На правах рукописи

Коваль Карина Александровна

Операторный подход к краевым, спектральным и начально-краевым задачам сопряжения

Специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико–математических наук

Воронеж – 2018

Работа выполнена на кафедре математического анализа ФГАОУ ВО Крымского федерального университета им. В.И. Вернадского

Научный руководитель:
доктор физико–математических наук, профессор
Копачевский Николай Дмитриевич.

Официальные оппоненты:

Власов Виктор Валентинович
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова, кафедра математического анализа, профессор;

Муравник Андрей Борисович
доктор физико-математических наук, АО Концерн "Созвездие"
(г. Воронеж), руководитель проекта.

Ведущая организация:
ФГАОУ ВПО Южный федеральный университет,
г. Ростов-на-Дону

Защита состоится 22 мая 2018г. в 15.10 на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 в ФГБОУ ВО Воронежский государственный университет по адресу: 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте
http://www.science.vsu.ru/dissertations/5679/Диссертация_Коваль_К.А..pdf

Автореферат разослан «____» марта 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гликлих Юрий Евгеньевич

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Задачи сопряжения с 60-х годов XX века рассматривались во многих работах. В частности, такими задачами занимались Б.З. Каценеленбаум, Н.Н. Войтович, А.Н. Сивов. Эти задачи не всегда являлись самосопряжёнными, но иногда они были "бесконечно близкими" к самосопряжённым задачам.

Исходным для исследования краевых и спектральных задач в липшицевых областях, а также соответствующих задач сопряжения стали работы М.С. Аграновича и его лекции в ежегодной Крымской Осенней Математической Школе (Ласпи-Батилиман, 1990–2016). С другой стороны, многочисленные приложения, в частности, в задачах гидродинамики (колебания системы жидкостей в частично заполненном сосуде, колебания жидкого топлива в баке космической ракеты), которыми много лет занимался научный руководитель автора, Копачевский Н.Д., требовали детального рассмотрения краевых задач в негладких, в частности, в липшицевых областях.

Общие подходы, которые применялись при исследовании этих проблем, побуждали рассматривать их на базе абстрактной формулы Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа) и теории слабых (вариационных) решений краевых задач. Отсюда возник интерес к развитию теории абстрактной формулы Грина.

Один из первых вариантов абстрактной формулы Грина доказал Ж.-П. Обэн. С.Г. Крейн также занимался этими вопросами. Далее, в монографии Р. Шоуволтера существенно использовалась абстрактная формула Грина в форме Ж.-П. Обэна. В последние годы развитию теории абстрактной формула Грина и её конкретных реализаций в теории упругости, гидродинамике и др. посвящены работы Н.Д. Копачевского.

Цель диссертационной работы. Главная цель данной работы — разработать общую схему решения смешанных краевых задач сопряжения и показать, что она также применима для спектральных и начально-краевых задач, причём для разных конфигураций областей с липшицевыми границами, разбитыми на липшицевы куски.

Методы исследований. В настоящей диссертации используется метод представления решения сложной неоднородной задачи сопряжения в виде суперпозиции простых задач, содержащих неоднородность лишь в одном месте.

При этом оказывается, с помощью соответствующих формул Грина, что решением исходной задачи является сумма решений вспомогательных краевых задач.

При исследовании спектральных проблем сопряжения в работе использованы также методы спектральной теории операторных пучков для свойств решений полученного операторного пучка с двумя параметрами. Один из параметров считается спектральным, другой — фиксированным, и в зависимости от этого получаются выводы о структуре спектра, базисности собственных функций и асимптотике собственных значений.

Для изучения начально–краевых задач, порождающих спектральные, использованы операторные методы математической физики в областях с липшицевыми границами. С их помощью изучаемые задачи приводятся к задачам Коши для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, и на этой основе доказываются теоремы об их сильной разрешимости.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми, получены лично автором с помощью научного руководителя.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы в различных вопросах математической физики, в частности, в гидродинамике.

Результаты и положения, выносимые на защиту.

