ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

КОВАЛЕВСКИЙ РОСТИСЛАВ АЛЕКСАНДРОВИЧ

ВЕСОВЫЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико – математических наук

Научный руководитель:
доктор физико – математических наук,
профессор
Баев Александр Дмитриевич

Воронеж – 2018 год

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Вырождающиеся дифференциальные уравнения используются при моделировании различных физических процессов, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнений, так и их порядок. Такие уравнения используются при исследовании стационарных процессов конвекции – диффузии в неоднородных анизотропных средах, характерных тем, что при приближении к границе коэффициент диффузии стремится к нулю. В частности, к таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде (см. [1]), процессов фильтрации двухфазных жидкостей([2], [3]), в том числе, процессов вытеснения нефти водой из пористой среды [4]. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле ([5]), при исследовании стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием ([6]), при расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизотропных средах ([7]). Такие уравнения являются также обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции – диффузии ([8]). Кроме того, известно, что нахождение решения краевой задачи для эллиптического уравнения эквивалентно минимизации некоторого функционала. В теории управления задача о минимуме некоторого функционала соответствует задаче об оптимальном управлении. Вырождающимся эллиптическим уравнениям соответствуют вырожденные или особые оптимальные управления ([9], [10]).

Краевые задачи для вырождающихся уравнений относятся к «неклассическим» задачам математической физики. Основная трудность, возникающая в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Вырождающиеся эллиптические уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу [11]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник [12]. Обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка впервые были рассмотрены в работах С. Г. Михлина [13] и М. И. Вишика [14]. Вслед за этим появился ряд работ, в которых методами, близкими к методу М. И. Вишика, изучались вырождающиеся уравнения второго порядка. Достаточно полную библиографию этих можно найти в книгах М. М. Смирнова [15], О. А. Олейник, Е. В. Радкевича [16]. Фундаментальные результаты по изучению асимптотических свойств решений линейных и нелинейных эллиптических и параболических уравнений и систем были получены В. А. Кондратьевым [17], [19], В. А. Кондратьевым, Е. М. Ландисом [18], Ю. В. Егоровым, В. А. Кондратьевым, О. А. Олейник [20]. Метод “эллиптической регуляризации” был применен О. А. Олейник [21], а затем Дж. Коном и Л. Ниренбергом [22] для изучения эллиптико - параболических уравнений второго порядка. В работах В. П. Глушко [23], [24] была установлена коэрцитивная разрешимость общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева с весом. Задача Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка с согласованным вырождением исходных данных в произвольной выпуклой области была исследована в работе В. А. Рукавишникова, А. Г. Ереклинцева [25], а с несогласованным вырождением – в работе В. А. Рукавишникова [26]. Задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с неоднородным анизотропным вырождением в области была рассмотрена в работе С. Н. Антонцева, С. И. Шмарева [1].

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при “степенном” характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [27], [28]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка был получен В. П. Глушко [29], [30], Х. Леопольдом [31], С. З. Левендорским [32], С. А. Исхоковым [33].

Параболические задачи с вырождением по пространственной переменной возникают в связи с исследованием ряда марковских процессов. Библиография этих работ содержится, например, в [34]. Укажем также работы Брезиса, Розенкранца, Зингера [35], В.Г. Булавина, В.П. Глушко [36], В.П. Архипова, В.П. Глушко [37] -[39], Левина, Сакса[40]. Начально - краевая задача для вырождающегося параболического уравнения с постоянными по y коэффициентами была исследована В.П. Богатовой, В.П. Глушко [41].

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию свойств специального класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов; доказательству коэрцитивных априорных оценок и теорем разрешимости краевых задач в полупространстве для специальных вырождающихся псевдодифференциальных уравнений, содержащих вырождающийся псевдодифференциальный оператор с переменным символом, зависящим от комплексного параметра, и производную первого порядка по переменной y; доказательству коэрцитивных априорных оценок и теорем разрешимости краевых задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка, зависящих от комплексного параметра; доказательству априорных оценок и теорем разрешимости начально- краевых задач для параболических уравнений с вырождением по пространственной переменной, коэффициенты которых зависят от y.

В работе систематически используется специальное интегральное преобразование F_α, введенное в [42]. Преобразование F_α позволяет ввести в рассмотрение специальный класс весовых псевдодифференциальных операторов. Весовые псевдодифференциальные операторы с постоянным по y символом были изучены в [42], в работах [43] - [45] были исследованы некоторые классы весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом.

В первой главе вводятся и исследуются весовые псевдодифференциальные операторы с переменным по y символом, зависящим от комплексного параметра, из класса $S^{\sigma}_{\alpha,p}$, $p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$. Доказываются теоремы о композиции и ограниченности таких операторов в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева. Устанавливаются формулы и оценки коммутатора весового псевдодифференциального оператора с производными $\frac{\partial^l}{\partial y^l}$ $(l = 1, 2, ...)$ и теоремы о предельных при $y \to +0$ и $y \to +\infty$ значениях весового псевдодифференциального оператора с переменным по y символом, зависящим от комплексного параметра. В этой главе устанавливается связь весового псевдодифференциального оператора с некоторым интегральным оператором, строится сопряженный оператор к весовому псевдодифференциальному оператору и доказывается аналог неравенства Гординга для весовых псевдодифференциальных операторов.

