных элементов задачи (2.77) образует базис Рисса в* $H = L_2(\Omega)$ *и даже* p *— базис при тех же* $p > p_0 = (m-1)/2$.

4°. *Собственные значения* λ_k^0 *имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_k^0 = \lambda_k(B_4)[1 + o(1)] = (d_{m,3}(\Gamma_4))^{-1/(m-1)} k^{1/(m-1)} [1 + o(1)], \ k \to \infty, \tag{2.84}$$

а собственные значения λ_k^∞ *— асимптотическое поведение*

$$\lambda_k^\infty = \lambda_k^{-1}(A^{-1} + B_3)[1 + o(1)] = \lambda_k^{-1}(B_3)[1 + o(1)] = \tag{2.85}$$

$$= (d_{m,3}(\Gamma_3))^{-1/(m-1)} k^{1/(m-1)} [1 + o(1)], \quad k \to \infty.$$

Доказательство. Оно почти дословно повторяет доказательство теорем 3.1.2 и 3.2.1 из [23], с. 83 – 92, с учётом того, что при условии (2.80) пучок (2.82) допускает каноническую факторизацию, является самосопряжённым, а для собственных значений $\lambda_k(A^{-1} + B_3)$ и $\lambda_k(B_4)$ имеют место асимптотические формулы (2.58), (2.59), а также формула

$$\lambda_k(A^{-1} + B_3) = \lambda_k(B_3)[1 + o(1)], \quad k \to \infty$$

При этом асимптотические формулы (2.84), (2.85) следуют из теорем А.С. Маркуса и В.И. Мацаева (см. [29]– [31]). □

Вещественная часть μ неположительна Будем теперь считать, что

$$\mathrm{Re}\mu \leqslant 0,\ \mathrm{Im}\mu \neq 0. \tag{2.86}$$

Тогда в силу неравенств

$$\|(I-\mu B_2)\varphi\| \cdot \|\varphi\| \geqslant |((I-\mu B_2)\varphi,\ \varphi)| \geqslant \mathrm{Re}((I-\mu B_2)\varphi,\ \varphi) \geqslant \|\varphi\|^2$$

получаем, что при условиях (2.86) имеет место оценка

$$\|(I-\mu B_2)^{-1}\| \leqslant 1. \tag{2.87}$$

Применяя слева в (2.77) оператор $(I-\mu B_2)^{-1}$, приходим к задаче

$$\varphi = \lambda (I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3)\varphi + \lambda^{-1}(I-\mu B_2)^{-1}B_4\varphi. \tag{2.88}$$

Здесь снова возникает спектральная задача для пучка С. Крейна, однако теперь этот пучок не является самосопряжённым.

Теорема 2.5. *Пусть в задаче (2.88) выполнены условия (2.86), а также условие (2.80). Тогда имеют место следующие утверждения.*

1°. *Задача (2.88) имеет дискретный спектр, состоящий из двух ветвей конечнократных собственных значений с предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ соответственно.*

2°. *Предельной точке $\lambda = 0$ отвечает ветвь $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ конечнократных собственных значений, расположенных в области*

$$|\lambda| \leqslant r_-,\ \ r_\pm = (1 - \sqrt{1-4\|A^{-1}+B_3\|\cdot\|B_4\|})/(2\|A^{-1}+B_3\|),$$

причём для $\forall \varepsilon > 0$ все собственные значения λ_k^0, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе

$$|arg\ \lambda| < \varepsilon. \tag{2.89}$$

При этом система собственных и присоединённых (корневых) элементов $\{\varphi_k^0\}_{k=1}^{\infty}$, отвечающая собственным значениям $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^{\infty}$, после её проектирования на подпространство $H_1 = H \ominus H_0,\ H = L_2(\Omega),\ H_0 = \ker B_4$, является полной в H_1 и образует *в H_1 базис Абеля–Лидского порядка $\alpha > m-1$.*

3°. *Предельной точке $\lambda = \infty$ отвечает ветвь $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$ конечнократных собственных значений, расположенных в области $|\lambda| \geqslant r_+$, причём для $\forall\varepsilon > 0$ все собственные значения λ_k^∞, кроме, быть может, конечного их числа, расположены в секторе (2.89).*

При этом система корневых элементов $\{\varphi_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, отвечающая собственным значениям $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$, является полной в $H = L_2(\Omega)$ и образует в H базис Абеля–Лидского порядка $\alpha > m-1$.

Доказательство. Оно проводится по схеме, изложенной в [23], с. 82–86. Поэтому здесь приведём лишь некоторые построения, относящиеся к утверждению 2°. Если выполнено условие (2.80), то пучок $L(\lambda)$, отвечающий уравнению (2.88), допускает факторизацию

$$\lambda L(\lambda) := \lambda I - (I-\mu B_2)^{-1}B_4 - \lambda^2(I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3) =$$

$$= Y^{-1}(I - \lambda Y(I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3))(\lambda I - Y(I-\mu B_2)^{-1}B_4), \qquad (2.90)$$

причём при $|\lambda| \leqslant t \in (r_-, r_+)$ оператор–функция $I - \lambda Y(I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3)$ обратима, а оператор Y также обратим и является решением операторного уравнения

$$Y = I + (I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3)Y(I-\mu B_2)^{-1}B_4Y. \qquad (2.91)$$

Кроме того, спектр

$$\sigma(Z) := \sigma(Y(I-\mu B_2)^{-1}B_4) \subset \{\lambda : |\lambda| \leqslant r_-\}. \qquad (2.92)$$

Опираясь на эти факты, рассмотрим задачу на собственные значения

$$Z\varphi = Y(I-\mu B_2)^{-1}B_4\varphi = (I + (I-\mu B_2)^{-1}(A^{-1}+B_3)Y(I-\mu B_2)^{-1}Y)(I-\mu B_2)^{-1}B_4\varphi =$$

$$=: (I+\Phi)B_4\varphi = \lambda\varphi,\ \varphi \in L_2(\Omega) = H,\ |\lambda| \leqslant r_-. \qquad (2.93)$$

Здесь $\Phi \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ и $(I+\Phi)$ обратим, а $B_4 = B_4^* \in \mathfrak{S}_\infty(H)$ имеет бесконечномерное ядро $H_0 = \ker B_4$.

Представим теперь φ в виде $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1,\ \varphi_0 \in H_0,\ \varphi_1 \in H_1 = H \ominus H_0$, и спроектируем обе части (2.93) на H_0 и H_1 соответственно с помощью ортопроекторов P_0 и P_1. С учётом соотношений $P_0 B_4 = 0,\ P_1 B_4 P_1 =: \widetilde{B}_4 > 0$ (в H_1) будем иметь

$$P_0(I+\Phi)P_1 \cdot \widetilde{B}_4 \varphi_1 = \lambda\varphi_0, \quad (I_1 + P_1\Phi P_1)\cdot \widetilde{B}_4\varphi_1 = \lambda\varphi_1. \tag{2.94}$$

Так как по постановке задачи $\lambda \neq 0$, то из первого соотношения (2.94) можно выразить φ_0 через φ_1, а второе уравнение не содержит φ_0. Кроме того, можно доказать (см., например, [23], с. 85), что оператор $I_1 + P_1\Phi P_1$ обратим в H_1. Наконец, из асимптотической формулы (2.60) следует, что $\widetilde{B}_4 \in \mathfrak{S}_p(H_1)$ при $p > m-1$.

Эти свойства показывают, что ко второму уравнению (2.94) применима теорема М.В. Келдыша о свойствах спектра слабо возмущённого самосопряжённого оператора класса $\mathfrak{S}_p(H)$ (см. [17], с. 313–320). Отсюда следуют утверждения из 2° о локализации спектра в исходной задаче (2.88) при $|\lambda| \leqslant r_-$, а также о полноте проекций корневых элементов в пространстве H_1. Утверждение о базисности по Абелю–Лидскому этих корневых элементов следует из [42], с. 292, а также из асимптотической формулы (2.60).

Утверждения 3° доказываются аналогично, однако без проектирования на H_1, так как оператор $A^{-1} + B_3$ полный, т.е. $\ker(A^{-1}+B_3) = \{0\}$. При этом также используется тот факт, что $\lambda_k(A^{-1}+B_3) = \lambda_k(B_3)[1+o(1)]$ $(k \to \infty)$, и асимптотическая формула (2.59). Кроме того, в пучке $L(\lambda)$ следует сделать замену $\lambda \to \tilde{\lambda}^{-1}$, и использовать вместо (2.90) аналогичную факторизацию для пучка $\tilde{\lambda}L(\tilde{\lambda}^{-1})$ (см. [23], с. 86). $\square$

Следствие 2.1. *В задаче (2.77) при любом фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ имеются две ветви конечнократных собственных значений $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^\infty$ и $\{\lambda_k^\infty\}_{k=1}^\infty$ с предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Эти ветви имеют асимптотическое поведение (2.84) и (2.85) соответственно. Этот результат следует из теоремы А.С. Маркуса и В.И. Мацаева (см. [30]).* $\square$

2.2.3 Свойства решений в случае двух и трёх примыкающих областей

В случае, когда мы имеем не одну, а две области сопряжения, мы получили в итоге аналогичный пучок (см. пп. 2.1.2). Поэтому так же получаем задачу с одним фиксированным, а другим спектральным параметром. Свойства решений этих задач такие же, как и в пп. 2.2.1.

Рассмотрим подробнее исключительные значения

$$\lambda \notin \sigma(I - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - P_0 T(\lambda) P_0) \tag{2.95}$$

в случае, когда параметр $\lambda > 0$ — фиксированный. Выясним, как выглядят эти условия в явной форме.

Первое условие $\lambda \notin \sigma(I - T(\lambda))$ требует, чтобы λ не являлся собственным значением задачи

$$L_0 u_1 = \lambda u_1 \ \text{(в } \Omega_1), \quad L_0 u_2 = \lambda u_2 \ \text{(в } \Omega_2);$$

$$\gamma_{11,1} u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11,1}), \ \gamma_{22,1} u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22,1});$$

$$\begin{aligned} &\partial_{11,2} u_1 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{11,2}), && \partial_{22,2} u_2 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{22,2}); \\ &\partial_{11,3} u_1 = \lambda \gamma_{11,3} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11,3}), && \partial_{22,3} u_2 = \lambda \gamma_{22,3} u_2 \ \ (\text{на } \Gamma_{22,3}); \\ &\partial_{11,4} u_1 = \lambda^{-1} \gamma_{11,4} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11,4}), && \partial_{22,4} u_2 = \lambda^{-1} \gamma_{22,4} u_2 \ \ (\text{на } \Gamma_{22,4}); \end{aligned}$$

$$\gamma_{21,1} u_1 - \gamma_{12,1} u_2 = 0, \quad \partial_{21,1} u_1 + \partial_{12,1} u_2 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,1});$$

$$\gamma_{21,2} u_1 - \gamma_{12,2} u_2 = 0, \ \ \partial_{21,2} u_1 + \partial_{12,2} u_2 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,2}),$$

$$\gamma_{21,3} u_1 - \gamma_{12,3} u_2 = 0, \ \partial_{21,3} u_1 + \partial_{12,3} u_2 = \lambda \gamma_{21,3} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,3}),$$

$$\gamma_{21,4} u_1 - \gamma_{12,4} u_2 = 0, \ \ \partial_{21,4} u_1 + \partial_{12,4} u_2 = \lambda^{-1} \gamma_{21,4} u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,4});$$

$$\partial_{21,5} u_1 = -\partial_{12,5} u_2 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,5});$$

$$\partial_{21,6} u_1 = -\partial_{12,6} u_2 = \lambda(\gamma_{21,6} u_1 - \gamma_{12,6} u_2) \ (\text{на } \Gamma_{21,6});$$

$$\partial_{21,7} u_1 = -\partial_{12,7} u_2 = \lambda^{-1}(\gamma_{21,7} u_1 - \gamma_{12,7} u_2) \ \ (\text{на } \Gamma_{21,7}).$$

Эта задача имеет две ветви конечнократных положительных собственных значений с предельным точками $\lambda = 0$ и $\lambda = +\infty$, а также не более конечного числа невещественных комплексно сопряжённых пар конечнократных собственных значений.