1. Разработана и обоснована общая схема исследования операторными методами смешанных краевых задач сопряжения. Эта схема применяется к различным конфигурациям пристыкованных областей.

2. Аналогичный подход применён к спектральным задачам сопряжения для одной, двух и трёх примыкающих областей. Итогом исследования является переход к операторному пучку, который далее изучается методами спектральной теории операторных пучков.

3. Общая схема применена также к начально–краевым задачам, которые порождают спектральные. Рассмотрены четыре типа различных задач. Для каждого типа осуществлён переход к задаче Коши для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве, а затем доказывается существование её сильного (по времени) решения.

Апробация работы. Результаты диссертации трижды докладывались автором на международной конференции «Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам», Батилиман, 2015–2017 гг. (см. [9], [14], [16]), на международной конференции "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-VI"в Ростове-на-Дону, 2016 г. (см. [12]), на XXIV международной конференции "Математика. Экономика. Образование."Абрау Дюрсо, 2016 г. (см. [13]), на научных конференциях "Дни науки КФУ" в КФУ им. В.И. Вернадского, Симферополь, 2014–2017 гг. (см. [17]), на семинаре кафедры математического анализа КФУ им. В.И. Вернадского.

Публикации. Основные результаты диссертации в работах [1] – [17]. Работы [4], [6], [7] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных работ [1] – [5] и [9] – [15] в диссертацию вошли результаты, полученные диссертанткой лично.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения. Общий объем диссертации составляет 150 страниц. Список литературы содержит 68 наименований.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований.

В первой главе диссертации приводятся основные формулы Грина, используемые в данной работе. В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей Γ, разбитой липшицевы куски Γ_k, $k = \overline{1,l}$ для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $\widehat{H}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, и оператора следа $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma\eta := \eta|_\Gamma$, справедлива первая формула Грина для смешанных краевых задач:

$$\langle \eta, u - \triangle u \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \sum_{k=1}^{l} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall\, \eta,\ u \in \widehat{H}^1(\Omega), \qquad (1)$$

$$u - \triangle u \in (H^1(\Omega))^*,\ \gamma_k \eta := \eta\,|_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),$$
$$\partial_k u = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,l}. \qquad (2)$$

Здесь символом $\langle\varphi,\psi\rangle_{H_0}$ обозначено значение функционала $\psi\in H_-$ на элементе $\varphi\in H_+$ для оснащения $H_+\hookrightarrow H_0\hookrightarrow H_-$. В формуле (1) следы функций $\gamma_k\eta\in\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ продолжи́мы нулем с липшицевого куска границы Γ_k на всю $\Gamma=\partial\Omega$ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$. Пространство, которому принадлежат такие функции, обозначено символом $\widehat{H}^1(\Omega)\subset H^1(\Omega)$ (см. работу Н.Д. Копачевского "Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и полуторалинейных форм").

Во втором варианте формулы Грина (см. ниже) производные по внешней нормали продолжи́мы нулем в классе $H^{-1/2}(\Gamma):\partial_k u\in\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$. Пространства таких функций обозначены $\check{H}^1(\Omega)\subset H^1(\Omega)$. Для этих функций справедлива следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач:

$$(\eta,u)_{H^1(\Omega)}=\langle\eta,u-\triangle u\rangle_{L_2(\Omega)}+\sum_{k=1}^{l}\langle\gamma_k\eta,\partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)},\quad\forall\,\eta,\ u\in\check{H}^1(\Omega),\tag{3}$$

$$u-\Delta u\in(H^1(\Omega))^*,\quad \gamma_k\eta:=\eta\,|_{\Gamma_k}\in H^{1/2}(\Gamma_k),\tag{4}$$

$$u=u_0+u_h,\ \gamma u_0=0,\quad \partial_k u_h=(\partial u_h/\partial n)_{\Gamma_k}\in\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k),\ k=\overline{1,l};$$

$$u_0\in H_0^1(\Omega):=\{u\in H^1(\Omega):\gamma u=0(\text{на }\partial\Omega)\},$$

$$u_h\in H_h^1(\Omega):=\{u\in H^1(\Omega):u-\triangle u=0\}.$$

С использованием этих формул Грина в работе разработана общая схема исследования смешанных краевых задач сопряжения (Глава 1). Она также применима для спектральных, начально-краевых задач и для разных конфигураций областей (Главы 2 и 3). Схема заключается в том, что решение неоднородной краевой задачи сопряжения разыскивается в виде суммы решений вспомогательных задач, содержащих неоднородность лишь в одном месте — либо в уравнении, либо в одном из краевых условий.