Эти свойства весовых псевдодифференциальных операторов позволяют в дальнейшем изучить более широкие классы вырождающихся уравнений высокого порядка.

Во второй главе диссертационной работы доказываются коэрцитивные априорные оценки в весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева решений граничных задач типа задач Дирихле в полупространстве R^n_+ для вырождающихся псевдодифференциальных уравнений, содержащих весовой псевдодифференциальный оператор с переменным символом, зависящем от параметра, и производную $\frac{\partial}{\partial y}$.

В третьей главе исследуется разрешимость в весовых пространствах С. Л. Соболева краевых задач, рассмотренных в главе 2. Построенрегуляризатор для этих краевых задач. В этой главе доказаны также теоремы о существовании и единственности решения некоторых краевых задач для вырождающихся псевдодифференциальных уравнений, содержащих параметр.

В четвертой главе диссертации доказываются коэрцитивные априорные оценки решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с переменными по у коэффициентами, содержащих комплексный параметр.

В пятой главе строится регуляризатор и доказываются теоремы о существовании и единственности решений общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с переменными по у коэффициентами, содержащих комплексный параметр.

В шестой главе диссертации исследуются начально - краевые задачи для вырождающихся параболических уравнений высокого порядка с переменными по y коэффициентами.

Перейдем к более детальному описанию результатов диссертационной работы.

В первой главе диссертационной работы изучаются свойства весовых псевдодифференциальных операторов. Рассмотрим функцию α(y), $y \in R^1_+$, для которой выполняются условия: $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, α(y)>0 при $y > 0$, α(y)=const для $y \geq d$ при некотором d >0.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(\mathrm{y})](\eta) = \int_0^{+\infty} u(\mathrm{y}) \exp(i\eta \int_y^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dy}{\sqrt{\alpha(\mathrm{y})}}, \tag{1}$$

которое определено первоначально на функциях $u(\mathrm{y}) \in C_0^\infty(R_+^1)$. Здесь $C_0^\infty(R_+^1)$ - пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, носитель которых принадлежит R_+^1. Преобразование (1) и преобразование Фурье

$F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau,\ \ \eta \in R^1$ связаны следующим соотношением

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)], \tag{2}$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(\mathrm{y})}u(\mathrm{y})\Big|_{y=\varphi^{-1}(\tau)}$, $y = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(\mathrm{y}) = \int\limits_y^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}.$

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R_+^1)}. \tag{3}$$

Равенство (3) даёт возможность расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R_+^1)$, а также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](\mathrm{y}) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(\mathrm{y})}} F_{\eta\to\tau}^{-1}[w(\eta)]\Bigg|_{\tau=\varphi(\mathrm{y})}.$$

Можно показать, что для функции $u(\mathrm{y}) \in C_0^\infty(\bar{R}_+^1)$ справедливы равенства

$F_\alpha[D_{\alpha,\mathrm{y}}^j u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j = 1,2,\ldots$, где $D_{\alpha,\mathrm{y}} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(\mathrm{y})}\partial_y\sqrt{\alpha(\mathrm{y})},\ \ \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}.$

Определим пространства $H_{s,\alpha}(R_+^n)$; $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ следующим образом.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R_+^n)$ (s – действительное число) состоит из всех функций пространства $L_2(R_+^n)$, для которых конечна норма

$$\left\|v,|p|\right\|_{s,\alpha}^{2} = \int_{R^n} (|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,y)]\right|^2 d\xi d\eta, \tag{4}$$

зависящая от комплексного параметра $p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ $(s \ge 0, q > 1)$ состоит из всех функций $v(x,y) \in H_{s,\alpha}(R_+^n)$, для которых конечна норма

$$\left\|v,|p|\right\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\| F_{\xi\to x}^{-1} F_\alpha^{-1}[(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{s-ql}{2}} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_y^l v]] \right\|_{L_2(R_+^n)}^2 \}^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

зависящая от комплексного параметра. Здесь $[\frac{s}{q}]$ - целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0,1]$ такое, что $|\alpha'(y)\alpha^{-\nu}(y)| \le c < \infty$ при всех $y \in [0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(y) \in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1 \ge 2N - |\sigma|$, где

$N \ge \max\limits_{0\le p_1 \le l}\{2p_1 + \frac{l - p_1 + \frac{3}{2}}{\nu} + 1, \sigma + 1, \sigma + \frac{l}{2}\}, l = 1, 2..., \sigma$ - некоторое действительное число.

