на правах рукописи

ЗАЛУКАЕВА ЖАННА ОЛЕГОВНА

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ С СИНГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРОЙ

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2018

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет».

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук, профессор,
Баев Александр Дмитриевич.

Официальные оппоненты:
Обуховский Валерий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет», физико-математический факультет, кафедра высшей математики, заведующий;
Бичегкуев Маирбек Сулейманович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Северо-Осетинский государственный университет», факультет математики и информационных технологий, кафедра функционального анализа и дифференциальных уравнений, заведующий.
Ведущая организация:
ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет».

Защита состоится «16» мая 2018 года в 17 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 при ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1, главный корпус, ауд. 333.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/dissertations/5608/
Диссертация_Залукаева_Ж.О..pdf

Автореферат разослан «5» марта 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
доцент

Шабров Сергей Александрович

Актуальность темы. Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-(pu')' + qu = f(= \lambda mu)$$

более двух столетий служит основой самых разнообразных моделей естествознания, поэтому к настоящему времени изучению данного уравнения посвящено достаточно большое количество работ. Попытки распространения теории таких моделей на случай нерегулярных физических систем начались еще в 19 веке. Так Стилтьесом было предпринято исследование знаменитой задачи о «нити с бусинками», когда $-u'' = \lambda mu$, где $m(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i \delta(x - \xi_i)$. Здесь $\delta(x)$ – функция Дирака, ξ_i – координаты точечных масс, а m_i – величины этих масс.

В 30-е гг. 20 века в рамках теоретической физики стал актуальным вопрос анализа спектральной задачи для уравнения Шредингера

$$-(u')' + qu = \lambda u$$

с сингулярным потенциалом q, когда, например, q содержит особенности как типа δ-функции, так и более сильные, порождаемые разрывами у решений. Таким образом, возникла проблема создания новых подходов и методов анализа подобной ситуации.

Появление теории обобщенных функций позволило приступить к исследованию спектральной задачи для уравнения Шредингера, что привело к созданию весьма обширной спектральной науки, связанной с именами ряда известных ученых (от М.Г. Крейна, Б.М. Левитана, И.С. Саргсяна до В.А. Ильина, А.Г Баскакова, А.П. Хромова, А.А. Шкаликова, А.М. Савчука, Б.С. Митягина, П.Б. Джакова, Р.О. Гринива, Я.В. Микитюк). Однако это спектральное направление нацелено на свои проблемы (полнота и базисность, асимптотика спектра, разнообразные свойства непрерывного спектра, структура сингулярных компонент спектра (спектральных лакун, зон неустойчивости), вопросам о следах и проч.).

Параллельно развивалось и другое направление, связанное с поточечным толкованием такого рода уравнений. Соответствующий подход на базе интеграла Стилтьеса был намечен Ф.В. Аткинсоном и М.Г. Крейном в 50-е гг. 20 века. Этот подход заключался в переходе от уравнения с обобщенными коэффициентами к интегро-дифференциальному уравнению. Эта идея была перенесена на более широкий класс задач Ю.В. Покорным. Метод Ю.В. Покорного был распространен на новые классы задач, актуализированных последними десятилетиями, в работах С.А. Шаброва, М.Б. Зверевой, Ж.И. Бахтиной, Ф.В. Голованевой, М.Б. Давыдовой, Меач Мона, Е.В. Лылова.

Необходимость моделирования колебательных процессов струнных систем возникает во многих отраслях естествознания и техники. В этом направлении особенно можно выделить публикации В.А. Ильина, Е.И. Моисеева, Л.Н. Знаменской, А.И. Егорова, А.В. Боровских, В.Л. Прядиева, В.В. Провоторова. Однако наличие произвольного числа локализованных особенностей, приводящих к потере гладкости, а также разрывам у решений, в этих работах не рассматривалось.