Сначала эта схема проверяется и подробно описывается (см. п. 1.2.3) на примере задачи сопряжения для конфигурации из трёх областей, которая названа "дважды разрезанный банан" (см. рис. 1 на с. 11, первый вариант). Необходимо найти такие функции $u_j(x)\in H^1(\Omega_j),\ j=\overline{1,3}$, что для них выполнены уравнения

$$u_j-\triangle u_j=f_j\ (\text{в }\Omega_j),\ j=\overline{1,3},\tag{5}$$

внешние граничные условия Дирихле

$$\gamma_{jj}u_j=\varphi_j\ (\text{на }\Gamma_{jj}),\ j=\overline{1,3},\tag{6}$$

и условия сопряжения на стыках:

$$\gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = \varphi_{21},\ \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{21}\ (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}), \tag{7}$$

$$\gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = \varphi_{32},\ \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3 = \psi_{32}\ (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}), \tag{8}$$

где f_j — заданные функции в Ω_j, $j = \overline{1,3}$, φ_j — заданные функции на внешних границах Γ_{jj}, $j = \overline{1,3}$, функции φ_{21} и φ_{32} задают разрывы следов, а ψ_{21} и ψ_{32} — разрывы производных по внешним нормалям на границах стыка областей.

Эта общая схема состоит из четырех этапов. Первый этап — вспомогательная задача Зарембы, у которой уравнения и условия Неймана на стыке однородные, а условия Дирихле на внешних границах неоднородные:

$$u_{11} - \triangle u_{11} = 0\ (\text{в } \Omega_1),\ \gamma_{11}u_{11} = \varphi_1\ (\text{на } \Gamma_{11}),\ \partial_{21}u_{11} = 0\ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}); \tag{9}$$

$$\begin{gathered} u_{12} - \triangle u_{12} = 0\ (\text{в } \Omega_2),\ \gamma_{22}u_{12} = \varphi_2\ (\text{на } \Gamma_{22}),\\ \partial_{12}u_{12} = 0\ (\text{на } \Gamma_{12} = \Gamma_{21}),\ \partial_{32}u_{12} = 0\ (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}); \end{gathered} \tag{10}$$

$$u_{13} - \triangle u_{13} = 0\ (\text{в } \Omega_3),\ \gamma_{33}u_{13} = \varphi_3\ (\text{на } \Gamma_{33}),\ \partial_{23}u_{13} = 0\ (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}). \tag{11}$$

С помощью соответствующей формулы Грина (см. (3), (4)) дано определение слабого решения этой проблемы и на этой основе получен следующий результат.

Теорема 1. *Каждая из задач Зарембы (9)–(11) имеет единственное слабое решение* $u_{1k} \in H^1_{0,\Gamma_{kk}}(\Omega_k) \cap H^1_h(\Omega_k)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_{kk}),\ k = \overline{1,3}. \tag{12}$$

□

Вторая вспомогательная задача — это задача Стеклова, где неоднородности остаются лишь в разрыве следов на границах стыка областей и задаются с учетом решения предыдущей вспомогательной задачи Зарембы:

$$\begin{gathered} u_{2k} - \triangle u_{2k} = 0\ (\text{в } \Omega_k),\quad \gamma_{kk}u_{2k} = 0\ (\text{на } \Gamma_{kk}),\\ \gamma_{21}u_{21} - \gamma_{12}u_{22} = \widetilde{\varphi}_{21} := \varphi_{21} - \gamma_{21}u_{11} + \gamma_{12}u_{12},\\ \partial_{21}u_{21} = -\partial_{12}u_{22}(=: \chi_{21})\ (\text{на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}),\\ \gamma_{32}u_{22} - \gamma_{23}u_{23} = \widetilde{\varphi}_{32} := \varphi_{32} - \gamma_{32}u_{12} + \gamma_{23}u_{13},\\ \partial_{32}u_{22} = -\partial_{23}u_{23}(=: \chi_{32})\ (\text{на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}). \end{gathered} \tag{13}$$

Здесь установлен следующий результат.

