на правах рукописи

БУГАКОВА НАДЕЖДА ИГОРЬЕВНА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА РАЗНОПОРЯДКОВЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

05.13.18 — Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2018

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук, профессор,
Баев Александр Дмитриевич

Официальные оппоненты:

Горбунов Вячеслав Алексеевич, доктор физико–математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет», электроэнергетический факультет, кафедра информационных систем и технологий, заведующий

Лылов Евгений Владимирович, кандидат физико–математических наук, АО «Концерн «Созвездие», отдел НТЦ «Системы управления тактического звена», начальник

Ведущая организация

ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет».

Защита состоится «16» мая 2018 года в 15 час. 10 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 при ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1, главный корпус, ауд. 333.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/dissertations/5619/
Диссертация_Бугакова_Н.И..pdf

Автореферат разослан «6» марта 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико–математических наук,
доцент

Шабров Сергей Александрович

Актуальность темы

Несмотря на то, что математическое моделирование бурно развивается: расширяются объекты, как с позиций размерности, так и с учётом нелинейных составляющих изучаемого объекта, остаются объекты, моделирование различных процессов в которых либо трудно формалируемо, либо невозможно. Это особенно актуально в случае, когда математическая модель реализуется в виде граничной задачи. Трудности, которые возникают, как при анализе полученных моделей, так и при численном решении, вызваны отсутствием производных у решения (а в ряде случаев и «разрывностью» решения). Подобные проблемы обычно решаются с привлечением теории обобщенных функций (Завалищин С.Т., Сесекин А.Н., Дерр В.Я., Кинзебулатов Д.М., Владимиров В.С., Егоров Ю.В., Антосик П., Минусинский Я., Сикорский Р., Маслов В.П., Цупин В.А., Дыхта В.А., Самсонюк О.Н. и многие другие). Однако, на этом пути возникают трудности, например, проблема интерпретации умножения обобщенной на разрывную, которая в классическом пространстве D' (линейных непрерывных функционалов над D — пространством бесконечно дифференцируемых финитных функций) неразрешима. Эту проблему пытаются «обойти» переходя к алгебре обобщенных функций Коломбо. Но и на этом пути возникают определенные трудности и неудобства при анализе решений. Для дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих особенности типа δ-функции, удалось решить ряд вопросов качественной теории (Мышкис А.Д. и Владимиров А.А.). Слабая разрешимость краевых задач — это другая проблема, а для приложений этого недостаточно.

Главное направление развития здесь диктовала спектральная теория. В спектральных вопросах наиболее эффективны теория обобщенных функций и теория операторов (Гельфанд И.М., Шилов Г.Е., Гохберг И.Ц., Крейн М.Г., Левитан Б.М., Саргсян И.С., Като Т., Марченко В.А., Рид М., Саймон Б., Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден Х., Гасымов М.Г., Михайлец В.А., Винокуров В.А., Садовничий В.А., Нейман-заде М.И., Шкаликов А.А., Митягин Б.С., Хромов А.П., Савчук А.М., Ширяев Е.А., Djakov P., Джаков П., Hryniv R.O., Mykytyuk Ya.V. и многие другие).

Моделирование деформаций и колебательных процессов струнных и стержневых систем возникают во многих отраслях естествознания и техники, и здесь можно отметить работы В.А. Ильина, Нахушева А.М., Нахушевой В.А., Знаменской Л.Н., Чабакаури Г.Д., Бахвалова Н.С., Эглит М.Э., Боровских А.В. и многих других. В то же время, задачи в которых у внешней среды имелись локализованные особенности, приводящих к потере гладкости у решения, как правило, не рассматривались.

Еще одно направление развития — это качественная теория краевых задач на геометрическом графе, когда соответствующая граничная задача моделирует малые деформации системы, имеющей структуру графа. Такой подход очень эффективен, так как моделируемый объект занимает промежуточное положение между одномерными и двумерными объектами. В частности, для объектов имеющих разную структуру, приводящую к разным порядкам на различных ребрах (Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Боровских А.В., Прядиев В.Л., Лазарев К.П., Nicaise S., Lumer G., Lagnese J.E., Leugering G., Schmidt E.J.P.G., Белоглазова Т.В., Дикарева Е.В., Перловская Т.В.). Однако, при создании названной теории предполагалась достаточная гладкость коэффициентов (за исключением, быть может конечного числа точек). В последнее время для негладких на ребрах коэффициентов стали появляться работы (Зверева М.Б.) устраняющие этот пробел.