В настоящей диссертации изучаются модели, описываемые уравнениями

$$-(pu')' + Q'u = F' \tag{1}$$

и

$$M'u''_{tt} = (pu')' - uQ' + F', \tag{2}$$

когда у коэффициентов Q', M' и правой части F' допускаются как δ, так и δ' слагаемые, а решения допускают как конечное, так и бесконечное множество точек разрыва (но не более чем счетное). Математическое моделирование такого рода ситуаций актуально, поскольку обусловлено достаточно богатым набором прикладных задач. Для анализа данных моделей в настоящей диссертации разрабатываются новые подходы, включая численные методы и алгоритмы нахождения приближенных решений.

При моделировании мы развиваем концепцию Ю.В. Покорного, согласно которой уравнениям (1) и (2) может быть придано поточечное представление

$$-\frac{d}{d[\sigma]}(pu'_\mu) + \frac{dQ}{d[\sigma]}u = \frac{dF}{d[\sigma]}, \tag{3}$$

и

$$u''_{tt}(x,t)M'_{[\sigma]}(x) = (p(x)u'_\mu(x,t))'_{[\sigma]} - u(x,t)Q'_{[\sigma]}(x) + F'_{[\sigma]}(x,t),$$

соответственно, где в обобщенное дифференцирование $\dfrac{d}{d[\sigma]}$ вкладывается особый смысл, определяемый предложенной Ю.В. Покорным расширенной трактовкой интеграла Стилтьеса, которую мы будем называть π-интегралом. Запись u'_μ означает, что производная обращается интегралом Лебега-Стилтьеса, а обозначение $\dfrac{d}{d[\sigma]}$ квадратными скобками подчеркивает, что соответствующая производная обращается интегралом Стилтьеса, понимаемом в расширенном смысле (π-интегралом).

Цели и задачи исследования. Разработка новых качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей сложных физических систем, реализуемых в виде граничных задач для дифференциальных уравнений с разрывными решениями, разработка и обоснование эффективных численных методов и алгоритмов. Реализация цели исследования осуществляется решением следующих задач как теоретического, так и прикладного характера:

— вариационное обоснование математических моделей, описывающих деформацию разрывной струны (как с конечным, так и бесконечным множеством точек разрыва) и колебания разрывной струны, помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями (как в конечном, так и в бесконечном множестве точек), включающими сосредоточенные упругие опоры, сосредоточенные массы, сосредоточенные силы;

— доказательство корректности исследуемых математических моделей объектов с сингулярной структурой;

— обоснование возможности применения метода Фурье для получения решения математической модели с сингулярной структурой;

— разработка эффективных численных методов для нахождения приближенного решения математических моделей объектов с сингулярной структурой и оценки сходимости;

— разработка эффективных алгоритмов решения изучаемых математических моделей, а также разработка комплексов программ для ЭВМ на языке высокого уровня Python с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах;

— решение ряда задач прикладного характера: а) приближенное решение модели, описывающей деформации разрывной струны; б) для частных случаев найдены условия движений концов струны, а также такие внешние воздействия, которые позволят перевести колебательный процесс в изучаемых моделях в заданный момент времени в заданное состояние.

Объект исследования. Качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей объектов с сингулярной структурой, решения которых допускают разрывы.

Методы исследования. Разработанные в диссертационной работе методы исследования математических моделей объектов с сингулярной структурой, допускающих разрывные решения, основаны на фундаментальных методах современного качественного анализа, функционального анализа, теории меры и интеграла. Адаптированный метод конечных элементов для исследуемых моделей объектов с сингулярной структурой, его обоснование были получены с использованием последних разработок вычислительных методов для уравнений с особенностями.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, допускающих разрывные решения и формализованных в виде единого уравнения с производными по мере (в смысле Радона-Никодима), численные методы и алгоритмы нахождения приближенных решений рассматриваемых моделей объектов с сингулярной структурой в виде комплексов проблемно-ориентированных программ.

1. Вариационное обоснование математических моделей, описывающих деформации и малые колебания физических систем с сингулярной структурой и возможными разрывами у решений.

2. Доказательство корректности полученных моделей.

3. Разработка эффективных численных методов нахождения решения исследуемых моделей, включая оценку сходимости.