Теорема 2. *Пусть в задаче (13) выполнены условия*

$$\varphi_{21} \in H^{1/2}(\Gamma_{21}), \quad \varphi_{32} \in H^{1/2}(\Gamma_{32}), \tag{14}$$

а также условия согласования

$$\widetilde{\varphi}_{21} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{21}), \ \widetilde{\varphi}_{32} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_{32}).$$

Тогда задача Стеклова (13) имеет единственное слабое решение

$$u_{(2)} = (u_{21}; u_{22}; u_{23})^{\tau} \in H^1_{0,\Gamma_{11},h}(\Omega_1)(\dot{+})H^1_{0,\Gamma_{22},h}(\Omega_2)(\dot{+})H^1_{0,\Gamma_{33},h}(\Omega_3).$$

□

Далее на третьем этапе рассматривается первая вспомогательная задача С. Крейна; в ней неоднородны лишь уравнения, а все граничные условия являются однородными:

$$\begin{gathered} u_{3k} - \triangle u_{3k} = f_k \ (\text{в } \Omega_k), \quad \gamma_{kk} u_{3k} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{kk}), \ k = \overline{1,3}, \\ \gamma_{21} u_{31} - \gamma_{12} u_{32} = 0, \qquad \partial_{21} u_{31} + \partial_{12} u_{32} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{21}), \\ \gamma_{32} u_{32} - \gamma_{23} u_{33} = 0, \qquad \partial_{32} u_{32} + \partial_{23} u_{33} = 0 \ (\text{на } \Gamma_{32}). \end{gathered} \tag{15}$$

Итогом рассмотрения этой задачи является следующий вывод.

Теорема 3. *Первая вспомогательная задача С.Крейна (15) имеет единственное слабое решение $u_{(3)} \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f := (f_1; f_2; f_3)^{\tau} \in (H^1_{0,\Gamma}(\Omega))^*,$$

$$H^1_{0,\Gamma}(\Omega) := \{(u_1; u_2; u_3) \in H^1(\Omega), \ \gamma_{kk} u_k = 0 \ (\textit{на } \Gamma_{kk}), \ k = \overline{1,3},$$

$$\gamma_{21} u_1 - \gamma_{12} u_2 = 0 \ (\textit{на } \Gamma_{21}), \ \gamma_{32} u_2 - \gamma_{23} u_3 = 0 \ (\textit{на } \Gamma_{32})\}.$$

Это решение выражается формулой

$$u_{(3)} = A^{-1} f,$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_{0,\Gamma}(\Omega);\ L_2(\Omega))$.

□

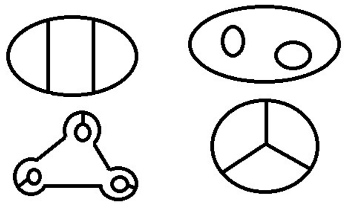

Рис 1

Последний четвёртый этап — вторая вспомогательная задача С. Крейна; здесь неоднородными являются лишь граничные условия типа Неймана:

$$\begin{aligned} &u_{4k} - \triangle u_{4k} = 0 \text{ (в } \Omega_k), && \gamma_{kk} u_{4k} = 0 \text{ (на } \Gamma_{kk}),\ k = \overline{1,3}; \\ &\gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} = 0, && \partial_{21} u_{41} + \partial_{12} u_{42} = \psi_{21} \text{ (на } \Gamma_{21} = \Gamma_{12}), \\ &\gamma_{32} u_{42} - \gamma_{23} u_{43} = 0, && \partial_{32} u_{42} + \partial_{23} u_{43} = \psi_{32} \text{ (на } \Gamma_{32} = \Gamma_{23}). \end{aligned} \tag{16}$$

С помощью соответствующей формулы Грина (см. (1), (2)) доказывается следующее утверждение.