Работы Стилтьеса о нити с бусинками, Крейна М.Г. и Гантмахера Ф.Р., Крейна М.Г. и Каца И.С. о произвольно нагруженной струне, работы Келлога О. обозначили направление исследований в интересах физической теории колебаний. Через некоторое время исследования в этом направлении «замерли», и только после выхода работ Ю.В. Покорного в 1999 и 2002 годах в Докладах Российской Академии Наук, это направление получило новую жизнь, наряду с интегралом Стилтьеса было предложено использование производных Радона–Никодима. Это направление исследования показало свою эффективность в теории граничных задач второго и четвертого порядков: построена точная параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений (Покорный Ю.В., Шабров С.А., Зверева М.Б., Голованева Ф.В., Давыдова М.Б.), изучены некоторые вопросы математического моделирования колебаний струнных и стержневых систем (Лылов Е.В, Меач М.).

Цель работы. Разработка и развитие новых качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей сложной физической системы, состоящей и стержня и струны и помещенной во внешнюю среду, реализуемых в виде граничных и начально-граничных задач для дифференциальных уравнений; разработка и обоснование эффективных численных методов и алгоритмов. Реализация цепи исследования осуществляется решением следующих задач как теоретического, так и практического характера:

— вариационное обоснование математической модели, описывающей малые деформации системы, состоящей из стержня и струны, помещённой во внешнюю среду;

— вариационное обоснование математической модели, описывающей малые свободные и вынужденные колебания струнно-стержневой системы, помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями;

— доказательство корректности полученных математических моделей;

— изучение возможности применения метода Фурье;

— разработка эффективных численных методов решения граничных и начально-граничных задач для разнопорядкового уравнения;

— разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных и начально-граничных задач, а также разработка комплекса программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах;

— решение задач прикладного характера; нахождение приближенного решения математической модели, описывающей малые деформации струнно-стрежневой системы.

Объект исследования. Качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей систем, представляющих собой сложносочленённые одномерные конструкции, составленные из континуумов, которые взаимодействуют между собой только через связующие их точки.

Методы исследования. Разработанные в диссертационной работе методы исследования математических моделей сложносочлененных систем основаны на фундаментальных методах современного качественного анализа, теории интеграла и меры, функционального анализа.

Адаптированный метод конечных элементов для граничных и начально-краевых задач с локализованными особенностями, его обоснование, полученное с использованием последних разработок вычислительных методов для уравнений с особенностями.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, формализованных в виде единого уравнения с производными Радона-Никодима, численные методы и алгоритмы в виде комплексов проблемно-ориентированных программ.

1. Вариационное обоснование математической модели, описывающей малые деформации системы, состоящей из стержня и струны, помещённой во внешнюю среду, имеющей особенности, которые приводят к потере гладкости решения модели;

2. Вариационное обоснование математической модели, описывающей малые свободные и вынужденные колебания струнно-стержневой системы, помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями;

3. Доказательство корректности полученных математических моделей.

4. Разработка эффективных численных методов решения граничных и начально–краевых задач для разнопорядковых уравнений (методы построения аналогов метода конечных элементов для математических моделей и оценка близости приближенного решения к точному решению).

5. Разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных и начально–краевых задач, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Научная новизна. 1. В диссертационной работе предлагаются новые подходы при анализе математических моделей, основополагающим математическим обьектом которых является единое уравнение с производными по мере. 2. Доказана корректность разнопорядковых математических моделей с производными по мере. 3. Метод конечных элементов адаптирован для разнопорядковых математических моделей с производными по мере; доказана оценка близости приближенного решения к точному.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая и практическая значимость результатов и методов диссертационной рабо-

ты заключается в возможности их использования в качестве инструментария для исследования математических моделей, описывающих колебания одномерных объектов с внутренними особенностями и особенностями, возникающих из-за наличия дефектов у внешней среды.