Для второго требования (2.95) исключительные числа — собственные значения видоизменённой задачи

$$L_0u_1 = \lambda u_1 \ \ (\text{в } \Omega_1), \quad L_0u_2 = \lambda u_2 \ \ (\text{в } \Omega_2);$$

$$\gamma_{11,1}u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11,1}), \ \gamma_{22,1}u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22,1});$$

$$\gamma_{11,2}u_1 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{11,2}), \qquad\qquad \gamma_{22,2}u_2 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{22,2});$$

$$\partial_{11,3}u_1 = \lambda\gamma_{11,3}u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11,3}), \qquad \partial_{22,3}u_2 = \lambda\gamma_{22,3}u_2 \ \ (\text{на } \Gamma_{22,3});$$

$$\partial_{11,4}u_1 = \lambda^{-1}\gamma_{11,4}u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{11,4}), \quad \partial_{22,4}u_2 = \lambda^{-1}\gamma_{22,4}u_2 \ \ (\text{на } \Gamma_{22,4});$$

$$\gamma_{21,1}u_1 - \gamma_{12,1}u_2 = 0, \quad \partial_{21,1}u_1 + \partial_{12,1}u_2 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,1});$$

$$\gamma_{21,2}u_1 - \gamma_{12,2}u_2 = 0, \ \ \partial_{21,2}u_1 + \partial_{12,2}u_2 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,2}),$$

$$\gamma_{21,3}u_1 - \gamma_{12,3}u_2 = 0, \ \partial_{21,3}u_1 + \partial_{12,3}u_2 = \lambda\gamma_{21,3}u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,3}),$$

$$\gamma_{21,4}u_1 - \gamma_{12,4}u_2 = 0, \ \ \partial_{21,4}u_1 + \partial_{12,4}u_2 = \lambda^{-1}\gamma_{21,4}u_1 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,4});$$

$$\gamma_{21,5}u_1 = -\gamma_{12,5}u_2 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,5});$$

$$\partial_{21,6}u_1 = -\partial_{12,6}u_2 = \lambda(\gamma_{21,6}u_1 - \gamma_{12,6}u_2) \ (\text{на } \Gamma_{21,6});$$

$$\partial_{21,7}u_1 = -\partial_{12,7}u_2 = \lambda^{-1}(\gamma_{21,7}u_1 - \gamma_{12,7}u_2) \ \ (\text{на } \Gamma_{21,7}).$$

В самом деле, легко устанавливаем, что для

$$B_2 = A^{1/2}C_2A^{1/2}; \ \ C_2 = V_{11,2}V_{11,2}^* + V_{22,2}V_{22,2}^* + V_{21,2}V_{21,2}^* + V_{21,5}V_{21,5}^*$$

выполнено

$$\ker B_2 = \{\eta_0 \in L_2(\Omega) : \eta_0 = A^{1/2}u_0, \ \ u_0 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega); \ \gamma_2u_0 = 0\}.$$

Поэтому здесь возникает задача на собственные значения

$$P_0\eta = \lambda P_0(A^{-1} + B_3)P_0\eta + \lambda^{-1}P_0B_4P_0\eta, \ \ \eta \in L_2(\Omega),$$

которая имеет дискретный положительный спектр с предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = +\infty$. Они являются последовательными минимумами вариационного отношения

$$\frac{\|u_0\|^2_{H^1(\Omega)}}{\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\gamma_{11,3}u_0\|^2_{\Gamma_{11,3}} + \|\gamma_{22,3}u_0\|^2_{\Gamma_{22,3}} + ...}; \quad u_0 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_{11}\cup\Gamma_{22}}(\Omega).$$

Таким образом, в исходной начально–краевой задаче множество исключительных значений λ — объединение спектров двух задач, приведённых выше.

В случае трёх примыкающих областей сопряжения у нас также возникает тот же пучок с аналогичными свойствами. Здесь исключительными числами являются собственные значения аналогичных спектральных задач, таких, как в случае одной или двух примыкающих областей.

Итак, во второй главе схема исследования краевых задач, представленная в главе 1, применена для изучения спектральной задачи сопряжения в одной области. Исследование этой задачи приведено к изучению свойств решений операторного пучка с двумя параметрами. Показано, что аналогичные задачи для двух и трёх примыкающих областей исследуются по той же схеме. Далее, считая в полученном пучке один параметр спектральным, а другой — фиксированным, рассмотрены свойства решений этого пучка.

Глава 3

Начально–краевые задачи сопряжения

3.1 Начально-краевые задачи, порождающие спектральные

Спектральные задачи, разобранные в предыдущем параграфе, порождаются начально-краевыми задачами, в которых производные по времени входят не только в уравнение, но и в краевые условия. Здесь будет рассмотрено несколько таких примеров.

3.1.1 Первая задача

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, разбитой на 3 липшицевых куска Γ_1, Γ_2 и Γ_3 с липшицевыми контурами $\partial\Gamma_1$, $\partial\Gamma_2$ и $\partial\Gamma_3$, сформулируем сначала спектральную проблему

$$L_0 u = \lambda u \text{ (в } \Omega), \ \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \ \partial_2 u = \mu\gamma_2 u \text{ (на } \Gamma_2), \ \ \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u \text{ (на } \Gamma_3),$$

$$L_0 u = u - \triangle u, \ \partial_k u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k}, \ \gamma_k u = u|_{\Gamma_k}, \ k = \overline{1,3}, \tag{3.1}$$

где λ и μ — параметры, один из которых можно считать спектральным, а второй — фиксированным.

Нетрудно видеть, что если рассматривать начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + L_0 u = f \text{ (в } \Omega), \ \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \ \partial_2 u = \mu\gamma_2 u + \psi_2 \text{ (на } \Gamma_2),$$

$$\partial_3 u + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_3 u) = \psi_3 \text{ (на } \Gamma_3), \ \ u(0,x) = u^0(x), \ x \in \Omega, \tag{3.2}$$

и разыскивать её решения при $f \equiv 0, \ \psi_2 \equiv 0, \ \psi_3 \equiv 0$ в виде

$$u(t,x) = \exp(-\lambda t)u(x), \ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{3.3}$$

то для амплитудной функции $u(x), \ x \in \Omega$, возникает спектральная проблема (3.1), где λ — искомый спектральный параметр.

Опираясь на построения и методы глав 1 и 2, а также на использованные выше операторы вспомогательных краевых задач, можно исследовать задачу (3.2) и доказать теорему о её сильной разрешимости на произвольном конечном промежутке времени.

Представим, как и выше, решение $u(t,x)$ задачи (3.1) в виде суммы решений трех вспомогательных задач, в каждой из которых неоднородности входят в уравнение либо в краевое условие лишь в одном месте. Не выписывая формулировки этих задач, сразу представим решение в виде, аналогичном (2.14):

$$u = A^{-1}(f - \frac{\partial u}{\partial t}) + V_2(\mu\gamma_2 u + \psi_2) + V_3(\psi_3 - \frac{\partial}{\partial t}\gamma_3 u), \tag{3.4}$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega); \ L_2(\Omega))$, а V_2 и V_3 — операторы вспомогательных задач Неймана (см. (2.5)–(2.7) при $\Gamma_4 = \varnothing$). Тогда возникает дифференциальное уравнение для функции $u = u(t)$ со значениями в пространстве $H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$:

$$(A^{-1} + V_3\gamma_3)\frac{du}{dt} + (I - \mu V_2\gamma_2)u = A^{-1}f + V_2\psi_2 + V_3\psi_3. \tag{3.5}$$

Если здесь ещё сделать замену искомой функции

$$u(t) = A^{-1/2}\eta(t), \ \ \eta \in L_2(\Omega), \tag{3.6}$$

то получаем задачу Коши

$$(A^{-1}+B_3)\frac{d\eta}{dt}+(I-\mu B_2)\eta = A^{-1/2}f+A^{1/2}V_2\psi_2+A^{1/2}V_3\psi_3 =: f_1(t), \ \ \eta(0) = A^{1/2}u^0, \tag{3.7}$$

$$B_k = (A^{1/2}V_k)(\gamma_k A^{-1/2}) = (\gamma_k A^{-1/2})^*(\gamma_k A^{-1/2}) : L_2(\Omega) \to L_{2,h}(\Omega) \subset L_2(\Omega),\ k = \overline{1,3}.$$

Свойства коэффициентов A^{-1} и B_k уже описаны выше.

Осуществим в (3.7) ещё одну замену

$$(A^{-1} + B_3)\eta =: w. \tag{3.8}$$

Тогда возникает задача Коши

$$\frac{dw}{dt} + (I - \mu B_2)(A^{-1} + B_3)^{-1}w = f_1(t),\ \ w(0) = (A^{-1} + B_3)A^{1/2}u^0 =: w^0. \tag{3.9}$$

Определение 3.1. *Назовём функцию $w(t)$ со значениями в $L_2(\Omega)$ сильным решением задачи (3.9) на отрезке $[0,T]$, если*

$$w(t) \in C^1([0,T];\ L_2(\Omega)) \cap C([0,T];\ \mathcal{D}((A^{-1} + B_3)^{-1})), \tag{3.10}$$

и для неё выполнено уравнение (3.9), где все слагаемые принадлежат $C([0,T];\ L_2(\Omega))$, а также выполнено условие $w(0) = w^0$. $\square$

Далее будем полагать, что

$$\mu \notin \sigma(I - \mu B_2). \tag{3.11}$$

Теорема 3.1. *Пусть в исходной задаче (3.2) выполнены условия*

$$f(t,x) \in C^\beta([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*),\ \psi_2(t,x) \in C^\beta([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_2)),$$

$$\psi_3(t,x) \in C^\beta([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3)),\ 0 < \beta \leqslant 1,\ \ u^0(x) \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \tag{3.12}$$

а также условие (3.11).

Тогда задача (3.9) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$ в смысле определения 3.1. При этом исходная начально-краевая задача имеет единственное решение на отрезке $[0,T]$,

$$u(t,x) \in C([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)), \tag{3.13}$$

причём для этого решения выполнено уравнение в Ω, где все слагаемые являются элементами из $C([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$, граничные условия на $\Gamma_k,\ k = 2,3$, где все слагаемые являются элементами из $C([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$, а также начальное условие.

Доказательство. Если выполнены условия (3.12), то в силу свойств операторов A^{-1} и B_k, $k = 2, 3$, функция $f_1(t)$ в (3.9) является элементом из $C^{\beta}([0,T];\ L_2(\Omega))$, а $w^0 \in \mathcal{D}((A^{-1}+B_3)^{-1})$. Далее, так как $(A^{-1}+B_3)^{-1}$ — самосопряжённый положительно определённый оператор, действующий в $L_2(\Omega)$, а $B_2 \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega))$, то оператор $-(I-\mu B_2)(A^{-1}+B_3)^{-1}$ является генератором аналитической полугруппы, а уравнение (3.9) — абстрактное параболическое. Поэтому при сформулированных свойствах для $f_1(t)$ и w^0 задача Коши (3.9) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. Отсюда следует, что существует единственное сильное решение задачи Коши (3.7), где все слагаемые являются элементами из $C([0,T];L_2(\Omega))$. Тогда в силу (3.11) получаем, что

$$\eta(t) \in C([0,T];L_2(\Omega)),$$

а потому ввиду замены (3.6) имеем в задаче (3.5) (либо (3.4))

$$u(t) \in C([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)). \tag{3.14}$$

Далее, соотношение (3.4), в свою очередь, показывает, в силу определения операторов A^{-1} и V_k, $k = 2, 3$, и отвечающих им задач, что $u = u_1 + u_2 + u_3$, причём

$$L_0 u_1 = f - \frac{du}{dt}\ (\text{в } \Omega),\ \ \gamma_1 u_1 = 0\ (\text{на } \Gamma_1),\ \ \partial_2 u_1 = 0\ (\text{на } \Gamma_2),\ \ \partial_3 u_1 = 0\ (\text{на } \Gamma_3),$$

$$L_0 u_2 = 0\ (\text{в } \Omega),\ \ \gamma_1 u_2 = 0\ (\text{на } \Gamma_1),\ \ \partial_2 u_2 = \mu\gamma_2 u + \psi_2\ (\text{на } \Gamma_2),\ \ \partial_3 u_2 = 0\ (\text{на } \Gamma_3),$$

$$L_0 u_3 = 0\ (\text{в } \Omega),\ \ \gamma_1 u_3 = 0\ (\text{на } \Gamma_1),\ \ \partial_2 u_3 = 0\ (\text{на } \Gamma_2),\ \ \partial_3 u_3 = \psi_3 - \frac{d}{dt}(\gamma_3 u)\ (\text{на } \Gamma_3).$$

Отсюда приходим к выводу, что для функции $u = u_1 + u_2 + u_3$ выполнены все уравнения и краевые условия задачи (3.2).

