

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

КОРОТКИХ АНДРЕЙ СЕРГЕЕВИЧ

**Динамика концентраций, определяемая
нелинейным уравнением
«реакция-диффузия» и его обобщениями**

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Сапронов Ю.И.

В О Р О Н Е Ж — 2018

Оглавление

Введение	5
1 Метод конечномерной редукции для градиентных динамических систем в банаховых пространствах	15
1.1 Общие сведения о фредгольмовых уравнениях	16
1.2 Выпуклые функционалы и приближения Галеркина-Ритца к экстремалам	19
1.3 Задача бифуркационного анализа решений фредгольмовых уравнений с параметрами	21
1.4 Общая схема конечномерных редукций вариационных уравнений	22
1.5 Схема Ляпунова-Шмидта (локальная)	24
1.6 Локальное приближенное вычисление ключевой функции .	26
1.7 Редукция Ляпунова-Шмидта как обобщенная ритцевская аппроксимация	29
1.8 Нелокальная вариационная версия метода Ляпунова-Шмидта	30
1.9 Приближенное построение ключевой функции с использованием приближений Галёркина-Ритца	33
2 Алгоритм трассировки прямого спуска для функционала действия 1-мерного уравнения «реакция-диффузия»	37

2.1	Основная краевая задача	37
2.2	Вычисление ключевой функции вблизи критического состояния при малых закритических приращениях и вычисление бифурцирующих экстремалей	40
2.3	Построении «трассы кратчайшего спуска» к точке минимума	42
3	Алгоритм трассировки прямого спуска для функционала действия 2-мерного уравнения «реакция-диффузия»	45
3.1	Двумерное уравнение «реакция-диффузия» с кубической нелинейностью	45
3.2	Сужение функционала энергии на аффинное подпространство функций с фиксированным средним.	47
3.3	Прямое применение метода кратчайшего спуска	49
3.4	Нелокальная редукция Ляпунова-Шмидта на основе принципа сжатых отображений	51
3.5	Область редуцируемости стационарного уравнения	54
4	Обобщения уравнения «реакция-диффузия»	57
4.1	Уравнение Кана-Хилларда. Сведение стационарного уравнения Кана-Хилларда к стационарному уравнению «реакция-диффузия»	57
4.2	Вариационный подход к уравнению Кана-Хилларда	59
4.3	Возможность использования вариационного подхода к уравнению Свифта-Хоенберга	62
4.4	Локальные бифуркации стационарных решений уравнения Свифта-Хоенберга из точки 3-мерного вырождения.	64

4.5	О построении нелокальной ключевой функции уравнения Свифта-Хоенберга методом градиентного спуска.	67
4.6	Компьютерные вычисления	70
4.6.1	Программа вычислений (в кодах Maple) функций концентраций $a[i]$ для одномерного уравнения «реакция- диффузия» и графическое изображение стабилизации	70
4.6.2	Программа вычислений (в кодах Maple) нелокаль- ной ключевой функции для $2D$ -уравнения «реакция- диффузия»	71
4.6.3	Компьютерная графика	74
4.7	Заключение	76
	Литература	77

Введение

Тема диссертации находится на стыке двух направлений из списка "Основные научные направления ВГУ"(раздел "Наука" в портале ВГУ): 1. Аналитические, геометрические и численные методы исследования дифференциальных уравнений и 2. Теория функций и функциональный анализ.

Анализом бифуркационных эффектов начали заниматься еще в XIX веке и к настоящему времени накопилось большое количество методик по их прогнозированию и «полезному использованию», появились многочисленные публикации и монографии. Однако потребность в развитии новых методов бифуркационного анализа, соответствующих новым запросам практики и современным достижениям вычислительных технологий, сохраняется до сих пор.

Сопровождающее бифуркацию изменение параметров внешнего воздействия (температуры, электромагнитного поля, механического сжатия и пр.) на сложную физическую систему (раствор, смесь, сплав и т.п.) в некоторых случаях приводит к потере устойчивости исходной фазы и, как следствие (как отклик системы), к ее переходу в новое состояние (с новыми структурными свойствами). Такой переход сопровождается спинодальным расслоением (распадом), выраженным в изменении локальных концентраций компонентов, в образовании сначала зернистой структуры, а затем кластеров и доменов новой фазы. Структурную перестройку физической среды часто объясняют на основе нелинейных диффузионных уравнений Кана-Хилларда и Свифта-Хойенберга. Близким, но более простым уравнением, также способным моделировать структурные перестройки, является уравнение «реакция-диффузия» с кубической

нелинейностью.

Задача исследования посткритических структурных перестроек весьма актуальна и требует привлечения разнообразных методов современного математического анализа и новых вычислительных средств.

Бифуркационный анализ краевых и начально-краевых задач развивался в Воронежской математической школе, начиная с 50-х годов прошлого столетия в трудах М.А. Красносельского и его учеников — П.П. Забрейко, В.В. Стрыгина, Ю.Г. Борисовича, Ю.С. Колесова, Э.М. Мухамадиева, Н.А. Бобылева и др.

Условия зарождения и развития пространственно однородных периодических режимов, описываемых начально-краевой задачами для квазилинейных параболических уравнений, исследовались в ярославской школе динамических систем в трудах Ю.С. Колесова, А.С. Кащенко, С.Д. Глызина и др. Для описания условий зарождения периодических режимов и построения асимптотических представлений ветвей периодических решений были построены специальные процедуры нормализации уравнений, посредством которых определялись основные динамические характеристики изучаемых бифурцирующих колебательных режимов. Фактически были разработаны методы выявления локальных инвариантных интегральных подмногообразий и обобщенных нормальных форм, с помощью которых анализ исходного уравнения сводится к изучению конечномерных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида. Развитие этих конструкций опиралось на более ранние идеи, изложенные в известных трудах Хартмана, Митропольского, Лыкова, Брюно, Хэссарда, Казаринова, Вэна, Гукенхаймера, Холмса и др. С помощью новых методов были получены новые результаты о существовании, асимптотических представлениях и устой-

чивости колебательных режимов в случаях достаточно сложных вырождений.

В недавно опубликованной работе А.В. Казарникова и С.В. Ревинной [30] получены формулы асимптотических приближений к бифурцирующему из нуля периодическому решению обобщенной системы Релея с диффузией. Получение формулы за критической ветви автоколебаний проведено в ней на основе (невариационной) схемы Ляпунова-Шмидта, ранее предложенной В.И. Юдовичем.

Анализ многомодовых посткритических состояний включает, как известно, задачу вычисления значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов. В многочисленных трудах известных российских и зарубежных ученых созданы для решения этой задачи как общие, так и специальные методы. Важное место в арсенале таких средств занимает идея использования регуляризованных следов (В.А. Садовничий, В.В. Дубровский, С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин и др. [31]-[33]). В многочисленных работах А.Г. Баскакова и его учеников для аналогичных задач разработан метод подобных операторов [3],[4].

Многие из перечисленных математиков приводили примеры вычисления начальных значений собственных функций возмущенного оператора Лапласа. Все эти разработки имеют хорошую перспективу применения в многомодовом посткритическом анализе.

Значительные результаты в многомодовом посткритическом анализе были достигнуты школой Ю.И. Сапронова, усилиями которой построены теоретические и конструктивные схемы анализа многомодовых и нелокальных бифуркаций (на основе вариационной редуцирующей схемы Ляпунова-Шмидта). Были также рассмотрены важные примеры использования новых редуцирующих схем в теории упругости, теории фа-

зовых переходов и гидродинамике.

Известно, что один из базовых принципов исследования бифуркаций решений начально краевых задач для параболических и более общих уравнений основан на том, что уравнение

$$\frac{dv}{dt} - Av = f(t, v) \quad (0 < t \leq t_0) \quad v(0) = v_0,$$

где $f(t, x)$ при каждом $t \in [0, t_0]$ — нелинейный оператор, при условии, что оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу $T(t)$, приводится к интегральному уравнению

$$v(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, v(s))ds$$

(метод Дюамеля).

В настоящей диссертации рассмотрен более простой подход, основанный на том, что рассмотренные бесконечномерные динамические системы являются градиентными. Это обстоятельство позволяет использовать прямой подход к построению траекторий спуска в точки минимума функционала энергии. Однако для него требуется предварительное изучение бифуркации стационарных точек многопараметрического функционала энергии в условиях многомодового вырождения (в порождающей точке минимума). Основы локального анализа в такой ситуации были заложены в работах М.А. Красносельского, Н.А. Бобылева, Э.М. Мухамадиева [44], Ю.И. Сапронова, Б.М. Даринского, С.Л. Царева (локальные и нелокальные бифуркационные задачи) [19], [64], А.В. Гнездилова [18], Д.В. Костина [36], [37].

В диссертации рассмотрены начально краевые задачи для уравнения «реакция-диффузия» с кубической нелинейностью, уравнения Кана-Хилларда, нелинейного обобщения уравнения Фусса-Винклера-Циммермана и уравнения Свифта-Хойенберга — при обычных и обобщенных

краевых условиях Дирихле и Неймана. Модельное уравнение «реакция-диффузия» с кубической нелинейностью часто используется, например, при изучении формирования раскраса шерсти животных [55], а более сложные уравнения Кана-Хилларда и Свифта-Хойенберга — при изучении посткритических фазовых переходов [83], [71], [90], [49].

Тема диссертации направлена в первую очередь на развитие и применение новых методов бифуркационного анализа в актуальных нелинейных начально-краевых задачах, соответствующих новым запросам практики и современным достижениям вычислительных технологий. В частности, развитие методов анализа многомодовых и нелокальных бифуркаций.

В диссертации использованы методы функционального анализа, теории нелинейных фредгольмовых операторов, вариационного исчисления, теории особенностей гладких функций и фредгольмовых функционалов, теории приближенных вычислений.

Научная новизна работы связана со следующими решенными задачами.

1. В диссертационной работе изложена новая версия нелокальной редуцирующей схемы Ляпунова-Шмидта (применительно к рассмотренным бесконечномерным динамическим системам).
2. Разработан и апробирован новый алгоритм построения приближений к ключевым функциям.
3. Разработан и апробирован новый алгоритм построения приближений к ветвям нелокально бифурцирующих экстремалей.
4. Впервые построены траектории прямого спуска в точки минимума функционала энергии из случайно заданных начальных точек.
5. Впервые получена компьютерная графика, иллюстрирующая стабиль-

лизацию концентраций (в рамках предложенного алгоритма).

Основные результаты диссертационной работы в целом следующие:

- исследованы бесконечномерные динамические системы типа уравнения «реакция-диффузия» с кубической нелинейностью, уравнение Кана-Хилларда, обобщенное уравнение Фусса-Винклера-Циммермана и уравнению Свифта-Хойенберга (при обычных и обобщенных краевых условиях Дирихле и Неймана);
- предложена новая методика приближенного вычисления ветвей бифурцирующих решений при малых и конечных значениях закритического приращения параметра, созданная на основе вариационной версии процедуры Ляпунова-Шмидта и на использовании ритцевских аппроксимаций ключевой функции по заранее заданному набору собственных функций (мод бифуркаций) главной линейной части градиента функционала энергии;
- приведены оценки размера области функционального пространства состояний, на которой допускается нелокальная конечномерная редукция;
- в случае локальной редукции найдены главные части ключевых функций и вычислены асимптотические представления ветвей экстремалей по малому закритическому приращению параметра;
- дано описание программ соответствующих вычислений (в кодах *Maple*);
- представлены графические изображения линий уровня ключевой функции и функций концентрации вещества, полученные в результате вычисления.

Получены также следующие конкретные результаты.

1. Обоснование применимости методов «фредгольмова анализа» [11], [64] в бифуркационном анализе рассмотренных бесконечномерных динамических систем.

2. Анализ отдельных типовых многомодовых бифуркаций стационарных состояний в случаях рассмотренных моделей — «реакция-диффузия» с кубической нелинейностью, Кана-Хилларда, обобщенной модели Фусса-Винклера-Циммермана и модели Свифта-Хойенберга (при обычных и обобщенных краевых условиях Дирихле и Неймана).
3. Построение и анализ трасс спуска уравнения «реакция-диффузия», редуцированного в подпространство функций с нулевым средним.
4. Теоремы о главных частях ключевых функций.
5. Асимптотические представления ветвей бифурцирующих решений.
6. Создание и обоснование общего алгоритма вычисления нелокальных ветвей бифурцирующих экстремалей.
7. Создание и обоснование общего алгоритма построения трасс спуска в точки минимума функционалов энергии из случайно выбранных начальных точек.
8. Построение компьютерных графических иллюстраций.

Практическая и теоретическая значимость: работа носит теоретический характер. Представленные в ней научные результаты могут быть использованы в анализе зарождений и развитии посткритических состояний сложных систем.

Апробация результатов диссертации. Результаты диссертации докладывались на ВЗМШ-14, ВЗМШ-15, ВЗМШ-16, ВЗМШ-17, а также на семинаре по математическому моделированию (руководитель - проф. В.А. Костин), семинаре проф. Б.М. Даринского по фазовым переходам в кристаллах и семинаре по нелинейному стохастическому анализу (руководитель - проф. Ю.Е. Гликлик).

Публикации.

Автором опубликовано 9 статей по теме диссертации, из них 3 публикации в журналах, рекомендованных ВАК РФ: [93], [97], [101]. В совместных публикациях автору принадлежат результаты, относящиеся к нелокальным бифуркациям решений (в начально-краевых задачах).

В **первой главе** изложены основы анализа стационарных фредгольмовых уравнений и вариационных полугрупп, порожденных нелинейными начально-краевыми задачами. Дано краткое описание используемых разделов теории фредгольмовых уравнений и представлен краткий обзор примыкающих результатов других авторов. Описаны требования, обеспечивающие глобальную редуцируемость функционалов действия по схеме Ляпунова–Шмидта, представлена приближенная формула глобально заданной ключевой функции, служащая основой для создания алгоритмов вычисления нелинейных ритцевских аппроксимаций функционалов действия.

Ключевая функция Ляпунова-Шмидта

$$W(\xi) := \inf_{x: \langle x, e_j \rangle = \xi_j \quad \forall j} V(x), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top,$$

определена и является гладкой, если выполнено условие положительности (монотонности)

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle > 0 \quad \forall (x, h) \in E \times (E \setminus 0), \quad h \perp e_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Ритцевской аппроксимацией функционала V , заданного на банаховом пространстве E , называется функция

$$W_R(\xi) = V\left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i\right) \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^\top.$$

Здесь $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — некоторый линейно независимый набор функций из E (базис аппроксимации).

Экстремалам $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)$ функции W соответствуют точки $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i e_i$, называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V . Ключевую функцию можно трактовать как разновидность нелинейной ритцевской аппроксимации функционала V .

Во **второй главе** диссертации содержится алгоритм приближенного решения краевой задачи для уравнения «реакция-диффузия». Дано обоснование возможности применения используемых в алгоритме математических утверждений и конструкций «фредгольмова анализа» [11],[19].

Показано, как во многих случаях имеется возможность использования прямого приближенного вычисления «связывающего» отображения Φ — методом кратчайшего градиентного спуска [48],[50],[51]. Алгоритм (его существенная часть) заключен в следующих соотношениях:

$$a_0 = u := K + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n, \quad K - \text{const},$$

$$a_1 = a_0 + s_0 \nabla_0, \quad \nabla_0 := \text{grad } V(a_0)$$

s_0 выбирается с целью минимизации на прямой $a = a_0 + s \nabla_0$ значения функционала V :

$$a_{k+1} = a_k + s_k \nabla_k, \quad \nabla_k := \text{grad } V(a_k) \quad (0.1)$$

s_k выбирается с целью минимизации на прямой $a = a_k + s \nabla_k$ значения V .

В случае гладкой зависимости функционала от параметра ξ , принадлежащего компактной области, нетрудно показать, что за счет «хорошего» выбора направления сдвига и длины шага (зависящих от k и ξ) можно добиться равномерной C^r -сходимости по параметру к семейству минимумов. Соответствующие оценки для норм невязок градиента и сниженных значений функционала легко переносятся на параметрический случай [50], [51].

Гладкую равномерную сходимость ньютоновских итераций для уравнений с параметром установил А.А. Лемешко [51].

В **третьей главе** дана апробация развитой во второй главе теории в случае $n = 2$.

В **четвертой главе** рассмотрены обобщения уравнения «реакция-диффузия». Рассмотрены уравнения Кана-Хилларда и Свифта-Хоенеберга. Приведены результаты вычислений, включая результат полиномиальной аппроксимации ключевой функции, графические изображения нелокальных ключевых функций и решений исходных краевых задач.

Глава 1

Метод конечномерной редукции для градиентных динамических систем в банаховых пространствах

В диссертации использован подход, связанный с тем, что рассмотренные начально-краевые задачи являются градиентными, то есть допускают запись (при соответствующем подборе операторов и функционального пространства состояний) в виде уравнения

$$\dot{w} = f_\lambda(w) = 0, \quad f_\lambda(w) = \text{grad } V_\lambda(w), \quad w \in E, \quad f_\lambda(w) \in F, \quad E \subset F$$

где E, F — банаховы пространства, $V_\lambda(w)$ — гладкий функционал действия (функционал энергии, потенциал и т.д.). Более точные определения и технические условия приведены ниже.

Это обстоятельство позволяет использовать прямой подход к построению траекторий спуска в точки минимума функционала энергии. Однако такой подход требует предварительного изучения бифуркации стационарных точек многопараметрического функционала энергии в условиях многомодового вырождения в порождающей точке минимума. При использовании прямого подхода в конкретных моделях непременно воз-

никает вопрос обоснования возможности применимости «фредгольмова анализа».