Разработаны эффективные численные методы применительно к разнопрядковым математическим моделям с производными по мере. Представлены новые методы построения и анализа аналогов метода конечных элементов для граничных и начально-краевых задач с производными Радона-Никодима. Получены оценки близости приближенного решения к точному для изучаемых линейных математических моделей. Представлены результаты тестирования полученных численных методов с применением ЭВМ.

Область исследования. Область исследования и содержание диссертации соответствует формуле специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки), область исследования соответствует п.п. 2,3,4.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на конференциях «Современные методы теории краевых задач» на Воронежской весенней математической школе «Понтрягинские чтения» (Воронеж, 2015–2017 гг.), Академические Жуковские чтения (ВУНЦ ВВС ВВА, 2017 г.), «Современные методы теории функций и смежные проблемы» на Воронежской зимней математической школе (Воронеж, 2015, 2017 гг.) Конференция, посвященная 100-летию С. Г. Крейна (Воронеж, 2017 г.), на семинарах профессора А. Д. Баева (2014–2017 гг.), профессора М. И. Каменского (2015–2016 гг.).

Публикации. Все результаты, изложенные диссертационной работе, получены автором самостоятельно. Из совместных работ в диссертацию включены только результаты, полученные автором лично.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав, заключения, библиографического списка, состоящего из 71 наименование и 3 приложения, в котором приводятся листинги программ, написанных на Python и таблицы значений точного и приближенного решений и погрешности, которые получаются при проведении численных экспериментов. Работа изложена на 132 страницах и содержит 9 рисунков и 2 таблицы.

Основное содержание работы.

Во введении обоснована актуальность темы диссертационного исследования, определены его цели и задачи, перечислены методы исследования, представлены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе «Поточечный подход к изучению разнопорядковых систем» изучается модель малых деформаций механической системы, состоящей из растянутого стержня, один из концов которого защемлён, а к свободному — прикреплена растянутая струна, второй конец которой закреплён:

$$\begin{cases} (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma, \\ u(0) = u(l) = u'(0) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Решение задачи (1) мы ищем в классе абсолютно непрерывных на $[0, l]$ функций $u(x)$, первая производная которых абсолютно непрерывна на $[0, \xi]$, σ-абсолютно непрерывна на $[\xi, l]$; вторая производная u''_{xx}, определенная на $[0, \xi]$ имеет конечное изменение на $[0, \xi - \varepsilon]$ для любого $\varepsilon > 0$; $(pu''_{xx})(x)$ абсолютна непрерывна на $[0, \xi]$; $(pu''_{xx})'_x$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0, \xi]$.

Будем говорить, что граничная задача (1) невырождена, если однородная задача имеет только тривиальное решение.

Показано, что у невырожденной граничной задачи функция влияния существует и единственна в классе непрерывных функций.

Далее, изучается спектральная задача

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_\sigma + uQ'_\sigma = \lambda M'_\sigma u; \\ u(0) = u'(0) = u(l) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Доказана

Теорема 1. *Пусть $p(x), r(x), Q(x)$ и $F(x)$ — функции конечного на $[0, l]$ изменения, $Q(x)$ — не убывает на $[0, l]$ и $\inf\limits_{x\in[0,\xi)} p(x) > 0$, $\inf\limits_{x\in(\xi,l]} r(x) > 0$. Более того, пусть $\{\lambda_n\}$ — собственные значения задачи (2), причем каждое из них является простым. Тогда ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_n)^{2/3+\delta}}$$

сходится при любом $\delta > 0$.

Во второй главе диссертации «Математическая модель малых колебаний стержня и струны» изучается математическая модель

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial\sigma}(pu''_{xx})'_x + (ru')'_\sigma + F'_\sigma(x) - uQ'_\sigma, \\ u(0,t) = u'_x(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \psi_0(x); \\ u'_t(x,0) = \psi_1(x). \end{cases} \tag{3}$$

Дается вариационное обоснование избранного подхода.