Теорема 4. *Вторая вспомогательная задача С.Крейна (16) имеет единственное слабое решение* $u_{(4)} \in H^1_{0,\Gamma}(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\psi_{21} \in H^{-1/2}(\Gamma_{21}),\ \psi_{32} \in H^{-1/2}(\Gamma_{32}). \tag{17}$$

$\square$

Итогом рассмотрения исходной смешанной краевой задачи сопряжения (6)–(8) является следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия, обеспечивающие существование обобщённых формул Грина (1)–(4). Тогда задача сопряжения (5)–(8) имеет единственное слабое решение в том и только в том случае, когда выполнены условия теорем 1–4. При этом её решение — сумма решений четырёх вспомогательных задач.* $\square$

Далее в параграфах 1.2.4, 1.2.5, 1.2.6 эта схема применяется к различным конфигурациям пристыкованных областей Ω_k в случае, когда области Ω_k разбиты на липшицевы куски с липшицевыми границами этих кусков (см. рис.1). Для каждой из них слабое решение ищется в виде суммы решений вспомогательных задач.

Отметим ещё, что общий подход, применённый здесь на основе обобщённых формул Грина для дифференциального выражения $u - \triangle u$ и пространства $H^1(\Omega)$, по этой же схеме может быть осуществлён как для абстрактной формулы Грина, так и для соответствующих обобщённых формул Грина в задачах теории упругости, гидродинамики и в других проблемах.

Результаты первой главы опубликованы в работах [3], [4], [5].

Во второй главе на основе вышеизложенного подхода для краевых задач рассматриваются спектральные задачи сопряжения. Сначала изучается следующая спектральная проблема для одной области (параграф 2.1.1).

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega =: \Gamma$, разбитой на четыре липшицевых куска Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k,\ k = \overline{1,4}$, рассмотрим спектральную задачу:

$$u - \Delta u = \lambda u =: f \text{ (в } \Omega), \quad \gamma_1 u := u|_{\Gamma_1} = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \tag{18}$$

$$\partial_2 u = \mu\gamma_2 u =: \psi_2 \text{ (на } \Gamma_2), \quad \partial_3 u = \lambda\gamma_3 u =: \psi_3 \text{ (на } \Gamma_3), \tag{19}$$

$$\partial_4 u = \lambda^{-1}\gamma_4 u =: \psi_4 \text{ (на } \Gamma_4), \quad \partial_k u := (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k}. \tag{20}$$

Здесь на Γ_1 задано однородное условие Дирихле, на Γ_2 —условие М.С.Аграновича, или условие, возникающее в задачах дифракции, на Γ_3 — условие типа Стефана (или Стеклова), на Γ_4 — условие типа С.Крейна, появившееся в задачах о нормальных движениях тяжёлой вязкой жидкости в частично заполненном сосуде. В этой проблеме имеется два параметра λ и μ, один из которых можно считать спектральным, а второй — фиксированным. В частности, в задачах дифракции спектральным является параметр $\mu \in \mathbb{C}$. Другой вариант, когда спектральным является $\lambda \in \mathbb{C}$, рассматривается в работах В.И.Горбачук.

В силу однородного условия Дирихле на Γ_1 слабое решение задачи (19)-(20) естественно искать в пространстве

$$H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \gamma_1 u = 0 \text{ (на } \Gamma_1)\}.$$

Решение $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)$ будем искать в виде суммы решений четырех задач, где u_k — слабые решения вспомогательных задач.