Можно показать, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1} F_{x_2\to\xi_2} ... F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$K^{(\sigma)}(p, y, D_x, D_{\alpha,y}) v(x,y) = F_\alpha^{-1} F_{\xi\to x}^{-1}[\lambda(p,y,\xi,\eta) F_{x\to\xi} F_\alpha [v(x,y)]]. \tag{6}$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $\lambda(p,y,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})$ принадлежит классу символов $S_{\alpha,p}^{\sigma}(\Omega)$, где $\Omega \subset \overline{R}_+^1$, $\sigma \in R^1$, $p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$, если функция $\lambda(p,\text{y},\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $y \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j=0,1,2,...,\ l=0,1,2,...$ справедливы оценки

$$|(\alpha(\text{y})\partial_y)^j \partial_\eta^l \lambda(p,\text{y},\xi,\eta)| \le c_{jl}(|p|^2+|\xi|+|\eta|)^{\sigma-l} \qquad (7)$$

с константами $c_{jl}>0$, не зависящими от $p\in Q,\ \xi\in R^{n-1},\ \eta\in R^1,\ \ y\in K$, где $K\subset\Omega$ - произвольный отрезок. Здесь σ - действительное число.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $G(p,\text{y},D_x,D_{\alpha,t})$ и $Q(p,\text{y},D_x,D_{\alpha,\text{y}})$ – весовые псевдодифференциальные операторы с символами $g(p,\text{y},\xi,\eta)$, $q(p,\text{y},\xi,\eta)$, принадлежащими классам $S^{m_1}_{\alpha,p}(\Omega)$, $S^{m_2}_{\alpha,p}(\Omega)$ (m_1,m_2- действительные числа), $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\frac{\pi}{2},\ |p|>0\}$. Тогда для любого $N\ge 0$ существует $N_1>0$ и такой символ $T_{N_1}(p,\text{y},\xi,\eta)\in S^{-N}_{\alpha,p}(\Omega)$, что справедливо равенство

$$G(p,\text{y},D_x,D_{\alpha,t})Q(p,\text{y},D_x,D_{\alpha,t})-\sum_{j=1}^{N_1-1}R_j(p,\text{y},D_x,D_{\alpha,t})=T_{N_1}(p,\text{y},D_x,D_{\alpha,t}), \qquad (8)$$

где $T_{N_1}(p,\text{y},D_x,D_{\alpha,t})$ – весовой псевдодифференциальный оператор с символом $T_{N_1}(p,\text{y},\xi,\eta)$, а $R_j(p,\text{y},D_x,D_{\alpha,\text{y}})$ – весовой псевдодифференциальный оператор с символом

$$r_j(p,\text{y},\xi,\eta)=\frac{1}{j!}\partial_\eta^j g(p,\text{y},\xi,\eta)\cdot(\alpha(\text{y})\partial_y)^j q(p,\text{y},\xi,\eta). \qquad (9)$$

Теорема 2. Пусть $g(p,\text{y},\xi,\eta)\in S^m_{\alpha,p}(\Omega)$, m – действительное число, $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\frac{\pi}{2},\ |p|>0\}$. Тогда весовой псевдодифференциальный оператор $G(p,\text{y},D_x,D_{\alpha,\text{y}})$ для любого действительного s есть ограниченный оператор из $H_{s+m,\alpha}(R^n_+)$ в $H_{s,\alpha}(R^n_+)$.

Теорема 3. Пусть символ $\lambda(p,\text{y},\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,\text{y},D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, $\Omega\subset\overline{R}^1_+$, $\sigma\in R^1$, $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\frac{\pi}{2},\ |p|>0\}$. Пусть $v(x,\text{y})\in H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+)$, $\partial_y^l v(x,\text{y})\in H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+)$, $l=1,2,...$. Пусть выполнено условие 1 (с заменой σ на $s+\sigma$). Тогда для оператора

$$M_{l,\sigma}=\partial_y^l K^{(\sigma)}(p,\text{y},D_x,D_{\alpha,\text{y}})-K^{(\sigma)}(p,\text{y},D_x,D_{\alpha,\text{y}})\partial_y^l \qquad (10)$$

справедлива оценка

$$\left\|M_{l,\sigma}v,|p|\right\|_{s,\alpha} \le c(\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_y^j v,|p|\right\|_{s+\sigma-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l-1}\left\|\partial_y^j v,|p|\right\|_{s+\sigma,\alpha}) \quad (11)$$

с константой $c>0$, не зависящей от v.

Теорема 4. Пусть $q>1$, $s\ge 0$ – действительные числа, $v(x,\mathrm{y})\in H_{s+(l+1)q,\alpha,q}(R_+^n)$. Пусть символ $\lambda(\mathrm{y},\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\mathrm{q})}(\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^q_{\alpha,\mathrm{p}}(\Omega)$, $\Omega\subset\bar{R}^1_+$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma=s+q$. Тогда для оператора $M_{l,q}$, определенного в (10) при $\sigma=q$, справедлива оценка

$$\left\|M_{l,q}v,|p|\right\|_{s,\alpha,q} \le c\left\|v,|p|\right\|_{s+lq+q-1,\alpha,q} \quad (12)$$

с постоянной $c>0$, не зависящей от v, p.