Доказана единственность решения математической модели в классе E — множестве функций $u(x;t)$, частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)$ и $\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right)$, которых равномерно непрерывны на прямоугольнике $(0,\xi)\times[0;T]$, частные производные по переменной t непрерывны до второго порядка на прямоугольнике $[0;l]\times[0,T]$.

Показана возможность применения метода Фурье для получения решения, а именно доказана теорема.

Теорема 2. *Пусть $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$ и $M(x)$ — σ-абсолютно непрерывны; $M'_\sigma > m > 0$; пусть ψ_i — абсолютно непрерывны на $[0,l]$, производные ψ'_i имеют конечное на $[0,l]$ изменение, $\psi'_i(x)$ — абсолютно непрерывны на $[0,\xi]$, $\psi''_i(x)$ также абсолютно непрерывны на $[0,\xi]$; квазипроизводная $(p\psi''_i)'_x(x)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0,\xi]$, $(r\psi_i)'$ — σ-абсолютно непрерывна на $[\xi,l]$; функции $\dfrac{(L\psi_0)(x)}{M'_\sigma(x)}$ непрерывны на $[0,l]$, ее производная абсолютно непрерывна; $\psi_0(0) = \psi'_0(0) = \psi(l) = (L\psi_0)(0) = (L\psi'_0)(0) = (L\psi_0)(l) = \psi_1(0) = \psi'_1(0) = \psi_1(l) = 0$. Тогда функция*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\left(A_k\cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{B}{\sqrt{\lambda_k}}\sin\sqrt{\lambda_k}t\right), \tag{4}$$

где $\varphi_k(x)$ — нормированная амплитудная функция, отвечающая собственному значению λ_k,

$$A_k = \int\limits_0^l M'_\sigma(x)\varphi_k(x)\psi_0(x)d\sigma, \quad B_k = \int\limits_0^l M'_\sigma(x)\varphi_k(x)\psi_1(x)d\sigma,$$

является решением математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial\sigma}(pu''_{xx})'_x + (ru'_x)'_\sigma - uQ'_\sigma, \\ u(0,t) = u'_x(0,t) = u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \psi_0(x); \\ u'_t(x,0) = \psi_1(x). \end{cases}$$

причем ряд (4) *можно дифференцировать по* t *дважды и на* $[0;\xi]$ *четырежды: сначала трижды по* x*, потом по* σ*; на* $[\xi;l]$ *дважды: по* x *и по* σ*; полученные таким образом ряды сходятся абсолютно и равномерно на прямоугольнике* $[0;l]\times[0;T]$.

Третья глава «**Адаптация метода конечных элементов для разнопорядковых математических моделей с негладкими решениями**» посвящена адаптации метода конечных элементов для нахождения приближенного решения изучаемых математических моделей.

Приближенное решение $u_N(x)$ математической модели

$$\begin{cases} (p(x)u''_{xx})''_{x\sigma} - (ru'_x)'_x + uQ'_\sigma = f(x), \\ u(0) = u'_x(0) = 0; \\ u(l) = 0 \end{cases}$$

будем искать в виде

$$u_N(x;t) = \sum_{k=1}^{N} a_k\varphi_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{N} b_k\varphi_{2k}(x) + \sum_{k=2N+1}^{3N-1} a_k\varphi_k(x),$$

где a_k, b_k — значения функции и ее производной в узловой точке, $\varphi_k(x)$ — базисные функции, определенные следующим образом. Каждый из отрезков $[0;\xi]$ и $[\xi;l]$ мы разобьем на N равных частей; точки разбиения мы обозначим через $\overline{x}_i \in [0;\xi]$ и $\overline{\overline{x}}_i \in [\xi;l]$. Тогда

$$\varphi_{2i-1}(x) = \begin{cases} 1 - 3\left(\dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_i - \overline{x}_{i-1}}\right)^2 - 2\left(\dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_i - \overline{x}_{i-1}}\right)^3 & \text{для } x \in [\overline{x}_{i-1};\overline{x}_i]; \\ 1 - 3\left(\dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_{i+1} - \overline{x}_i}\right)^2 + 2\left(\dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_{i+1} - \overline{x}_i}\right)^3 & \text{для } x \in [\overline{x}_i;\overline{x}_{i+1}]; \\ 0, \text{ для остальных } x. \end{cases}$$