С использованием соответствующих формул для решений каждой из этих вспомогательных задач (см. теоремы 1-4) установлено, что слабое решение u задачи (18)-(20) должно быть решением следующей спектральной проблемы:

$$u = \lambda(A^{-1} + V_3\gamma_3)u + \mu V_2\gamma_2 u + \lambda^{-1}V_4\gamma_4 u,\ u \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega). \tag{21}$$

Это уравнение можно привести к более симметричной форме, воспользовавшись тем, что имеют место свойства

$$A^{1/2}V_k = (\gamma_k A^{-1/2})^* \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k);\ L_2(\Omega)),\ k = \overline{2,4}.$$

Представим элемент $u \in H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega) = \mathcal{D}(A^{1/2}),\ \mathcal{R}(A^{1/2}) = L_2(\Omega)$, в виде

$$u = A^{-1/2}v,\ v \in L_2(\Omega),$$

подставим это выражение в (21) и подействуем на обе части полученного соотношения оператором $A^{1/2}$. Тогда взамен (21) возникает спектральная задача

$$L(\lambda,\mu)v := (I - \mu B_2 - \lambda(A^{-1} + B_3) - \lambda^{-1}B_4)v = 0, \quad v \in L_2(\Omega), \tag{22}$$

$$A > 0,\ B_k := (A^{1/2}V_k)(\gamma_k A^{-1/2}) = B_k^* \geqslant 0,\ B_k \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)),\ \ k = \overline{2,4}, \tag{23}$$

для операторного пучка $L(\lambda,\mu)$ с параметрами λ и μ.

Аналогично формулируются спектральные задачи для двух и трёх примыкающих областей (см. параграфы 2.1.2, 2.1.3). Как установлено в работе, в итоге возникает такой же операторный пучок, как и в случае одной области.

Операторный пучок $L(\lambda,\mu)$ содержит два параметра: λ и μ. Это позволяет исследовать два класса задач: при фиксированном $\mu \in \mathbb{C}$ возникают задачи со спектральным параметром λ в уравнении, а при фиксированном $\lambda \in \mathbb{C}$ — задачи со спектральным параметром μ в краевом условии на границе сопряжения. В зависимости от этого получаются различные выводы о полноте, базисности корневых элементов и структуре спектра этих задач (параграф 2.2).

1°. В частности, если μ — спектральный параметр, а $\lambda < 0$ — фиксированный, то получаем дискретный спектр с предельной точкой $+\infty$, собственные элементы после проектирования на

$$H_1 = \overline{\mathcal{R}(B_2)} = L_{2,h}(\Omega) := \{\varphi \in L_2(\Omega) : \varphi = A^{1/2}u_2,\ u_2 \in \check{H}^1_{0,\Gamma_1,h}(\Omega) \subset H^1(\Omega)\},$$

$$H_0 = H \ominus H_1 := \ker B_2 =: L_{2,0}(\Omega)$$

образуют базис Рисса и даже p-базис (см. теорему 2.1 в диссертации).

2°. Если μ — спектральный параметр, а λ положителен и принимает неисключительные значения, т.е. $\lambda \ \notin \sigma(I - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - P_0T(\lambda)P_0),\ T(\lambda) = \lambda(A^{-1} + B_3) + \lambda^{-1}B_4$, то возникает индефинитная метрика и пространство

Понтрягина. Здесь и далее $P_1 : H \to H_1$ и $P_0 : H \to H_0$ — ортопроекторы. В этом случае задача (22), (23) имеет вещественный дискретный спектр, состоящий из конечного числа отрицательных собственных значений, а остальные положительны и имеют предельную точку $\mu = +\infty$. При этом собственные элементы (присоединённых нет) образуют ортонормированный по форме оператора $I_1 - T_1(\lambda)$, $T_1(\lambda) = P_1T(\lambda)P_1 + P_1T(\lambda)P_0(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)^{-1}P_1T(\lambda)P_1$, базис и базис Рисса в H_1 (теорема 2.2 в диссертации).

3°. Если $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$, $\quad \lambda \notin \sigma(I - T(\lambda)) \cap \sigma(I_0 - P_0T(\lambda)P_0)$, то спектр этой задачи дискретен, состоит из конечнократных собственных значений $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ с предельной точкой $\mu = \infty$. Система собственных и присоединённых элементов, после их проектирования на $H_1 = L_{2,h}(\Omega)$, является полной в H_1, более того, она образует базис Абеля–Лидского (см. теорему 2.3 в диссертации).