При этом из (3.14) и свойств дифференциального выражения $L_0 u$ (для обобщённой формулы Грина, см. (2.10)) получаем, что $L_0 u \in (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*$, а потому в уравнении в Ω из (3.2) все слагаемые являются элементами из $C([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))$. Аналогично из (3.14) получаем, что $\partial_k u \in C([0,T];\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$, $k = 2, 3$, а потому все слагаемые в граничных условиях на Γ_2 и Γ_3 являются элементами из $C([0,T];\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$, $k = 2, 3$, соответственно. $\square$

3.1.2 Вторая задача

Будем теперь считать, что μ — спектральный, а λ — фиксированный параметр в проблеме (3.1), и приведём постановку начально–краевой проблемы, отвечающей этому случаю. Тогда будем иметь следующее уравнение и краевые условия:

$$L_0 u = \lambda u + f \text{ (в } \Omega), \;\; \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1),$$
$$\partial_2 u + \frac{\partial}{\partial t}\gamma_2 u = \psi_2 \text{ (на } \Gamma_2), \;\; \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u + \psi_3 \text{ (на } \Gamma_3). \tag{3.15}$$

Снова считаем, что $u \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ есть сумма решений трёх вспомогательных задач, приходим для искомой функции $u = u(t,x)$ к уравнению (см. (3.4))

$$u = A^{-1}(\lambda u + f) + V_2(\psi_2 - \frac{d}{dt}\gamma_2 u) + V_3(\lambda\gamma_3 u + \psi_3), \tag{3.16}$$

и соответствующей задаче Коши

$$V_2\gamma_2\frac{du}{dt} + (I - \lambda(A^1 + V_3\gamma_3))u = A^{-1}f + V_2\psi_2 + V_3\psi_3, \;\; u(0) = u^0. \tag{3.17}$$

Отсюда после замены

$$u = A^{-1/2}\eta, \; \eta \in L_2(\Omega), \tag{3.18}$$

получаем задачу

$$B_2\frac{d\eta}{dt} + (I - \lambda(A^{-1} + B_3))\eta = A^{-1/2}f + A^{1/2}V_2\psi_2 + A^{1/2}V_3\psi_3 =: f(t),$$
$$\eta(0) = \eta^0 = A^{1/2}u^0. \tag{3.19}$$

Особенностью этой задачи, в отличие аналогичной проблемы (3.7), является тот факт, что оператор $B_2 = (A^{1/2}V_2)(\gamma_2 A^{-1/2}) = (\gamma_2 A^{-1/2})^*(\gamma_2 A^{-1/2})$ лишь неотрицательный и имеет бесконечномерное ядро $\ker B_2$.

Учитывая это обстоятельство, рассмотрим проблему вида (3.19) в абстрактной форме. Именно, будем считать, что исследуется в произвольном гильбертовом пространстве H задача Коши

$$B\frac{d\eta}{dt} + (I - \Phi)\eta = f(t), \; \eta(0) = \eta^0, \tag{3.20}$$

где B — неотрицательный компактный оператор, имеющий ненулевое ядро:

$$H_0 := \ker B \neq \{0\}, \tag{3.21}$$

а $\Phi \in \mathfrak{S}_\infty(H)$.

Воспользуемся разложением $H = H_0 \oplus H_1$, $H_1 = \overline{\mathcal{R}(B)}$, и преобразуем задачу (3.20) к задаче Коши для дифференциального уравнения в подпространстве H_1. С этой целью представим $\eta = \eta_0 + \eta_1$, $\eta_0 = P_0\eta = P_0\eta_0 \in H_0$, $\eta_1 = P_1\eta = P_1\eta_1 \in H_1$, где P_0 и P_1 — ортопроекторы на H_0 и H_1 соответственно.

Будем далее предполагать, что выполнены условия

$$\ker(I - \Phi) = \{0\},\ \ker(I_0 - P_0\Phi P_0) = \{0\}. \tag{3.22}$$

Тогда в силу второго условия оператор $(I_0 - P_0\Phi P_0)$ обратим, и возникает задача Коши

$$B_1\frac{d\eta_1}{dt} + (I_1 - \Phi_1)\eta_1 = f_1(t),\ \eta_1(0) = \eta_1^0 = P_1\eta^0, \tag{3.23}$$

$$B_1 := P_1BP_1,\ \Phi_1 = P_1\Phi P_1 + (P_1\Phi P_0)(I_0 - P_0\Phi P_0)^{-1}(P_0\Phi P_1),$$

$$f_1 := P_1f + (P_1\Phi P_0)(I_0 - P_0\Phi P_0)^{-1}P_0f,$$

$$\eta_0 = (I_0 - P_0\Phi P_0)^{-1}[(P_0\Phi P_1)\eta_1 + P_0f].$$

Здесь оператор $B_1 : H_1 \to H_1$ положительный и компактный, а $\Phi_1 \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$.

Осуществляя ещё в (3.23) замену искомой функции

$$B_1\eta_1 = \xi_1, \tag{3.24}$$

придём к задаче Коши

$$\frac{d\xi_1}{dt} + (I_1 - \Phi_1)B_1^{-1}\xi_1 = f_1(t),\ \ \xi_1(0) = B_1\eta_1(0) = B_1P_1\eta^0. \tag{3.25}$$

Лемма 3.1. *Пусть в задаче (3.20), (3.21) выполнены условия (3.22), а также условия*

$$f(t) \in C^\beta([0,T];H),\ \ \eta^0 \in H. \tag{3.26}$$

Тогда эта задача имеет единственное решение $\eta(t) \in C([0,T];H)$, для которого все слагаемые в уравнении (3.20) являются непрерывными функциями t со значениями в H и выполнено начальное условие (3.20).

Доказательство. Если выполнены условия (3.26), то в задаче (3.25)

$$f_1(t) \in C^{\beta}([0,T]; H_1), \quad \xi_1(0) \in \mathcal{D}((B_1)^{-1}). \tag{3.27}$$

Далее, уравнение (3.25) является абстрактным параболическим, так как B_1^{-1} — положительно определённый самосопряжённый неограниченный оператор, а $\Phi_1 \in \mathfrak{S}_\infty(H_1)$. Отсюда следует, что задача (3.25) имеет единственное сильное решение на промежутке $[0,T]$, т.е. $\xi_1(t) \in C^1([0,T],\ H_1) \cap C([0,T],\ \mathcal{D}(B_1^{-1}))$. Отсюда получаем, что существует единственное решение $\eta(t)$ задачи (3.23), для которого все слагаемые в уравнении — элементы из $C([0,T]; H_1)$. Так как $I_1 - \Phi_1$ обратим в силу условий (3.22), то получаем свойство $\eta_1(t) \in C([0,T]; H_1)$.

Возвращаясь теперь от (3.23) к исходной задаче (3.20) (см. соотношения для f_1 и η_0 в (3.23)), получаем утверждение леммы. □

Следствием леммы 3.1 является такое утверждение относительно разрешимости задачи (3.15).

Теорема 3.2. *Пусть в задаче (3.15) выполнены условия*

$$f \in C^{\beta}([0,T]; (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*), \quad \psi_k \in C^{\beta}([0,T]; \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)), \quad 0 < \beta \leqslant 1,\ k = 1,2, \tag{3.28}$$

$$u(0) = u^0 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega),$$

а также условия

$$\lambda \notin \sigma(I - \lambda(A^{-1} + B_3)) \cap \sigma(I_0 - \lambda P_0(A^{-1} + B_3)P_0), \quad P_0 H := \ker B_2. \tag{3.29}$$

Тогда эта задача имеет единственное решение $u \in C([0,T]; \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))$, для которого каждое слагаемое в уравнении в Ω является элементом из $C([0,T]; (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$, а в граничных условиях — элементом из $C([0,T]; \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$, $k = 2,3$.

Доказательство. Оно проводится по тому же плану, что и в теореме 3.1, с учётом утверждения леммы 3.1.

Именно, при выполнении условий (3.28), (3.29) из леммы 3.1 получаем, что задача (3.23) имеет единственное решение $\eta_1(t) \in C([0,T]; H_1)$, $H_1 := L_2(\Omega) \ominus \ker B_1$. Возвращаясь теперь от (3.23) к (3.17), (3.16) и рассуждая, как при доказательстве теоремы 3.1, приходим к утверждению данной теоремы. □

Следствие 3.1. *Выясним теперь, как выглядят в явной форме условия (3.29). Что касается первого из них, то, очевидно, здесь исключительные значения таковы:*

$$\lambda = \lambda_k^{-1}(A^{-1} + B_3), \quad k = 1, 2, ...$$

Это характеристические числа компактного положительного оператора $A^{-1} + B_3$*, они образуют счётное множество на положительной оси и имеют предельную точку* $\lambda = +\infty$*. В терминах исходной задачи (3.1) можно проверить, что эти исключительные значения* λ *суть собственные значения задачи Стефана*

$$L_0 u = \lambda u \ (\textit{в}\ \Omega), \ \gamma_1 u = 0 \ (\textit{на}\ \Gamma_1), \ \partial_2 u = 0 \ (\textit{на}\ \Gamma_2), \ \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u \ (\textit{на}\ \Gamma_3). \tag{3.30}$$

Что касается второго условия (3.29), то оказывается, что здесь исключительными являются собственные значения следующей видоизменённой задачи Стефана:

$$L_0 u = \lambda u \ (\textit{в}\ \Omega), \ \gamma_1 u = 0 \ (\textit{на}\ \Gamma_1), \ \gamma_2 u = 0 \ (\textit{на}\ \Gamma_2), \ \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u \ (\textit{на}\ \Gamma_3). \tag{3.31}$$

В самом деле, легко устанавливаем, что для $B_2 = (\gamma_2 A^{-1/2})^*(\gamma_2 A^{-1/2})$

$$\ker B_2 = \{\eta_0 \in L_2(\Omega) : \eta_0 = A^{1/2}u_0, \ u_0 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \ \gamma_2 u_0 = 0\}. \tag{3.32}$$

Поэтому здесь вместо (3.30) возникает задача на собственные значения

$$P_0\eta = \lambda P_0(A^{-1} + B_3)P_0\eta, \quad \eta \in L_2(\Omega), \tag{3.33}$$

которая имеет дискретный положительный спектр $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ *с предельной точкой* $\lambda = +\infty$*. Они являются последовательными минимумами вариационного отношения*

$$\|u_0\|^2_{H^1(\Omega)}/(\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\gamma_3 u_0\|^2_{L_2(\Gamma_3)}), \quad u_0 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1\cup\Gamma_2}(\Omega). \tag{3.34}$$

Таким образом, в начально–краевой задаче (3.15) множество исключительных значений λ *представляют собой объединение спектров вспомогательных задач Стефана (3.30) и (3.31).* $\square$

3.1.3 Третья задача

Рассмотрим, наконец, вариант, когда граница $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ разбита не на три липшицевых куска, как в проблеме (3.15), а на четыре с дополнительным краевым условием на Γ_4:

$$L_0 u = \lambda u \ (\text{в } \Omega),\ \gamma_1 u = 0 \ (\text{на } \Gamma_1),\ \partial_2 u = \mu\gamma_2 u \ (\text{на } \Gamma_2),$$

$$\partial_3 u = \lambda\gamma_3 u \ (\text{на } \Gamma_3),\ \lambda\partial_4 u = \gamma_4 u \ (\text{на } \Gamma_4). \tag{3.35}$$

Здесь (при спектральном параметре μ) порождающая её начально–краевая задача выглядит следующим образом:

$$L_0 u = \lambda u + f \ (\text{в } \Omega),\ \gamma_1 u = 0 \ (\text{на } \Gamma_1),\ \partial_2 u + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_2 u) = \psi_2 \ (\text{на } \Gamma_2),$$

$$\partial_3 u = \lambda\gamma_3 u + \psi_3 \ (\text{на } \Gamma_3),\ \partial_4 u = \lambda^{-1}\gamma_4 u + \psi_4 \ (\text{на } \Gamma_4),\quad u(0) = u^0. \tag{3.36}$$

Проводя те же рассуждения, что и во второй задаче (см. (3.16)–(3.19)), приходим по аналогии с (3.19) к задаче Коши

$$B_2\frac{d\eta}{dt} + (I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)\eta = f(t),\quad \eta(0) = \eta^0 = A^{1/2}u^0, \tag{3.37}$$

$$f(t) = A^{-1/2}f + \sum_{k=2}^{4} A^{1/2}V_k\psi_k.$$

Не приводя подробных обсуждений, сформулируем сразу итоговый результат; он получается так же, как в проблеме (3.19), но с некоторыми усложнениями.