4. Разработка эффективных алгоритмов нахождения решения моделей с сингулярной структурой, а также разработка комплексов программ для ЭВМ на языке высокого уровня Python с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Научная новизна. 1. В диссертационной работе предлагаются новые подходы для анализа математических моделей объектов с сингулярной структурой, допускающих разрывные решения, в виде единого уравнения с производными по мере. 2. Доказана корректность математических моделей объектов с сингулярной структурой, допускающих разрывные решения и реализуемых в виде уравнений с производными по мере. 3. Метод конечных элементов адаптирован для математических моделей с сингулярной структурой, допускающих разрывные решения, получены оценки сходимости.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая и практическая значимость результатов и методов диссертационной работы заключается в возможности их использования для исследования моделей объектов с сингулярной структурой, допускающих разрывы у решений, и описывающих колебания и деформации одномерных упругих объектов с локализованными особенностями внешней среды. Разработаны эффективные численные методы применительно к такого рода моделям, представлены новые методы построения приближенных решений. Получены оценки сходимости приближенных решений к точным. Представлены результаты тестирования разработанных численных методов с применением ЭВМ.

Область исследования. Область исследования и содержание диссертационной работы соответствует формуле специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки). Область исследования соответствует п.1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений», п.2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», п.3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», п.4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

Апробация работы. Результаты исследования были представлены в форме докладов на следующих конференциях: Воронежские зимние математические школы (Воронеж, 2015 г., 2017 г.), международные заочные научно-практические конференции «Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика» (Воронеж, 2014–2015 гг.), Воронежские весенние математические школы «Понтрягинские чтения» (Воронеж, 2015–2017 гг.), на семинарах профессора А.Д. Баева (2014–2017 гг.), профессора М.И. Каменского (2014–2017 гг.), доцентов С.А Шаброва (2014–2017 гг.), М.Б. Зверевой (2014–2017 гг.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 15 работах, 5 из которых опубликованы в рекомендованных ВАК РФ рецензируемых научных изданиях. В совместных публикациях в диссертацию вошли результаты, принадлежащие лично автору. Получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ, зарегистрированной в Реестре программ для ЭВМ № 2017614993.

Объём и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав, заключения, библиографического списка из 69 наименований и 3 приложений, в которых приведены тексты разработанных программ, написанных на языке программирования Python, и свидетельство о регистрации программы для ЭВМ. Общий объем диссертации составляет 181 страницу. Диссертационная работа содержит 27 рисунков.

Основное содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертационного исследования, определены его цель и задачи, перечислены методы исследования, представлены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе «**Математическая модель малых деформаций разрывной струны с особенностями на концах**» изучается математическая модель, допускающая разрывные решения и реализуемая в форме уравнения (3). Такая модель была получена как экстремаль функционала потенциальной энергии разрывной неоднородной струны

$$\Phi(u) = -\int\limits_0^\ell \frac{pu_\mu'^2}{2} d\mu - \int\limits_0^\ell \frac{u^2}{2} d[Q] + \int\limits_0^\ell ud[F], \tag{4}$$

упруго закрепленной на концах.

Функционал (4) мы рассматриваем на множестве E_μ μ-абсолютно непрерывных функций, производные которых u'_μ являются функциями ограниченные вариации. Заметим, что μ-абсолютная непрерывность означает, что функция $u(x)$ может быть представлена в виде

$$u(\beta) - u(\alpha) = \int\limits_\alpha^\beta u'_\mu d\mu. \tag{5}$$

Из (5) следует, что производная функции u в точке разрыва ξ функции μ определяется отношением скачков, т.е. формулой

$$u'_\mu(\xi) = \frac{u(\xi+0) - u(\xi-0)}{\mu(\xi+0) - \mu(\xi-0)}.$$

Мы предполагаем, что функция $\mu(x)$ строго возрастает, $Q(x)$ не убывает на $[0,\ell]$ и $Q(x) \neq const$, а $p(x)$, $F(x)$ – функции ограниченной вариации на $[0,\ell]$. Из μ-абсолютной непрерывности следует, что функция $u(x)$ может быть разрывна лишь в точках разрыва $\mu(x)$, а потому множество точек разрыва у $u(x)$ не более чем счетно.