1.1 Общие сведения о фредгольмовых уравнениях

Все рассмотренные в диссертационной работе стационарные краевые задачи допускают трактовку в виде операторного уравнения

$$f(x) = b, \quad x \in E, \quad b \in F,$$

в котором f — гладкое фредгольмово отображение банахова пространства E в банахово пространство F . Известно, что решение такого уравнения можно осуществить переходом (редукцией) (см. [11], [19]) к конечномерному уравнению

$$\theta(\xi) = \beta, \quad \xi \in M, \quad \beta \in N,$$

где M, N — конечномерные многообразия.

В данной главе даны основные определения и теоремы теории фредгольмовых уравнений, заимствованные из [11], [19].

Определение 1. Пусть E, F — банаховы пространства и $A : E \rightarrow F$ — линейный непрерывный оператор. Оператор A называется фредгольмовым, если

$$\dim(\text{Ker}A) < \infty, \quad \dim(\text{Coker}A)(:= \dim(F/\text{Im}A)) < \infty.$$

Число $\dim(\text{Ker}A) - \dim(\text{Coker}A)$ называется (аналитическим) индексом (в дальнейшем просто индексом) фредгольмова оператора A и обозначается $\text{ind} A$.

Из определения следует, что образ $A(E)$ замкнут в F , и A изоморфно отображает любое подпространство, дополняющее $\text{Ker } A$ (в E), на $\text{Im } A$. Если $L_1 : E_1 \rightarrow E_2$, $L_2 : E_2 \rightarrow E_3$ — фредгольмовы операторы, то и оператор L_2L_1 фредгольмов. При этом

$$\text{ind}(L_2L_1) = \text{ind}(L_1) + \text{ind}(L_2)$$

.

Определение 2. *Нелинейное отображение $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, где \mathcal{U} — открытое подмножество в E , называется фредгольмовым, если его производная Фреше $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ является фредгольмовым оператором в каждой точке $x \in \mathcal{U}$.*

Аналитическим индексом нелинейного фредгольмова отображения f , определенного на связной области, называется индекс линейного оператора $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$:

$$\text{ind } f := \text{ind} \frac{\partial f}{\partial x}(x)$$

(если область связная, то индекс $\frac{\partial f}{\partial x}(x)$ не зависит от x).

В дальнейшем будем считать, что $f : \mathcal{U} \rightarrow F$, где \mathcal{U} — область банахова пространства E (E, F — пара банаховых пространств), является нелинейным фредгольмовым отображением нулевого индекса, и наряду с этим выполнены стандартные условия:

а) $E \subset F \subset H$ — тройка непрерывно вложенных пространств (H — гильбертово пространство).

б) E плотно в H (это означает, что любой элемент из H может быть представлен как предел последовательности элементов из E). Из плотности E в H вытекает плотность F в H .

Если отображение отображение $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ фредгольмово, то уравнение

$$f(x) = 0 \quad , \quad x \in \mathcal{U}, \quad (1.1)$$

называется нелинейным фредгольмовым уравнением.

Определение 3. Если для гладкого отображения $f : \mathcal{U} \subset E \rightarrow F$ существует такой гладкий функционал $V : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, что $f = \text{grad}_H V$ или, что эквивалентно,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = \langle f(x), h \rangle_H \quad , \quad \forall x \in \mathcal{U} \quad , \quad h \in E,$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве H , то отображение f называется потенциальным. Функционал V называется потенциалом отображения f . Уравнение (1.1) называется потенциальным.

Если V является потенциалом f , то уравнение (1.1) можно переписать в виде

$$\text{grad}_H V(x) = 0, \quad x \in \mathcal{U}. \quad (1.2)$$

Оно называется уравнением Эйлера экстремалей (критических точек) функционала V .

Пусть $V(x)$ — гладкий функционал, заданный на банаховом пространстве E . Точка $a \in E$ называется критической для функционала V , если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(a)h = \langle f(a), h \rangle_H = 0, \quad \forall h \in E \setminus \{0\}.$$

Плотность E в H обеспечивает равносильность последнего равенства уравнению (1.2).

1.2 Выпуклые функционалы и приближения Галеркина-Ритца к экстремалам

В соответствии с известной теоремой Эберлейна-Шмульяна [29], непрерывный строго выпуклый функционал V на гильбертовом пространстве H , рассмотренный на ограниченном замкнутом выпуклом подмножестве $K \subset H$, имеет точку минимума (автоматически единственную). Очевидно, что вместо условия ограниченности K можно потребовать выполнение условия коэрцитивности функционала:

$$V(x) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty,$$

также влекущее существование единственной точки минимума.

В конкретных прикладных задачах поиск приближений к точке минимума часто осуществляется на основе методов Галеркина и Ритца [45], [56], [54], [15].

С точки зрения функционального анализа поиск решений многих вариационных краевых задач, включая и рассматриваемые в данной диссертации, сводится к построению точек минимума выпуклого функционала на гильбертовом пространстве H , заданного в виде

$$V(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle + \omega(x), \quad (1.3)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве H_0 , в которое H вложено непрерывно, компактно и всюду плотно. При этом A — положительный симметричный (в $\langle \cdot, \cdot \rangle$) изоморфизм из H на H_0 , а $\omega(x)$ — гладкий функционал, градиент которого $g(x) := \text{grad} \omega(x)$ (в $\langle \cdot, \cdot \rangle$) является вполне непрерывным отображением из H в H_0 . Если предположить, что функционал (1.3) гладко продолжается на энергетическое

пространство H_1 , полученное замыканием H в норме (см. [56])

$$|x|_1 := \sqrt{\langle Ax, x \rangle},$$

то функционал (1.3) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\langle x, x \rangle_1 + \tilde{\omega}(x), \quad \langle x, y \rangle_1 := \langle Ax, y \rangle, \quad (1.4)$$

где $\tilde{\omega}$ — гладкое продолжение на H_1 функционала ω . При этом будем иметь следующее представление для градиента в H_1 :

$$\text{grad}_{H_1} V(x) = x + \tilde{g}(x), \quad \tilde{g}(x) = A^{-1}g(x). \quad (1.5)$$

Таким образом, градиент функционала, продолженного в энергетическое пространство, является отображением в форме Лере-Шаудера. Если задать последовательность конечномерных ортопроекторов $\{P_n\}$ в H_1 , сильно сходящуюся к I (тождественному отображению), то, очевидно, последовательность отображений $x + P_n\tilde{g}(x)$ будет равномерно сходиться к $x + \tilde{g}(x)$ на любой ограниченной области в H_1 , что влечет сходимость решений уравнений

$$x + P_n\tilde{g}(x) = 0, \quad x \in H_1,$$

к точке минимума функционала V . Так как любое решение последнего уравнения принадлежит $E_n := \text{Im } P_n$, то поиск его решений сводится к поиску решений галеркинской аппроксимации этого уравнения:

$$u + P_n\tilde{g}(u) = 0, \quad u \in E_n. \quad (1.6)$$

Левая часть уравнения (1.6) является градиентом функции

$$W_R(u) := V(u), \quad u \in E_n$$

и называется *ритцевской аппроксимацией исходного функционала*.

Приближенное вычисление точек минимума функционала V можно осуществлять, комбинируя переход к ритцевской аппроксимации W_R с методом кратчайшего спуска для W_R .

1.3 Задача бифуркационного анализа решений фредгольмовых уравнений с параметрами

Важным типом уравнений, часто встречающимся в задачах математической физики, является фредгольмово уравнение с параметром, т.е. уравнение в следующем виде:

$$f(x, \delta) = b, \quad x \in E, \quad b \in F, \quad \delta \in \mathbb{R}^k.$$

Пусть f включено в $f(x, \delta) : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow F$, $f(x, 0) = f(x)$, — семейство гладких фредгольмовых отображений, гладко зависящее от параметра δ . Если отображение $f(\cdot, \delta)$ потенциально с потенциалом $V(\cdot, \delta)$, то потенциал также гладко зависит от данного параметра. В такой ситуации естественным образом возникает понятие бифуркации экстремалей и, соответственно, бифуркационного значения параметра.

Определение 4. Пусть $\delta = \delta_0$ — значение параметра δ , при котором a является единственной критической точкой функционала $V(x, \delta)$. Тогда значение $\delta = \delta_0$ называется бифуркационным, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1, \|\delta_1 - \delta_0\| < \varepsilon$ при котором V имеет не менее двух критических точек a_1, a_2 таких что $\|a_1 - a\| < \varepsilon$ и $\|a_2 - a\| < \varepsilon$.

В процессе перехода δ через критическое значение δ_0 говорят о рождении критических точек из точки a . Очень часто полагают $a = 0$ и рассматривают рождение критических точек из нуля.

Определение 5. Пусть задана фредгольмова C^r -развертка

$$f(\cdot, \delta) : E \rightarrow F, \quad \delta \in \Delta^m \subset \mathbb{R}^m.$$

Пусть Ω — открытое подмножество в E . Дискриминантным множеством $\Sigma(\Omega)$ уравнения

$$f(x, \delta) = b \quad x \in \Omega \tag{1.7}$$

называется совокупность тех значений $\delta = \bar{\delta}$, для которых данное уравнение имеет в Ω вырожденное решение \bar{x} :

$$f(\bar{x}, \bar{\delta}) = b \quad \text{codim} \left(\text{Im} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{\delta}) \right) > 0.$$

Определение 6. Пусть $\tilde{\Sigma}(\Omega)_{\bar{\delta}}$ — росток множества $\Sigma(\Omega)$ в точке $\bar{\delta}$. Тогда пересечение

$$\Sigma(\bar{x}, \bar{\delta}) = \bigcap_{\Omega: \bar{x} \in \Omega} \tilde{\Sigma}(\Omega)_{\bar{\delta}}$$

называется дискриминантным множеством уравнения (1.7) в точке $(\bar{x}, \bar{\delta})$. Если уравнение потенциально с потенциалом $f(x, \delta)$, то дискриминантное множество называется *каустикой*.

1.4 Общая схема конечномерных редукций вариационных уравнений

Определение 7. (см. [19]) Пусть V — гладкий функционал, заданный на области Ω банахова пространства E . Конечномерной редукцией V на открытом подмножестве $\Psi \subset \Omega$ называется тройка $\{p, \varphi, N\}$, удовлетворяющая следующим условиям:

(1) Гладкое отображение $p : \Psi \rightarrow N$ (N — конечномерное многообразие) является субмерсией (то есть каждый дифференциал касательных пространств $\frac{\partial p}{\partial x}(a) : T_a(\Psi) \rightarrow T_\xi(N)$ является отображением «на»).

(2) $\forall \xi \in \mathcal{U} = p(\Psi)$ функционал $V_\xi = V|_{p^{-1}(\xi)}$ имеет единственную, причем невырожденную, критическую точку $\varphi(\xi)$ (что означает невырожденность второго дифференциала

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(V|_{p^{-1}(\xi)})(\varphi(\xi))(h, h),$$

$h \in T_{\varphi(\xi)}(p^{-1}(\xi))$, как квадратичной формы на линейном пространстве).

(3) Отображение $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \Psi$ является гладким.

Отображение p называется редуцирующей субмерсией. Размерностью редукции называется размерность образа редуцирующей субмерсии.

Определение 8. (см. [19]) Функция $W : \mathcal{U} \rightarrow R$, определенная равенством

$$W(\xi) = V(\varphi(\xi)), \quad \xi \in \mathcal{U}, \quad (1.8)$$

называется ключевой, а отображение φ — маргинальным.

Определение 9. ([19]) Если $\forall \xi \in N$ и точка $\varphi(\xi)$ является точкой минимума функционала $V_{p^{-1}(\xi)}$, то редукция называется эллиптической.

В случае эллиптической редукции ключевая функция определяется равенством

$$W(\xi) = \inf_{x:p(x)=\xi} V(x) = V(\varphi(\xi)). \quad (1.9)$$

Имеет место следующее фундаментальное утверждение [64], [19]:

Теорема 1. Пусть $\{p, \varphi, N\}$ — эллиптическая конечномерная редукция гладкого функционала V на области Ω гладкого банахова многообразия M . Тогда маргинальное отображение φ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами критических точек ключевой функции W и функционала V . При этом соответствующие друг другу критические точки одновременно являются либо вырожденными, либо нет. В случае невырожденности соответствующие критические точки имеют одинаковые значения индексов Морса.

Все топологические и аналитические понятия, так или иначе характеризующие тип стационарной точки (кратность, локальное кольцо особенности, версальная деформация, бифуркационная диаграмма и т.п. [1], [62], [19]), для функционалов можно вводить через ключевые функции.

1.5 Схема Ляпунова-Шмидта (локальная)

Вполне естественно, что формулирование условий единственности и невырожденности критической точки для $V_\xi = V|_{p^{-1}(\xi)}$ оказывается проще осуществить локально — в некоторой окрестности критической точки. Сделаем это на примере одной из наиболее известных схем конечномерной редукции — Ляпунова-Шмидта.

Пусть E, F — вещественные банаховы пространства, $f : E \rightarrow F$ — нелинейное фредгольмово отображение нулевого индекса. Пусть, далее, зафиксированы прямые разложения

$$E = E^n \dot{+} E^{\infty-n}, \quad F = F^n \dot{+} F^{\infty-n},$$

где E^n и F^n — n -мерные подпространства в E и F соответственно, а $E^{\infty-n}$ и $F^{\infty-n}$ — произвольные прямые дополнения к E^n и F^n в E и F .

Если e_1, e_2, \dots, e_n — базис E^n , то для каждого вектора $x \in E$ имеет место разложение

$$x = u + v, \quad u = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \quad v \in E^{\infty-n}.$$

Если g_1, g_2, \dots, g_n — базис F^n , то

$$f(x, \delta) = f^n(x, \delta) + f^{\infty-n}(x, \delta),$$

$$f^n(x, \delta) = \sum_{i=1}^n v_i(x, \delta) g_i \quad f^{\infty-n}(x, \delta) \in F^{\infty-n}.$$

Предположив, что производная

$$\frac{\partial f^{\infty-n}}{\partial v}(a, \delta) : E^{\infty-n} \rightarrow F^{\infty-n}$$

является изоморфизмом в некоторой точке $a \in E$, $f(a, \delta) = 0$, получим, в силу теоремы о неявной функции, зависимость $v = \Phi(u, \delta)$ (для u из достаточно малой окрестности $\mathcal{O} \subset E^n$ точки \bar{u}), такую, что $\Phi(\bar{u}, \delta) = \bar{v}$ (\bar{u}, \bar{v} — компоненты a) и

$$f^{\infty-n}(u + \Phi(u, \delta), \delta) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{O}$$

(отображение $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow E^{\infty-n}$ при этом является гладким). Для отыскания решений уравнения $f(x, \delta) = 0$ в окрестности точки $x = a$ достаточно найти решения уравнения

$$f^n(u + \Phi(u, \delta), \delta) = 0. \tag{1.10}$$

Определение 10. *Отображение $\tau : E^n \rightarrow F^n$, где*

$$\tau(u, \delta) = f^n(u + \Phi(u, \delta), \delta),$$

называется ключевым.

Очевидно, что уравнение (1.7) эквивалентно уравнению

$$\theta(\xi, \delta) = 0. \quad (1.11)$$

где θ — координатная форма отображения τ .

1.6 Локальное приближенное вычисление ключевой функции

Опишем одну практическую схему локальной редукции [64], [19].

Пусть уравнение $f(x, \lambda) = 0$ потенциально с потенциалом $V(x, \lambda) = 0$, $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Пусть $\mathcal{O}(0)$ — некоторая открытая окрестность нуля в E , $\mathcal{U}(0)$ — окрестность нуля в \mathbb{R}^m и $f(0, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda$. Пусть, наконец, выполнены следующие два условия: 1) на $\mathcal{U}(0)$ определен набор гладких нормированных в \mathcal{H} функций $\{e_j(\lambda)\}_{j=1}^n$, $\lambda \in \mathcal{U}(0)$, из E (ведущих мод бифуркации) таких, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda)e_j(\lambda) = \alpha_j(\lambda)e_j(\lambda),$$

где $\{\alpha_j(\lambda)\}_{j=1}^n$ — гладкие спектральные функции; 2) 0 — невырожденная критическая точка сужения $V(x, 0)|_{L_0}$, где $L_\lambda := E \cap N_\lambda^\perp$, N_λ^\perp — ортогональное дополнение в \mathcal{H} к $N_\lambda = \text{Span}\{e_1(\lambda), \dots, e_n(\lambda)\}$.

Для любого $x \in \mathcal{O}(0)$ положим $\xi_j(\lambda) = \langle x, e_j(\lambda) \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в \mathcal{H} . Тогда

$$x = \sum_{j=1}^n \xi_j(\lambda)e_j(\lambda) + v(\lambda), \quad v(\lambda) \perp e_j(\lambda) \quad \forall j.$$

Аналогично

$$f(x, \lambda) = \sum_{j=1}^n f_j(x, \lambda)e_j(\lambda) + f_*(x, \lambda), \quad f_*(x, \lambda) \perp e_j(\lambda) \quad \forall j.$$

Пусть $L_\lambda^* = F \cap N_\lambda^\perp$. Тогда из условия 2) следует, что $f_*(\cdot, 0) : L_0 \rightarrow L_0^*$ — локальный диффеоморфизм (в некоторой окрестности $\mathcal{O}(0)$ точки $0 \in L_0$). Следовательно, найдется, по теореме о неявной функции, такая гладкая функция $u = \Phi(\xi, \lambda)$, $(\xi, \lambda) \in \mathcal{O}^n(0) \times \mathcal{U}(0)$, $\Phi(\xi, \lambda) \in L_\lambda$, где $\mathcal{O}^n(0)$ — некоторая окрестность нуля в \mathbb{R}^n , что

$$f_* \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right) = 0 \quad \forall (\xi, \lambda) \in \mathcal{O}^n(0) \times \mathcal{U}(0).$$

Функция $W(\xi, \lambda) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j(\lambda) + \Phi(\xi, \lambda), \lambda \right)$ является ключевой для функционала $V(x, \lambda)$, а ее градиент является ключевым отображением для уравнения $f(x, \lambda) = 0$.