Теорема 3.3. *Пусть в задаче (3.36) выполнены условия*

$$\lambda \notin \sigma(I - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4) \cap \sigma(I_0 - \lambda P_0(A^{-1} + B_3)P_0 - \lambda^{-1}P_0 B_4 P_0), \tag{3.38}$$

где $P_0 : L_2(\Omega) \to \ker B_2 =: H_0$ *— ортопроектор на* H_0*, а также условия*

$$f \in C^\beta([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*),\quad \psi_k \in C^\beta([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)),\quad 0 < \beta \leqslant 1,\ k = 2,3,4, \tag{3.39}$$

$$u(0) = u^0 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega).$$

Тогда эта задача имеет единственное решение $u \in C([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))$*, для которого каждое слагаемое в уравнении в* Ω *(см. (3.36)) является элементом из* $C([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$*, а в граничных условиях — элементом из* $C([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$*,* $k = 2,3,4$*, соответственно.*

Следствие 3.2. *Можно убедиться, что первое условие (3.38) требует, чтобы λ не являлось собственным значением задачи С. Крейна – Стефана*

$$L_0 u = \lambda u \ (\textit{в}\ \Omega),\ \gamma_1 u = 0\ (\textit{на}\ \Gamma_1),\ \partial_2 u = 0\ (\textit{на}\ \Gamma_2),$$

$$\partial_3 u = \lambda \gamma_3 u\ (\textit{на}\ \Gamma_3),\ \lambda \partial_4 u = \gamma_4 u\ (\textit{на}\ \Gamma_4), \tag{3.40}$$

которая, как известно, имеет две ветви конечнократных положительных собственных значений с предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = +\infty$, а также не более конечного числа невещественных комплексно сопряжённых пар конечнократных собственных значений.

Что касается второго требования в (3.38), то, по аналогии с рассуждениями из замечания 3.1, можно убедиться, что здесь исключительными числами являются собственные значения модифицированной задачи С. Крейна – Стефана (см. (3.31))

$$L_0 u = \lambda u \ (\textit{в}\ \Omega),\ \gamma_1 u = 0\ (\textit{на}\ \Gamma_1),\ \gamma_2 u = 0\ (\textit{на}\ \Gamma_2),$$

$$\partial_3 u = \lambda \gamma_3 u\ (\textit{на}\ \Gamma_3),\ \lambda \partial_4 u = \gamma_4 u\ (\textit{на}\ \Gamma_4). \tag{3.41}$$

Общие свойства спектра этой задачи — такие же, как задачи (3.40). □

3.1.4 Четвёртая задача

Эта задача порождает спектральную проблему (3.35), если μ — фиксированный, а λ — спектральный параметр. Здесь предварительно удобно, как и в задаче гидродинамики (проблема С. Крейна), ввести вместо поля скоростей $u(t,x)$ поле перемещений сплошной среды $w(t,x)$, $u(t,x) = \partial w/\partial t$. Тогда начально – краевая задача, отвечающая проблеме (3.35), формируется следующим образом:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + L_0 \frac{\partial w}{\partial t} = f; (\text{в}\ \Omega),\ w = 0\ (\text{на}\ \Gamma_1),\\
\partial_2 \frac{\partial w}{\partial t} = \mu \gamma_2 \frac{\partial w}{\partial t} + \psi_2\ (\text{на}\ \Gamma_2),\ \partial_3 \frac{\partial w}{\partial t} + \gamma_3 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \psi_3\ (\text{на}\ \Gamma_3),\\
\partial_4 \frac{\partial w}{\partial t} + \gamma_4 w = \psi_4\ (\text{на}\ \Gamma_4),\quad w(0) = w^0,\ \frac{\partial w}{\partial t}(0) = w^1 = u^0.
\end{gathered} \tag{3.42}$$

Пользуясь теми же общими приёмами, которые были использованы выше, приходим к выводу, что искомое решение $w = w(t)$ со значениями в $\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw}{dt} = A^{-1}(f - \frac{d^2w}{dt^2}) + V_2(\psi_2 + \mu\gamma_2\frac{dw}{dt}) + V_3(\psi_3 - \gamma_3\frac{d^2w}{dt^2}) + V_4(\psi_4 - \gamma_4 w). \tag{3.43}$$

Тогда возникает задача Коши

$$(A^{-1} + V_3\gamma_3)\frac{d^2w}{dt^2} + (I - \mu V_2\gamma_2)\frac{dw}{dt} + V_4\gamma_4 w = A^{-1}f + \sum_{k=2}^{4} V_k\psi_k, \tag{3.44}$$

$$w(0) = w^0, \quad \frac{dw}{dt}(0) = w^1 = u^0.$$

Эта задача после замены $w = A^{-1/2}\eta$ переходит в проблему

$$(A^{-1} + B_3)\frac{d^2\eta}{dt^2} + (I - \mu B_2)\frac{d\eta}{dt} + B_4\eta = A^{-1/2}f + \sum_{k=2}^{4} A^{1/2}V_k\psi_k =: f(t), \tag{3.45}$$

$$\eta(0) = A^{1/2}w^0, \quad \frac{d\eta}{dt}(0) = A^{1/2}w^1 = A^{1/2}u^0.$$

Осуществляя здесь ещё одну замену

$$\frac{d\eta}{dt} = (A^{-1} + B_3)^{-1}\varphi, \tag{3.46}$$

приходим к задаче Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{d\varphi}{dt} + (I - \mu B_2)(A^{-1} + B_3)^{-1}\varphi + \int_0^t B_4(A^{-1} + B_3)^{-1}\varphi(s)ds =$$

$$= -B_4A^{1/2}w^0 + A^{-1/2}f + \sum_{k=2}^{4} A^{1/2}V_k\psi_k, \quad \varphi(0) = (A^{-1} + B_3)A^{1/2}w^1. \tag{3.47}$$

Чтобы исследовать проблему разрешимости задачи (3.47), сейчас понадобится одно утверждение, доказательство которого можно найти в [19], с. 21-25, теоремы 1.3.2, 1.3.4. В несколько ослабленной форме оно выглядит следующим образом.

Лемма 3.2. *Пусть в задаче Коши для интегродифференциального уравнения первого порядка, рассматриваемого в гильбертовом пространстве H, т.е. в задаче*

$$\frac{du}{dt} = A_0u + \int_0^t G(t,s)A_1u(s)ds + f(t), \quad u(0) = u^0, \tag{3.48}$$

выполнены следующие условия: 1°. A_0 *является генератором аналитической полугруппы;*

2°. $\mathcal{D}(A_1) \supset \mathcal{D}(A_0)$;

3°. $G(t,s),\ \partial G(t,s)/dt \in C(\triangle_T; H),\ \triangle_T := \{(t,s) : 0 \leqslant s \leqslant t \in T\}$;

4°. $f(t) \in C^\beta([0,T]; H),\ 0 < \beta \leqslant 1$;

5°. $u^0 \in \mathcal{D}(A_0)$.

Тогда задача (3.48) имеет единственное сильное решение

$$u(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A_0)) \cap C^1([0,T]; H), \tag{3.49}$$

для которого все слагаемые в (3.48) являются элементами из $C([0,T]; H)$ *и выполнено начальное условие.* $\square$

Воспользуемся леммой 3.2 применительно к задаче (3.47). В этой задаче оператор $-(I - \mu B_2)(A^{-1} + B_3)^{-1}$ является генератором аналитической полугруппы, причём области определения этого генератора и оператора, стоящего под знаком интеграла, совпадают. Далее, можно считать, что в (3.47) $G(t,s) \equiv I$ и потому выполнено условие 3° леммы 3.2.

Отсюда приходим к следующему выводу.

Лемма 3.3. *Если в задаче (3.47) выполнены условия*

$$w^0 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \quad w^1 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega), \tag{3.50}$$

$$f(t) \in C^\beta([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*), \quad \psi_k \in C^\beta([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)), \quad k = 2,3,4, \quad 0 < \beta \leqslant 1, \tag{3.51}$$

то эта задача имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$, *и для этого решения все слагаемые в уравнении (3.47) являются непрерывными функциями* $t \in [0,T]$ *со значениями в* $L_2(\Omega)$. $\square$

Это утверждение позволяет установить такой факт.

Теорема 3.4. *Пусть в задаче (3.42) выполнены условия (3.50), (3.51), а также условие*

$$\mu \notin \sigma(I - \mu B_2). \tag{3.52}$$

Тогда эта задача имеет сильное решение

$$w \in C^2([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*) \cap C^1([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)), \tag{3.53}$$

для которого выполнены уравнение (3.42), где все слагаемые являются элементами из $C([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$*, граничные условия (3.42), где все слагаемые на* Γ_k *являются элементами из* $C([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)),\ k=2,3,4$*, а также начальные условия (3.42).*

Доказательство. При выполнении условий (3.50), (3.51) по лемме 3.3 задача (3.47), а потому и задача (3.45) имеют решения, для которых все слагаемые в этих уравнениях являются элементами из $C([0,T];\ L_2(\Omega))$. Тогда в силу условия (3.52) имеем $d\eta/dt \in C([0,T];\ L_2(\Omega))$. Отсюда получаем, что в задаче (3.44), а потому и в (3.43) $dw/dt \in C([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))$. Следовательно, $L_0(dw/dt) \in C([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$, $\partial_k(dw/dt) \in C([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$.

Далее устанавливаем, опираясь на представление (3.43), как и выше, что для $w(t,x)$ выполнены уравнение и краевые условия (3.42), а потому, в силу доказанных свойств для , в уравнении (3.42) все слагаемые — элементы из $C([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$, а в граничных условиях — элементы из $C([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)),\ k=2,3,4$.

Отсюда также приходим к выводу, что имеет место свойство (3.53) и, кроме того, свойство $\gamma_3 w \in C^2([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3))$. Наконец, выполнены также начальные условия (3.50). □

3.1.5 Начально–краевые задачи для двух примыкающих областей

Подход, продемонстрированный в предыдущем параграфе для спектральной задачи (2.1)-(2.2), можно применить и для спектральной задачи сопряжения (2.19)-(2.28), т.е. исследовать свойства её решений на основе операторного пучка (2.31), (2.32), а также рассмотреть начально–краевые задачи, порождающие спектральную проблему (2.33)- (2.39).

Рассмотрим две примыкающие области Ω_1 и Ω_2 с липшицевыми границами, как в пп. 2.1.2, только для начала каждую из внешних границ разобьем не на 4, а на 3 липшицевых куска, а внутреннюю границу не на 7, а на 5. Сформулируем начально–краевую задачу, которая порождает соответствующую спектральную, в которой параметр λ является искомым спектральным, а μ — фиксированным. Имеем

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + L_0 u_1 = f_1 \ \ (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} + L_0 u_2 = f_2 \ \ (\text{в } \Omega_2); \tag{3.54}$$

на внешних границах:

$$\gamma_{11,1} u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11,1}), \ \gamma_{22,1} u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22,1}), \tag{3.55}$$

$$\begin{gathered}\partial_{11,2} u_1 = \mu \gamma_{11,2} u_1 + \psi_{11,2} \ \ (\text{на } \Gamma_{11,2}), \qquad \partial_{22,2} u_2 = \mu \gamma_{22,2} u_2 + \psi_{22,2} \ \ (\text{на } \Gamma_{22,2}), \\ \partial_{11,3} u_1 + \tfrac{\partial}{\partial t}(\gamma_{11,3} u_1) = \psi_{11,3} \ \ (\text{на } \Gamma_{11,3}), \quad \partial_{22,3} u_2 + \tfrac{\partial}{\partial t}(\gamma_{22,3} u_2) = \psi_{22,3} \ \ (\text{на } \Gamma_{22,3});\end{gathered} \tag{3.56}$$