Функционал энергии (4) записан с помощью как обычного интеграла Стилтьеса, так и интегралов Стилтьеса, понимаемых в расширенном смысле, предложенном Ю.В. Покорным. В отличие от обычного интеграла Стилтьеса, π-интеграл $\int\limits_0^\ell ud[v]$ берется по двузначной v-мере, т.е. обязательно учитывается собственное значение порождающей меру функции $v(x)$ в точке разрыва, и учитываются лишь предельные значения функции $u(x)$.

Для того чтобы иметь возможность применять методы классического анализа для изучаемой модели, реализуемой в виде уравнения (3), мы заменяем особые точки на их специальные «расширения». Таких расширений здесь два, так как функция $u(x)$ и ее производная $u'_\mu(x)$ определены на разных множествах. Обозначим через $S(\mu) \subset (0, \ell)$ – множество точек разрыва $\mu(x)$ и через S – множество точек разрыва $\sigma(x)$, не принадлежащих $S(\mu)$. Тогда из уравнения (3) вытекает, что в точках ξ разрыва функции $\mu(x)$ верны равенства

$$
\begin{gathered}
-p(\xi)\frac{\Delta u(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} + p(\xi - 0)u'_\mu(\xi - 0) + u(\xi - 0)\Delta^- Q(\xi) = \Delta^- F(\xi), \\
p(\xi)\frac{\Delta u(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} - p(\xi + 0)u'_\mu(\xi + 0) + u(\xi + 0)\Delta^+ Q(\xi) = \Delta^+ F(\xi),
\end{gathered}
$$

а в точках $s \in S \subset (0, \ell)$ равенство

$$
-p(s + 0)u'_\mu(s + 0) + p(s - 0)u'_\mu(s - 0) + u(s)\Delta Q(s) = \Delta F(s).
$$

Из уравнения (3) также следует, что в точках $x = 0$ и $x = \ell$ верны равенства

$$
\begin{gathered}
p(\ell - 0)u'_\mu(\ell - 0) + u(\ell)\Delta^- Q(\ell) = \Delta^- F(\ell), \\
-p(+0)u'_\mu(+0) + u(0)\Delta^+ Q(0) = \Delta^+ F(0).
\end{gathered}
$$

Здесь обозначены $\Delta^- z(\xi) = z(\xi) - z(\xi - 0)$ — левый скачок, $\Delta^+ z(\xi) = z(\xi + 0) - z(\xi)$ — правый скачок, $\Delta z(\xi) = z(\xi + 0) - z(\xi - 0)$ — полный скачок.

Кроме того, в первой главе вводится понятие функции влияния, изучаются ее свойства, а также устанавливается корректность исследуемой модели малых деформаций разрывной струны с особенностями на концах.

Во второй главе «**Математические модели малых колебаний разрывной стилтьесовской струны**» в начале исследуется модель малых поперечных колебаний разрывной стилтьесовской струны, жестко закрепленной на концах, реализуемая в форме граничной задачи

$$
\begin{cases}
u''_{tt}(x,t)M'_{[\sigma]}(x) = (p(x)u'_\mu(x,t))'_{[\sigma]} - u(x,t)Q'_{[\sigma]}(x) + F'_{[\sigma]}(x,t), \\
u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \\
u(x,0) = \varphi(x), \\
u'_t(x,0) = \psi(x),
\end{cases}
\tag{6}
$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – форма и скорость струны в начальный момент времени, соответственно. Здесь $p(x)$, $F(x,t)$ – функции ограниченной вариации по переменной x на $[0, \ell]$, $\inf\limits_{[0,\ell]} p(x) > 0$. Функции $M(x)$, $\mu(x)$, $\sigma(x)$ строго возрастают на $[0, \ell]$, а $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$. Функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$

являются μ-абсолютно непрерывными, а $\varphi'_\mu(x)$, $\psi'_\mu(x)$ – функции ограниченной вариации на $[0,\ell]$. При этом $\varphi(0)=\varphi(\ell)=0$, $\psi(0)=\psi(\ell)=0$.