Для исследования ключевой функции W часто достаточно ограничиться несколькими членами разложения W в ряд Тейлора. В локальных вариационных задачах это производится при помощи специальным образом подобранной ритцевской аппроксимации функционала $V(x)$, заданной выражением

$$W_R(\xi) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top,$$

где $\{e_1, \dots, e_n\}$ — некоторый линейно независимый набор функций из E (базис аппроксимации).

Обоснование того, что отбрасывание «тейлоровского хвоста» не изменяет топологию бифуркационных диаграмм и структуру *bif*-раскладов, проводится на основе теорем о конечной определенности ростков отображений и их деформаций.

Рассмотрим тейлоровское разложение потенциала V до четвертого порядка:

$$V(x, \lambda) = const + \frac{1}{2} \langle A(\lambda)x, x \rangle_{\mathcal{H}} + V_\lambda^{(3)}(x) + V_\lambda^{(4)}(x) + o(\|x\|^4),$$

где $A(\lambda) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, \lambda)$, $V_\lambda^{(3)}$ и $V_\lambda^{(4)}$ — однородные формы третьего и четвертого порядков на E . Пусть на \mathcal{H} задан набор инволюций $\{J_k\}_{k=1}^n$ таких, что

- 1) $J_k(E) \subset E$, $J_k(F) \subset F$, $k = 1, \dots, n$,
- 2) $J_k(e_k(\lambda)) = -e_k(\lambda)$, $J_k(e_j(\lambda)) = e_j(\lambda)$, $k \neq j$.

Пусть потенциал $V(\cdot, \lambda)$ инвариантен относительно J_k :

$$V(J_k(x), \lambda) = V(x, \lambda), \quad k = 1, \dots, n, \quad \forall x, \lambda. \quad (1.12)$$

Тогда ключевая функция $W(\xi, \lambda)$ четна по каждой переменной ξ_j и, следовательно, её тейлоровское разложение имеет следующий вид:

$$W(\xi, \lambda) = const + W_\lambda^{(2)}(\xi) + W_\lambda^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5),$$

где $W_\lambda^{(2)}$ и $W_\lambda^{(4)}$ — формы второго и четвертого порядков, четные по ξ_j .

Из (1.12) следует, что

$$W(\xi, \lambda) = const + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j(\lambda) \xi_j^2 + W_0^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5) + O(|\lambda|)o(|\xi|^3).$$

Так как $\alpha_j(0) = 0$, то

$$W(\xi, 0) = const + W_0^{(4)}(\xi) + o(|\xi|^5), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

($W_0^{(4)}(\xi)$ — форма четвертого порядка). Легко проверить, что

$$W_0^{(4)}(\xi) = \frac{1}{2} \langle AB(u), B(u) \rangle_{\mathcal{H}} + 3\mathcal{V}_0^{(3)}(u, u, B(u)) + V_0^{(4)}(u),$$

где $u = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$, $e_j = e_j(0)$, $A = A(0)$, $\mathcal{V}_0^{(3)}$ — симметричная 3-линейная форма, отвечающая $V_0^{(3)}$ ($V_0^{(3)}(u) = \mathcal{V}_0^{(3)}(u, u, u)$), B — квадратичное отображение $N_0 \rightarrow L_0^*$, полученное выделением квадратичной части отображения $u \rightarrow \Phi(\xi, 0)$. Нетрудно заметить, что

$$B(u) = -A_*^{-1} grad_{\mathcal{H}} V_0^{(3)}(u)$$

$(A_* = A|_{L_0})$. Для четного потенциала V имеем $V_0^{(3)} = 0$, $B(u) = 0$, и, следовательно, $W_0^{(4)}(\xi) = V_0^{(4)}(u)$. Таким образом, для W получаем представление

$$\text{const} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j(\lambda) \xi_j^2 + W_R^{(4)}(\xi, 0) + O(|\lambda|)O(|\xi|^4) + o(|\xi|^5),$$

где $W_R^{(4)}(\xi, 0) = V_0^{(4)}(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j)$. Пусть

$$V_0^{(4)}(x) = \mathcal{V}_0^{(4)}(x, x, x, x)$$

($\mathcal{V}_0^{(4)}(x, y, z, t)$ — симметричная 4-линейная форма). Тогда, с учетом симметрии, получаем соотношение

$$W_R^{(4)}(\xi) = \sum_{k=1}^n V_0^{(4)}(e_k) \xi_k^4 + 6 \sum_{i < j}^n \mathcal{V}_0^{(4)}(e_i, e_i, e_j, e_j) \xi_i^2 \xi_j^2.$$

1.7 Редукция Ляпунова–Шмидта как обобщенная ритцевская аппроксимация

Определение 11. ([19]) *Ритцевской аппроксимацией [64] функционала V , заданного на банаховом пространстве E , называется функция*

$$W_R(\xi) = V\left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i\right) \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^\top,$$

где $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ — некоторый линейно независимый набор функций из E (базис аппроксимации).

Экстремалам $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n)$ функции W соответствуют точки $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \bar{\xi}_i e_i$, называемые ритцевскими аппроксимациями экстремалей V .

Точность ритцевских аппроксимаций повышается лишь за счет увеличения количества базисных функций. Если, обобщая, рассмотреть «нели-

нейные» аппроксимации вида

$$W(\xi) = V \left(\sum_{j=1}^n \xi_j e_j + \Phi(\xi) \right),$$

где Φ — гладкое отображение из $N := \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ в N^\perp (ортогональное дополнение к N в метрике пространства функций с суммируемым квадратом), то во многих прикладных задачах можно достигнуть любой аппроксимативной точности при априори зафиксированном наборе базисных функций и, следовательно, априори ограниченном количестве степеней свободы аппроксимирующей системы. Таким образом, схему Ляпунова – Шмидта можно рассматривать как разновидность нелинейной ритцевской аппроксимации.

1.8 Нелокальная вариационная версия метода Ляпунова-Шмидта

Среди теоретических проблем, связанных с применением и развитием метода конечномерных редукций, выделяется вопрос нелокальной продолжимости ключевых параметров. Он включает задачу нелокального существования ключевых параметров и задачу точного или приближенного представления маргинальных отображений и ключевых функций.

Пусть $f : E \rightarrow F$ — гладкое фредгольмово нулевого индекса отображение банаховых пространств. Пусть f потенциально с потенциалом V (гладким функционалом на E).

Если выполнено условие положительности (монотонности)

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle > 0 \quad \forall (x, h) \in E \times (E \setminus 0), \quad (1.13)$$

то, как легко проверить, уравнение $f(x) = 0$ имеет не более одного решения ([11], [24]). Выше показывалось, что решение этого уравнения является и точкой минимума V на E .

В случае выполнения условия собственности f (компактность прообраза произвольного компакта) уравнение $f(x) = 0$ однозначно разрешимо (следствие теоремы Банаха – Мазура – Каччиополи [11]). Его решение является точкой глобального минимума V .

Если соотношение (1.13) заменить более слабым условием

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(x)h, h \right\rangle > 0 \quad \forall (x, h) \in E \times (\tilde{E} \setminus 0), \quad (1.14)$$

где $\tilde{E} = E \cap N^\perp$, $N = \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$, N^\perp — ортогональное дополнение к N в H , e_1, \dots, e_n — некоторая ортонормированная в H система векторов в E , то можно определить ключевую функцию Ляпунова – Шмидта

$$W(\xi) := \inf_{x: \langle x, e_j \rangle = \xi_j \quad \forall j} V(x), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top, \quad (1.15)$$

«отвечающую» за поведение функционала V . Условие собственности f можно ослабить, заменив его условием собственности при каждом ξ «послойного» отображения

$$\tilde{f}_\xi : \tilde{E} \longrightarrow \tilde{F}, \quad (1.16)$$

где

$$\tilde{F} = F \cap N^\perp, \quad \tilde{f}_\xi(v) := P_{\tilde{F}}(f(l(\xi) + v)) = f(l(\xi) + v) - \sum_{j=1}^n \langle e_j, f(l(\xi) + v) \rangle e_j, \quad (1.17)$$

$$l(\xi) = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j.$$

При выполнении условий (1.14), (1.16) уравнение

$$\tilde{f}_\xi(v) = q, \quad (1.18)$$

однозначно разрешимо при всех ξ, q , и его решение $v = \Phi(\xi)$ гладко зависит от ξ — по теореме о неявной функции. Левую часть (1.15) можно представить в виде

$$W(\xi) \equiv V(l(\xi) + \Phi(\xi)). \quad (1.19)$$

Для ключевого уравнения

$$\theta(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (1.20)$$

в котором

$$\theta(\xi) = (\theta_1(\xi), \dots, \theta_n(\xi))^\top, \quad \theta_j(\xi) = \langle f(l(\xi) + \Phi(\xi)), e_j \rangle,$$

имеем

$$\theta(\xi) = \text{grad } W(\xi).$$

Впервые условие собственности в редуцирующей схеме было использовано в работе [65], в которой сформулировано следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть отображение (1.16) является собственным и пусть при этом выполняется условие положительности (1.14). Тогда маргинальное отображение $\varphi : \xi \mapsto l(\xi) + \Phi(\xi)$, где $\Phi(\xi)$ определено уравнением (1.18), устанавливает взаимно однозначное соответствие между критическими точками ключевой функции (1.15) и заданного функционала V . При этом локальные кольца особенностей¹ соответствующих функций в точках ξ и $\varphi(\xi)$ изоморфны, а в соответствующих друг другу однократных критических точках имеет место совпадение индексов Морса².

¹Локальное кольцо особенности гладкого функционала V в критической точке a определяется как фактор кольца ростков гладких функционалов в точке a по идеалу, порожденному функцио-налами вида $\alpha(f(x))$, где α — произвольный гладкий функционал, заданный на произвольной окрестности нуля в пространстве F ($f = \text{grad}_H V$).

²Индекс Морса функционала V в бесконечномерном случае определяется как максимальная размерность подпространства, на котором отрицательно определен его второй дифференциал.

Условие собственности отображений (1.16) можно заменить на любое другое, гарантирующее существование условных экстремалей в слоях $p^{-1}(\xi)$:

$$p(x) = (p_1(x), \dots, p_n(x))^T.$$

Например, если пространство E рефлексивно, то достаточно потребовать коэрцитивность V (наряду с выпуклостью) вдоль каждого слоя. В этих же целях можно применять и известное условие (C) Пале – Смейла [26], [34].

Замечание 1. *Если на H зафиксировано ортогональное действие некоторой группы G с условием инвариантности подпространств E , F , $N = \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$ и функционала V относительно этого действия, то ключевая функция будет инвариантной относительно действия G на N , индуцированного действием G на E .*

1.9 Приближенное построение ключевой функции с использованием приближений Галёркина-Ритца

Формула глобальной ключевой функции (1.15) в схеме Ляпунова-Шмидта может служить удобной основой для создания алгоритмов вычисления обобщенных ритцевских аппроксимаций — приближений ключевой функции.

Опишем одну из возможных процедур создания алгоритма (см. [50], [50], [10], [43],)

Предположим, что для V выполнено **условие (L)**, состоящее из следующих четырех требований:

1) $E = F$ (конфигурационное пространство и пространство значений

градиента совпадают);

2) для градиента имеет место представление $f(x, \delta) = I + c(x, \delta)$, где c — вполне непрерывное отображение из $E \times \Delta$ в E (условие представимости градиента в форме Лере – Шаудера);

3) существует такая последовательность конечномерных подпространств

$$\{E_{n+m}\} = E_{n+0} = N \subset E_{n+1} \subset E_{n+2} \subset \dots \subset E_{n+m} \subset \dots,$$

что последовательность ортопроекторов $P_m : H \longrightarrow E_{n+m}$ сильно сходится к единице на пространстве E ;

4) ограничение $V|_{E_{n+m}}$ является коэрцитивной функцией.

Ясно, что отображение $I + P_m c$ тоже представимо в форме Лере – Шаудера: $\tilde{f}_\xi(v, \delta) = I + \tilde{c}_\xi(v, \delta)$. Следовательно, уравнение $\tilde{f}_\xi(v, \delta) = 0$, приближенно определяющее $\Phi(\xi)$ (1.18), можно решать (приближенно) на основе галеркинских аппроксимаций

$$v + \tilde{c}_\xi^m(v, \delta) = 0, \quad v \in N^\perp \cap E_{n+m}, \quad (1.21)$$

$$\tilde{c}_\xi^m(v, \delta) := P_{n+m}(\tilde{c}_\xi(v, \delta))$$

(см. [17], [60]). Уравнение (1.21) можно приближенно решать на основе разнообразных вычислительных процедур, разработанных для конечномерного случая [5], [60] (переход к галеркинской аппроксимации этим и оправдан).

В некоторых случаях имеется возможность прямого приближенного вычисления (маргинального) отображения φ , например, методом кратчайшего градиентного спуска [48]. Алгоритм вычислений (его существенная часть) заключен в следующих соотношениях:

$$a_0 = u := \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n,$$

$$a_1 = a_0 + s_0 \nabla_0, \quad \nabla_0 := \text{grad } V(a_0)$$

(t_0 выбирается с целью минимизации на прямой $a = a_0 + s \nabla_0$ значения функционала V или нормы градиента $\nabla := \text{grad } V(a)$),

$$a_{k+1} = a_k + s_k \nabla_k, \quad \nabla_k := \text{grad } V(a_k) \quad (1.22)$$

(t_k выбирается с целью минимизации на прямой $a = a_k + s \nabla_k$ значения V или нормы градиента $\nabla := \text{grad } V(a)$).

В принципе, в соотношении $a_{k+1} = a_k + s_k \nabla_k$ можно выбирать другие направления сдвига (градиенты, построенные в любой другой метрике).

В случае гладкой зависимости функционала от параметра ξ , принадлежащего компактной области, нетрудно показать, что за счет «удачного» выбора направления сдвига и длины шага (зависящих от k и ξ) можно добиться равномерной C^r -сходимости по параметру к семейству минимумов. Соответствующие оценки для норм невязок градиента и снижений значений функционала легко переносятся на параметрический случай [50], [51]. Если в соотношении (1.22) положить $s_k = \varepsilon$ — достаточно малая константа, то из (1.22) получим оценку для производной по параметру ξ :

$$\frac{\partial a_{k+1}}{\partial \xi} = \frac{\partial a_k}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial Q \nabla_k}{\partial v} \frac{\partial a_k}{\partial \xi} = \left(I - \varepsilon \frac{\partial Q \nabla_k}{\partial v} \right) \frac{\partial a_k}{\partial \xi}. \quad (1.23)$$

Следовательно,

$$\left\| \frac{\partial a_{k+1}}{\partial \xi} \right\| < (1 - \varepsilon q) \left\| \frac{\partial a_k}{\partial \xi} \right\|,$$

где q — константа, отделяющая снизу спектр операторного пучка $\frac{\partial Q \nabla_k}{\partial v}$.

Гладкую равномерную сходимость можно также установить применением нелокальной версии леммы Морса [75] и обобщения (на параметрический случай) известного результата М.А. Красносельского и С.Г. Крейна [48].

Таким образом, градиентный метод гарантирует гладкую равномерную сходимость приближений к ключевой функции, но эта сходимость может осуществляться слишком медленно. Как известно, метод Ньютона сходится более быстро, но требует бóльшего объема вычислений [17].

Гладкую равномерную сходимость ньютоновских итераций для уравнений с параметром установил А.А. Лемешко [51].

Для более наглядной демонстрации предложенного подхода рассмотрим ключевую функцию двух переменных:

$$W(\xi) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \Phi(\xi)).$$

Последовательность приближений $\Phi(\xi)$ по описанной выше схеме приведет к последовательности приближений к ключевой функции в виде серии функций

$$W_m(\xi) = V \left(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \sum_{k=3}^{m+2} \varphi_k^m(\xi_1, \xi_2) e_k \right), \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.24)$$

Таким образом, задача приближенного вычисления ключевой функции сводится к приближенному вычислению координатных функций $\varphi_k^m(\xi_1, \xi_2)$.

Глава 2

Алгоритм трассировки прямого спуска для функционала действия 1-мерного уравнения «реакция-диффузия»

Уравнение «реакция-диффузия» с кубической нелинейностью само по себе способно моделировать многие структурные превращения [55]. Настоящая глава посвящена анализу этого уравнения по методике, изложенной в [19], [38].

2.1 Основная краевая задача

Ниже рассмотрено нелинейное 1-мерное уравнение «реакция-диффузия» с кубической нелинейностью, как простейшее уравнение, моделирующее структурные превращения физической системы, возникающие в результате отклика системы на потерю устойчивости ее первичной фазы. Предполагается выполнение граничного условия Неймана и ограничения «постоянства количества компонента в целом». Изложена методика прибли-

женного вычисления бифурцирующих финальных точек при малых положительных значениях закритического приращения параметра. Вычисление, проведенное на основе перехода к ключевой функции, опирается на ритцевскую аппроксимацию ключевой функции по начальным собственным функциям (модам) главной линейной части градиента функционала энергии (в соответствующем функциональном пространстве состояний). Проведено также вычисление трассы кратчайшего спуска к стабильной фазе. Результат вычисления предельной фазы хорошо согласуется с результатом вычисления (по схеме Ляпунова-Шмидта) бифурцирующей стационарной фазы.