на границах стыка:

$$\gamma_{21,1} u_1 - \gamma_{12,1} u_2 = 0, \quad \partial_{21,1} u_1 + \partial_{12,1} u_2 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,1}), \tag{3.57}$$

$$\gamma_{21,2} u_1 - \gamma_{12,2} u_2 = 0, \ \ \partial_{21,2} u_1 + \partial_{12,2} u_2 = \mu \gamma_{21,2} u_1 + \psi_{21,2} \ \ (\text{на } \Gamma_{21,2}), \tag{3.58}$$

$$\gamma_{21,3} u_1 - \gamma_{12,3} u_2 = 0, \ \partial_{21,3} u_1 + \partial_{12,3} u_2 + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{21,3} u_1) = \psi_{21,3} \ \ (\text{на } \Gamma_{21,3}), \tag{3.59}$$

$$\partial_{21,4} u_1 = -\partial_{12,4} u_2 = \mu(\gamma_{21,4} u_1 - \gamma_{12,4} u_2) + \psi_{21,4} \ \ (\text{на } \Gamma_{21,4}), \tag{3.60}$$

$$\partial_{21,5} u_1 = -\partial_{12,5} u_2 = -\frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{21,5} u_1 - \gamma_{12,5} u_2) + \psi_{21,5} \ (\text{на } \Gamma_{21,5}); \tag{3.61}$$

$$u_i(0,x) = u_i^0(x), \ x \in \Omega_i, \ i = \overline{1,2}.$$

Как и в случае с одной областью (см. п. 3.1.1) представим решение этой задачи в виде суммы решений вспомогательных задач, с помощью формул Грина находим их слабые решения и получаем уравнение, которому удовлетворяет решение задачи. Объединяя вместе краевые задачи, для которых неоднородности в уравнениях имеют одинаковый смысл (например, коэффициенты при λ и μ), мы видим, что решение такого набора задач может быть представлено в форме

$$u = A^{-1}(f - \frac{\partial u}{\partial t}) + V_2(\mu \gamma_2 u + \psi_2) + V_3(\psi_3 - \frac{\partial}{\partial t}\gamma_3 u), \tag{3.62}$$

где $u = (u_1; u_2), \ f = (f_1; f_2)$, A — оператор гильбертовой пары

$$(H^1_{0,\Gamma_{11,1}}(\Omega_1) \oplus H^1_{0,\Gamma_{22,1}}(\Omega_2); \ L_2(\Omega));$$

$$V_2\gamma_2 = V_{11,2}V^*_{11,2} + V_{22,2}V^*_{22,2} + V_{21,2}V^*_{21,2} + V_{21,4}V^*_{21,4};$$

$$V_2\psi_2 = V_{11,2}\psi_{11,2} + V_{22,2}\psi_{22,2} + V_{21,2}\psi_{21,2} + V_{21,4}\psi_{21,4};$$

$$V_3\gamma_3 = V_{11,3}V^*_{11,3} + V_{22,3}V^*_{22,3} + V_{21,3}V^*_{21,3} + V_{21,5}V^*_{21,5};$$

$$V_3\psi_3 = V_{11,3}\psi_{11,3} + V_{22,3}\psi_{22,3} + V_{21,3}\psi_{21,3} + V_{21,5}\psi_{21,5}.$$

Таким образом, возникло такое же уравнение, как и в случае аналогичной задачи для одной области (см. п. 3.1.1, (3.4)). Операторы, входящие в уравнение (3.62), обладают теми же свойствами, что и операторы из (3.4). Поэтому, все дальнейшие преобразования (см. (3.5)-(3.9)) и выводы (см. теорему 3.1) из п. 3.1.1 справедливы и в этом случае.

Далее перейдём ко второй начально–краевой задаче для двух примыкающих областей. В отличии от первой, в этой задаче параметр μ — искомый спектральный, а λ — фиксированный. Получаем начально–краевую задачу для двух примыкающих областей в следующем виде

$$L_0 u_1 = \lambda u_1 + f_1 \ \ (\text{в } \Omega_1), \quad L_0 u_2 = \lambda u_2 + f_2 \ \ (\text{в } \Omega_2); \tag{3.63}$$

$$\gamma_{11,1}u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11,1}), \ \gamma_{22,1}u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22,1}), \tag{3.64}$$

$$\begin{gathered}\partial_{11,2}u_1 + \tfrac{\partial}{\partial t}(\gamma_{11,2}u_1) = \psi_{11,2} \ \ (\text{на } \Gamma_{11,2}), \quad \partial_{22,2}u_2 + \tfrac{\partial}{\partial t}(\gamma_{22,2}u_2) = \psi_{22,2} \ \ (\text{на } \Gamma_{22,2}),\\ \partial_{11,3}u_1 = \lambda\gamma_{11,3}u_1 + \psi_{11,3} \ \ (\text{на } \Gamma_{11,3}), \qquad \partial_{22,3}u_2 = \lambda\gamma_{22,3}u_2 + \psi_{22,3} \ \ (\text{на } \Gamma_{22,3});\end{gathered} \tag{3.65}$$

$$\gamma_{21,1}u_1 - \gamma_{12,1}u_2 = 0, \quad \partial_{21,1}u_1 + \partial_{12,1}u_2 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,1}), \tag{3.66}$$

$$\gamma_{21,2}u_1 - \gamma_{12,2}u_2 = 0, \ \ \partial_{21,2}u_1 + \partial_{12,2}u_2 + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{21,2}u_1) = \psi_{21,2} \ \ (\text{на } \Gamma_{21,2}), \tag{3.67}$$

$$\gamma_{21,3}u_1 - \gamma_{12,3}u_2 = 0, \ \partial_{21,3}u_1 + \partial_{12,3}u_2 = \lambda\gamma_{21,3}u_1 + \psi_{21,3} \ \ (\text{на } \Gamma_{21,3}), \tag{3.68}$$

$$\partial_{21,4}u_1 = -\partial_{12,4}u_2 = -\frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{21,4}u_1 - \gamma_{12,4}u_2) + \psi_{21,4} \ \ (\text{на } \Gamma_{21,4}), \tag{3.69}$$

$$\partial_{21,5}u_1 = -\partial_{12,5}u_2 = \lambda(\gamma_{21,5}u_1 - \gamma_{12,5}u_2) + \psi_{21,5} \ (\text{на } \Gamma_{21,5}); \tag{3.70}$$

$$u_i(0,x) = u_i^0(x), \ x \in \Omega_i, \ i = \overline{1,2}.$$

Мы снова получаем аналогичное уравнение, как и в случае с одной областью (см. (3.16)):

$$u = A^{-1}(\lambda u + f) + V_2(\psi_2 - \frac{d}{dt}\gamma_2 u) + V_3(\lambda\gamma_3 u + \psi_3), \tag{3.71}$$

где $u = (u_1; u_2)$, $f = (f_1; f_2)$;

$$V_2\gamma_2 = V_{11,2}V_{11,2}^* + V_{22,2}V_{22,2}^* + V_{21,2}V_{21,2}^* + V_{21,4}V_{21,4}^*;$$

$$V_2\psi_2 = V_{11,2}\psi_{11,2} + V_{22,2}\psi_{22,2} + V_{21,2}\psi_{21,2} + V_{21,4}\psi_{21,4};$$

$$V_3\gamma_3 = V_{11,3}V_{11,3}^* + V_{22,3}V_{22,3}^* + V_{21,3}V_{21,3}^* + V_{21,5}V_{21,5}^*;$$

$$V_3\psi_3 = V_{11,3}\psi_{11,3} + V_{22,3}\psi_{22,3} + V_{21,3}\psi_{21,3} + V_{21,5}\psi_{21,5}.$$

Затем, как и в случае с одной областью, получаем задачу Коши с оператором $B_2 \geqslant 0$, у которого ядро бесконечномерно. Далее, осуществляем проектирование на подпространства H_0 и H_1 и в итоге приходим к тем же общим выводам, что и в пп. 3.1.2.

Третья начально–краевая задача для двух областей снова формулируется для случая, когда μ — спектральный параметр, а λ — фиксированный. Но теперь каждая из внешних границ разделена не на 3, а на 4 части, а внутренняя — не на 5, а на 7 липшицевых кусков. Получаем:
уравнения в Ω_1 и Ω_2

$$L_0 u_1 = \lambda u_1 + f_1 \ \ (\text{в } \Omega_1), \quad L_0 u_2 = \lambda u_2 + f_2 \ \ (\text{в } \Omega_2); \tag{3.72}$$

условия на внешних границах:

$$\gamma_{11,1}u_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11,1}),\ \gamma_{22,1}u_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22,1}), \tag{3.73}$$

$$\begin{gathered}
\partial_{11,2}u_1 + \tfrac{\partial}{\partial t}(\gamma_{11,2}u_1) = \psi_{11,2} \ \ (\text{на } \Gamma_{11,2}), \quad \partial_{22,2}u_2 + \tfrac{\partial}{\partial t}(\gamma_{22,2}u_2) = \psi_{22,2} \ \ (\text{на } \Gamma_{22,2}),\\
\partial_{11,3}u_1 = \lambda\gamma_{11,3}u_1 + \psi_{11,3} \ \ (\text{на } \Gamma_{11,3}), \qquad \partial_{22,3}u_2 = \lambda\gamma_{22,3}u_2 + \psi_{22,3} \ \ (\text{на } \Gamma_{22,3}),\\
\partial_{11,4}u_1 = \lambda^{-1}\gamma_{11,4}u_1 + \psi_{11,4} \ \ (\text{на } \Gamma_{11,4}), \quad \partial_{22,4}u_2 = \lambda^{-1}\gamma_{22,4}u_2 + \psi_{22,4} \ \ (\text{на } \Gamma_{22,4});
\end{gathered} \tag{3.74}$$

условия на границах стыка:

$$\gamma_{21,1}u_1 - \gamma_{12,1}u_2 = 0, \quad \partial_{21,1}u_1 + \partial_{12,1}u_2 = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,1}), \tag{3.75}$$

$$\gamma_{21,2}u_1 - \gamma_{12,2}u_2 = 0, \;\; \partial_{21,2}u_1 + \partial_{12,2}u_2 + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{21,2}u_1) = \psi_{21,2} \;\; (\text{на } \Gamma_{21,2}), \tag{3.76}$$

$$\gamma_{21,3}u_1 - \gamma_{12,3}u_2 = 0, \; \partial_{21,3}u_1 + \partial_{12,3}u_2 = \lambda\gamma_{21,3}u_1 + \psi_{21,3} \;\; (\text{на } \Gamma_{21,3}), \tag{3.77}$$

$$\gamma_{21,4}u_1 - \gamma_{12,4}u_2 = 0, \; \partial_{21,4}u_1 + \partial_{12,4}u_2 = \lambda^{-1}\gamma_{21,4}u_1 + \psi_{21,4} \;\; (\text{на } \Gamma_{21,4}), \tag{3.78}$$

$$\partial_{21,5}u_1 = -\partial_{12,5}u_2 = -\frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{21,5}u_1 - \gamma_{12,5}u_2) + \psi_{21,5} \;\; (\text{на } \Gamma_{21,5}), \tag{3.79}$$

$$\partial_{21,6}u_1 = -\partial_{12,6}u_2 = \lambda(\gamma_{21,6}u_1 - \gamma_{12,6}u_2) + \psi_{21,6} \; (\text{на } \Gamma_{21,6}), \tag{3.80}$$

$$\partial_{21,7}u_1 = -\partial_{12,7}u_2 = \lambda^{-1}(\gamma_{21,7}u_1 - \gamma_{12,7}u_2) + \psi_{21,7} \; (\text{на } \Gamma_{21,7}); \tag{3.81}$$

$$u_i(0,x) = u_i^0(x), \; x \in \Omega_i, \; i = \overline{1,2}.$$

Снова с помощью общего сформулированного выше подхода находим решения вспомогательных задач и приходим к выводу, что искомое решение удовлетворяет уравнению

$$u = A^{-1}(\lambda u + f) + V_2(\psi_2 - \frac{d}{dt}\gamma_2 u) + V_3(\lambda\gamma_3 u + \psi_3) + V_4(\lambda^{-1}\gamma_4 u + \psi_4), \tag{3.82}$$

где $u = (u_1; u_2), \; f = (f_1; f_2)$;

$$V_2\gamma_2 = V_{11,2}V_{11,2}^* + V_{22,2}V_{22,2}^* + V_{21,2}V_{21,2}^* + V_{21,5}V_{21,5}^*;$$

$$V_2\psi_2 = V_{11,2}\psi_{11,2} + V_{22,2}\psi_{22,2} + V_{21,2}\psi_{21,2} + V_{21,5}\psi_{21,5};$$

$$V_3\gamma_3 = V_{11,3}V_{11,3}^* + V_{22,3}V_{22,3}^* + V_{21,3}V_{21,3}^* + V_{21,6}V_{21,6}^*;$$

$$V_3\psi_3 = V_{11,3}\psi_{11,3} + V_{22,3}\psi_{22,3} + V_{21,3}\psi_{21,3} + V_{21,6}\psi_{21,6};$$

$$V_4\gamma_4 = V_{11,4}V_{11,4}^* + V_{22,4}V_{22,4}^* + V_{21,4}V_{21,4}^* + V_{21,7}V_{21,7}^*;$$

$$V_4\psi_4 = V_{11,4}\psi_{11,4} + V_{22,4}\psi_{22,4} + V_{21,4}\psi_{21,4} + V_{21,7}\psi_{21,7}.$$

Уравнение (3.82) аналогично соответствующему уравнению для одной области, операторы из уравнений обладают теми же общими свойствами. Значит и выводы, сформулированные в пп. 3.1.3, применимы к этой проблеме.