$$\varphi_{2i}(x) = \begin{cases} (x-\overline{x}_i)\left(1 + \dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_i - \overline{x}_{i-1}}\right)^2 & \text{для } x \in [\overline{x}_{i-1};\overline{x}_i]; \\ (x-\overline{x}_i)\left(1 - \dfrac{x-\overline{x}_i}{\overline{x}_{i+1} - \overline{x}_i}\right)^2 & \text{для } x \in [\overline{x}_i;\overline{x}_{i+1}]; \\ 0, \text{ для остальных } x; \end{cases}$$

$(i = 1, 2, \ldots, N-1)$.

$$\varphi_{2N-1}(x) = \begin{cases} 1 - 3\left(\dfrac{x-\xi}{\xi - \overline{x}_{N-1}}\right)^2 - 2\left(\dfrac{\overline{\overline{x}} - \xi}{\xi - \overline{x}_{N-1}}\right)^3, \text{ для } x \in [\overline{x}_{N-1}; \xi]; \\ \dfrac{x - \overline{\overline{x}}_1}{\xi - \overline{\overline{x}}_1}, \text{ для } x \in [\xi; \overline{\overline{x}}_1]; \\ 0, \text{ для остальных } x. \end{cases}$$

$$\varphi_{2N}(x) = \begin{cases} (x-\xi)\left(1 + \dfrac{x-\xi}{\xi - \overline{x}_{N-1}}\right)^2, \text{ для } x \in [\overline{x}_{N-1}; \xi]; \\ 0, \text{ для остальных } x; \end{cases}$$

$$\varphi_{i+2N}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \overline{\overline{x}}_{i-1}}{\overline{\overline{x}}_i - \overline{\overline{x}}_{i-1}}, \text{ для } x \in [\overline{\overline{x}}_{i-1}; \overline{\overline{x}}_i]; \\ \dfrac{x - \overline{\overline{x}}_{i+1}}{\overline{\overline{x}}_i - \overline{\overline{x}}_{i+1}}, \text{для } x \in [\overline{\overline{x}}_i; \overline{\overline{x}}_{i+1}]; \\ 0, \text{ для остальных } x; \end{cases}$$

$(i = 1; \ldots N-1)$.

Доказаны теорема.

Теорема 3. *Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели (1), $v(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов при разбиении на N равных частей каждого из отрезков $[0; \xi]$ и $[\xi; 1]$. Тогда справедлива оценка*

$$a(u - v, u - v) \leqslant C \cdot h,$$

где $h = \max\left\{\left(\dfrac{\xi}{N}\right)^2; \dfrac{1-\xi}{N}\right\}$, C не зависит от h, и $a(u, u)$ — энергетическая норма:

$$a(u, u) = \int\limits_0^{\xi} u''^2\, dx + \int\limits_0^1 r u'^2\, dx + \int\limits_0^1 u^2\, dQ.$$

Приближенное решение $u_N(x; t)$ математической модели

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{\partial}{\partial x}(p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}) - u\frac{dQ}{d\sigma} + f(x; t); \\ u(0, t) = 0; \\ u'_x(0, t) = 0; \\ u(l, t) = 0; \\ u(x, 0) = \psi_0(x); \\ u'_t(x, 0) = \psi_1(x), \end{cases}$$

будем искать в виде

$$u_N(x;t) = \sum_{k=1}^{3N-1} a_k(t)\varphi_k(x),$$

где $a_k(t)$ — неизвестные дважды непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_k(x)$ — базисные функции, определенные выше.

Доказана теорема.