4°. Если параметр λ — спектральный, а $\mu \leqslant 0$ — фиксированный, то получаем дискретный спектр с предельными точками 0 и $+\infty$. Соответствующая система собственных элементов (присоединённых нет), отвечающая собственным значениям с предельной точкой $\lambda = 0$, после проектирования на подпространство H_1, образует базис Рисса в H_1. Вторая ветвь собственных элементов, отвечающая собственным значениям с предельной точкой $\lambda = \infty$, образует базис Рисса во всём H. Более того, эти системы элементов образуют также и p–базис (теорема 2.4 в диссертации).

5°. Если же $\mathrm{Re}\mu \leqslant 0$, $\mathrm{Im}\mu \neq 0$, , то получаем дискретный спектр с предельными точками 0 и $+\infty$. Система собственных и присоединённых (корневых) элементов, отвечающая собственным значениям с предельной точкой $\lambda = 0$, после проектирования на подпространство H_1, образует базис Абеля–Лидского в H_1. А вторая ветвь собственных элементов, отвечающая собственным значениям с предельной точкой $\lambda = \infty$, образует базис Абеля–Лидского во всём H (теорема 2.5 в диссертации).

Результаты второй главы опубликованы в работах [6], [8].

В третьей главе диссертации рассмотрены начально-краевые задачи, порождающие спектральные. В этих задачах производные по времени входят не только в уравнение, но и в краевые условия. Опишем первую из них (параграф 3.1.1).

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\partial\Omega$, разбитой на 3 липшицевых куска Γ_1, Γ_2 и Γ_3 с липшицевыми контурами $\partial\Gamma_1$, $\partial\Gamma_2$ и $\partial\Gamma_3$, рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}+L_0u=f\ (\text{в }\Omega),\ \gamma_1u=0\ (\text{на }\Gamma_1),\ \partial_2u=\mu\gamma_2u+\psi_2\ (\text{на }\Gamma_2),$$

$$\partial_3u+\frac{\partial}{\partial t}(\gamma_3u)=\psi_3\ (\text{на }\Gamma_3),\ L_0u=u-\triangle u,\ u(0,x)=u^0(x),\ x\in\Omega. \qquad (24)$$

Опираясь на уже использованную ранее схему, а также на введённые ранее операторы вспомогательных краевых задач, можно исследовать задачу (24) операторными методами и доказать теорему о её сильной разрешимости на произвольном конечном промежутке времени. Применение этой схемы даёт уравнение, которому удовлетворяет решение задачи (24):

$$u=A^{-1}(f-\frac{\partial u}{\partial t})+V_2(\mu\gamma_2u+\psi_2)+V_3(\psi_3-\frac{\partial}{\partial t}\gamma_3u), \qquad (25)$$

где A — оператор гильбертовой пары $(H^1_{0,\Gamma_1}(\Omega);\ L_2(\Omega))$, а V_2 и V_3 — операторы вспомогательных задач Неймана (при $\Gamma_4=\varnothing$). Это уравнение приводится к задаче Коши

$$\frac{dw}{dt}+(I-\mu B_2)(A^{-1}+B_3)^{-1}w=f_1(t),\ \ w(0)=(A^{-1}+B_3)A^{1/2}u^0. \qquad (26)$$

Отсюда получаем следующий результат.