Наконец, рассмотрим четвёртую начально–краевую задачу для двух сопряжённых областей. Здесь, как и в первой задаче, параметр λ — спектральный, μ — фиксирован.

Однако внешняя граница разделена на 4 липшицевых куска каждая, а внутренняя — на 7 липшицевых кусков. Получаем уравнения:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + L_0 \frac{\partial w_1}{\partial t} = f_1 \ \ (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + L_0 \frac{\partial w_2}{\partial t} = f_2 \ \ (\text{в } \Omega_2); \tag{3.83}$$

на внешних границах заданы условия:

$$w_1 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{11,1}), \qquad w_2 = 0 \ (\text{на } \Gamma_{22,1}), \tag{3.84}$$

$$\begin{gathered} \partial_{11,2}\tfrac{\partial w_1}{\partial t} = \mu\gamma_{11,2}\tfrac{\partial w_1}{\partial t} + \psi_{11,2} \ \ (\text{на } \Gamma_{11,2}), \quad \partial_{22,2}\tfrac{\partial w_2}{\partial t} = \mu\gamma_{22,2}\tfrac{\partial w_2}{\partial t} + \psi_{22,2} \ \ (\text{на } \Gamma_{22,2}), \\ \partial_{11,3}\tfrac{\partial w_1}{\partial t} + \gamma_{11,3}\tfrac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \psi_{11,3} \ \ (\text{на } \Gamma_{11,3}), \quad \partial_{22,3}\tfrac{\partial w_2}{\partial t} + \gamma_{22,3}\tfrac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = \psi_{22,3} \ \ (\text{на } \Gamma_{22,3}), \\ \partial_{11,4}\tfrac{\partial w_1}{\partial t} + \gamma_{11,4} w_1 = \psi_{11,4} \ \ (\text{на } \Gamma_{11,4}), \qquad \partial_{22,4}\tfrac{\partial w_2}{\partial t} + \gamma_{22,4} w_2 = \psi_{22,4} \ \ (\text{на } \Gamma_{22,4}); \end{gathered} \tag{3.85}$$

на границах стыка:

$$\gamma_{21,1}\frac{\partial w_1}{\partial t} - \gamma_{12,1}\frac{\partial w_2}{\partial t} = 0, \quad \partial_{21,1}\frac{\partial w_1}{\partial t} + \partial_{12,1}\frac{\partial w_2}{\partial t} = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{21,1}), \tag{3.86}$$

$$\gamma_{21,2}\frac{\partial w_1}{\partial t} - \gamma_{12,2}\frac{\partial w_2}{\partial t} = 0, \ \ \partial_{21,2}\frac{\partial w_1}{\partial t} + \partial_{12,2}\frac{\partial w_2}{\partial t} = \mu\gamma_{21,2}\frac{\partial w_1}{\partial t} + \psi_{21,2} \ \ (\text{на } \Gamma_{21,2}), \tag{3.87}$$

$$\gamma_{21,3}\frac{\partial w_1}{\partial t} - \gamma_{12,3}\frac{\partial w_2}{\partial t} = 0, \ \partial_{21,3}\frac{\partial w_1}{\partial t} + \partial_{12,3}\frac{\partial w_2}{\partial t} + \gamma_{21,3}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = \psi_{21,3} \ \ (\text{на } \Gamma_{21,3}), \tag{3.88}$$

$$\gamma_{21,4}\frac{\partial w_1}{\partial t} - \gamma_{12,4}\frac{\partial w_2}{\partial t} = 0, \ \partial_{21,4}\frac{\partial w_1}{\partial t} + \partial_{12,4}\frac{\partial w_2}{\partial t} + \gamma_{21,4} w_1 = \psi_{21,4} \ \ (\text{на } \Gamma_{21,4}), \tag{3.89}$$

$$\partial_{21,5}\frac{\partial w_1}{\partial t} = -\partial_{12,5}\frac{\partial w_2}{\partial t} = \mu(\gamma_{21,5}\frac{\partial w_1}{\partial t} - \gamma_{12,5}\frac{\partial w_2}{\partial t}) + \psi_{21,5} \ \ (\text{на } \Gamma_{21,5}), \tag{3.90}$$

$$\partial_{21,6}\frac{\partial w_1}{\partial t} = -\partial_{12,6}\frac{\partial w_2}{\partial t} = -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\gamma_{21,6} u_1 - \gamma_{12,6} u_2) + \psi_{21,6} \ (\text{на } \Gamma_{21,6}), \tag{3.91}$$

$$\partial_{21,7}\frac{\partial w_1}{\partial t} = -\partial_{12,7}\frac{\partial w_2}{\partial t} = -(\gamma_{21,7} p_1 - \gamma_{12,7} p_2) w + \psi_{21,7} \ (\text{на } \Gamma_{21,7}); \tag{3.92}$$

$$w_i(0) = w_i^0, \ \frac{\partial w_i}{\partial t}(0) = w^1 = u^0, \ i = \overline{1,2}.$$

Аналогично педыдущему, как и в случае с одной областью, приходим к выводу, что искомое решение $w = w(t)$ со значениями в $\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw}{dt} = A^{-1}(f - \frac{d^2 w}{dt^2}) + V_2(\psi_2 + \mu\gamma_2\frac{dw}{dt}) + V_3(\psi_3 - \gamma_3\frac{d^2 w}{dt^2}) + V_4(\psi_4 - \gamma_4 w), \tag{3.93}$$

где $w = (w_1; w_2), \ f = (f_1; f_2)$;

$$V_2\gamma_2 = V_{11,2}V_{11,2}^* + V_{22,2}V_{22,2}^* + V_{21,2}V_{21,2}^* + V_{21,5}V_{21,5}^*;$$

$$V_2\psi_2 = V_{11,2}\psi_{11,2} + V_{22,2}\psi_{22,2} + V_{21,2}\psi_{21,2} + V_{21,5}\psi_{21,5};$$

$$V_3\gamma_3 = V_{11,3}V^*_{11,3} + V_{22,3}V^*_{22,3} + V_{21,3}V^*_{21,3} + V_{21,6}V^*_{21,6};$$

$$V_3\psi_3 = V_{11,3}\psi_{11,3} + V_{22,3}\psi_{22,3} + V_{21,3}\psi_{21,3} + V_{21,6}\psi_{21,6};$$

$$V_4\gamma_4 = V_{11,4}V^*_{11,4} + V_{22,4}V^*_{22,4} + V_{21,4}V^*_{21,4} + V_{21,7}V^*_{21,7};$$

$$V_4\psi_4 = V_{11,4}\psi_{11,4} + V_{22,4}\psi_{22,4} + V_{21,4}\psi_{21,4} + V_{21,7}\psi_{21,7}.$$

Поэтому для этой задачи справедливы все общие выводы из п. 3.1.4.

3.1.6 Начально–краевые задачи для трёх примыкающих областей

Наконец, рассмотрим эти же задачи, но для трёх примыкающих областей. Их конфигурация описана в пп. 2.1.3. В областях $\Omega_k,\ k=\overline{1,3}$ из $\mathbb{R}^m$ уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + L_0 u_k = f_k \ \ (\text{в } \Omega_k), \ \ k=\overline{1,3}; \tag{3.94}$$

условия на внешних границах:

$$\gamma_{kk,1}u_k = 0 \ (\text{на } \Gamma_{kk,1}), \tag{3.95}$$

$$\begin{gathered} \partial_{kk,2}u_k = \mu\gamma_{kk,2}u_k + \psi_{kk,2} \ \ (\text{на } \Gamma_{kk,2}), \\ \partial_{kk,3}u_i + \tfrac{\partial}{\partial t}(\gamma_{kk,3}u_k) = \psi_{kk,3} \ \ (\text{на } \Gamma_{kk,3}), \ \ k=\overline{1,3}; \end{gathered} \tag{3.96}$$

на границах стыка:

$$\gamma_{kj,1}u_j - \gamma_{jk,1}u_k = 0, \quad \partial_{kj,1}u_j + \partial_{jk,1}u_k = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{kj,1}), \tag{3.97}$$

$$\gamma_{kj,2}u_j - \gamma_{jk,2}u_k = 0, \ \ \partial_{kj,2}u_j + \partial_{jk,2}u_k = \mu\gamma_{kj,2}u_j + \psi_{kj,2} \ \ (\text{на } \Gamma_{kj,2}), \tag{3.98}$$

$$\gamma_{kj,3}u_j - \gamma_{jk,3}u_k = 0, \ \partial_{kj,3}u_j + \partial_{jk,3}u_k + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{kj,3}u_j) = \psi_{kj,3} \ \ (\text{на } \Gamma_{kj,3}), \ k,j=\overline{1,3}, \ k\neq j; \tag{3.99}$$

$$u_k(0,x) = u_k^0(x), \ x\in\Omega_k, \ k=\overline{1,3}.$$

Снова с помощью описанного выше подхода разбиваем эту задачу на вспомогательные, находим решение исходной задачи в виде суммы решений вспомогательных задач. Краевые задачи, для которых неоднородности имеют одинаковый смысл, объединяем и получаем уравнение того же вида, что и в более простых случаях с одной и двумя примыкающими областями (см. (3.4), (3.62)):

$$u = A^{-1}(f - \frac{\partial u}{\partial t}) + V_2(\mu\gamma_2 u + \psi_2) + V_3(\psi_3 - \frac{\partial}{\partial t}\gamma_3 u), \tag{3.100}$$

где $u = (u_1; u_2; u_3)$, $f = (f_1; f_2; f_3)$, A — оператор гильбертовой пары $(H^1_{0,\Gamma_{11,1}}(\Omega_1) \oplus H^1_{0,\Gamma_{22,1}}(\Omega_2) \oplus H^1_{0,\Gamma_{33,1}}(\Omega_3);\ L_2(\Omega))$,

$$V_2\gamma_2 = \sum_{k=1}^{3} V_{kk,2}V^*_{kk,2} + V_{21,2}V^*_{21,2} + V_{32,2}V^*_{32,2} + V_{13,2}V^*_{13,2};$$

$$V_2\psi_2 = \sum_{k=1}^{3} V_{kk,2}\psi_{kk,2} + V_{21,2}\psi_{21,2} + V_{32,2}\psi_{32,2} + V_{13,2}\psi_{13,2};$$

$$V_3\gamma_3 = \sum_{k=1}^{3} V_{kk,3}V^*_{kk,3} + V_{21,3}V^*_{21,3} + V_{32,3}V^*_{32,3} + V_{13,3}V^*_{13,3};$$

$$V_3\psi_3 = \sum_{k=1}^{3} V_{kk,3}\psi_{kk,3} + V_{21,3}\psi_{21,3} + V_{32,3}\psi_{32,3} + V_{13,3}\psi_{13,3}.$$

Значит, как и в случае с двумя областями, все выводы из пп. 3.1.1 справедливы и в этом варианте.