Теорема 4. *Пусть $M'_\sigma(x) > 0$, $Q'_\sigma(x) > 0$, $p(x) > 0$ на $[0;\xi]$, $r(x) > 0$ на $[\xi;l]$ и начальные условия таковы, что математическая модель*

$$\begin{cases} M'_\sigma(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{\partial}{\partial x}(p(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) + \frac{\partial}{\partial\sigma}(r(x)\frac{\partial u}{\partial x}) - u\frac{dQ}{d\sigma} + f(x;t), \\ u(0,t) = 0; \\ u'_x(0,t) = 0; \\ u(l,t) = 0, \\ u(x,0) = \psi_0(x); \\ u'_t(x,0) = \psi_1(x), \end{cases}$$

имеет единственное решение в классе E; $u(x,t)$ и $v(x,t)$ — точное и приближенное, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов, решения. Тогда справедливо неравенство

$$\max_t \{(w(\cdot,t);w(\cdot,t)) + [w(\cdot,t);w(\cdot,t)]\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{c}\cdot\sqrt{h}. \tag{5}$$

Здесь

$$(\varphi,\psi) = \int_0^l \varphi(x)\varphi(x)M'_\sigma d\sigma,$$

$$[\varphi,\psi] = \int_0^l p\varphi''_{xx}\psi''_{xx}dx + \int_0^l r\varphi'_x(x)\psi'_x dx + \int_0^l \varphi\psi dQ.$$

Проведены численные эксперименты с помощью комплекса программ, написанных языке программирования Python.

Дано описание алгоритма комплекса программ.

Приложение содержит листинги программ, написанных на языке Python.

Программа работает по следующему алгоритму. Задаются коэффициенты модели. Затем находятся коэффициенты системы, которая составляется при реализации адаптированного метода конечных элементов. Потом полученная система решается, и получается приближенное решение. Строится либо график, либо таблица значений. Схема взаимодействия модулей скрипта довольно проста, и представлена на рисунке 1.

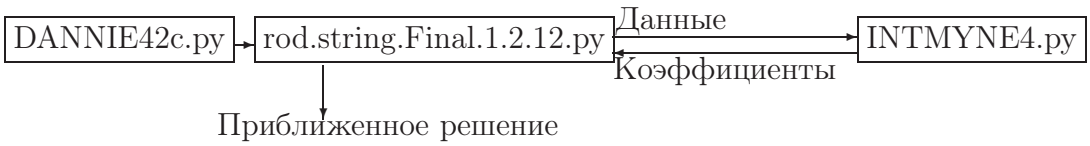

Рис. 1. *Схема взаимодействия модулей*

Общие сведения о программе. Программа называется rod.string.Final.1.2.12. Для работы программы необходим интерпретатор языка Python, пакеты math, scipy.integrate, copy, time, pylab и matplotlib.

Для нормальной работы программы необходимо порядка 1 Гб оперативной памяти. Объём исходного текста составляет 9264 байта.

Функциональное назначение. Предназначена для нахождения приближенного решения модели малых деформаций системы, состоящей из стержня и струны, по заданным параметрам модели.

Структура программы. В модуле с названием DANNIE2.py задаются параметры модели. Из консоли запускается скрипт rod.string.Final.1.2.12, который спрашивает количество шагов и необходимое действие (построить график приближенного решения или записать значения приближенного решения в текстовый файл). Затем находятся коэффициенты системы, которая составляется при реализации адаптированного метода конечных элементов. Потом полученная система решается, и получается приближенное решение.

Требования к программному окружению. Операционная система Linux, Windows XP, 2003, 7.

Эксплуатация программы. Для запуска программы необходимо задать параметры модели: $M(x)$, $p(x)$, $r(x)$, $Q(x)$, $F(x)$, ξ_i, которые необходимо ввести в файл с именем DANNIE2.py, и другие параметры, которые вводятся с клавиатуры. На выходе будет получен либо график

приближенного решения, либо таблица приближенного решения, которая может быть записана в файл. После задания параметров достаточно запустить скрипт с именем rod.string.Final.1.2.12.

На выходе будет получен график приближенного решения модели.

На рисунках 2 и 3 представлена работающая программа на Python'е до задания n и выбора вывода результата соответственно.