Теорема 5. Пусть $q>1$, σ – действительные числа, $v(x,\mathrm{y})\in H_{s+\sigma,\alpha,q}(R_+^n)$. Пусть символ $\lambda(p,\mathrm{y},\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, $p\in Q=\{p\in C, |\arg p|<\frac{\pi}{2}, |p|>0\}$, $\Omega\subset\bar{R}^1_+$, $\sigma\in R^1$. Тогда при выполнении условия 1 справедливо равенство

$$\begin{aligned}&\lim_{y\to+0}K^{(\sigma)}(p,\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})v(x,\mathrm{y}) = \lim_{y\to+0}K^{(\sigma)}(p,0,D_x,0)v(x,\mathrm{y}) =\\ &= \lim_{y\to+0}F^{-1}_{\xi\to x}[\lambda(p,0,\xi,0)F_{x\to\xi}[v(x,\mathrm{y})]].\end{aligned} \quad (13)$$

Теорема 6. Пусть выполнено условие 1 и символ $\lambda(p,\mathrm{y},\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})$ принадлежит классу $S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, $p\in Q=\{p\in C, |\arg p|<\frac{\pi}{2}, |p|>0\}$, $\Omega\subset\bar{R}^1_+$, $\sigma\in R^1$. Пусть функция $v(x,\mathrm{y})$ такова, что функция $D^N_{\alpha,\mathrm{y}}v(x,\mathrm{y})$ при всех $x\in R^{n-1}$ принадлежит, как функция переменной y пространству $L_2(R^1_+)$ при некотором $N\in[\max\{\sigma+1,1\};s_1]$, где s_1 определено в условии 1. Пусть $\lim_{y\to+\infty}D^j_{\alpha,\mathrm{y}}v(x,\mathrm{y})=0$ при всех $x\in R^{n-1}$, $j=0,1,2,...,N-1$. Тогда при всех $x\in R^{n-1}$ справедливо равенство $\lim_{y\to+\infty}K^{(\sigma)}(p,\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})v(x,\mathrm{y})=0$.

Определение 4. Пусть $\Omega\subset\bar{R}^1_+$ – открытое множество. Будем говорить, что функция $a(p,\mathrm{y},\mathrm{z},\xi,\eta)$ принадлежит классу $S^{m,\alpha,p}(\Omega)$, $m\in R^1$,

$p \in Q = \{ p \in C, |\arg p| < \dfrac{\pi}{2}, |p| > 0\}$, если $a(\mathrm{y},\mathrm{z},\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой по переменным $y \in \Omega$, $\mathrm{z} \in \Omega$, $\eta \in \mathrm{R}^1$ и на компактных подмножествах множества $\Omega \times \Omega$ имеет место при всех $j,k,l = 0,1,2,...$ оценка

$$|(\alpha(\mathrm{y})\partial_y)^j (\alpha(\mathrm{z})\partial_z)^k \partial_\eta^l a(\mathrm{y},\mathrm{z},\xi,\eta)| \le c_{jkl}(|p| + |\xi| + |\eta|)^{m-l}$$

с константами $c_{jkl} > 0$, не зависящими от p, y, z, η и $\xi \in \mathrm{R}^{\mathrm{n}-1}$.

Рассмотрим оператор вида

$$Au(x,\mathrm{y}) = F^{-1}_{\alpha_{\eta\to y}} F_{\alpha_{z\to\eta}} F^{-1}_{\xi\to x}[a(p,\mathrm{y},\mathrm{z},\xi,\eta) F_{x\to\xi}[u(x,\mathrm{z})]], \tag{14}$$

где $F_{\alpha_{z\to\eta}}$ ($F^{-1}_{\alpha_{\eta\to z}}$) – прямое (обратное) весовое преобразование, переводящее z в η (η в z).

Доказана следующая теорема.

Теорема 7. Пусть A – оператор вида (14), причем $a(p,\mathrm{y},\mathrm{z},\xi,\eta) \in S^{m,\alpha,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \overline{R}^1_+$, $m \in R^1$, $p \in Q = \{ p \in C, |\arg p| < \dfrac{\pi}{2}, |p| > 0\}$. Тогда найдется такой символ $\lambda(p,\mathrm{y},\xi,\eta) \in S^m_{\alpha,p}(\Omega)$, что $A = K(p,\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})$, где $K(p,\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})$ – весовой псевдодифференциальный оператор с символом $\lambda(p,\mathrm{y},\xi,\eta)$. Причем

$$\lambda(p,\mathrm{y},\xi,\eta) = \sqrt{\alpha(\mathrm{y})}\exp(i\eta\int_y^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \cdot A(\frac{1}{\sqrt{\alpha(y)}}\exp(-i\eta\int_y^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})).$$

При этом справедливо соотношение

$$\lambda(p,\mathrm{y},\xi,\eta) - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{(i)^j}{j!}(\alpha(y)\partial_y)^j \partial^j_\eta a(p,\mathrm{y},\mathrm{z},\xi,\eta)\Big|_{z=y} \in S^{m-N}_{\alpha,p}(\Omega)$$

при любых $N = 1,2,...$.

Теорема 7 даёт возможность построить сопряженный оператор к весовому псевдодифференциальному оператору.