Рассмотрим вторую начально–краевую задачу для двух примыкающих областей.

$$L_0 u_k = \lambda u_k + f_k \ \ (\text{в } \Omega_k),\ k = \overline{1,3}; \tag{3.101}$$

$$\gamma_{kk,1} u_k = 0 \ (\text{на } \Gamma_{kk,1}), \tag{3.102}$$

$$\begin{gathered} \partial_{kk,2} u_k + \tfrac{\partial}{\partial t}(\gamma_{kk,2} u_k) = \psi_{kk,2} \ \ (\text{на } \Gamma_{kk,2}), \\ \partial_{kk,3} u_k = \lambda \gamma_{kk,3} u_k k + \psi_{kk,3} \ \ (\text{на } \Gamma_{kk,3}),\ k = \overline{1,3}; \end{gathered} \tag{3.103}$$

$$\gamma_{kj,1} u_j - \gamma_{jk,1} u_k = 0, \quad \partial_{kj,1} u_j + \partial_{jk,1} u_k = 0 \ \ (\text{на } \Gamma_{kj,1}), \tag{3.104}$$

$$\gamma_{kj,2} u_j - \gamma_{jk,2} u_k = 0,\ \ \partial_{kj,2} u_j + \partial_{jk,2} u_k + \frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{kj,2} u_j) = \psi_{kj,2} \ \ (\text{на } \Gamma_{kj,2}), \tag{3.105}$$

$$\gamma_{kj,3} u_j - \gamma_{jk,3} u_k = 0,\ \partial_{kj,3} u_j + \partial_{jk,3} u_k = \lambda \gamma_{kj,3} u_j + \psi_{kj,3} \ \ (\text{на } \Gamma_{kj,3}),\ k, j = \overline{1,3},\ k \neq j; \tag{3.106}$$

$$u_k(0,x)=u_k^0(x),\ x\in\Omega_k,\ k=\overline{1,3}.$$

Здесь возникает уравнение, аналогичное (3.16), (3.71):

$$u=A^{-1}(\lambda u+f)+V_2(\psi_2-\frac{d}{dt}\gamma_2 u)+V_3(\lambda\gamma_3 u+\psi_3), \tag{3.107}$$

где $u=(u_1;u_2;u_3),\ f=(f_1;f_2;f_3)$;

$$V_2\gamma_2=\sum_{k=1}^{3}V_{kk,2}V_{kk,2}^*+V_{21,2}V_{21,2}^*+V_{32,2}V_{32,2}^*+V_{13,2}V_{13,2}^*;$$

$$V_2\psi_2=\sum_{k=1}^{3}V_{kk,2}\psi_{kk,2}+V_{21,2}\psi_{21,2}+V_{32,2}\psi_{32,2}+V_{13,2}\psi_{13,2};$$

$$V_3\gamma_3=\sum_{k=1}^{3}V_{kk,3}V_{kk,3}^*+V_{21,3}V_{21,3}^*+V_{32,3}V_{32,3}^*+V_{13,3}V_{13,3}^*;$$

$$V_3\psi_3=\sum_{k=1}^{3}V_{kk,3}\psi_{kk,3}+V_{21,3}\psi_{21,3}+V_{32,3}\psi_{32,3}+V_{13,3}\psi_{13,3}.$$

Поэтому для задачи (**??**)–(**??**) имеют место те же выводы, что и в пп. 3.1.2.

Третья начально–краевая задача для трёх областей имеет следующий вид

$$L_0u_k=\lambda u_k+f_k\ \ (\text{в }\Omega_k),\ k=\overline{1,3}; \tag{3.108}$$

условия на внешних границах:

$$\gamma_{kk,1}u_k=0\ (\text{на }\Gamma_{kk,1}), \tag{3.109}$$

$$\begin{gathered}\partial_{kk,2}u_k+\tfrac{\partial}{\partial t}(\gamma_{kk,2}u_k)=\psi_{kk,2}\ \ (\text{на }\Gamma_{kk,2}),\\ \partial_{kk,3}u_k=\lambda\gamma_{kk,3}u_k+\psi_{kk,3}\ \ (\text{на }\Gamma_{kk,3}),\\ \partial_{kk,4}u_k=\lambda^{-1}\gamma_{kk,4}u_k+\psi_{kk,4}\ \ (\text{на }\Gamma_{kk,4}),\ k=\overline{1,3};\end{gathered} \tag{3.110}$$

условия на границах стыка:

$$\gamma_{kj,1}u_j-\gamma_{jk,1}u_k=0,\quad \partial_{kj,1}u_j+\partial_{jk,1}u_k=0\ \ (\text{на }\Gamma_{kj,1}), \tag{3.111}$$

$$\gamma_{kj,2}u_j-\gamma_{jk,2}u_k=0,\ \ \partial_{kj,2}u_j+\partial_{jk,2}u_k+\frac{\partial}{\partial t}(\gamma_{kj,2}u_j)=\psi_{kj,2}\ \ (\text{на }\Gamma_{kj,2}), \tag{3.112}$$

$$\gamma_{kj,3}u_j-\gamma_{jk,3}u_k=0,\ \partial_{kj,3}u_j+\partial_{jk,3}u_k=\lambda\gamma_{kj,3}u_j+\psi_{kj,3}\ \ (\text{на }\Gamma_{kj,3}), \tag{3.113}$$

$$\gamma_{kj,4}u_j-\gamma_{jk,4}u_k=0,\ \partial_{kj,4}u_j+\partial_{jk,4}u_k=\lambda^{-1}\gamma_{kj,4}u_j+\psi_{kj,4}\ \ (\text{на }\Gamma_{kj,4}),\ k,j=\overline{1,3},\ k\neq j; \tag{3.114}$$

$$u_k(0,x) = u_k^0(x),\ x \in \Omega_k,\ k = \overline{1,3}.$$

Вводим решения вспомогательных задач и приходим к выводу, что искомое решение удовлетворяет уравнению

$$u = A^{-1}(\lambda u + f) + V_2(\psi_2 - \frac{d}{dt}\gamma_2 u) + V_3(\lambda\gamma_3 u + \psi_3) + V_4(\lambda^{-1}\gamma_4 u + \psi_4), \tag{3.115}$$

где $u = (u_1; u_2; u_3),\ f = (f_1; f_2; f_3)$;

$$V_2\gamma_2 = \sum_{k=1}^{3} V_{kk,2}V_{kk,2}^* + V_{21,2}V_{21,2}^* + V_{32,2}V_{32,2}^* + V_{13,2}V_{13,2}^*;$$

$$V_2\psi_2 = \sum_{k=1}^{3} V_{kk,2}\psi_{kk,2} + V_{21,2}\psi_{21,2} + V_{32,2}\psi_{32,2} + V_{13,2}\psi_{13,2};$$

$$V_3\gamma_3 = \sum_{k=1}^{3} V_{kk,3}V_{kk,3}^* + V_{21,3}V_{21,3}^* + V_{32,2}V_{32,2}^* + V_{13,2}V_{13,2}^*;$$

$$V_3\psi_3 = \sum_{k=1}^{3} V_{kk,3}\psi_{kk,3} + V_{21,3}\psi_{21,3} + V_{32,2}\psi_{32,2} + V_{13,2}\psi_{13,2};$$

$$V_4\gamma_4 = \sum_{k=1}^{3} V_{kk,4}V_{kk,4}^* + V_{21,4}V_{21,4}^* + V_{32,2}V_{32,2}^* + V_{13,2}V_{13,2}^*;$$

$$V_4\psi_4 = \sum_{k=1}^{3} V_{kk,4}\psi_{kk,4} + V_{21,4}\psi_{21,4} + V_{32,2}\psi_{32,2} + V_{13,2}\psi_{13,2}.$$

Здесь получилось уравнение такое же, как и в третьих вспомогательных задачах для одной и двух областей. Поэтому справедливы выводы из п. 3.1.3 о существовании и единственности сильного решения, аналогичные установленным выше.

Четвёртая начально–краевая задача для трёх примыкающих областей выглядит следующим образом

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} + L_0\frac{\partial w_k}{\partial t} = f_k \ \ (\text{в } \Omega_k); \tag{3.116}$$

условия на внешних границах:

$$w_k = 0 \ (\text{на } \Gamma_{kk,1}), \tag{3.117}$$

$$\begin{gathered}\partial_{kk,2}\tfrac{\partial w_k}{\partial t}=\mu\gamma_{kk,2}\tfrac{\partial w_k}{\partial t}+\psi_{kk,2}\ \ (\text{на }\Gamma_{kk,2}),\\ \partial_{kk,3}\tfrac{\partial w_k}{\partial t}+\gamma_{kk,3}\tfrac{\partial^2 w_k}{\partial t^2}=\psi_{kk,3}\ \ (\text{на }\Gamma_{kk,3}),\\ \partial_{kk,4}\tfrac{\partial w_k}{\partial t}+\gamma_{kk,4}w_k=\psi_{kk,4}\ \ (\text{на }\Gamma_{kk,4}),\ k=\overline{1,3};\end{gathered}\tag{3.118}$$

на границах стыка:

$$\gamma_{kj,1}\frac{\partial w_j}{\partial t}-\gamma_{jk,1}\frac{\partial w_k}{\partial t}=0,\quad \partial_{kj,1}\frac{\partial w_j}{\partial t}+\partial_{jk,1}\frac{\partial w_k}{\partial t}=0\ \ (\text{на }\Gamma_{kj,1}),\tag{3.119}$$

$$\gamma_{kj,2}\frac{\partial w_j}{\partial t}-\gamma_{jk,2}\frac{\partial w_k}{\partial t}=0,\ \ \partial_{kj,2}\frac{\partial w_j}{\partial t}+\partial_{jk,2}\frac{\partial w_k}{\partial t}=\mu\gamma_{kj,2}\frac{\partial w_j}{\partial t}+\psi_{kj,2}\ \ (\text{на }\Gamma_{kj,2}),\tag{3.120}$$

$$\gamma_{kj,3}\frac{\partial w_j}{\partial t}-\gamma_{jk,3}\frac{\partial w_k}{\partial t}=0,\ \partial_{kj,3}\frac{\partial w_j}{\partial t}+\partial_{jk,3}\frac{\partial w_k}{\partial t}+\gamma_{kj,3}\frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2}=\psi_{kj,3}\ \ (\text{на }\Gamma_{kj,3}),\tag{3.121}$$

$$\gamma_{kj,4}\frac{\partial w_j}{\partial t}-\gamma_{jk,4}\frac{\partial w_k}{\partial t}=0,\ \partial_{kj,4}\frac{\partial w_j}{\partial t}+\partial_{jk,4}\frac{\partial w_k}{\partial t}+\gamma_{kj,4}w_j=\psi_{kj,4}\ \ (\text{на }\Gamma_{kj,4}),\ k,j=\overline{1,3},\ k\neq j;\tag{3.122}$$

$$w_k(0)=w_k^0,\ \frac{\partial w_k}{\partial t}(0)=w^1=u^0,\ k=\overline{1,3}.$$

Как в случаях с одной и двумя областями, приходим к выводу, что искомое решение $w=w(t)$ со значениями в $\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dw}{dt}=A^{-1}(f-\frac{d^2w}{dt^2})+V_2(\psi_2+\mu\gamma_2\frac{dw}{dt})+V_3(\psi_3-\gamma_3\frac{d^2w}{dt^2})+V_4(\psi_4-\gamma_4 w),\tag{3.123}$$

где $w=(w_1;w_2;w_3),\ f=(f_1;f_2;f_3)$;

$$V_2\gamma_2=\sum_{k=1}^{3}V_{kk,2}V^*_{kk,2}+\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}V_{kj,2}V^*_{kj,2};$$

$$V_2\psi_2=\sum_{k=1}^{3}V_{kk,2}\psi_{kk,2}+\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}V_{kj,2}\psi_{kj,2};$$

$$V_3\gamma_3=\sum_{k=1}^{3}V_{kk,3}V^*_{kk,3}+\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}V_{kj,3}V^*_{kj,3};$$

$$V_3\psi_3=\sum_{k=1}^{3}V_{kk,3}\psi_{kk,3}+\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}V_{kj,3}\psi_{kj,3};$$

$$V_4\gamma_4=\sum_{k=1}^{3}V_{kk,4}V^*_{kk,4}+\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}V_{kj,4}V^*_{kj,4};$$

$$V_4\psi_4=\sum_{k=1}^{3}V_{kk,4}\psi_{kk,4}+\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}V_{kj,4}\psi_{kj,4}.$$

И снова общие свойства решений полученной задачи те же, что подробно описаны в п. 3.1.4 для одной области.

В данной главе общая схема решения задач сопряжения применена для начально-краевых задач, порождающих изученные спектральные. В них производные по времени входят не только в уравнение, но и в краевые условия. Рассмотрены четыре вспомогательные задачи для одной области, получены теоремы об их сильной разрешимости. Рассмотрены также аналогичные задачи для двух и трёх примыкающих областей. Уравнения, которым удовлетворяют их решения, приводятся к таким же задачам Коши, как и в случае с одной областью. Поэтому для них справедливы те же теоремы о существовании сильного решения.