Решение $u(x,t)$ задачи (6) будем искать в классе функций E таких, что при каждом фиксированном t функция $u(x,t)$ является μ-абсолютно непрерывной по переменной x, при этом $u'_\mu(x,t)$ – функция ограниченной вариации по переменной x и непрерывна по переменной t. Функция $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной t; функция $u'_t(x,t)$ является функцией ограниченной вариации по переменной x. В данной главе также исследуется вопрос о возможности представления решения математической модели

$$\begin{cases} M'_{[\sigma]}(x)u''_{tt}(x,t) = \big(p(x)u'_\mu(x,t)\big)'_{[\sigma]} - u(x,t)Q'_{[\sigma]}(x), \\ u(0,t)=u(\ell,t)=0, \\ u(x,0)=\varphi(x), \\ u'_t(x,0)=\psi(x), \end{cases} \tag{7}$$

в виде ряда Фурье по собственным функциям спектральной задачи

$$\begin{cases} -(p(x)X'_\mu(x))'_{[\sigma]} + X(x)Q'_{[\sigma]}(x) = \lambda X(x)M'_{[\sigma]}(x), \\ X(0)=X(\ell)=0. \end{cases}$$

Теорема 1. (2.2.2) *Пусть функции $\mu(x)$, $M(x)$ строго возрастают, а $Q(x)$ не убывает на $[0,\ell]$. Функция $p(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0,\ell]$ и $\inf\limits_{[0,\ell]} p(x)>0$; функции $M(x)$, $p(x)$, $Q(x)$ – $[\sigma]$-абсолютно непрерывны $[0,\ell]$. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ μ-абсолютно непрерывны на $[0,\ell]$, производные $\varphi'_\mu(x)$ и $\psi'_\mu(x)$ имеют конечное на $[0,\ell]$ изменение; квазипроизводные $p(x)\varphi'_\mu(x)$ и $p(x)\psi'_\mu(x)$ $[\sigma]$-абсолютно непрерывны на $[0,\ell]$. Пусть функция $\dfrac{L(\psi)(x)}{M'_{[\sigma]}(x)}$ μ-непрерывна на $[0,\ell]$, где $LX=-(pX'_\mu)'_{[\sigma]}+XQ'_{[\sigma]}$; функция $\dfrac{L(\varphi)(x)}{M'_{[\sigma]}(x)}$ μ-абсолютно непрерывна на $[0,\ell]$ и ее производная является функцией ограниченной вариации. Предположим, что $\varphi(0)=\varphi(\ell)=L(\varphi)(0)=L(\varphi)(\ell)=\psi(0)=\psi(\ell)=0$. Тогда функция*

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t+\frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\right), \tag{8}$$

где $\varphi_k(x)$ – нормированная амплитудная функция, отвечающая соб-

ственному значению λ_k,

$$A_k = \int\limits_0^\ell \varphi_k(x)\varphi(x)\, d[M(x)], \quad B_k = \int\limits_0^\ell \varphi_k(x)\psi(x)\, d[M(x)],$$

является решением математической модели (7), причем ряд (8) можно дифференцировать почленно по t *дважды и по* μ, $[\sigma]$ *также дважды; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на прямоугольнике* $\overline{[0,\ell]}_\mu \times [0,T]$.

Доказана корректность изучаемой модели (6).

Далее во второй главе рассматривается математическая модель малых поперечных колебаний разрывной стилтьесовской струны, упруго закрепленной на левом ($x = 0$) и правом ($x = \ell$) концах. Для данной математической модели доказана корректность.

Для частных случаев исследуемых математических моделей найдены такие условия движения концов струны и такие внешние воздействия, которые позволяют перевести колебательный процесс в изучаемых моделях в заданный момент времени в заданное состояние.

В третье главе «**Адаптация метода конечных элементов для моделей с разрывными решениями**» к изучаемым в первой и второй главах моделям адаптируется метод конечных элементов, получены оценки сходимости приближенного решения к точному.