Определение 5. Сопряженным оператором к весовому псевдодифференциальному оператору $K(p,\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})$ назовем оператор $K^*(p,\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})$, удовлетворяющий равенству

$$(K(p,\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})u(x,\mathrm{y}),v(x,\mathrm{y}))_{L_2(R^n_+)} = (u(x,\mathrm{y}),K^*(p,\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})v(x,\mathrm{y}))_{L_2(R^n_+)}$$

для всех $v(x,\mathrm{y}) \in L_2(R^n_+)$, $u(x,\mathrm{y}) \in L_2(R^n_+)$ таких, что

$K(p,\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})u(x,\mathrm{y}) \in L_2(R^n_+)$.

Здесь $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в $L_2(R^n_+)$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 8. Пусть $\lambda(p,\mathrm{y},\xi,\eta)\in S^{m}_{\alpha,p}(\Omega)$, $\Omega\subset\overline{R}^{1}_{+}$, $m\in R^{1}$, $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\dfrac{\pi}{2},\ |p|>0\}$. Тогда оператор $K^{*}(p,\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})$, сопряженный к весовому псевдодифференциальному оператору $K(p,\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})$ с символом $\lambda(p,\mathrm{y},\xi,\eta)$, является весовым псевдодифференциальным оператором с символом $\lambda^{*}(p,\mathrm{y},\xi,\eta)\in S^{m}_{\alpha,p}(\Omega)$. Причём справедливо соотношение

$$\lambda^{*}(p,\mathrm{y},\xi,\eta)-\sum_{j=1}^{N-1}\frac{(i)^{j}}{j!}(\alpha(\mathrm{y})\partial_{y})^{j}\partial_{\eta}^{j}\overline{\lambda}(p,\mathrm{y},\xi,\eta)\in S^{m-N}_{\alpha,p}(\Omega)$$

для любых $N=1,2,\ldots$.

С использованием теорем 7 и 8 доказывается неравенство, являющееся аналогом неравенства Гординга для весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим о комплексного параметра.

Теорема 9. Пусть $K(p,\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})$ – весовой псевдодифференциальный оператор с символом $\lambda(p,\mathrm{y},\xi,\eta)\in S^{m}_{\alpha,p}(\Omega)$, $\Omega\subset\overline{R}^{1}_{+}$, $m\in R^{1}$, $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\dfrac{\pi}{2},\ |p|>0\}$. Пусть $\operatorname{Re}\lambda(p,\mathrm{y},\xi,\eta)\ge c(|p|+|\xi|+|\eta|)^{m}$ для всех $\xi\in R^{n-1}$, $\eta\in\mathrm{R}^{1}$, $\mathrm{y}\in\mathrm{K}\subset\Omega$, где K – произвольное компактное множество. Тогда для любого $s\in R^{1}$ и любой функции $u(x,\mathrm{y})\in C_0^{\infty}(R^{n-1}\times K)$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(K(p,\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})u(x,\mathrm{y}),u(x,\mathrm{y}))\ge c_0\left\|u,|p|\right\|^{2}_{\frac{m}{2},\alpha}-c_1\left\|u,|p|\right\|^{2}_{s,\alpha}$$

с некоторыми константами $c_0>0$ и $\mathrm{c}_1>0$, не зависящими от v, p.

Во второй главе работы устанавливаются коэрцитивные априорные оценки решений граничных задач в R^{n}_{+} для вырождающихся псевдодифференциальных уравнений специального вида, содержащих весовой псевдодифференциальный оператор с переменным символом, зависящим от комплексного параметра, из класса $S^{q}_{\alpha,p}(\Omega)$ и первую производную ∂_y. Априорные оценки решений этих краевых задач доказаны в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева.

Рассмотрим в R^n_+ следующие задачи:

$$\begin{cases} K^{(q)}_{-}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})v(x,y)-\partial_y v(x,y)=F(p,x,y) \\ v(x,y)\big|_{y=0}=G(x), \end{cases} \tag{15}$$

$$K^{(q)}_{+}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})v(x,y)-\partial_y v(x,y)=F(p,x,y). \tag{16}$$

Наряду с задачами (15), (16) рассмотрим задачи, зависящие не только от комплексного параметра p, но и от вещественного параметра $r_1>0$.

$$\begin{cases} K^{(q)}_{-}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})v(x,y)-\partial_y v(x,y)-r_1 v(x,y)=F(p,x,y) \\ v(x,y)\big|_{y=0}=G(x), \end{cases} \tag{17}$$

$$K^{(q)}_{+}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})v(x,y)-\partial_y v(x,y)+r_1 v(x,y)=F(p,x,y). \tag{18}$$

Здесь $K^{(q)}_{\pm}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})$ - весовые псевдодифференциальные операторы с символами $\lambda_{\pm}(p,y,\xi,\eta)$. Предположим, что символы $\lambda_{\pm}(p,y,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию.