Простейшее уравнение, способное моделировать структурные превращения, является нелинейное 1-мерное уравнение «реакция-диффузия» с кубической нелинейностью:

$$\dot{w} = -\text{grad } V(w) := w'' + \lambda w - w^3 - C, \quad (2.1)$$

где $w = w(x, t)$ — концентрация изучаемого компонента, $x \in U \subset \mathbb{R}$, C — константа (подлежащая определению).

$$V(w) := \int_0^1 \left(\frac{|w'|^2}{2} - \lambda \frac{w^2}{2} + \frac{w^4}{4} + C w \right) dx$$

— интеграл энергии по области $U = [0, 1]$. Далее предполагается, что выполнено граничное условие Неймана

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial w(1, t)}{\partial x} = 0,$$

и выполнено естественное ограничение (на количество компонента в целом):

$$\int_0^1 w(x, t) dx = K = \text{const} > 0.$$

Из уравнения (2.1) и последнего условия получаем

$$C = \lambda K - \int_0^1 w^3 dx, \quad (2.2)$$

то есть значение константы C определяется формулой (2.2), как только становится известна функция w .

При исследовании локальных бифуркаций экстремалей часто используется (см. главу 1) локальная ритцевская аппроксимация функционала

$$W(\xi) := V(K + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n),$$

построенная по начальным собственным функциям (модам)

$$e_k := \sqrt{2} \cos(\pi k x)$$

оператора $\mathcal{A} := -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ при заданных краевых условиях, в соответствующим образом подобранном функциональном пространстве состояний.

В нелокальных задачах также можно использовать ритцевскую аппроксимацию, но при этом для достижения требуемой точности решения необходимо использовать большое количество мод, что приводит к большой размерности аппроксимирующей системы. Снизить ее размерность можно за счет нелинейной ритцевской аппроксимации, например, в виде нелокально продолженной ключевой функции, то есть переходом к конечномерной задаче $\dot{\xi} = \text{grad } W(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, где

$$W(\xi) := \inf_{\langle w, e_j \rangle = \xi_j} V(w)$$

— ключевая функция Ляпунова-Шмидта.

«Общая» траектория данной динамической системы стремится при $t \rightarrow \infty$ к точке минимума функционала энергии W . При $\lambda < \lambda_1 := \pi^2 + \frac{3}{2}K^2$ функционал W имеет единственную точку минимума. После

перехода λ через λ_1 (обоснование в следующем разделе) из единственной докритической точки минимума рождается две закритические точки, притягивающие к себе траектории системы.

Ниже изложена методика приближенного вычисления бифурцирующих финальных точек при малых положительных значениях закритического приращения $\delta := \lambda - \lambda_1$. Вычисление произведено на основе перехода к ключевой функции от одного ключевого параметра (1-мерная редукция).

Во втором разделе проведено вычисление трассы кратчайшего спуска к стабильной концентрации. Результат вычисления предельной концентрации хорошо согласуется с результатом вычисления бифурцирующей концентрации, проведенного в первом разделе (по схеме Ляпунова-Шмидта).

2.2 Вычисление ключевой функции вблизи критического состояния при малых закритических приращениях и вычисление бифурцирующих экстремалей

Запишем функцию концентрации в виде

$$w = K + \tilde{w}, \quad \int_0^1 \tilde{w} dx = 0. \quad (2.3)$$

Сужение функционала V на подпространство функций с фиксированным средним (равным c) осуществляется подстановкой (2.3), в результа-

те которой получаем (с точностью до постоянного слагаемого)

$$\tilde{V}(\tilde{w}) := V(K + \tilde{w}) = \text{const} + \int_0^1 \left(\frac{|\tilde{w}'|^2}{2} - \tilde{\lambda} \frac{\tilde{w}^2}{2} + \frac{\tilde{w}^4}{4} + K \tilde{w}^3 \right) dx, \quad (2.4)$$

$$\tilde{\lambda} = \lambda - \frac{3}{2} K^2,$$

$$-\text{grad}(\tilde{V})(\tilde{w}) = \tilde{w}'' + \tilde{\lambda} \tilde{w} - \tilde{w}^3 - 3K \tilde{w}^2 - \alpha, \quad (2.5)$$

$$\alpha = \int_0^1 (\tilde{w}^3 + 3K \tilde{w}^2) dx.$$

Для отыскания критического значения параметра λ рассмотрим линейризованное уравнение (в точке $\tilde{w} = 0$)

$$\tilde{w}'' + \tilde{\lambda} \tilde{w} = 0.$$

Минимальным критическим значением параметра $\tilde{\lambda}$ является число π^2 (соответственно $\lambda = \lambda_1 = \pi^2 + \frac{3}{2} K^2$). Модой бифуркации при таком значении λ является функция $e = \sqrt{2} \cos(\pi x)$.

Теорема 3. *При малых $\delta := \lambda - \lambda_1$ главной частью ключевой функции является полином, являющийся ритцевской аппроксимацией функционала энергии по первой моде:*

$$W_1(\xi) = W(\xi e) = -\delta \frac{\xi^2}{2} + \frac{3}{8} \xi^4.$$

Схема стандартного **доказательства** такого типа утверждений изложена в [64], [19]. Амплитуда вариации концентрации определяется при этом уравнением

$$-\delta \xi + \frac{3}{2} \xi^3 = 0,$$

из которого получим пару ветвей критических точек

$$\xi = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} \delta + o(\delta).$$

Таким образом, для соответствующей бифурцирующей концентрации получаем асимптотическое представление

$$w = K \pm 2\sqrt{\frac{\delta}{3}} \cos(\pi x) + o(\delta). \quad (2.6)$$

2.3 Построение «трассы кратчайшего спуска» к точке минимума

Первый шаг в построении «трассы кратчайшего спуска» к минимуму — решение уравнения (относительно s):

$$\langle \text{grad}\tilde{V}(a_0 + sh_0), h \rangle = 0. \quad (2.7)$$

Здесь $h_0 = -\text{grad}\tilde{V}(a_0)$, $g = -\text{grad}\tilde{V}$, a_0 — начальная (порождающая) точка. Например, можно положить (для определенности)

$$a_0 = \cos(7\pi x_1) + \varepsilon \sum_{k=1}^6 \cos(k\pi x), \quad (2.8)$$

ε — некоторая фиксированная малая величина. Используя для $g(a + sh_0)$ разложение Тейлора, получим соотношение

$$g(a_0 + sh_0) = g(a_0) + s \frac{\partial g}{\partial x}(a_0) h_0 + o(s),$$

$\frac{\partial g}{\partial x}(a_0)$ — производная Фреше градиентного отображения g , и

$$\langle g(a_0 + sh_0), h_0 \rangle = \langle g(a_0), h_0 \rangle + s \langle (\partial g / \partial x)(a_0) h_0, h_0 \rangle + o(|s|).$$

Следовательно, исходя из уравнения (2.7), можно положить (с некоторой точностью)

$$s = s_0 := -\frac{\langle g(a_0), h_0 \rangle}{\langle (\partial g / \partial x)(a_0) h_0, h_0 \rangle} = -\frac{\|g(a_0)\|^2}{\langle (\partial g / \partial x)(a_0) h_0, h_0 \rangle}.$$

В случае рассмотренного нами уравнения (с кубической нелинейностью) поиск значения s_0 можно осуществить более точно — посредством отыскания точки минимума полинома четвертой степени

$$p(s) = s^4 + p_3s^3 + p_2s^2 + p_1s \sim \tilde{V}(a_0 + sh_0)$$

(рассмотренного с точностью до постоянного множителя и постоянного слагаемого). Вторым шагом кратчайшего спуска — повторение первого шага для новой порождающей точки $a_1 := a_0 + s_0h_0$ и т.д. Ниже, на рисунке 1, изображены графики, полученные при $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ (λ_2 — второе критическое значение) соответствующих промежуточных и финальной функций концентрации после некоторого предварительного подбора коэффициентов разложения Фурье для начальной функции концентрации (2.4). На основе данного алгоритма были получены следующие линии уровней для удельной концентрации.

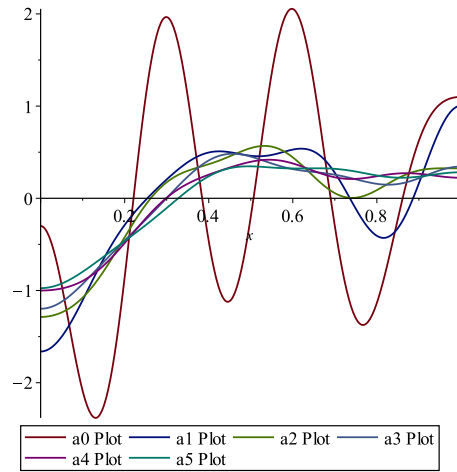


Рис. 1. Первые пять итераций расчетных функций плотности концентраций.

По характеру данного рисунка видно, что он иллюстрирует выход на стабильную концентрацию, заданную асимптотической формулой (в

случае минуса).

Глава 3

Алгоритм трассировки прямого спуска для функционала действия 2-мерного уравнения «реакция-диффузия»

3.1 Двумерное уравнение «реакция-диффузия» с кубической нелинейностью

Итак, рассмотрим двумерное уравнение «реакция-диффузия» с кубической нелинейностью, записанное в удобной для нас форме

$$\dot{w} = \Delta w + \lambda w - w^3 = C, \quad (3.1)$$

где $w = w(x, t)$ — концентрация изучаемого компонента, $x = x(x_1, x_2)$, $x \in U = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$,

$$V(w) := \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{|\nabla w|^2}{2} - \lambda \frac{w^2}{2} + \frac{w^4}{4} + C w \right) dx_1 dx_2$$

— интеграл энергии по области $U = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Будем предполагать, что выполнено граничное условие Неймана

$$\frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial U} = 0$$

и выполнено естественное ограничение на концентрацию вещества в целом:

$$\iint_{\Omega} w(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = K > 0.$$

При исследовании локальных бифуркаций экстремалей часто используется локальная ритцевская аппроксимация функционала

$$W(\xi) := V(K + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n),$$

построенная по начальным собственным функциям (модам) e_j оператора Лапласа на области U (при заданных краевых условиях, в соответствующим образом подобранном функциональном пространстве состояний):

$$e_0 = 1, \quad e_1 = \sqrt{2} \cos(\pi x_1), \quad e_2 = \sqrt{2} \cos(\pi x_2), \quad e_3 = 2 \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2),$$

$$e_4 = \sqrt{2} \cos(2\pi x_1), \quad e_5 = \sqrt{2} \cos(2\pi x_2), \quad e_6 = 2 \cos(2\pi x_1) \cos(\pi x_2),$$

$$e_7 = 2 \cos(\pi x_1) \cos(2\pi x_2), \quad e_8 = 2 \cos(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2), \quad \dots$$

В нелокальных задачах также можно использовать ритцевскую аппроксимацию, но при этом для достижения требуемой точности решения необходимо использовать большое количество мод, что приводит к большой размерности аппроксимирующей системы. Снизить ее размерность можно за счет нелинейной ритцевской аппроксимации, например, в виде нелокально продолженной ключевой функции, то есть переходом к конечномерной задаче

$$\dot{\xi} = \text{grad } W(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$W(\xi) := \inf_{\langle w, e_j \rangle = \xi_j} V(w)$$

— ключевая функция Ляпунова-Шмидта.

Мы будем придерживаться прямой процедуры кратчайшего спуска в точку минимума V (не переходя к аппроксимирующей ключевой функции). Первым шагом этой процедуры является выбор величины сдвига вдоль градиента из начальной (порождающей) точки, с целью уменьшения значения функционала энергии.

В качестве финальных состояний искомым траекторий динамической системы используются те точки минимума, которые ответвились (при возрастании параметра λ) от докритического равновесия $w = 0$.

3.2 Сужение функционала энергии на аффинное подпространство функций с фиксированным средним.

Запишем функцию концентрации в виде

$$w = K + \tilde{w}, \quad \int_0^1 \int_0^1 \tilde{w} dx_1 dx_2 = 0. \quad (3.2)$$

Сужение функционала V на подпространство функций с фиксированным средним (равным K) осуществляется подстановкой (3.2), в результате которой получаем

$$\tilde{V}(\tilde{w}) := V(K + \tilde{w}) = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{|\nabla \tilde{w}|^2}{2} - \tilde{\lambda} \frac{\tilde{w}^2}{2} + \frac{\tilde{w}^4}{4} + K \tilde{w}^3 \right) dx_1 dx_2, \quad (3.3)$$

$$\tilde{\lambda} = \lambda - \frac{3}{2} K^2,$$

$$-\text{grad}(\tilde{V})(\tilde{w}) = \Delta\tilde{w} + \tilde{\lambda}\tilde{w} - \tilde{w}^3 - 3K\tilde{w}^2 - \alpha, \quad (3.4)$$

$$\alpha = \int_0^1 \int_0^1 (\tilde{w}^3 + 3K\tilde{w}^2) dx_1 dx_2.$$

Для отыскания критического значения параметра λ рассмотрим ли-
неаризованное уравнение (в точке $\tilde{w} = 0$)

$$\Delta\tilde{w} + \tilde{\lambda}\tilde{w} = 0.$$

Минимальным критическим значением параметра $\tilde{\lambda}$ является число π^2
(соответственно $\lambda = \lambda_* = \pi^2 + \delta$). Модами бифуркации при таком значе-
нии λ являются функции

$$e_1 = \sqrt{2} \cos(\pi x_1), \quad e_2 = \sqrt{2} \cos(\pi x_2).$$

Теорема 4. *При малых значениях концентрации и при малых $\delta := \lambda - \lambda_*$ главной частью ключевой функции, соответствующей функцио-
налу (3.3), является многочлен (4-ой степени)*

$$U(\xi_1, \xi_2) = -\frac{\delta}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{3}{8}(\xi_1^4 + \xi_2^4) + \frac{1}{2}\xi_1^2\xi_2^2.$$

Доказательство вытекает из следующих соотношений:

$$W_\delta(\xi_1, \xi_2) := \inf_{\langle \tilde{w}, e_1 \rangle = \xi_1, \langle \tilde{w}, e_2 \rangle = \xi_2} V(\tilde{w});$$

$$U(\xi_1, \xi_2) = V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2) + o(\xi_1, \xi_2) = -\frac{\delta}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{a}{4}(\xi_1^4 + \xi_2^4) + \frac{b}{2}\xi_1^2\xi_2^2; \quad (5)$$

Здесь учтено, что $\iint_{\Omega} \tilde{w}^3 dx_1 dx_2 = 0$, если $\tilde{w} = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$. Несложные
вычисления приводят к следующему результату:

$$a = \iint_{\Omega} e_1^4 e_2^4 dx_2 dx_1 = \frac{3}{2};$$

$$b = \iint_{\Omega} e_1^2 e_2^2 dx_1 dx_2 = \left(\int_0^1 e_1^2 dx_1 \right) \left(\int_0^1 e_2^2 dx_2 \right) = 1.$$

Из теоремы 4. вытекает следующее утверждение.

Теорема 5. Для функционала (3.3) вблизи нуля при малых концентрациях имеется ветвь устойчивых функций концентраций вида

$$\tilde{w} = c + \varepsilon(e_1 + e_2) + o(\varepsilon),$$

где $\varepsilon = \text{const } \delta^{\frac{1}{2}}$ — малый параметр.

Таким образом, мы получили асимптотическую часть бифурцирующей ветви экстремалей, построенную по главной части ключевой функции

$$W(\xi_1, \xi_2) = -\delta(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{3}{8}(\xi_1^4 + \xi_2^4) + \frac{1}{2}\xi_1^2\xi_2^2 + \dots$$

Такой вид главной части ключевой функции связан, во-первых, с ее симметрией относительно преобразования

$$(\xi_1, \xi_2) \rightarrow (\xi_2, \xi_1)$$

и, во-вторых, с тем, что кубическая часть функционала V обнуляется на $\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$.

3.3 Прямое применение метода кратчайшего спуска

Первый шаг прямого метода кратчайшего спуска (см. [48], [51]) — решение следующего уравнения (относительно s):

$$\langle \text{grad}V(a_0 + sh_0), h \rangle = 0. \quad (3.5)$$

Конечная цель — отыскание «кратчайшего спуска» к минимуму. Здесь и ниже $h_0 = -\text{grad}V(a_0)$, $g = -\text{grad}V$, a_0 — начальная (порождающая) точка. Например, можно, для определенности, взять

$$a_0 = \cos(7\pi x_1) \cos(7\pi x_2) + \sum_{j,k \leq 7} \varepsilon_{j,k} \cos(j\pi x_1) \cos(k\pi x_2), \quad |\varepsilon_{j,k}| \ll 1,$$

где $\varepsilon_{j,k}$ — произвольный ненулевой набор чисел.

Используя для $g(a + sh_0)$ разложение Тейлора, получим соотношение

$$g(a_0 + sh_0) = g(a_0) + s \text{grad}(g(a_0))h_0 + o(s) \quad (3.6)$$

и

$$\langle g(a_0 + sh_0), h_0 \rangle = \langle g(a_0), h_0 \rangle + s \langle \text{grad}g(a_0)h_0, h_0 \rangle + o(|s|).$$

Следовательно, исходя из уравнения (2), можно положить (с некоторой точностью)

$$s = s_0 := \frac{\langle g(a_0), h_0 \rangle}{\langle \text{grad}(g(a_0))h_0, h_0 \rangle} = \frac{\|g(a_0)\|^2}{\langle \text{grad}(g(a_0))h_0, h_0 \rangle}. \quad (3.7)$$

В случае рассмотренного нами нелинейного уравнения диффузии (3.5) поиск значения s_0 можно осуществить более точно — посредством отыскания точки минимума полинома четвертой степени

$$p(s) = s^4 + p_3s^3 + p_2s^2 + p_1s + p_0 := V(a_0 + s h_0). \quad (3.8)$$

Второй шаг — повторение первого шага для новой порождающей точки $a_1 := a_0 + s_0h_0$ и т.д. Ниже (см. Рис. 2) изображены границы кластеров, полученные некоторым подбором коэффициентов в разложении Фурье начальной функции концентрации компонента и выделением нулевых линий уровня для соответствующих промежуточных и финальной функций.