Теорема 6. *Пусть в исходной задаче (24) выполнены условия*

$$f(t,x)\in C^\beta([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*),\ \psi_2(t,x)\in C^\beta([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_2)),$$

$$\psi_3(t,x)\in C^\beta([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_3)),\ 0<\beta\leqslant 1,\ \ u^0(x)\in\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega),$$

а также условие

$$\mu\notin\sigma(I-\mu B_2).$$

Тогда задача (26) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$. *При этом исходная начально-краевая задача имеет единственное решение*

$$u(t,x)\in C([0,T];\ \check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega)),$$

причём для этого решения выполнено уравнение в Ω, *где все слагаемые являются элементами из* $C([0,T];\ (\check{H}^1_{0,\Gamma_1}(\Omega))^*)$, *граничные условия на* $\Gamma_k,\ k=2,3$, *где все слагаемые являются элементами из* $C([0,T];\ \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k))$, *а также начальное условие.*

Далее в диссертации рассмотрены три другие начально–краевые задачи для одной области и аналогичные проблемы для двух и трёх примыкающих областей (см. рис. 1 и параграфы 3.1.2–3.1.4).

Результаты третьей главы опубликованы в работах [6], [7].

В Заключении кратко изложены основные результаты диссертации.

Список литературы

[1] Бастрюкова В.Е., Радомирская К.А. Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения. // Материалы Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике, 22-25 апреля 2014 г., Симферополь. — Симферополь: КНЦ НАНУ.— 2014. — С. 8-13.

[2] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения. // Материалы Таврической научной конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике, 22-25 апреля 2014 г., Симферополь. — Симферополь: КНЦ НАНУ. — 2014. — С. 30-36.

[3] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения. // Ученые записки Таврического национального университета имени В.И. Вернадского. Серия Физико-математические науки. — 2014. — Т. 27 (66), № 1. — С. 58-64.

[4] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения и их приложения. // Современная математика. Фундаментальные направления, РУДН, М.. — 2016. — Т. 61. — С. 67-102.

[5] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Смешанные краевые задачи сопряжения. // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — 2016. — № 1 (30). — С. 89-108.

[6] Радомирская К.А. Спектральные и начально-краевые задачи сопряжения. // Современная математика. Фундаментальные направления, РУДН, М. — 2017. — Т. 63. — С. 316-339.

[7] Радомирская К.А. О некоторых начально-краевых задачах сопряжения.. // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — 2017. — № 2 (35). — С. 72-96.

[8] Радомирская К.А. Спектральные задачи сопряжения. // Динамические системы, КФУ, Симферополь. — 2017. — Т. 7(35), №1. — С. 63-79.

[9] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Абстрактные смешанные краевые и спектральные задачи сопряжения. // XXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2014). Тезисы докладов. — Симферополь: ТНУ. — 2014. — С.58.

[10] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Абстрактные смешанные краевые задачи сопряжения. // Международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - V"(Ростов-на-Дону). — 2015. — С. 211.

[11] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Абстрактные краевые и спектральные задачи сопряжения. // XXVI Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (Батилиман(Ласпи)). — 2015. — С. 52.

[12] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Об абстрактных краевых и спектральных задачах сопряжения. // Международная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения-VI"в городе Ростове-на-Дону. Тезисы докладов. Ростов н/д.: Изд. Центр ДГРТУ. — 2016. — С. 28.

[13] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. О некоторых абстрактных краевых задачах сопряжения и их приложениях. // XXIV Международная конференция "Математика. Экономика. Образование". Изд-во Фонд науки и образования. Ростов н/д. — 2016. — С. 89.

[14] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Спектральные задачи, порождённые абстрактными задачами сопряжения. // XXVII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2016). Тезисы докладов. — Симферополь: КФУ. — 2016. — С. 45-46.

[15] Копачевский Н.Д., Радомирская К.А. Спектральные и эволюционные задчи сопряжения. // Международная научная конференция "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения - VII"(Ростов-на-Дону). — 2017. — С. 108.

[16] Радомирская К.А. О спектральных и начально–краевых задачах сопряжения. // XXVIII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2017). Тезисы докладов. — Симферополь: КФУ. — 2017. — С. 38-39.

[17] Радомирская К.А. О некоторых спектральных и начально–краевых задачах сопряжения. // III научно–практическая конференция профессорско–преподавательского состава, аспирантов, студентов и молодых ученых "Дни науки КФУ". — Симферополь: КФУ. — 2017. — С. 549-550.

Работы [4], [6], [7] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.