Условие 2. Функции $\lambda_{\pm}(p,y,\xi,\eta)$ принадлежат классу $S^{q}_{\alpha,p}(\Omega)$, $q>1$ - действительное число, $\Omega\subset\bar{R}^1_+$, $p\in Q=\{p\in C, |\arg p|<\frac{\pi}{2}, |p|>0\}$. Причём с некоторой константой $c>0$, не зависящей от $p\in Q$, $y\in\Omega$, $\xi\in R^{n-1}$, $\eta\in R^1$, справедливы оценки

$$\pm\mathrm{Re}\,\lambda_{\pm}(p,y,\xi,\eta)\geq c(|p|+|\xi|+|\eta|)^q$$

при всех $p\in Q$, $y\in\Omega$, $\xi\in R^{n-1}$, $\eta\in R^1$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие $1'$**.** Выполнено условие 1 при $\sigma=s+q$, $l=1,2,...,[\frac{s}{q}]$, где $q>1$, $s\geq 0$ - действительные числа.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 10. Пусть $s \geq 0,\ q > 1$ - действительные числа, выполнено условие $1'$. Пусть функция $\lambda_{-}(p, \mathrm{y}, \xi, \eta)$ удовлетворяет условию 2. Тогда для любого решения $v(x, \mathrm{y}) \in H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$ задачи (15) справедлива априорная оценка

$$\left\| v, |p| \right\|_{s+q,\alpha,q} \leq c(\left\| F, |p| \right\|_{s,\alpha,q} + \left\| G, |p| \right\|_{s+\frac{1}{2}q} + \|v\|_{L_2(R^n_+)}) \qquad (19)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от p, v, F, G.

Теорема 11. Пусть $s \geq 0,\ q > 1$ - действительные числа, выполнено условие $1'$. Пусть функция $\lambda_{+}(\mathrm{p}, \mathrm{y}, \xi, \eta)$ удовлетворяет условию 2. Тогда для любого решения $v(x, \mathrm{y}) \in H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$ задачи (16) справедлива априорная оценка

$$\left\| v, |p| \right\|_{s+q,\alpha,q} \leq c(\left\| F, |p| \right\|_{s,\alpha,q} + \|v\|_{L_2(R^n_+)})$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от p, v, F.

Теорема 12. Пусть выполнены условия теоремы 10, $r_1 \geq r_2$. Тогда при достаточно большом $r_2 > 0$ для любого решения $v(x, \mathrm{y}) \in H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$ задачи (17) справедлива априорная оценка

$$\left\| v, |p| \right\|_{s+q,\alpha,q} \leq c(\left\| F, |p| \right\|_{s,\alpha,q} + \left\| G, |p| \right\|_{s+\frac{1}{2}q})$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от p, v, F, G.

Теорема 13. Пусть выполнены условия теоремы 11. Тогда при $r_1 \geq r_2$, где $r_2 > 0$ - достаточно большое число, для любого решения $v(x, \mathrm{y}) \in H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$ задачи (18) справедлива априорная оценка

$$\left\| v, |p| \right\|_{s+q,\alpha,q} \leq c \left\| F, |p| \right\|_{s,\alpha,q}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от p, v, F.

Теорема 14. Пусть $s \geq 0,\ q > 1$ - действительные числа, выполнено условие $1'$. Пусть функция $\lambda_{-}(p, \mathrm{y}, \xi, \eta)$ удовлетворяет условию 2. $p \in Q_{p_0} = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > p_0 > 0\}$. Тогда существует такое число $p_0 > 0$, что для любого решения $v(x,\text{y}) \in H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ задачи (15) справедлива априорная оценка

$$\|v,|p|\|_{s+q,\alpha,q} \le c(\|F,|p|\|_{s,\alpha,q} + \|G,|p|\|_{s+\frac{1}{2}q})$$

с постоянной $c>0$, не зависящей от p, v, F, G.

Теорема 15. Пусть $s \ge 0,\ q>1$ - действительные числа, выполнено условие $1'$. Пусть функция $\lambda_+(p,\text{y},\xi,\eta)$ удовлетворяет условию 2. $p \in Q_{p_0} = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| \ge p_0 > 0\}$. Тогда существует такое число $p_0 > 0$, что для любого решения $v(x,\text{y}) \in H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ задачи (16) справедлива априорная оценка

$$\|v,|p|\|_{s+q,\alpha,q} \le c\|F,|p|\|_{s,\alpha,q}$$

с постоянной $c>0$, не зависящей от p, v, F.

В третьей главе диссертационной работы исследуется разрешимость граничных задач (15)-(18). Для задач (15), (16) доказано существование регуляризатора, а при достаточно большом значении $|p|$ доказаны теоремы о существовании и единственности решений. Для задач (17), (18) доказаны теоремы о существовании и единственности решений.

А именно, доказаны следующие утверждения.

Теорема 16. При выполнении условий теоремы 10 существует правый регуляризатор задачи (15), то есть такой оператор

$$\hat{R}_1 : H_{s,\alpha,q}(R_+^n) \times H_{s+\frac{1}{2}q}(R^{n-1}) \to H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$$

что $\hat{A}_1\hat{R}_1(F,G) = (F,G) + T_1(F,G)$, где $\hat{A}_1$ - оператор, порождённый задачей (15) (то есть $\hat{A}_1 v = (F,G)$), а T_1 - ограниченный оператор из $H_{s,\alpha,q}(R_+^n) \times H_{s+\frac{1}{2}q}(R^{n-1})$ в

$H_{s+1,\alpha,q}(R_+^n) \times H_{s+\frac{1}{2}q+1}(R^{n-1})$.