Ниже, на рисунках изображены границы кластеров, полученные некоторым подбором коэффициентов в разложении Фурье начальной функции концентрации компонента и выделением нулевых линий уровня для соответствующих промежуточных и финальной функций.

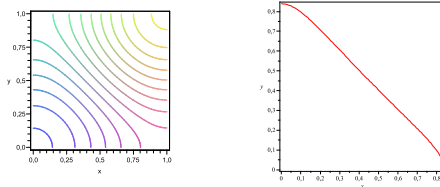


Рис. 2. Третья итерация расчетной функции плотности концентраций при малом закритическом приращении параметра $\lambda = \lambda_1 + \delta$ (с выделением линии нулевого уровня).

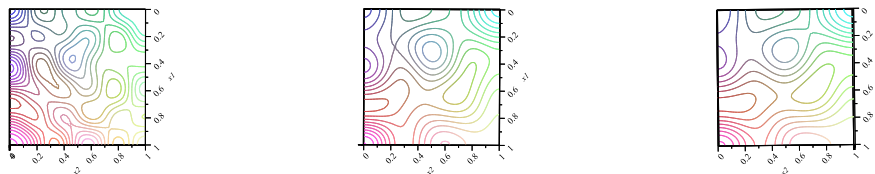


Рис. 3. Три итерации функции плотности концентраций при конечном закритическом приращении параметра λ .

По характеру рисунков видно, что они иллюстрируют выход концентрации на стабильное состояние.

3.4 Нелокальная редукция Ляпунова-Шмидта на основе принципа сжатых отображений

Трассы спуска можно контролировать через их конечномерных «двойников» — трассы спуска в конечномерном пространстве ключевых координат вдоль поля антиградиентов ключевой функции. Опишем сначала общую схему нелокальной редукции Ляпунова-Шмидта. При малых закритических значениях параметра λ экстремали функционала V можно вычислять как ветви экстремалей, зависящих от δ , посредством теории возмущений, основанной на непосредственном применении теоремы о неявной функции. Выпуклость и коэрцитивность функционала гарантируют сходимость «трассы» прямого спуска. Во многих случаях

за счет подбора соответствующей ограниченной области можно получить оценку скорости сходимости трассы к точке минимума. При «конечных» значениях δ возникает необходимость применения более мощных средств нелинейного анализа, например, применения нелинейного метода Галеркина-Ритца по схеме Ляпунова-Шмидта и т.п..

Для осуществления нелокальной редукции Ляпунова-Шмидта в рассмотренной выше задаче поиска минимума функционала (3.7) запишем соответствующее ему уравнение $\text{grad } V(w) = 0$ в виде операторного уравнения

$$f(w) := \mathcal{A}w - \lambda w + g(w) = 0, \quad w \in E, \quad (3.9)$$

где

$$E = \left\{ w \in C^{2+\alpha}(\Omega) : \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \iint_{\Omega} w(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0 \right\}.$$

$\mathcal{A} = -\Delta$, $g(w) := w^3 + 3\epsilon w^2$. Оператор f действует из E в

$$F = \left\{ w \in C^{0+\alpha}(\Omega) : \iint_{\Omega} w(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0 \right\}.$$

Линейный оператор \mathcal{A} является положительным и диагонализируемым:

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} \xi_{p,q} e_{p,q} \mapsto \sum_{p,q=1}^{\infty} \lambda_{p,q} \xi_{p,q} e_{p,q}, \quad (3.10)$$

где $e_{p,q}(x, y)$ — собственная функция оператора \mathcal{A} :

$$e_{p,q}(x, y) = \sqrt{2} \cos(p\pi x_1) \cos(q\pi x_2),$$

если $pq = 0$, и

$$e_{p,q}(x, y) = 2 \cos(p\pi x_1) \cos(q\pi x_2),$$

если $pq \neq 0$. Собственной функции $e_{p,q}$ отвечает собственное значение $\lambda_{p,q} = \pi^2(p^2 + q^2)$. Собственные функции e_k образуют ортонормированную систему в $H^1(\Omega)$.

Перепишем уравнение (3.8) в виде

$$(\mathcal{A} - \lambda I)(w) = g(w), \quad (3.11)$$

$$w \in \tilde{H}^1 := \left\{ w \in H^1(\Omega) : \iint_{\Omega} w(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0 \right\}.$$

Используя процедуру ортогонального разложения пространства в сумму подпространств, разобьем уравнение (3.11) в систему двух уравнений

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{A}_1 - \lambda I)(u) &= g_1(u + v), \\ (\mathcal{A}_2 - \lambda I)(v) &= g_2(u + v), \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

где $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}|_N$, $\mathcal{A}_2 := \mathcal{A}|_{N^\perp \cap E}$, $N := \text{Lin}\{e_{p,q}\}$, $p + q \leq n$, $w = u + v$, $u = \sum_{p+q \leq n} \xi_{p,q} e_{p,q}$, $v = \sum_{p+q \geq n+1} \xi_{p,q} e_{p,q}$, $g_1(u + v) := \mathcal{P}g(u + v)$, $g_2(u + v) := \mathcal{Q}g(u + v)$, \mathcal{P} и \mathcal{Q} — ортопроекторы на N и $N^\perp \cap H^1$. Второе уравнение системы (3.12) рассмотрим в пространстве функций $N^\perp \cap H^1$. Из спектральных свойств оператора \mathcal{A} вытекает, что при достаточно большой (по размерности) редукции норма оператора $(\mathcal{A}_2 - \lambda I)^{-1} : N^\perp \cap \tilde{H}^1 \rightarrow N^\perp \cap \tilde{H}^1$ становится достаточно малой и поэтому оператор $K(v) := \mathcal{A}_2^{-1}(g_2(u + v), u + v)$ переводит некоторый шар

$$T_L := \{v : \|v\|_{\tilde{H}^1} \leq L\}$$

(в $N^\perp \cap \tilde{H}^1$) в себя, являясь при этом сжимающим. То есть мы оказываемся в условиях, в которых решения второго уравнения системы (3.12) можно получать в аналитической форме

$$v = \Phi(u), \quad (3.13)$$

с любой наперед заданной точностью, посредством итераций $v_n = K(v_{n-1})$.

Подставив выражение (12) в первое уравнение системы (11), получим так называемое ключевое уравнение

$$\tau(u) := f_1(u + \Phi(u)) = 0 \quad (3.14)$$

на конечномерном пространстве N . Все аналитические и топологические свойства исходного уравнения и его решений наследуются ключевым уравнением и его решениями. Связь между решениями исходного и ключевого уравнений осуществляется формулой

$$w = u + \Phi(u).$$

Рассмотренное уравнение является потенциальным с потенциалом (ключевой функцией)

$$W(u) := V(u + \Phi(u)), \quad u \in N.$$

Поиск и анализ экстремалей функционала V можно осуществлять, таким образом, посредством изучения экстремалей ключевой функции W . Вычисление функции W и анализ ее критических точек можно осуществлять по изложенным выше технологиям прямого спуска вдоль поля антиградиентов.

3.5 Область редуцируемости стационарного уравнения

Посредством оценок размера образа отображения K и его константы Липшица можно точно указать область, на которой допускается конечномерная редукция уравнения $w = S(w)$. Предварительно заметим, что имеют место следующие неравенства:

$$\|\mathcal{A}_2^{-1}(v)\|_1 \leq \frac{1}{2\pi^2} \|v\|_1, \quad \forall v \in N^\perp \cap \tilde{H}^1, \quad \|w\|_{C^0(\Omega)} < \sqrt{2} \|w\|_1, \quad \forall w \in \tilde{H}^1, \quad (3.15)$$

$$\|w^3\|_1 = 3 \left(\iint_{\Omega} |w^2 \nabla w|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 3 \|w\|_{C^0(\Omega)}^2 \|w\|_1 \leq 6 \|w\|_1^3. \quad (3.16)$$

$$\|w^2\|_1 = 2 \left(\iint_{\Omega} |w \nabla w|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2 \|w\|_{C^0(\Omega)} \|w\|_1 \leq 2\sqrt{2} \|w\|_1^2. \quad (3.17)$$

Пусть $w \in T_L = \{w \in \tilde{H}^1[0, 1] : \|w\|_1 \leq L\}$. Из оценок (3.15)- (3.17) получаем

$$\|S(v)\|_1 = \|\mathcal{A}_2^{-1}(\lambda v + g_2(w) - b)\|_1 \leq \frac{1}{2\pi^2} \left(\lambda L + 6L^3 + 2\sqrt{2} K L^2 + \beta \right), \quad (3.18)$$

где $\beta = \|b\|_1$. Следовательно, если $\|S(v)\|_1 \leq L$, то оператор S переводит шар T_L в себя. Последнее утверждение справедливо в случае выполнения соотношения

$$\frac{1}{2\pi^2} \left(\lambda L + 6L^3 + 2\sqrt{2} K L^2 + \beta \right) \leq L$$

или

$$L^3 - pL^2 + qL + r \leq 0, \quad (3.19)$$

где $p = \frac{\sqrt{2}}{3}K$, $q = \frac{2\pi^2 - \lambda}{6}$, $r = \frac{\beta}{6}$. Для обеспечения свойства сжимаемости оператора $S : T_L \rightarrow T_L$ обратимся к оценке нормы разности значений S в произвольной паре точек v_1, v_2 :

$$\begin{aligned} \|S(v_2) - S(v_1)\|_1 &= \\ \|\mathcal{A}_2^{-1}(\lambda(v_2 - v_1) + ((u + v_2)^3 - (u + v_1)^3) + 3K((u + v_2)^2 - (u + v_1)^2))\|_1 &\leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi^2}(\lambda + 3L(2K + L))\|v_2 - v_1\|_1. \end{aligned}$$

Получаем то, что для обеспечения свойства сжимаемости K достаточно потребовать выполнения условия

$$\gamma := \frac{1}{2\pi^2}(\lambda + 3L(2K + L)) < 1, \quad (3.20)$$

или, что одно и то же, условия

$$\lambda + 3L(2K + L) < 2\pi^2. \quad (3.21)$$

Таким образом, установлено следующее утверждение:

Теорема 6. При выполнении условий (3.21), (3.22) и при $\|u\|_1 \leq L$ оператор $S(v) := \mathcal{A}_2^{-1}((u + v)^3 + 3K(u + v)^2 + \lambda v - b)$ переводит шар $T_L = \{v \in \tilde{H}^1[0, 1] : \|v\|_1 \leq L\}$ в себя и является сжимающим отображением $T_L \rightarrow T_L$.

Замечание 2. Константа γ позволяет оценивать скорость сходимости итераций $v_{m+1}(u) = S(v_m(u))$ к редуцирующему отображению $\Phi(u)$:

$$\|v_{m+1}(u) - \Phi(u)\|_1 \leq \gamma^m \frac{\mathcal{D}}{1 - \gamma}, \quad \mathcal{D} = \|v_1(u) - v_0(u)\|_1.$$

Глава 4

Обобщения уравнения «реакция-диффузия»

4.1 Уравнение Кана-Хилларда. Сведение стационарного уравнения Кана-Хилларда к стационарному уравнению «реакция-диффузия»

Как известно, изменение параметров внешнего воздействия (температуры, электромагнитного поля, механического сжатия и пр.) на сложную физическую систему (раствор, смесь, сплав и т.п.) может привести к потере устойчивости исходной фазы и, как следствие (как отклик системы), к ее переходу в новое состояние (с новыми структурными свойствами). Такой переход может сопровождаться спинодальным расслоением (распадом), выраженным в изменении локальных концентраций компонентов, в образовании сначала зернистой структуры, а затем кластеров и доменов новой фазы. Такие структурные изменения вещества изучаются специальным образом подобранных модельных дифференциальных уравнений при краевых условиях Пуассона. Например, при изучении динамики спонтанного разделения фаз (бинарного) вещества (сплава) ча-

сто используется уравнение Кана-Хилларда [84], [83], [85]

$$\dot{w} = \mathcal{D} \Delta \operatorname{grad} V(w) := \mathcal{D} \Delta (w^3 - w - \gamma \Delta(w)), \quad (4.1)$$

в котором $w = w(x, t)$ — относительная концентрация компоненты вещества, $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ ($1 \leq n \leq 3$), $-1 \leq w \leq 1$, \mathcal{D} — коэффициент диффузии,

$$V(w) := \mathcal{D} \int_U \left(\frac{(w^2 - 1)^2}{4} + \frac{\gamma}{2} |\nabla U|^2 \right) dx$$

— интеграл энергии, U — область, занятая сплавом, t — время. Описание равновесных состояний сводится к построению таких решений w уравнения Кана-Хилларда, для которых выполнено расширенное граничное условие Неймана

$$\frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial U} = \frac{\partial \Delta(w)}{\partial n} \Big|_{\partial U} = 0,$$

где ∂U — граница области U , n — векторное поле нормалей к границе. Первоочередной интерес представляют стационарные состояния — решения $w = w(x)$ стационарного уравнения Кана-Хилларда

$$\mathcal{D} \Delta (w^3 - w - \gamma \Delta(w)) = 0. \quad (4.2)$$

Очевидно, что в состав решений уравнения (4.2) входят решения стационарного уравнения «реакция-диффузия» с кубической нелинейностью

$$\gamma \Delta(w) + w - w^3 = C - \operatorname{const} \quad (4.3)$$

или, что одно и то же, экстремали (критические точки) функционала

$$\bar{V}(w) := V(w) - C[w],$$

где $[w] := \int_U w dx$ — среднее значение w .

Поиск экстремалей можно осуществлять посредством редукции Ляпунова-Шмидта к конечномерной задаче $\text{grad } W(\xi) = 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, где

$$W(\xi) := \inf_{\langle \bar{V}, e_j \rangle = \xi_j} V(w)$$

— ключевая функция, построенная по начальным собственным функциям (модам) e_j оператора Лапласа на области U (при заданных краевых условиях Пуассона) в соответствующим образом подобранном функциональном пространстве состояний.

4.2 Вариационный подход к уравнению Кана-Хилларда

Вначале обратимся к функциональным пространствам $\widehat{\mathcal{H}}_0, \widehat{\mathcal{H}}_1, \dots, \widehat{\mathcal{H}}_5$, где $\mathcal{H}_0 = L^2(\Omega)$, $\widehat{\mathcal{H}}_k$ — замыкание по норме $\|w\|_k$ ($k = 1, 2, \dots, 5$) множества тригонометрических полиномов вида $\sum_{p+q=1}^m \xi_{p,q} e_{p,q}$, $p, q \geq 0$, $e_{p,q}(x_1, x_2)$ — собственная функция оператора Δ (при краевом условии Неймана $\frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial U} = 0$):

$$e_{p,0}(x_1, x_2) = \sqrt{2} \cos(p\pi x_1), \quad e_{0,q}(x_1, x_2) = \sqrt{2} \cos(q\pi x_2),$$

$$e_{p,q}(x_1, x_2) = 2 \cos(p\pi x_1) \cos(q\pi x_2), \quad pq \neq 0.$$

Собственная функция $e_{p,q}$ отвечает собственному значению $\lambda_{p,q} = -\pi^2(p^2 + q^2)$, совокупность функций $\{e_{p,q}\}$ является ортонормированной системой векторов в $L_2(\Omega)$. Для тригонометрического полинома w норма $\|w\|_k$ определена следующими соотношениями:

$$\|w\|_1^2 := - \iint_{\Omega} w \Delta(w) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} |\nabla(w)|^2 dx_1 dx_2,$$

$$\|w\|_2^2 := \iint_{\Omega} w \Delta^2(w) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} (\Delta(w))^2 dx_1 dx_2,$$

$$\begin{aligned}\|w\|_3^2 &:= - \iint_{\Omega} w \Delta^3(w) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} |\nabla(\Delta(w))|^2 dx_1 dx_2, \\ \|w\|_4^2 &:= \iint_{\Omega} w \Delta^4(w) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} (\Delta^2(w))^2 dx_1 dx_2, \\ \|w\|_5^2 &:= - \iint_{\Omega} w \Delta^5(w) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} |\nabla(\Delta^2(w))|^2 dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

Для каждого $k \in \{2, \dots, 5\}$ линейный оператор $\mathcal{A} := -\Delta : \widehat{\mathcal{H}}_k \mapsto \widehat{\mathcal{H}}_{k-2}$ является изоморфизмом. При этом оператор \mathcal{A} положительный и диагонализируемый:

$$\mathcal{A} : \sum_{p,q} \xi_{p,q} e_{p,q} \mapsto \sum_{p,q} |\lambda_{p,q}| \xi_{p,q} e_{p,q}, \quad p, q \geq 0, \quad p+q \geq 1.$$

Пусть \mathcal{B} — положительный и симметричный оператор, для которого $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$ (то есть \mathcal{B} — положительный квадратный корень из \mathcal{A}). Оператор \mathcal{B} изоморфно действует из $\widehat{\mathcal{H}}_k$ на $\widehat{\mathcal{H}}_{k-1}$, $\forall k \geq 1$:

$$\mathcal{B} : \sum_{p,q} \xi_{p,q} e_{p,q} \mapsto \sum_{p,q} \sqrt{|\lambda_{p,q}|} \xi_{p,q} e_{p,q} = \pi \sum_{p,q} \sqrt{p^2 + q^2} \xi_{p,q} e_{p,q}, \quad p+q \geq 1.$$

Из этого соотношения следует, что

$$\|w\|_k = \|\mathcal{B}(w)\|_{k-1} \quad \forall k.$$

Уравнение Кана-Хилларда допускает представление в «операторном» виде

$$\dot{w} = -\mathcal{B}^2 \text{grad } V(w), \quad w \in \widehat{\mathcal{H}}_4.$$

и, следовательно, оно линейно эквивалентно уравнению

$$\dot{w} = -\mathcal{B} \text{grad } V(\mathcal{B} w), \quad w \in \widehat{\mathcal{H}}_5, \quad (GKH)$$

у которого правая часть — антиградиент функционала $V(\mathcal{B} w)$. Таким образом, исследование решений уравнения Кана-Хилларда сводится к исследованию решений градиентного уравнения (GKH) в $\widehat{\mathcal{H}}_5$.