Для нахождения приближенного решения модели малых деформаций разрывной струны с особенностями на концах зафиксируем произвольное число $h > 0$. Предположим, что множество $S(\mu)$ конечное. Заменим всякую точку ξ разрыва функции $\mu(x)$ парой $\{\xi - 0, \xi + 0\}$ и обозначим полученное расширение отрезка $[0,\ell]$ через $\overline{[0,\ell]}_\mu$. Дополним $\overline{[0,\ell]}_\mu$ точками x_i^* непрерывности $\mu(x)$ так, чтобы на каждом промежутке $[0,\xi_1 - 0]$, $[\xi_1 + 0, \xi_2 - 0]$, ... $[\xi_n + 0, \ell]$ выполнялись неравенства $\mu(x_{i+1}^*) - \mu(x_i^*) < h$. Таким образом, мы получаем разбиение множества $\overline{[0,\ell]}_\mu$. Если же множество $S(\mu)$ счетное, то выберем сначала точки ξ_i, в которых $\Delta\mu(\xi_i) \geq \dfrac{h}{2}$. Заменив эти точки на пары $\{\xi_i - 0, \xi_i + 0\}$, рассмотрим аналогичное разбиение $\overline{[0,\ell]}_\mu$. Перенумеруем точки, входящие в разбиение, как $0 = x_0 < x_1 < ...x_N = \ell$. Базисные функции $\varphi_k(x)$, где

$k = 1, ..., N-1$, определим следующим образом:

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu(x) - \mu(x_{k-1})}{\mu(x_k) - \mu(x_{k-1})}, & \text{если } x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \dfrac{\mu(x_{k+1}) - \mu(x)}{\mu(x_{k+1}) - \mu(x_k)}, & \text{если } x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0, & \text{если } x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}] \end{cases} \tag{9}$$

Также определим базисные функции

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{\mu(x)-\mu(x_1)}{\mu(0)-\mu(x_1)}, \ x \in [0, x_1], \\ 0, \ \text{для остальных } x. \end{cases} \quad \varphi_N(x) = \begin{cases} \frac{\mu(x)-\mu(x_{N-1})}{\mu(\ell)-\mu(x_{N-1})}, \ x \in [x_{N-1}, \ell], \\ 0, \ \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Приближенное решение будем искать в виде $v(x) = \sum\limits_{i=0}^{N} v_i \varphi_i(x)$.

Введем скалярное произведение $\langle \varphi, \psi \rangle = \int\limits_0^\ell p \varphi'_\mu \psi'_\mu \, d\mu + \int\limits_0^\ell \varphi \psi \, d[Q]$.

Теорема 2. (3.1.1) *Пусть $u(x)$ – точное решение (3), $v(x)$ – приближенное решение, найденное с помощью описанного выше алгоритма. Тогда*

$$\langle u - v, u - v \rangle \le Ch,$$

причем, константа C не зависит от h.

Для изучаемой модели малых колебаний разрывной стилтьесовской струны с жестко закрепленными концами построен алгоритм нахождения приближенного решения, в рамках которого базисные функции $\varphi_k(x)$ определяются аналогично (9). Приближенное решение $u_N(x, t)$ задачи (6) будем искать в виде $u_N(x, t) = \sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k(t) \varphi_k(x)$, где $a_k(t)$ — неизвестные дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_k(x)$ — базисные функции.

Теорема 3. (3.2.1) *Пусть $p(x)$, $F(x, t)$ — функции ограниченной вариации на $[0, \ell]$, причем $\inf\limits_{[0,\ell]} p(x) > 0$. Функции $M(x)$, $\mu(x)$, строго возрастают на $[0, \ell]$, функция $Q(x)$ не убывает на $[0, \ell]$. Обозначим через $u(x, t)$ и $u_N(x, t)$ точное и приближенное решения математической модели (7).*

Пусть $\omega(x, t) = u(x, t) - u_N(x, t)$. Тогда

$$\max_{0 \le t \le T} \left(\int\limits_0^\ell \omega_t'^2(x, t) d[M] + \int\limits_0^\ell p(x) \omega_\mu'^2(x, t) d\mu + \int\limits_0^\ell \omega^2(x, t) d[Q] \right)^{\frac{1}{2}} \le C\sqrt{h}.$$

Для исследуемой модели деформации разрывной струны также приведены решения тестовых примеров, найденные с помощью описанного выше алгоритма. Вычислительные эксперименты были проведены с помощью программ, написанных на языке программирования Python.