Заключение

В диссертации рассмотрены методы исследования краевых, спектральных и начально-краевых задач сопряжения на базе общего подхода, связанного с представлением решения в виде суммы слабых решений вспомогательных краевых задач, содержащих неоднородность лишь в одном месте.

Основные результаты состоят в следующем:

1. Выведен и обоснован новый подход к исследованию смешанных краевых, спектральных и начально-краевых задач сопряжения, основанный на использовании абстрактной формулы Грина либо соответствующей обобщённой формулы Грина (в данной работе — для оператора Лапласа). С помощью описанного подхода получены необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для различных конфигураций пристыкованных областей.

2. На базе этого же подхода исследованы смешанные спектральные задачи сопряжения для одной, двух и трёх примыкающих областей с параметрами, входящими в уравнение и краевые условия. Выведены свойства решений полученного операторного пучка в зависимости от того, какой параметр считается спектральным, а какой — фиксированным.

3. На основе этой же общей схемы исследования смешанных краевых задач сопряжения рассмотрены начально-краевые задачи сопряжения (порождающие спектральные задачи), содержащие производные по времени не только в уравнениях, но и в краевых условиях. Доказаны теоремы о сильной разрешимости каждой из этих задач.

Литература

[1] Агранович М. С. Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. // М.: МЦНМО. — 2013. — 379 с.

[2] Агранович М. С. Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в облстях с гладкой и негладкой границей. // Успехи математических наук. — 2002. — Т. 57, № 5. — С. 3–78.

[3] Агранович М. С., Амосов Г.А., Левитин М. Спектральные задачи для системы Ламе в гладких и негладких областях со спектральным параметром в краевом условии. // Российский журнал матем. физ. — 1999. — Т. 6, № 3. — С. 247–281.

[4] Агранович М. С., Менникен Р. Спектральные задачи для уравнения Гельмгольца со спектральным параметром в граничных условиях на негладкой поверхности. // Математич. сборник. — 1999. — Т. 30, № 1. — С. 29–68.

[5] Азизов Т.Я., Иохвидов И.С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. // Москва: Наука. — 1986. — 352 с.

[6] Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. // К.: Наукова думка. — 1992. — 592 с.

[7] Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Гидромеханика невесомости. // М.: Наука. — 1976. — 504 с.

[8] Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Асимптотика спектра дифференциальных уравнений. // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1974. — Т. 38, № 6. — С. 1362–1392.

[9] Войтицкий В.И. Абстрактная спектральная задача Стефана. // Ученые записки ТНУ им. В.И.Вернадского. Серия "Математика. Механика. Информатики и кибернетика". — 2006. — Т. 19(58), № 2. — С. 20–28.

[10] Войтицкий В.И. О спектральных задачах, порожденных задачей Стефана с условиями Гиббса-Томсона. // Нелинейные граничные задачи. — 2007. — Т. 17. — С. 31–49.

[11] Войтицкий В.И., Копачевский Н.Д., Старков П.А. Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи. // Совр. мат. Фундам. направл. — 2009. — Т. 34. — С. 5–44. Translated: Voytitsky V.I., Kopachevsky N.D., Starkov P.A. Multicomponent conjugation problems and auxiliary abstract boundary-value problems // Journal of Math. Sciences (Springer). — 2010. — Т. 170, № 2. - pp. 131–172.

[12] Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. // М.: Наука. — 1977. — 416 с.

[13] Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Обобщенные функции и уравнения в свертках. // М.: Наука. — 1994. — 336 с.

[14] Вулис И.Л., Соломяк М.З. Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических операторов второго порядка. // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1974. — Т. 38, № 6. — С. 1343–1371.

[15] Горбачук В.И. Диссипативные граничные задачи для эллиптических дифференциальных уравнений. // Функциональные и численные методы математической физики. Ин-т матем. и механики: сб. научн. трудов. — К.: Наукова думка. — 1998. — С. 60–63.

[16] Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. // Киев: Высш. шк. — 1989. — 347 с.

[17] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов. // М.: Наука. — 1965. — 448 с.

[18] Копачевский Н.Д. Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач. // Ученые записки ТНУ им. Вернадского. Серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика.". — 2007. — Т. 20, № 2. — С. 3–12.

[19] Копачевский Н.Д. Интегродифференциальные уравнения Вольтера в гильбертовоми пространстве: специальный курс лекций. // Симферополь: ФЛП «Бондаренко О.А.». — 2012. — 152 с.

[20] Копачевский Н.Д. Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и некоторых её приложениях. // Спектральные и эволюционные задачи (Симферополь). — 2011. — Т. 21, № 1. — С. 2-39.

[21] Копачевский Н.Д. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и её приложениях к задаче Стокса. // Таврический вестник информатики и математики (Симферополь). — 2004. — Т. 2. — С. 52-80.

[22] Копачевский Н.Д. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм // Современная математика. Фундамаментальные направления. — 2015. — Т. 57. — С. 71–107.

[23] Копачевский Н.Д. Спектральная теория операторных пучков: Специальный курс лекций. // Симферополь: ООО «ФОРМА» — 2009. — 128 с.

[24] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи. // Украинский матем. вестник. — 2004. — Т. 1, № 1. — С. 69–97.

[25] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. // М.: Наука. — 1989. — 416 с.

[26] Крейн С.Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде. // ДАН СССР. — 1964. — Т. 159, № 2. — С. 262–265.

[27] Крейн С.Г., Лаптев Г.И. К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде. // Функциональный анализ и его приложения. — 1968. — Т. 1, № 2. — С. 40–50.

[28] Лионс Ж.-Л., Madженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. // М.: Мир. — 1971.

[29] Маркус А.С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. // Кишинев: Штиинца. — 1986. — 260 с.

[30] Маркус А.С., Мацаев В.И. О базисности некотрой части собственных и присоединённых векторов самосопряжённого операторного пучка. // Матем. сборник. — 1987. — Т. 133(175), , № 3(7). — С. 293–313.

[31] Маркус А.С., Мацаев В.И. Базисность подсистемы собственных и присоединённых векторов самосопряжённого операторного пучка. // Функциональный анализ и его приложения. — 1987. — Т. 21, № 1. — С. 82–82.

[32] Михлин С.Г. Прямые методы в математической физике. // Москва: Гос. издательство техническо – теоретической литературы. — 1950. — 428 с.

[33] Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. // М.: Мир. — 1977. — 384 с.

[34] Понтрягин Л.С. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой. // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1944. — Т. 8, № 6. — С. 243-280.

[35] Розенблюм Г.В., Соломяк М.З., Шубин М.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. // Докл. НАН Украины. — 1996. — №3. — С. 15-20.

[36] Ройтберг Б.Я. Задачи трансмиссии в областях с негладкими границами. // Итоги науки и техники, Современные проблемы математики, Москва. — 1985. — Т. 8. — 428 с.

[37] Старков П.А. О базисности системы собственных элементов в задачах сопряжения. // Таврический вестник информатики и математики. — 2003. — Т. 1. — С. 118–131.

[38] Старков П.А. Операторный подход к задачам сопряжения. // Ученые записки ТНУ им. Вернадского. Серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". — 2002. — Т. 15(64), № 2. — С. 82-88.

[39] Старков П.А. Примеры многокомпонентных задач сопряжения. // Ученые записки ТНУ им. Вернадского. Серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". — 2005. — Т. 18(57), № 1. — С. 89-94.

[40] Agranovich M. S. Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary. // Russ. J. Math. Phys. — 2008. — T. 15, № 2. — P. 146–155.

[41] Agranovich M. S. Sobolev spaces, their generalizations, and elliptic problems in smooth and lipschitz domains. // Springer International Publishing. — Switzerland. — 2015. — 331 p.

[42] Agranovich M. S., Katsenelenbanm B. Z., Sivov A. N., Voitovich N. N. Generalized method of eigenoscillations in difraction theory. // Berlin: Wiley–VCN. — 1999. — 378 p.

[43] Aubin J.-P. Abstract boundary-value operators and their adjoint. // Rend. Semin. Math. Univ. Padova. — 1970. — T. 43.— P. 1–33.

[44] Babckii V.G., Kopachevskii N.D., Myshkis A.D., Slobozhanin L.A., Tyuptsov A.D. Low-Gravity Fluid Mechanics. // Springer-Verlag. — 1987. — 583 p.

[45] Gohberg I., Goldberg S. Basic Operator Theory. // Boston: Birkhaser. — 1980. — 448 p.

[46] Voytitsky V. I., Kopachevsky N. D. On the modified spectral Stefan problem and its abstract generalizations. // Birkhauser Verlag, Basel (Switzerland). — 2009. — T. 191.— P. 373–386.

[47] Kopachevsky N.D., Krein S.G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid-Birkhauser Verlag. // Basel–Boston–Berlin. — 2001. — 384 p.

[48] Kopachevsky N.D., Krein S.G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluid-Birkhauser Verlag. // Basel–Boston–Berlin. — 2003. — 444 p.

[49] McLean W. Strongly elliptic systems and boundary integral equations. // Cambridge University Press. — 2000. — 357 p.

[50] Rychkov V.S. On restrictions and extensions of the Besov and Triebel-Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains. // J. London Math. Soc. — 1999. — T. 60, № 1. — P. 237–257.

[51] Showalter R.E. Hilbert space methods for partial differential equations. // Election. J. Differ. Equ. — 1994. — 220 p.

Работы автора по теме диссертации

[52] Бастрюкова В.Е., Радомирская К.А. Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения. // Материалы Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике, 22-25 апреля 2014 г., Симферополь. — Симферополь: КНЦ НАНУ.— 2014. — С. 8-13.

[53] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения. // Материалы Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике, 22-25 апреля 2014 г., Симферополь. — Симферополь: КНЦ НАНУ. — 2014. — С. 30-36.

[54] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения. // Ученые записки Таврического национального университета имени В.И. Вернадского. Серия Физико-математические науки. — 2014. — Т. 27 (66), № 1. — С. 58-64.

[55] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения. // XXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2014). Тезисы докладов. — Симферополь: ТНУ. — 2014. — С.58.

[56] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Абстрактные смешанные краевые задачи сопряжения. // Международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - V"(Ростов-на-Дону). — 2015. — С. 211.

[57] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Абстрактные краевые и спектральные задачи сопряжения. // XXVI Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (Батилиман(Ласпи)). — 2015. — С. 52.

[58] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Об абстрактных краевых и спектральных задачах сопряжения. // Международная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-VI"в

городе Ростове-на-Дону. Тезисы докладов. Ростов н/д.: Изд. Центр ДГРТУ. — 2016. — С. 28.

[59] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. О некоторых абстрактных краевых задачах сопряжения и их приложениях. // XXIV Международная конференция "Математика. Экономика. Образование". Изд-во Фонд науки и образования. Ростов н/д. — 2016. — С. 89.

[60] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения и их приложения. // Современная математика. Фундаментальные направления, РУДН, М. — 2016. — Т. 61. — С. 67-102. Kopachevskii N. D., Radomirskaya K. A. Abstract mixed boundary-value and spectral conjugation problems and their applications. // Proceedings of the Crimean autumn mathematical school-symposium, CMFD, PFUR, M. — 2016. — 61. — P. 67–102.

[61] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Спектральные задачи, порождённые абстрактными задачами сопряжения. // XXVII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2016). Тезисы докладов. — Симферополь: КФУ. — 2016. — С. 45-46.

[62] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Смешанные краевые задачи сопряжения. // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — 2016. — №1 (30). — С. 89-108.

[63] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Спектральные и эволюционные задчи сопряжения. // Международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - VII"(Ростов-на-Дону). — 2017. — С. 108.

[64] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Спектральные задачи, порождённые абстрактными задачами сопряжения. // XXVIII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2017). Тезисы докладов. — Симферополь: КФУ. — 2017. — С. 38-39.

[65] Радомирская К.А. Спектральные и начально-краевые задачи сопряжения. // Современная математика. Фундаментальные направления, РУДН, М. — 2017. — Т. 63. — С. 316-339.

[66] Радомирская К.А. О некоторых спектральных и начально–краевых задачах сопряжения. // III научно–практическая конференция профессорско–преподавательского состава, аспирантов, студентов и молодых ученых "Дни науки КФУ". — Симферополь: КФУ. — 2017. — С. 549-550.

[67] Радомирская К.А. О некоторых начально-краевых задачах сопряжения.. // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — 2017. — № 2 (35). — С. 72-96.

[68] Радомирская К.А. Спектральные задачи сопряжения. // Динамические системы, КФУ, Симферополь. — 2017. — Т. 7(35), №1. — С. 63–79.