Итак, имеет место следующее утверждение

Теорема 7. *Построение и исследование решений уравнения Кана-Хилларда*

$$\dot{w} = \mathcal{D}\Delta \operatorname{grad} V(w) := \mathcal{D} \Delta(w^3 - w - \gamma\Delta(w)), \quad w \in \widehat{\mathcal{H}}_4,$$

посредством линейного преобразования $w \mapsto Bw$ (B — положительный квадратный корень из A), сводится к построению и исследованию решений градиентного уравнения

$$\dot{w} = -\mathcal{B} \operatorname{grad} V(\mathcal{B} w), \quad w \in \widehat{\mathcal{H}}_5. \quad (4.4)$$

Это уравнение естественно продолжается (вместе с функционалом $V(\mathcal{B} w)$) на пространство $\widehat{\mathcal{H}}_4$.

Замечание 3. *Последняя теорема позволяет утверждать, что для исследования траекторий динамической системы Кана-Хилларда можно привлекать вариационный подход и, в частности, использовать метод прямого спуска, таким же образом, как этот подход применялся к «родственной» динамической системе «реакция-диффузия». Данная теорема позволяет лишь до некоторой степени отслеживать динамику концентраций, но все же уравнение (4.4) не является гладко эквивалентным уравнению Кана-Хилларда и поэтому мы не можем говорить о совпадении всех качественных свойств интегральных кривых этих уравнений.*

4.3 Возможность использования вариационного подхода к уравнению Свифта-Хуэна

Близким к модельному уравнению Кана-Хилларда является динамическое уравнение Свифта-Хуэна с кубической нелинейностью

$$\dot{w} + \Delta^2(w) + \lambda_2 \Delta(w) + \lambda_1 w + w^3 = 0 \quad (4.5)$$

при граничном условии условие Неймана

$$\frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial U} = \frac{\partial \Delta(w)}{\partial n} \Big|_{\partial U} = 0. \quad (4.6)$$

Данная начально-краевая задача порождает градиентную динамическую систему. Настоящий раздел посвящен описанию бифурцирующих ветвей устойчивых (притягивающих) стационарных решений этой динамической системы. Наличие второго параметра в этой задаче приводит к эффекту 3-модового вырождения в точке минимума функционала энергии.

Обратимся к функциональным пространствам $\widehat{\mathcal{H}}_0, \widehat{\mathcal{H}}_1, \dots, \widehat{\mathcal{H}}_5$, где $\mathcal{H}_0 = L^2(\Omega)$, $\widehat{\mathcal{H}}_k$ — замыкание по норме $\|w\|_k$ ($k = 1, 2, \dots, 5$) множества тригонометрических полиномов вида

$$\sum_{p+q=1}^m \xi_{p,q} e_{p,q}, \quad p, q \geq 0,$$

$e_{p,q}(x_1, x_2)$ — собственная функция оператора Δ (при условии Неймана $\frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial U} = 0$):

$$e_{p,0}(x_1, x_2) = \sqrt{2} \cos(p\pi x_1), \quad e_{0,q}(x_1, x_2) = \sqrt{2} \cos(q\pi x_2),$$

$$e_{p,q}(x_1, x_2) = 2 \cos(p\pi x_1) \cos(q\pi x_2), \quad pq \neq 0.$$

Собственная функция $e_{p,q}$ отвечает собственному значению $\lambda_{p,q} = -\pi^2(p^2 + q^2)$, совокупность функций $\{e_{p,q}\}$ является ортонормированной системой

векторов в $L_2(\Omega)$. Для тригонометрического полинома w норма $\|w\|_k$ определена следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\|w\|_1^2 &:= - \iint_{\Omega} w \Delta(w) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} |\nabla(w)|^2 dx_1 dx_2, \\ \|w\|_2^2 &:= \iint_{\Omega} w \Delta^2(w) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} (\Delta(w))^2 dx_1 dx_2, \\ \|w\|_3^2 &:= - \iint_{\Omega} w \Delta^3(w) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} |\nabla(\Delta(w))|^2 dx_1 dx_2, \\ \|w\|_4^2 &:= \iint_{\Omega} w \Delta^4(w) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} (\Delta^2(w))^2 dx_1 dx_2, \\ \|w\|_5^2 &:= - \iint_{\Omega} w \Delta^5(w) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} |\nabla(\Delta^2(w))|^2 dx_1 dx_2.\end{aligned}$$

Для каждого $k \in \{2, \dots, 5\}$ линейный оператор $\mathcal{A} := -\Delta : \widehat{\mathcal{H}}_k \mapsto \widehat{\mathcal{H}}_{k-2}$ является изоморфизмом. При этом оператор \mathcal{A} положительный и диагонализируемый:

$$\mathcal{A} : \sum_{p,q} \xi_{p,q} e_{p,q} \mapsto \sum_{p,q} |\lambda_{p,q}| \xi_{p,q} e_{p,q}, \quad p, q \geq 0, \quad p+q \geq 1.$$

Пусть \mathcal{B} — положительный и симметричный оператор, для которого $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$ (то есть \mathcal{B} — положительный квадратный корень из \mathcal{A}). Оператор \mathcal{B} изоморфно действует из $\widehat{\mathcal{H}}_k$ на $\widehat{\mathcal{H}}_{k-1}$, $\forall k \geq 1$:

$$\mathcal{B} : \sum_{p,q} \xi_{p,q} e_{p,q} \mapsto \sum_{p,q} \sqrt{|\lambda_{p,q}|} \xi_{p,q} e_{p,q} = \pi \sum_{p,q} \sqrt{p^2 + q^2} \xi_{p,q} e_{p,q}, \quad p+q \geq 1.$$

Из этого соотношения следует, что

$$\|w\|_k = \|\mathcal{B}(w)\|_{k-1} \quad \forall k.$$

Уравнение Свифта-Хоенберга допускает представление в «операторном» виде

$$\dot{w} = -\text{grad } V(w), \quad w \in \widehat{\mathcal{H}}_4,$$

$$V(w) := \iint_U \left(\frac{|\Delta w|^2 - \lambda_2 |\nabla w|^2 + \lambda_1 w^2}{2} + \frac{w^4}{4} \right) dx_1 dx_2.$$

Таким образом, для исследования траекторий динамической системы Свифта-Хоенберга можно привлекать вариационный подход и, в частности, использовать метод прямого спуска.

4.4 Локальные бифуркации стационарных решений уравнения Свифта-Хоенберга из точки 3-мерного вырождения.

Рассмотрим стационарное уравнение Свифта-Хоенберга с кубической нелинейностью

$$\Delta^2(w) + \lambda_2 \Delta(w) + \lambda_1 w + w^3 = 0, \quad (4)$$

где $w = w(x, t)$ — концентрация изучаемого компонента, $x = x(x_1, x_2)$, $x \in U = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$.

Будем предполагать, что выполнено расширенное граничное условие Неймана и естественное ограничение на концентрацию вещества в целом:

$$[w] := \iint_{\Omega} w(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = K > 0.$$

При исследовании локальных бифуркаций экстремалей используется, как и выше, локальная ритцевская аппроксимация функционала

$$W(\xi) := V(K + \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n),$$

построенная по начальным собственным функциям (модам) e_j оператора Лапласа на области U (при заданных краевых условиях, в соответствующим образом подобранном функциональном пространстве состояний):

$$e_0 = 1, \quad e_1 = \sqrt{2} \cos(\pi x_1), \quad e_2 = \sqrt{2} \cos(\pi x_2), \quad e_3 = 2 \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2),$$

$$e_4 = \sqrt{2} \cos(2\pi x_1), \quad e_5 = \sqrt{2} \cos(2\pi x_2), \quad e_6 = 2 \cos(2\pi x_1) \cos(\pi x_2),$$

$$e_7 = 2 \cos(\pi x_1) \cos(2\pi x_2), \quad e_8 = 2 \cos(2\pi x_1) \cos(2\pi x_2), \quad \dots$$

В нелокальных задачах также можно использовать ритцевскую аппроксимацию, но при этом для достижения требуемой точности решения необходимо использование нелинейной ритцевской аппроксимации, например, в виде нелокально продолженной ключевой функции. Дальнейший анализ можно осуществить переходом к конечномерной задаче

$$\text{grad } W(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где

$$W(\xi) := \inf_{\langle w, e_j \rangle = \xi_j} \bar{V}(w)$$

— нелокально продолженная ключевая функция Ляпунова-Шмидта.

Запишем искомую функцию концентрации w в виде

$$w = K + \tilde{w}, \quad \iint_{\Omega} \tilde{w} dx_1 dx_2 = 0. \quad (2)$$

Сужение функционала V на подпространство функций с фиксированным средним (равным K) осуществляется ранее указанной подстановкой, в результате которой получаем $\tilde{V}(\tilde{w}) := V(K + \tilde{w})$ на $\hat{\mathcal{H}}_2$:

$$\tilde{V}(\tilde{w}) = \iint_{\Omega} \left(\frac{|\Delta \tilde{w}|^2}{2} - \lambda_2 \frac{|\nabla \tilde{w}|^2}{2} + \lambda_1 \frac{\tilde{w}^2}{2} + \frac{\tilde{w}^4}{4} + K \tilde{w}^3 \right) dx_1 dx_2,$$

$$\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1 - \frac{3}{2} K^2,$$

и, соответственно,

$$\text{grad } (\tilde{V})(\tilde{w}) = \Delta^2 \tilde{w} + \lambda_2 \Delta \tilde{w} + \tilde{\lambda}_1 \tilde{w} + \tilde{w}^3 + 3K \tilde{w}^2 - \alpha,$$

$\alpha = \iint_{\Omega} (\tilde{w}^3 + 3K \tilde{w}^2) dx_1 dx_2$ (в тройке пространств $\widehat{\mathcal{H}}_2 \subseteq \widehat{\mathcal{H}}_0 \subseteq \widehat{\mathcal{H}}_0$). Для отыскания критического значения параметра λ рассмотрим линеаризованное уравнение (в точке $\tilde{w} = 0$)

$$\Delta^2 \tilde{w} + \lambda_2 \Delta \tilde{w} + \tilde{\lambda}_2 \tilde{w} = 0.$$

Одной из пар критических значений параметров является пара чисел $2\pi^4, 3\pi^2$. Соответственно $\lambda_1 = 2\pi^4 + \delta_1$, $\lambda_2 = 3\pi^2 + \delta_2$. Модами бифуркации при значениях $\delta_1 = \delta_2 = 0$ являются функции

$$e_1 = \sqrt{2} \cos(\pi x_1), \quad e_2 = \sqrt{2} \cos(\pi x_2), \quad e_3 = 2 \cos(\pi x_1) \cos(\pi x_2).$$

Имеет место следующее утверждение о локальных бифуркациях.

Теорема 8. *При малых возмущениях концентрации и при малых δ_j главной частью ключевой функции, соответствующей функционалу, является следующий многочлен 4-ой степени от трех переменных:*

$$-\frac{\delta_1(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \delta_2 \xi_3^2}{2} + \frac{3}{8}(\xi_1^4 + \xi_2^4) + \frac{9}{16} \xi_3^4 + \frac{1}{4} \xi_1^2 \xi_2^2 + \frac{3}{8}(\xi_1^2 + \xi_2^2) \xi_3^2.$$

Доказательство вытекает из определяющего ключевую функцию соотношения

$$W_\delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) := \inf_{\langle \tilde{w}, e_1 \rangle = \xi_1, \langle \tilde{w}, e_2 \rangle = \xi_2, \langle \tilde{w}, e_3 \rangle = \xi_3} \tilde{V}(\tilde{w}),$$

и из того, что

$$W_\delta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \tilde{V}(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3) + o(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + |\xi_3|^2)^2,$$

а также из несложно проверяемых соотношений

$$= [e_1^4] = [e_2^4] = \frac{3}{2}, \quad [e_3^4] = \frac{9}{4}, \quad [e_1^2 e_3^2] = [e_2^2 e_3^2] = \frac{3}{2}, \quad [e_1^2 e_2^2] = 1.$$

Здесь учтено, что $\iint_{\Omega} (\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)^3 dx_1 dx_2 = 0$.

Такой вид главной части ключевой функции связан еще и с ее симметрией относительно преобразования $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow (\xi_2, \xi_1)$. Из теоремы 8. вытекает следующее утверждение.

Теорема 9. *Для функционала V вблизи нуля при малых концентрациях имеется ветвь устойчивых функций концентраций вида*

$$\tilde{w} = K + \varepsilon_1(e_1 + e_2) + \varepsilon_2 e_3 + o(\varepsilon),$$

где $\varepsilon_j = \text{const } \delta_j^{\frac{1}{2}} \geq 0$ — малый параметр.

Таким образом удастся получить первое асимптотическое слагаемое за критической ветви бифурцирующих экстремалей (по информации о главной части ключевой функции).

4.5 О построении нелокальной ключевой функции уравнения Свифта-Хоенберга методом градиентного спуска.

При построении нелокальной ключевой функции можно также воспользоваться прямой процедурой кратчайшего спуска в точку минимума функционала V . Первым шагом этой процедуры является выбор величины сдвига вдоль градиента из начальной (порождающей) точки, с целью уменьшения значения функционала энергии.

Пусть e_1, \dots, e_n — фиксированный базис ритцевской аппроксимации (базис Ритца), составленный из собственных функций оператора Лапласа (в порядке возрастания номеров собственных функций без пропусков отдельных функций), и пусть e_1, e_2, e_3 — моды бифуркации (по которым

допускается вырождение). Пусть при этом $V_R(\xi) := V\left(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k\right)$ — ритцевская аппроксимация функционала энергии (по базису Ритца).

В качестве нулевого приближения к функции

$$W(\widehat{\xi}) := \inf_{\langle w, e_j \rangle = \xi_j, j=1,2,3} \overline{V_R}(w), \quad \widehat{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

рассматривается функция

$$W_0(\widehat{\xi}) := V(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3)$$

(ритцевская аппроксимация по модам e_1, e_2, e_3).

Первый шаг заключен в выборе «поправки» к W_0 , дающей первое приближение к $W(\widehat{\xi})$ в виде

$$W_1(\widehat{\xi}) := V_R(a(\widehat{\xi})),$$

где

$$a(\widehat{\xi}) = a_0 - s_0 g_0, \quad a_0 = (\xi_1, \xi_2, 0, \dots, 0), \quad g_0 := \text{grad}_{\xi_4, \dots, \xi_n} V_R(a_0),$$

$$s_0 = \frac{\|g_0\|^2}{\langle G_0 g_0, g_0 \rangle},$$

где $G_0 = \text{hess}_{\xi_4, \dots, \xi_n} V_R(a_0)$ — матрица Гессе (в нулевой порождающей точке a_0) функции V_R по переменным ξ_4, \dots, ξ_n .

Второй шаг — повторение первого шага для новой порождающей точки a_1 и т.д. На шаге с номером k делается выбор функциональной величины сдвига $s_k = s_k(\widehat{\xi})$ вдоль антиградиента посредством формулы

$$s_k = \frac{\|g_k\|^2}{\langle G_k g_k, g_k \rangle}, \quad (21)$$

где $G_k = \text{hess}_{\xi_4, \dots, \xi_n} V_R(a_k)$ — матрица Гессе (в точке a_k) функции V_R по переменным ξ_4, \dots, ξ_n .

К сожалению, выбор функциональной величины $s_k = s_k(\hat{\xi})$ сдвига (вдоль антиградиента) в виде (21) приводит к повышенному росту информационного потока, сопровождающего вычисления, и, как следствие, к существенному замедлению работы алгоритма и к быстрому достижению предела возможностей вычислительных устройств. Это препятствие можно преодолеть, заменив функциональный множитель числовым множителем σ , служащим универсальной оценкой снизу всех функциональных множителей вида. Подбор такого ограничителя снизу можно осуществить, используя следующие легко проверяемые неравенства (для произвольной симметричной матрицы $G = (g_{j,k})$):

$$\|G\|_1 \leq \|G\|_2 \leq \|G\|_3,$$

где

$$\begin{aligned} \|G\|_1 &:= \max\{\mu : \mu \in \text{spec}(G)\}, \\ \|G\|_2 &:= \sqrt{\text{tr}(G^\top G)}, \quad \|G\|_3 := \sum_{j,k} |g_{j,k}|. \end{aligned}$$

Вычисления, проводимые на основании изложенных выше теоретических положений, дают возможность визуализировать критические точки (вычислить сколь угодно точно координаты, определить их характер и расположение). А также с любой наперед заданной точностью локализовать притягивающие точки: сначала вычислить точки минимума ключевой функции, а затем по связывающей формуле определить притягивающие точки уравнения Свифта-Хоенберга. Прямая графическая локализация позволяет сколь угодно точно определять координаты точек минимума для ключевой функции.