Программы работают по следующему алгоритму. Задаются параметры модели. Затем находятся коэффициенты системы, которая составляется при реализации адаптированного метода конечных элементов. Потом полученная система решается и находится приближенное решение модели. По запросу пользователя строится либо график приближенного решения, либо таблица значений, которая может быть выведена на монитор или записана в файл. Для работы программ необходим интерпретатор языка Python, пакеты math, scipy.integrate, copy, time, pylab, matplotlib. Требования к программному окружению: операционная система Linux, Windows XP, 2003, 7.

Некоторые из результатов численных экспериментов приведены на графиках.

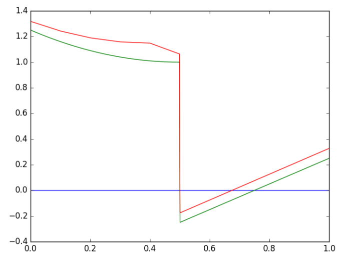

Рис. 1: *Графики точного и приближенного решений*

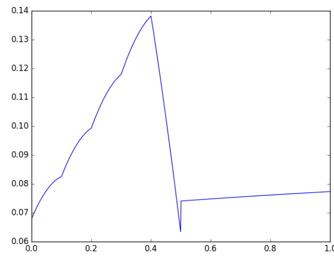

Рис. 2: *График погрешности при* $N = 10$

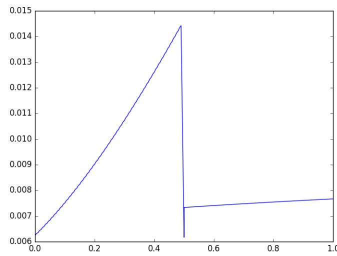

Рис. 3: *График погрешности при* $N = 100$

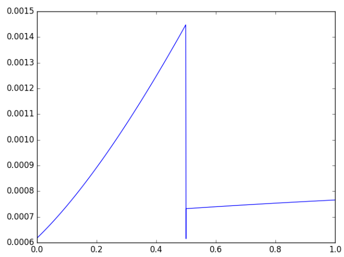

Рис. 4: *График погрешности при* $N = 1000$

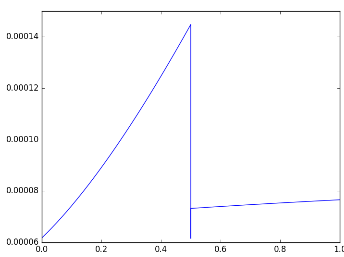

Рис. 5: *График погрешности при* $N = 10000$

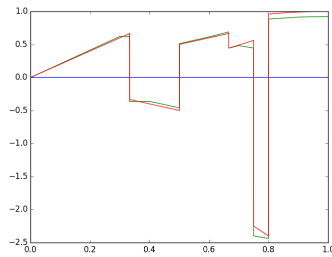

Рис. 6: *Графики точного и приближенного решений*

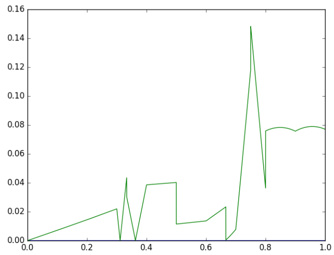

Рис. 7: *График погрешности при* $N = 10$

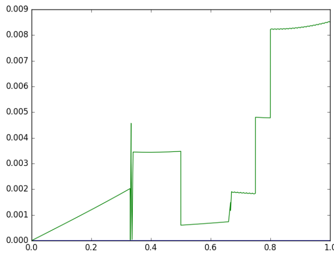

Рис. 8: *График погрешности при* $N = 100$

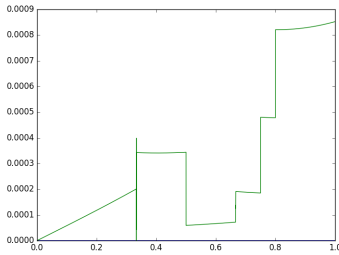

Рис. 9: *График погрешности при* $N = 1000$

В заключительной части изложены основные результаты диссертационной работы.