Как известно (см.[24]) при выполнении априорной оценки (19) правый регуляризатор является одновременно и левым регуляризатором.

Теорема 17. При выполнении условий теоремы 11 существует правый регуляризатор задачи (16), то есть такой оператор

$\hat{R}_2 : H_{s,\alpha,q}(R_+^n) \to H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$, что $\hat{A}_2\hat{R}_2 F = F + T_2 F$, где $\hat{A}_2$ - оператор, порожденный задачей (16), а T_2 - ограниченный оператор из $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ в $H_{s+1,\alpha,q}(R_+^n)$.

Так же как и выше замечаем, что при выполнении априорной оценки правый регуляризатор является одновременно и левым регуляризатором.

Теорема 18. Пусть выполнены условия теоремы 10. Пусть $F(\mathrm{p}, x, \mathrm{y}) \in H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$, $G(x) \in H_{s+\frac{1}{2}q}(R^{n-1})$. Тогда при $r_1 \geq r_2$, где $r_2 > 0$ - достаточно большое число существует единственное решение задачи (17), принадлежащее пространству $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$.

Теорема 19. Пусть выполнены условия теоремы 11. Пусть $F(\mathrm{p}, x, \mathrm{y}) \in H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$. Тогда при $r_1 \geq r_2$, где $r_2 > 0$ - достаточно большое число существует единственное решение задачи (18), принадлежащее пространству $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$.

Теорема 20. Пусть выполнены условия теоремы 14. Пусть $F(\mathrm{p}, x, \mathrm{y}) \in H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$, $G(x) \in H_{s+\frac{1}{2}q}(R^{n-1})$. Тогда существует такое число $p_0 > 0$, что для всех $p \in Q_{p_0}$ существует единственное решение задачи (15).

Теорема 21. Пусть выполнены условия теоремы 15. Пусть $F(\mathrm{p}, x, \mathrm{y}) \in H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$. Тогда существует такое число $p_0 > 0$, что для всех $p \in Q_{p_0}$ существует единственное решение задачи (16).

В четвертой главе диссертации с помощью разделяющего оператора устанавливаются коэрцитивные априорные оценки решений общих граничныхзадач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка, коэффициенты которых зависят от переменной y и от комплексного параметра.

А именно, в R_+^n рассматривается линейное дифференциальное уравнение вида

$$A(p,\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y)v(x,\mathrm{y})=F(p,x,\mathrm{y}), \qquad (20)$$

где

$$A(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y)v=\sum_{|\tau|+j_1+qj_2+rj_3\le 2m} a_{\tau j_1 j_2 j_3}(\mathrm{y})p^{j_3}D_x^{\tau}D_{\alpha,\mathrm{y}}^{j_1}\partial_y^{j_2}v\,. \qquad (21)$$

Здесь m,k,l натуральные числа $q=\dfrac{2m}{k}>1,\ r=\dfrac{2m}{l}>1,\ a_{\tau j_1 j_2 j_3}(\mathrm{y})$ - некоторые ограниченные на $\overline{R}_+^1$ функции, $a_{00k0}(\mathrm{y})\ne 0$ при всех $y\in\overline{R}_+^1$. Без ограничения общности будем считать, что $a_{00k0}(\mathrm{y})=1$ при всех $y\in\overline{R}_+^1$.

На границе $y=0$ полупространства R_+^n задаются граничные условия вида

$$B_j(p,D_x,\partial_y)v\big|_{y=0}=\sum_{|\tau|+rj_3+qj_2\le m_j} b_{\tau j_2 j_3}p^{j_3}D_x^{\tau}\partial_y^{l}v\big|_{y=0}=G_j(p,x),\ j=1,2,...,\mu. \qquad (22)$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 3. Уравнение

$$\sum_{|\tau|+j_1+qj_2+rj_3=2m} a_{\tau j_1 j_2 j_3}(\mathrm{y})\xi^{\tau}\eta^{j_1}z^{j_2}p^{j_3}=0. \quad (23)$$

не имеет z – корней, лежащих на мнимой оси при всех $y\ge 0$ $(\xi,\eta)\in R^n$, $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\dfrac{\pi}{2},\ |p|>0\}$, $|p|+|\eta|+|\xi|>0$.

Пусть $z_1(p,\mathrm{y},\xi,\eta),...,z_{r_3}(p,\mathrm{y},\xi,\eta)$ $(1\le r_3\le k)$ - корни, лежащие в левой полуплоскости, а $z_{r_3+1}(p,\mathrm{y},\xi,\eta),...,z_k(p,\mathrm{y},\xi,\eta)$ лежат в правой полуплоскости.

Условие 4. Функции $z_j(\mathrm{p},\mathrm{y},\xi,\eta)$, $j=1,2,...,k,$ при всех $\xi\in R^{n-1}$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями по переменным $y\in\Omega\subset\overline{R}_+^1$ и

$\eta \in R^1$. Причем, при всех $p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \dfrac{\pi}{2}, |p| > 0\}$, $j_1 = 0, 1, 2, ...,$ $l = 0, 1, 2, ..., \xi \in R^{n-1}$, $y \in \Omega \subset \bar{R}^1_+$, $\eta \in R^1$ справедливы оценки

$\left|(\alpha(y)\partial_y)^{j_1} \partial_\eta^{j_2} z_j(y, \xi, \eta)\right| \le c_{j_1,l}(|p| + |\xi| + |\eta|)^{q-j_2}, \quad |p| + |\xi| + |\eta| > 0,$ (24)

с константами $c_{j_1,l} > 0$, не зависящими от p, y, ξ, η.