4.6 Компьютерные вычисления

4.6.1 Программа вычислений (в кодах Maple) функций концентраций $a[i]$ для одномерного уравнения «реакция-диффузия» и графическое изображение стабилизации

.

```
restart;
c := 1; λ := 1.1 * (Pi2);
λ- := λ - (3/2) * c2; α := c3 - λ;
β := c;
ε[1] := -.5; ε[2] := -.6;
ε[3] := -.5; ε[4] := .1;
ε[5] := -.7; ε[6] := .9;
ε[7] := -.7; n := 6;
a0 := cos((n + 1) * Pi * x) + sum(ε[k] * cos(k * Pi * x), k = 1..n);
a[0] := a0;
```

for k to 5 do

```
h0 := diff(a0, [(x, 2)]) + (-3 * c2 + λ) * a0 - 3 * c * a02 - a03 +
+ 3 * c * ((1/2) * (sum(ε[j]2, j = 1..n + 1))) - 3 * (int(a03, x =
= 0..1, numeric));
```

```
h0 := sum((int(h0 * cos(j * Pi * x), x = 0..1, numeric)) * cos(j * Pi * x),
```

```

j = 1..n + 1);
q0 := int((1/2) * (diff(a0, (x, 1)))^2 - (1/2) * lambda * a0^2 + (1/4) * a0^4,
x = 0..1, numeric);
q1 := int((diff(a0, (x, 1))) * (diff(h0, (x, 1)))) - lambda * a0 * h0 + a0^3 * h0,
x = 0..1, numeric);
q2 := int(((diff(h0, (x, 1)))^2 - lambda * h0^2 + 3 * a0^2 * h0^2) * (1/2) + 3 * a0 * h0^2,
x = 0..1, numeric);
q3 := int(a0 * h0^3, x = 0..1, numeric); q4 := (1/4) * (int(h0^4,
x = 0..1, numeric));
p := q4 * s^4 + q3 * s^3 + q2 * s^2 + q1 * s + q0; s0 := fsolve(diff(p, s) = 0, s);
a[k] := h0 * s0 + a0; a0 := a[k];
end do;

```

```

plot([a[0], a[1], a[2], a[3], a[4], a[5]], x = 0..1

```

```

legend = ["a0Plot" a1Plot" a2Plot" a3Plot" a4Plot" a5Plot"]);

```

Результат построения графика стабилизации концентраций см. выше рис. 1.

4.6.2 Программа вычислений (в кодах Maple) нелокальной ключевой функции для $2D$ -уравнения «реакция-диффузия»

```

restart;
e[1] := sqrt(2) * cos(Pi * x[1]); e[2] := sqrt(2) * cos(Pi * x[2]);
e[3] := 2 * cos(Pi * x[1]) * cos(Pi * x[2]);

```

```

e[4] := sqrt(2) * cos(2 * Pi * x[1]);
e[5] := sqrt(2) * cos(2 * Pi * x[2]);
S[3] := int(int((sum(xi[k] * e[k], k = 1..5))3, x[1] = 0..1), x[2] = 0..1);
S[4] := int(int((sum(xi[k] * e[k], k = 1..5))4, x[1] = 0..1), x[2] = 0..1);
λ := 15; Digits := 4;
K := .5; σ := 1;
δ[1] := Pi2 + (3/2) * K2 - λ; δ[2] := Pi2 + (3/2) * K2 - λ;
δ[3] := 2 * Pi2 + (3/2) * K2 - λ; delta[4] := 4 * Pi2 + (3/2) * K2 - λ;
δ[5] := 4 * Pi2 + (3/2) * K2 - λ;
W[R] := (1/4) * S[4] + K * S[3] + sum((1/2) * δ[k] * xi[k]2, k = 1..5);
> g[1] := diff(W[R], xi[1]);
g[2] := diff(W[R], xi[2]);
g[3] := diff(W[R], xi[3]);
g[4] := diff(W[R], xi[4]);
g[5] := diff(W[R], xi[5]);
g := '<, >' (g[1], g[2], g[3], g[4], g[5]); >;
> a0 := '<, >' (1, 2, 0, .3, .4); >
> g0 := subs(xi = a0, g);
> d0 := K + a0[1] * e[1] + a0[2] * e[2] + a0[3] * e[3] + a0[4] * e[4] + a0[5] * e[5];
> plot3d(d0, x[1] = 0..1, x[2] = 0..1, thickness = 2, grid = [50, 50],
axes = normal, style = contour, orientation = [-90, 0], contours = 15);
> a1 := a0 - σ * g0;

```



```

> D1 := K + a1[1] * e[1] + a1[2] * e[2] + a1[3] * e[3] + a1[4] * e[4] + a1[5] * e[5];
  > plot3d(D1, x[1] = 0..1, x[2] = 0..1, grid = [50, 50], thickness = 2,
    axes = normal, style = contour, orientation = [-90, 0], contours = 8);
      g1 := subs(xi = a1, g);
      a2 := a1 - σ * g1;
D2 := K + a2[1] * e[1] + a2[2] * e[2] + a2[3] * e[3] + a2[4] * e[4] + a2[5] * e[5];
  > plot3d(D2, x[1] = 0..1, x[2] = 0..1, grid = [50, 50], thickness = 2,
    axes = normal, style = contour, orientation = [-90, 0], contours = 8);
      g2 := subs(xi = a2, g);
      a3 := a2 - σ * g2;
D3 := K + a3[1] * e[1] + a3[2] * e[2] + a3[3] * e[3] + a3[4] * e[4] + a3[5] * e[5];
  plot3d(D3, x[1] = 0..1, x[2] = 0..1, grid = [20, 20], thickness = 2,
    axes = normal, style = contour, orientation = [-90, 0], contours = 8);
      g3 := subs(xi = a3, g);
      a4 := a3 - σ * g3;
D4 := K + a4[1] * e[1] + a4[2] * e[2] + a4[3] * e[3] + a4[4] * e[4] + a4[5] * e[5];
  plot3d(D4, x[1] = 0..1, x[2] = 0..1, grid = [20, 20], thickness = 2,
    axes = normal, style = contour, orientation = [-90, 0], contours = 8);
      g4 := subs(xi = a4, g);
      a5 := a4 - σ * g4;
D5 := K + a5[1] * e[1] + a5[2] * e[2] + a5[3] * e[3] + a5[4] * e[4] + a5[5] * e[5];
  plot3d(D5, x[1] = 0..1, x[2] = 0..1, grid = [20, 20], thickness = 2,
    axes = normal, style = contour, orientation = [-90, 0], contours = 8);

```

4.6.3 Компьютерная графика

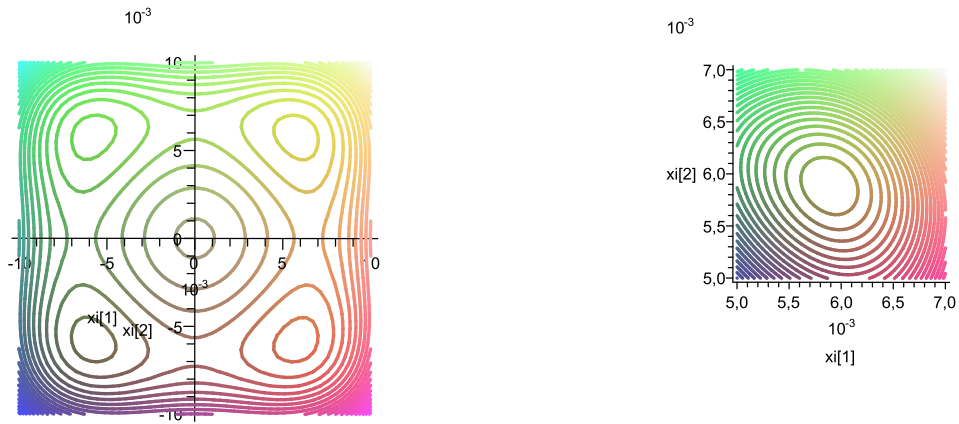


Рис. 1. Линии уровня ключевой функции и локализация ее точки минимума при $K = 0.5$, $\lambda = \pi^2 + 0.4$

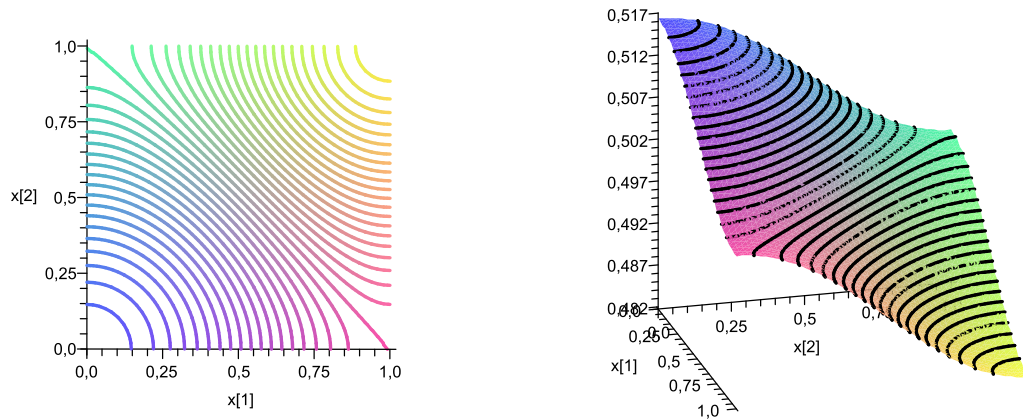


Рис. 2. Линии уровня и 3D-график функции концентрации при $K = 0.5$, $\lambda = \pi^2 + 0.4$

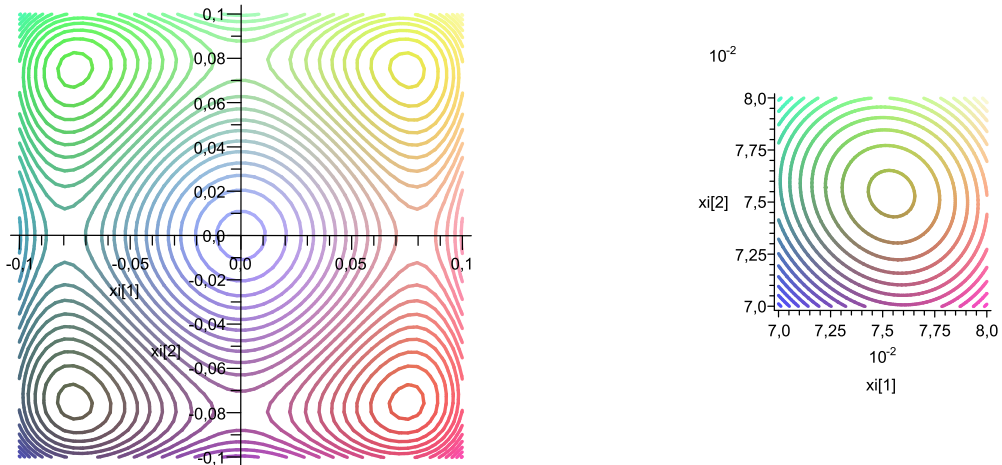


Рис. 3. Линии уровня ключевой функции и локализация ее точки минимума при $K = 0.5$, $\lambda = 15$

В пределах заданного уровня точности получаем координатное изображение $(0.093, 0.093)$ для точки минимума, лежащей на биссектрисе координатного угла. Этой точке соответствует стабильная концентрация.

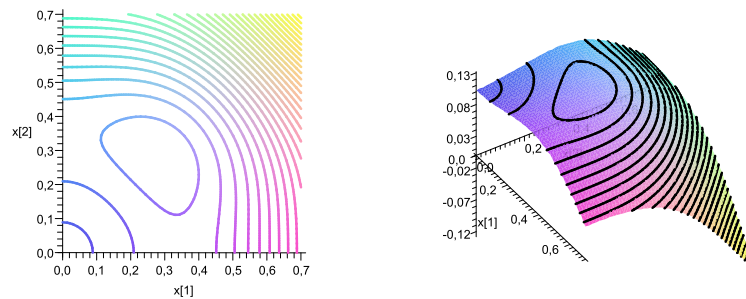


Рис. 4. Линии уровня и 3D-график функции концентрации при $K = 0.5$, $\lambda = 15$

Рассмотрение линий уровня функций a_k дает представление о динамике концентраций.

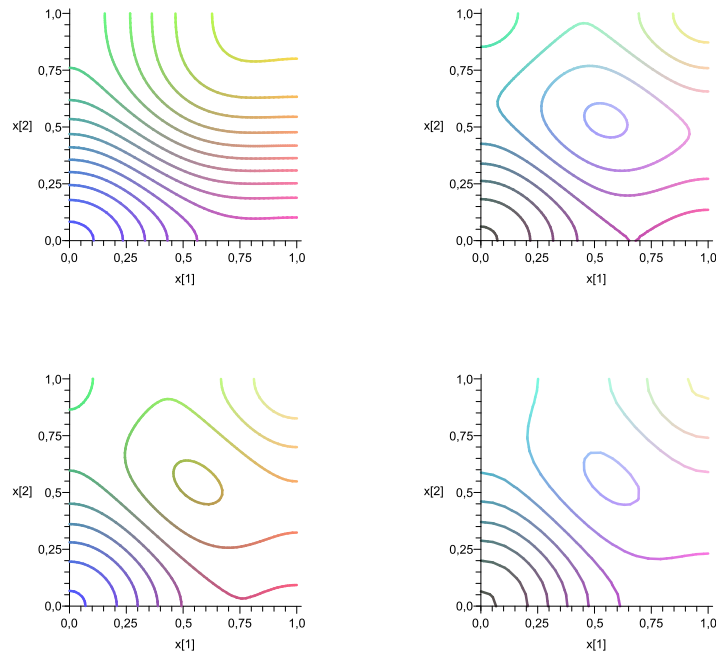


Рис. 5. Изменение линий уровня функции концентрации вдоль трассы спуска (из начальной точки $a_0 = 0.5 + e_1 + 2e_2 + 0.3e_3 + 0.4e_4$ до третьего шага a_3 , $K = 0.5$, $\lambda = 15$)

4.7 Заключение

Бифуркационный анализ является традиционным научным направлением для Воронежской математической школы, которое развивается в ВГУ, начиная с 50-х годов прошлого столетия (усилиями М.А. Красносельского и его учеников — В.В. Стрыгина, Ю.Г. Борисовича, Ю.С. Колесова, Э.М. Мухамадиева, Н.А. Бобылева и др.). Об актуальности проблемы многих мод ранее неоднократно высказывался и сам М.А. Красносельский и его ученики.

Диссертационная работа посвящена одному из актуальных разделов современного нелинейного функционального анализа — бифуркацион-

ному анализу многопараметрических динамических систем, порождаемых начально-краевыми задачами вариационного типа. Данная проблема включает в себя две имеющих самостоятельную ценность задачи: 1) «проблему многих мод» — задачу описаниям бифурцирующих решений стационарного уравнения в условиях вырождения по нескольким модам и 2) задачу построения трассы спуска из произвольного начального состояния в достаточно малую окрестность устойчивого финального состояния. Таким образом, тема диссертации относится к области нелинейного функционального анализа, тесно связанной с начально-краевыми задачами, зависящими от нескольких управляющих параметров.

Теоретические аспекты, освещенные в диссертационной работе, имеют достаточную научную новизну, а результаты, полученные в ходе исследований и вычислений, могут быть использованы в анализе зарождений и развитии посткритических состояний сложных систем.

Литература

- [1] Арнольд В.И. Особенности дифференцируемых отображений / В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде // – М.: МЦНМО. 2004. – 672 с.
- [2] Б.С. Бардин, С.Д. Фурта / Локальная теория существования периодических волновых движений бесконечной балки на нелинейно упругом основании // Актуальные проблемы классической и небесной механики, Эльф, М., 1998. - С.13–22.
- [3] Баскаков А. Г. Гармонический анализ линейных операторов / А. Г. Баскаков. – Воронеж.: Издательство Воронежского государственного университета, 1987. – 165 с.
- [4] Баскаков А. Г. Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом / А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков // Известия РАН. Серия математическая. – 2011. – Т. 75, №3. – С. 3–28.
- [5] Бахвалов И.В. Численные методы. Издание восьмое / И.В.Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков //– Физматлит. Невский диалект. Москва - Санкт-Петербург - 2000.
- [6] Бобылев Н.А. Геометрические методы в вариационных задачах / Н.А. Бобылев, С.В. Емельянов, С.К. Коровин // – М. : Магистр, 1998. – 658 с.

- [7] Болотин С.В. Периодические решения системы с гироскопическими силами / С.В. Болотин // Прикл. матем. и механ. – 1987.Т.51, вып.4. – С.686-687.
- [8] Борзаков А.Ю. Нелинейные ритцевские аппроксимации и визуализации бифуркаций экстремалей / А.Ю. Борзаков, А.А. Лемешко, Ю.И. Сапронов // Вестник ВГУ. Сер. физ., матем. Воронеж: ВГУ. - 2003, вып. 2. – С. 100–112.
- [9] Борзаков А.Ю. Применение методов конечномерной редукции к глобальному анализу краевых задач на примере уравнения Дуффинга/ А.Ю.Борзаков // Сборник трудов математического факультета ВГУ. 2004. Вып.8. С. 1–12.
- [10] Борзаков А.Ю. Редукции в нелокальном анализе вариационных краевых задач и уравнение колебаний маятника/ А.Ю. Борзаков //Семинар по глобальному и стохастическому анализу. Воронеж: ВГУ. - 2005, Вып.1. - С. 34–44.
- [11] Борисович Ю.Г. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера / Ю.Г. Борисович, В.Г. Звягин, Ю.И. Сапронов // Успехи матем. наук. 1977. Т.32, вып.4. С. 3–54.
- [12] Бреккер Т. Дифференцируемые ростки и катастрофы / Т. Бреккер, Л. Ландер // – М. : Мир, 1977. – 208 с.
- [13] Брус Дж. Кривые и особенности: Геометрическое введение в теорию особенностей./ Дж. Брус , П. Джиблин // Пер. с англ. - М.: Мир, 1988. - 262 с.
- [14] Вайнберг М.М. Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин // – М. : Наука. 1969. – 528 с.