Основные результаты работы

В работе представлены качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей с сингулярной структурой, допускающие разрывные решения и формализованные в виде единого уравнения с производными по мере, численные методы и алгоритмы в виде комплексов проблемно-ориентированных программ. В частности,

— вариационное обоснование математических моделей с сингулярной структурой, допускающих разрывные решения и описывающих колебания и деформации одномерных упругих объектов с локализованными особенностями внешней среды;

— доказательство корректности полученных математических моделей;

— разработка эффективных численных методов приближенного решения математических моделей с сингулярной структурой, в том числе оценка сходимости;

— разработка эффективных алгоритмов нахождения решения математических моделей с сингулярной структурой, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Публикации по теме диссертации
Публикации в изданиях из перечня ВАК РФ

1. Зверева М.Б. Моделирование колебаний сингулярной струны / М.Б. Зверева, Ф.О. Найдюк, Ж.О. Залукаева // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 111–119.

2. Баев А.Д. Дифференциал Стилтьеса в моделировании колебаний струны с локализованными особенностями / А.Д. Баев, Ж.О. Залукаева, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 73–83.

3. Зверева М.Б. Моделирование колебаний разрывной струны для случая третьей краевой задачи / М.Б. Зверева, Ж.О. Залукаева, С.А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 134–142.

4. Залукаева Ж.О. О корректности математической модели вынужденных колебаний разрывной стилтьесовской струны с особенностями на концах / Ж.О. Залукаева // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 63–71.

5. Зверева М.Б. Об адаптации метода конечных элементов для задачи с разрывными решениями / М.Б. Зверева, С.А. Шабров, Ж.О. Залукаева //Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 112–120.

Публикации в других изданиях

6. Kamenskii M. The influence function properties for a problem with discontinuous solutions / Mikhail Kamenskii, Ching-Feng Wen, Zhanna Zalukaeva, Margarita Zvereva // Applied Analysis and Optimization. 2017. — Jokohama Publishers, Japan. — V.1, № 2. — P. 259–281.

7. Залукаева Ж.О. Моделирование колебаний разрывной стилтьесовской струны / Ж.О. Залукаева // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. Сборник научных трудов по материалам международной заочной научно-практической конференции / ВГЛТА — Воронеж, 2014 — № 5 ч. 2. — С. 66–68.

8. Залукаева Ж.О. Зависимость решения модели колебаний разрывной струны от начальных условий / Ж.О. Залукаева, М.Б. Зверева // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа. — Воронеж, 2015. — С. 46.

9. Залукаева Ж.О. Метод Фурье в моделировании колебаний разрывной стилтьесовской струны / Ж.О. Залукаева, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXVI». — Воронеж: ВГУ, 2015. — С. 92–94.

10. Залукаева Ж.О. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с разрывными решениями / Ж.О. Залукаева // Ак-

туальные направления научных исследований XXI века: теория и практика.Сборник научных трудов по материалам международной заочной научно-практической конференции / ВГЛТА — Воронеж, 2015 — № 5 ч. 1. — С. 33–36.

11. Залукаева Ж.О. Метод Фурье в задаче с разрывными решениями / Ж.О. Залукаева // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXVII». — Воронеж: ВГУ, 2016. — С. 105–106.

12. Залукаева Ж.О. О единственности решения смешанной краевой задачи с условиями третьего рода / Ж.О. Залукаева // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXVII». — Воронеж: ВГУ, 2016. — С. 106–107.

13. Залукаева Ж.О. Оценка сходимости в задаче о колебаниях разрывной струны / Ж.О. Залукаева, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Международной конференции Воронежская зимняя математическая школа. – Воронеж, 2017. — С. 94–96.

14. Залукаева Ж.О. Моделирование колебаний разрывной струны с упругим закреплением на концах / Ж.О. Залукаева // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXVIII». – Воронеж: ВГУ, 2017. — С. 70–71.

15. Залукаева Ж.О. Метод Фурье для задачи с разрывными решениями / Ж.О. Залукаева, М.Б. Зверева // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. Выпуск 7. Часть I. Материалы международной молодежной научной школы «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы»; – Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2017. — С. 91–93.

16. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / Залукаева Ж.О. // Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ. № 2012660330. 02.05.2017.