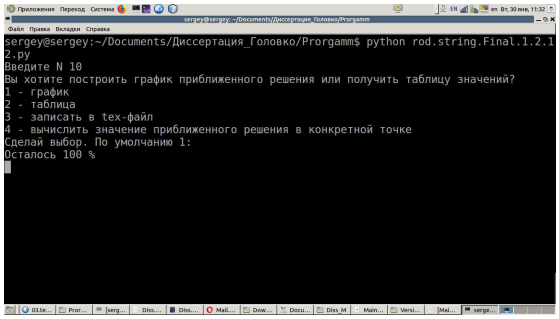

Рис. 2. *Запущенная программа на Python'е*

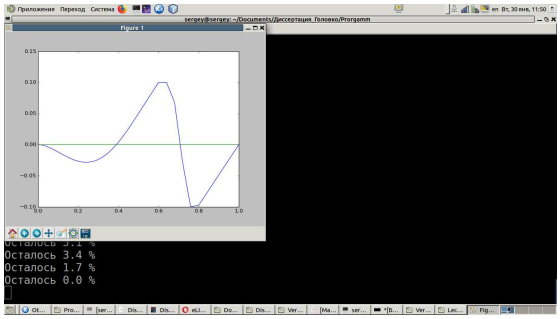

Рис. 3. *Запущенная программа на Python'е*

На рисунках 4–11 представлены геометрическая интерпретация некоторых фрагментов численных расчетов.

Все проведенные численные эксперименты подтверждают теоретическую оценку погрешности.

В заключении излагаются основные результаты диссертации.

Основные результаты работы:

1. Вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации и колебания колебания системы, состоящей из струны и стержня, помещенной во внешнюю среду с локализованными особенностями, которые приводят к потере гладкости решения модели.

2. Доказательство корректности полученных математических моделей.

3. Разработка эффективных численных методов решения граничных задач для разнопорядковых уравнений (методы построения аналогов метода конечных элементов для математических моделей и оценка близости приближенного решения к точному решению).

4. Разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных задач, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