- [15] Вольмир А.С. Гибкие пластины и оболочки / А.С. Вольмир // – М. : Гостехиздат. 1956.
- [16] Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории полых оболочек / И.И. Ворович // – М. : Наука. 1989. – 376 с.
- [17] Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев // – М. : Наука, 1981. – 400 с.
- [18] Гнездилов А.В. Бифуркации критических торов для функционалов с 3- круговой симметрией / А.В. Гнездилов // Функц. анализ. – 2000. – Т. 34, вып. 1. – С. 83–86.
- [19] Даринский Б.М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б.М.Даринский, Ю.И.Сапронов, С.Л.Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. Том 12 (2004) – С. 3-134.
- [20] Зайцев В.Ф. Дискретно–групповой анализ обыкновенных дифференциальных уравнений / В.Ф.Зайцев // – Л.: ЛГПИ, 1989. – 80 с.
- [21] Зайцев В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Точные решения / В.Ф.Зайцев, А.Д.Полянин // – М.: Физматлит, 1995. – 560 с.
- [22] Зайцев, В.Ф. Фундаментальные нелокальные симметрии, обыкновенных дифференциальных уравнений / В.Ф. Зайцев, А.С. Ложкин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления, Выпуск 1. – СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2009. С.65-70.

- [23] Заславский Г.М. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса / Г.М.Заславский, Р.З. Сагдеев // – М. : Наука, 1988. – 368 с.
- [24] Зачепа В.Р. Локальный анализ фредгольмовых уравнений / В.Р. Зачепа, Ю.И. Сапронов // – Воронежский госуниверситет. Воронеж 2002.
- [25] Звягин В.Г. Свойства степени Лере – Шаудера вполне непрерывных векторных полей/ В.Г.Звягин // Методическая разработка для студентов 3-5 курсов математического факультета д/о и слушателей ФПК. Издательство ВГУ. Воронеж, 1996.
- [26] Иллс Дж. Основания глобального анализа / Дж.Иллс // Успехи матем. наук. – 1969. Т.24, №3. – С. 157-210.
- [27] Иллс Дж. Фредгольмовы структуры/ Дж.Иллс // Успехи матем. наук. – 1971. Т.26, №6. – С. 213-240.
- [28] Инфельд Э. Нелинейные волны, солитоны и хаос / Э. Инфельд, Дж. Роуланс // - пер. с англ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 480 с.
- [29] Иосида Функциональный анализ/ Иосида// - пер. с англ. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1968.
- [30] А.В. Казарников, С.В. Ревина. Возникновение автоколебаний в системе Рэлея с диффузией // Вестник Южно-Уральского государственного университета, 2016 год, том 9, №2, с.16-28
- [31] Кадченко С. И., Кинзина И. И. Вычисление собственных значений возмущенных дискретных полуограниченных операторов // Журнал вычислительная математика и математическая физика. 2006. Т. 46. № 7. С. 1265-1272.

- [32] Кадченко С. И. Вычисление сумм рядов Релея-Шрёдингера возмущенных самосопряженных операторов // Журнал вычислительная математика и математическая физика. 2007. Т. 47. № 9. С. 1494-1505.
- [33] Кадченко С.И. Нахождение собственных значений и собственных функций методом регуляризованных следов / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. – 246 с.
- [34] Клингенберг В. Лекции о замкнутых геодезических / В. Клингенберг // М. : Мир. 1982. 416 с.
- [35] Костин Д.В., Сапронов Ю.И., Функциональный анализ и многомодовые прогибы упругих систем : учебное пособие // Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. - 207 с.
- [36] Костин Д.В. Применение формулы Маслова для асимптотического решения одной задачи об упругих деформациях / Д.В. Костин // Матем. заметки. – 2008. – Т. 83, № 1. – С. 50–60.
- [37] 2. Костин Д.В. Об одной схеме анализа двухмодовых прогибов слабо неоднородной упругой балки / Д.В. Костин // Доклады Академии наук. 2008. – Т. 418, № 4. – С. 295–299.
- [38] Костин Д.В., Сапронов Ю.И., Функциональный анализ и многомодовые прогибы упругих систем : учебное пособие // Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. - 207 с.
- [39] Костина Т.И. Анализ ветвления периодических решений уравнения Белецкого посредством вариационного метода Ляпунова-Шмидта /

Т.И Костина // Математические модели и операторные уравнения. Том 5, часть 1. Воронеж: ВорГУ, 2008. - С. 98-103.

- [40] Костина Т.И. К нелокальному бифуркационному анализу вариационных краевых задач / Т.И Костина, Ю.И. Сапронов, А.Ю. Борзаков // Математические модели и операторные уравнения. Сборник научных статей под редакцией В.А. Костина и Ю.И. Сапронова. Том 6 - Воронеж: ВорГУ, 2009. - С. 8-23.
- [41] Костина Т.И. Нелокальный бифуркационный анализ циклов в вариационных динамических системах / Т.И Костина // Современные проблемы математики, механики и их приложений. Материалы международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовниченко.- М.: Издательство «Университетская книга», 2009. - С. 163.
- [42] Костина Т.И. Вычисление и применение ключевой функции в задаче о нелокальных прогибах круглой упругой пластины/ Т.И Костина, Ю.И. Сапронов // Математические модели и операторные уравнения. Сборник научных статей под редакцией В.А. Костина и Ю.И. Сапронова. Том 7. Воронеж: ВорГУ, 2011. - С. 79-88.
- [43] Костина Т.И. Нелокальное вычисление ключевых функций в задаче о периодических решениях вариационных уравнений / Т.И Костина // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. №1. 2011 - С. 181-186.
- [44] Красносельский М.А. Об одной схеме исследования вырожденных экстремалей функционалов классического вариационного исчисления / М.А. Красносельский, Н.А. Бобылев, Э.М. Мухамадиев // ДАН СССР. – 1978. – Т. 240, №3. – С.530-533.

- [45] Красносельский М.А. Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский, Г.М.Вайникко, П.П.Забрейко, Я.Б. Рунтицкий, В.Я. Стеценко // – М. : Наука, 1969. – 456 с.
- [46] Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений / М.А. Красносельский // – М.: Гостехиздат, 1956. – 390 с.
- [47] Красносельский М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / П.П. Забрейко // М. : Наука. 1975. 512 с.
- [48] Красносельский М.А. Итерационный процесс с минимальными невязками /М.А. Красносельский, С.Г. Крейн // Матем. сб-к. 1952. т.31 (73), в.2. С. 315-334.
- [49] Кулагин Н.Е., Лерман Л.М., Шмакова Т.Г. ФРОНТЫ, БЕГУЩИЕ ФРОНТЫ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ В ОБОБЩЕННОМ УРАВНЕНИИ СВИФТА-ХОЕНБЕРГА // ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2008, том 48, № 4, с. 693-712
- [50] Лемешко А.А. О равномерной сходимости с производными галеркинских приближений к решениям уравнений с параметрами / А.А. Лемешко // Математические модели и операторные уравнения. Том 2. Воронеж: ВорГУ, 2003. - С. 94–103.
- [51] Лемешко А.А. Об равномерной сходимости ньютоновских приближений к решениям уравнений с параметрами / А.А. Лемешко // Сборник трудов молодых ученых математического факультета ВГУ, Воронеж: ВГУ, 2003. - С.74-83.

- [52] Логинов Б.В. Теория ветвления нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности / Б.В. Логинов // – Ташкент, Фан, 1985. – 184 с.
- [53] Ляпунов А.М. Sur les figures d'équilibre peu differentes des ellipsoides d'une masse liquide homogene donee d'un mouvement de rotation, p.1 / А.М. Ляпунов // Зап. Акад. наук, С.-Петербург. 1906.
- [54] Ляв А. Математическая теория упругости. М.- Л.: НКТН СССР. 1935. 674 с.
- [55] Мари Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир. 1983. – 397 с.
- [56] Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике /С.Г. Михлин // М. : Наука, 1970. – 512 с.
- [57] Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа / К. Миранда // – М. : ИЛ. 1957.
- [58] Ю.О. Мітропольський, Б.І. Мосеєнков, Дослідження коливань в системах з розподіленими параметрами (асимптотичні методи), Видавництво Київського університету. 1961. – 123 п.
- [59] Обухов А.В. , Обухов А.А., Лебедев В.Г., Новикова Т.А. Численное моделирование спиноподобного распада на основе вариационного подхода // Вестник Удмурдского университета. Сер.: Физика. Химия. 2011. Т.31, вып.1. - С. 31-40.
- [60] Оден Дж. Конечные элементы в механике сплошных сред / Дж. Оден // М.: Мир. 1976. – 464 с.
- [61] Постников М.М. Введение в теорию Морса / М.М. Постников // – М. : Наука, 1971. – 568 с.

- [62] Постон Т. Теория катастроф и ее приложения / Т. Постон, И. Стюарт // М. : Мир, 1980. – 608 с.
- [63] Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах Том 2. Новые методы небесной механики. Топология. Теория чисел. / А. Пуанкаре // М. : Наука, 1972. – 1000 с.
- [64] Сапронов Ю.И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах / Ю.И. Сапронов // Успехи матем. наук. – 1996. Т. 51, №1. – С. 101-132.
- [65] Сапронов Ю.И. Нелокальные конечномерные редукции в вариационных краевых задачах / Ю.И. Сапронов // Математические заметки. – 1991. Т.49, вып.1. – С.94-103.
- [66] Сапронов Ю.И. Регулярные возмущения фредгольмова отображения и теорема о нечетном поле / Ю.И. Сапронов // Труды матем. фак-та ВГУ. – Воронеж: Изд. ВГУ, 1973, вып. 10. – С. 82-88.
- [67] Сапронов Ю.И. Существование и сравнение конечномерных редукций для гладких функционалов / Ю.И. Сапронов // В кн.: Глобальный и стохастический анализ. – Воронеж: ВГУ, 1995. – С. 69-90.
- [68] Сапронов Ю. И. Глобальное сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах / Ю.И. Сапронов, С.Л. Царев // Матем. заметки. - 2000. Т. 58, №5. – С. 745-754.
- [69] Сапронов Ю.И. Моделирование диффузорных течений жидкости посредством редуцированных уравнений // Вестник ЮУрГУ. Сер: Математическое моделирование и программирование. 2014, том 7, №2. - С.74-86.

- [70] Сидоров Н.А. Ветвление решений нелинейных уравнений с потенциальными системами разветвления / Н.А. Сидоров // В кн.: Дифференциальные и интегральные уравнения. – Иркутск: Изд. Иркутского университета, 1980. – Вып.7. – С. 136-155.
- [71] Скрипов В.П., Скрипов А.В. Спинодальный распад (Фазовый переход с участием неустойчивых состояний) // УФН. Т.123, вып.2. 1979. - С. 193-231.
- [72] Треногин В.А. Уравнение разветвления: потенциальность, бифуркации, симметрия / В.А. Треногин, Н.А. Сидоров, Б.В. Логинов // ДАН СССР. – 1989. – Т. 309, № 2. – С. 286-289.
- [73] Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения / А.Т. Фоменко // – М. : МГУ, 1988.– 416с.
- [74] Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия вполне интегрируемых гамильтоновых систем / А.Т. Фоменко // Успехи матем. наук, 1989. – Т. 44, вып. 1. – С.145-173.
- [75] Царев С.Л. Глобальное сравнение эквивариантных конечномерных редукций для гладкого G -инвариантного функционала / С.Л. Царев // Труды матем. факультета ВГУ. – Воронеж : Изд. ВГУ, 1998. – № 3 (новая серия). – С. 73-76.
- [76] Царев С.Л. О глобальной распрямляемости гладких функций с единственной критической точкой / С.Л. Царев // Труды матем. факультета ВГУ. – Воронеж: Изд. ВГУ, 1996. – № 1 (новая серия). – С. 92-96.
- [77] Царев С.Л. Один вариант леммы Морса и его приложения к нелинейным вариационным задачам / С.Л. Царев // В кн.: Топологиче-

ские методы нелинейного анализа. – Воронеж: Изд. ВГУ, 2000. – С. 132-136.

- [78] Cacciopoli R. Un principio di inversioni per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alla equazione a derivate parziali / R. Cacciopoli // Rend. Acc. Lincei. – 1932. V.16. – P. 390–395, P. 484–489.
- [79] Cacciopoli R. Sulle corrispondenze funzionali inverse diramate: teoria generale e applicazioni ad alcune equazioni non-lineari e al problema di Plateau / R. Cacciopoli // Rend. Acc. Lincei.– 1936. V.24. – P. 258–263, P. 416–421.
- [80] Conley C.C. The Birkhoff–Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I.Arnol'd / C.C. Conley, E. Zehnder // Invent. Math. 1983. V.73. – P.33-49.
- [81] Elworthy K.D. Degree theory on Banach manifolds / K.D. Elworthy, A.J. Tromba // Proc. Sympos. Pure. Math. – 18, A.M.S. 1970. – P. 86–94.
- [82] Elworthy K.D. Differential structures and Fredholm maps on Banach manifolds / K.D. Elworthy, A.J. Tromba // Proc. Sympos. Pure. Math. – 15, A.M.S. 1970. – P. 49–94.
- [83] Cahn J.W., Hilliard J.E. Free energy of a nonuniform system. I. Interfacial free energy // J. Chem. Phys. 1958. Vol. 28. - P. 258-267.
- [84] J.W. Cahn, On spinodal decomposition, Acta Metall. 9 (1961) 795-801.
- [85] J.W. Cahn, C.M. Elliott, A. Novick-Cohen. The Cahn-Hilliard equation with a concentration dependent mobility: motion by minus the Laplacian of the mean curvature // Eur. J. Appl. Math. 7 (1996) 287-301.

- [86] Marsden J.E. Qualitative Methods in Bifurcation Theory / J.E. Marsden
// Bull. Amer. Math. Soc. 1978. V.84, №6.
- [87] Marsden J.E. On the Geometry of the Liapunow-Schmidt procedure /
J.E. Marsden // Lect. Notes in Math. – 1979. V.755. – P.77-82.
- [88] Smale S. An infinite dimensional version of Sard's theorem / S. Smale
// Amer. J. Math. 1965. v.87. – P. 861-866.
- [89] Schmidt E. Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen,
Theil 3: Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und
Verzweigung ihrer Losungen / E. Schmidt // Math. Ann. 1908. V.65. –
P. 370-399.
- [90] Swift J., Hohenberg P.S. Hydrodynamic fluctuations at the convective
instability // Phys. Rev. 1977. V. A15. P. 319-328.
- [91] Thompson J.M. T., Hunt G. W., A General Theory of Elastic Stability.
JOHN WILEY & SONS SONS, 1973, 322 p.
- [92] Thompson J.M.T. Advances in Shell Buckling: Theory and Experiments
// International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 25, No. 1 (2015)
25 p.
- [93] Сапронов Ю.И. Карпова А.П. Конев В.В. Коротких А.С. Модели-
рование течений жидкости посредством редуцированных уравнений
// Вестник ВГУ. Серия : Физика. Математика. 2014, №2. С. 167-188.
- [94] Сапронов Ю.И., Конев В.В., Коротких А.С. Об упрощенном алго-
ритме математического моделирования течений жидкости в диф-
фузоре // Материалы международной конференции ВЗМШ С.Г.
Крейна – 2014 / Воронеж, 26-31 янв. 2014 г. Воронеж : ИПЦ «На-
учная книга», 2014. – С. 295-301.

- [95] Коротких А.С., Костин Д.В., Сапронов Ю.И. К моделированию кластерной перестройки посредством нелинейного уравнения диффузии // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы международной конференции ВЗМШ – 2015 / Воронеж, 27 января - 6 февраля. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2015. – С. 63-66.
- [96] Сапронов Ю.И., Костин Д.В., Коротких А.С. К динамике концентраций, определяемых двумерным уравнением диффузии с кубической нелинейностью // Материалы международной конференции ВЗМШ С.Г. Крейна – 2016 / Воронеж, 25-31 янв. 2016 г. Воронеж : ИПЦ «Научная книга», 2016. – С. 295-300.
- [97] Коротких А.С. Стабильные концентрации, определяемые одномерным уравнением диффузии кубической нелинейностью // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2016, №3. С. 156-161.
- [98] Коротких А.С. Бифуркации стационарных решений уравнения «реакция-диффузия» и трассы спуска в стабильные состояния // Препринт НИИМ ВГУ. №48. Октябрь, 2016. - 20 с.
- [99] Коротких А.С. 3-модовая бифуркация стационарных решений уравнения Свифта-Хоенберга // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. Вып. 13. Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2016. - С. 112-121
- 8.
- [100] Коротких А.С. 3-модовая бифуркация стационарных решений уравнения Свифта-Хоенберга // Материалы международной конференции ВЗМШ – 2017 / Воронеж, 26 января - 1 февраля. – Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2017. – С.120-122.

- [101] Коротких А.С. Бифуркации стационарных решений уравнения «реакция-диффузия» и переход концентраций в стабильное состояние // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2017, №1. С. 115-127.