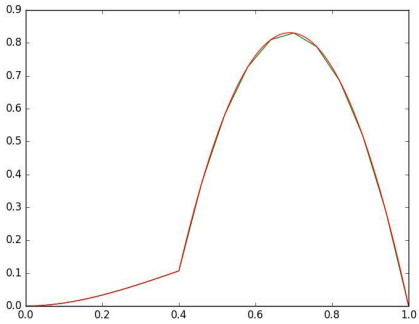

Рис. 4. *Точное и приближенное решения при* $N = 10$

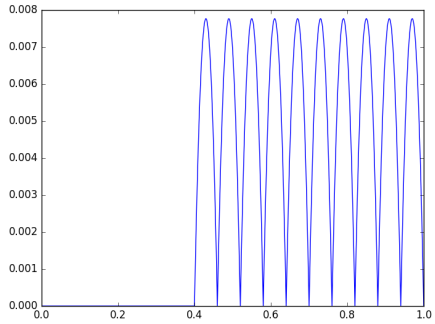

Рис. 5. *Погрешность при* $N = 10$

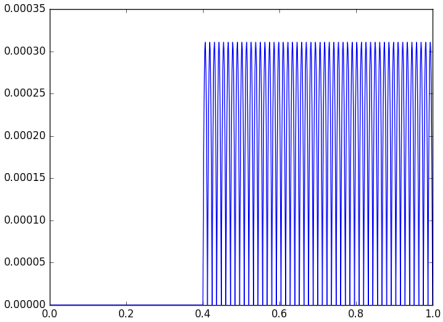

Рис. 6. *Погрешность при* $N = 50$

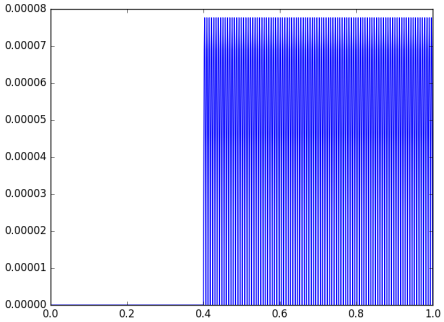

Рис. 7. *Погрешность при* $N = 100$

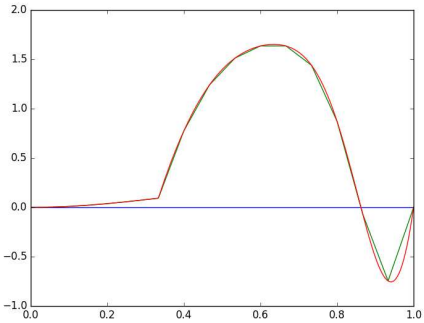

Рис. 8. *Точное и приближенное решения при* $N = 10$

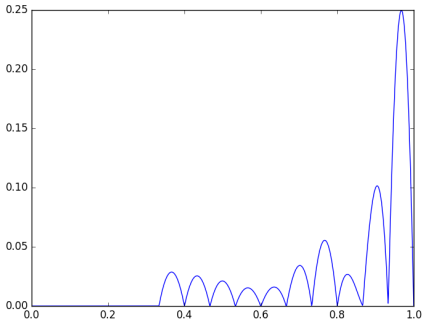

Рис. 9. *Погрешность при* $N = 10$

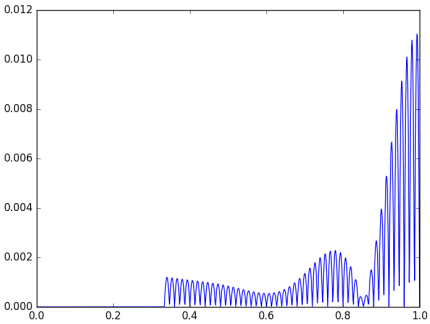

Рис. 10. *Погрешность при* $N = 50$

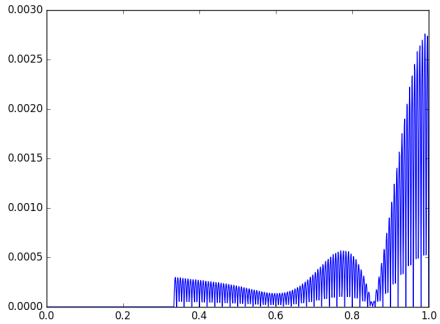

Рис. 11. *Погрешность при* $N = 100$

Публикации по теме диссертации:

1. Шабров С.А. О скорости роста собственных значений одной разнопорядковой спектральной задачи с производными по мере / С.А. Шабров, Н.И. Головко // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2015. — № 3. — С. 186–195.

2. Головко Н.И. О возможности применения метода Фурье к разнопорядковой математической модели / Н.И. Головко, Ф.В. Голованёва, М.Б. Зверева, С.А. Шабров // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2017. — № 1. — С. 91–98.

3. Шабров С.А. Адаптация метода конечных элементов для разнопорядковой математической модели / С.А. Шабров, Н.И. Бугакова, Ф.В. Голованёва // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. — 2017. — № 4. — С. 120–129.

4. Головко Н. И. О методе конечных элементов для разнопорядковой модели / Н. И. Головко, Т. А. Иванникова, Е. В. Тимашова, С. А. Шабров // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения — XXIV». — Воронеж: ВГУ, 2013. — С. 55–57.

5. Головко Н.И. О корректности одной разнопорядковой математической модели / Н. И. Головко // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — Т.2. — 2014. — С.27-29.

6. Головко Н.И. Корректность разнопорядковой математической модели с негладкими решениями / Н. И. Головко // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — Т.3. — 2015. — С.22-26.

7. Головко Н.И. О корректности одной разнопорядковой математической модели / Н. И. Головко, С. А. Шабров // Современные методы теории функции и смежные проблемы. Материалы международной конференции. — 2014. — С.37-39.

8. Головко, Н. И. О применении метода Фурье к разнопорядковой математической модели / Н. И. Головко // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции. Воронежская весенняя математическая школа. — 2017. — С. 185–187.

9. Бугакова, Н. И. Об адаптации метода конечных элементов для разнопорядковой математической модели, описывающей малые вынужденные колебания струнно-стержневой системы / Н. И. Бугакова // Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Селима Григорьевича Крейна, 13–19 ноября 2017 г. — 2017. — С. 57–60.

10. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

Работы 1–3 из перечня ВАК РФ.