Из условия 3 следует, что при всех $p \in Q$, $\xi \in R^{n-1}$, $y \in \Omega \subset \bar{R}^1_+$, $\eta \in R^1$ справедливы оценки

$\mathrm{Re}\, z_j(p, y, \xi, \eta) \le -c_1(|p| + |\xi| + |\eta|)^q, \ j = 1, ..., r_3;$ (25)

$\mathrm{Re}\, z_j(p, y, \xi, \eta) \ge c_2(|p| + |\xi| + |\eta|)^q, \ j = r_3 + 1, ..., k,$ (26)

с некоторыми константами $c_1 > 0$ *и* $c_2 > 0$, не зависящими от p, y, ξ, η.

Условие 5. Число граничных условий (22) равно числу z - корней уравнения (23), лежащих в левой полуплоскости, и при всех $\xi \in R^{n-1}$, $|\xi| > 0$ многочлены $B_j^0(\xi, z) = \sum\limits_{|\tau| + qj_2 + rj_3 = m_j} b_{\tau j_2 j_3} p^{j_3} \xi^\tau z^{j_2}$ линейно независимы по модулю многочлена $P(\xi, z) = \prod\limits_{j_1=1}^{r_3} (z - z_{j_1}(0, \xi, 0))$.

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 22. Пусть $s \ge \max\{2m, \max\limits_{1 \le j \le r_1} m_j + q\}$ - действительное число и выполнены условия $1'$, 3 - 5. Тогда для любого решения $v(x,t) \in H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ задачи (20), (22) справедлива априорная оценка

$$\|v, |p|\|_{s,\alpha,q} \le c(\|F, |p|\|_{s-2m,\alpha,q} + \|v, |p|\|_{s-1,\alpha,q} + \sum_{j=1}^{r_3} \|G_j, |p|\|_{s-m_j-\frac{1}{2}q}) \quad (27)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от p, v, F, G_j, $j = 1, 2, ..., r_3$.

Теорема 23. Пусть выполнено условие $1'$ при $s \ge 2m$ и условия 3, 4. Тогда для оператора $A(p, y, D_x, D_{\alpha,y}, \partial_y)$ справедлива формула представления

$$A(p, y, D_x, D_{\alpha,y}, \partial_y) = \prod_{j=1}^{k} (\partial_y - K_j(p, y, D_x, D_{\alpha,y})) + T(p, y, D_x, D_{\alpha,y}, \partial_y), \quad (28)$$

где $K_j(p,y,D_x,D_{\alpha,y})$ - весовые псевдодифференциальные операторы с символами $z_j(p,y,\xi,\eta)$, а порядок оператора $T(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)$ в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ не превосходит $2m-1$.

Определение 6. Обозначим через Ω_{r_3} множество функций $w(x,t)\in C_0^\infty(\bar{R}_+^n)$, удовлетворяющих условиям

$$w(x,+0)=\partial_t w(x,+0)=...=\partial_t^{r_3-1}w(x,+0)=0.$$

Теорема 23 позволяет свести доказательство априорной оценки решения задачи (20), (22) к коэрцитивной оценке снизу формы $\mathrm{Re}(Aw,Qw)$ на функциях $w(x,t)\in\Omega_{r_1}$. При этом теорема 22 при выполнении условия 5 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 24. Пусть выполнено условие $1'$ при $s\ge 2m$ и условия 3, 4. Тогда существует такой оператор $\hat{Q}(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)$, порядок которого в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ не превосходит $2m-q$, что для любых $s_0\ge 0, \varepsilon>0$ и любых функций $w(x,y)\in\Omega_{r_3}$ справедливо неравенство

$$c_1\left\|w,|p|\right\|^2_{(k-\frac{1}{2}-s_0)q,\alpha}\le\varepsilon\sum_{l=1}^{k}\sum_{i_1=0}^{k-l}\sum_{i_2=0}^{k-l+1-i_1}\left\|\partial_y^{i_2}w,|p|\right\|^2_{(l-s_0+i_1-\frac{3}{2})q,\alpha}+$$

$$+c(\varepsilon)\sum_{l=1}^{k}\sum_{i_1=0}^{k-l}\sum_{i_2=0}^{k-l-i_1}\left\|\partial_y^{i_2}w,|p|\right\|^2_{(l-s_0+i_1-\frac{1}{2})q-1,\alpha}+\mathrm{Re}(A(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)w,\hat{Q}w)_{-s_0q,\alpha},$$

где константа $c_1>0$ не зависит от ε и w, p, а константа $c(\varepsilon)>0$ не зависит от w, p.

При этом в качестве оператора $\hat{Q}$ можно взять оператор вида

$$\hat{Q}(p,y,D_x,D_{\alpha,y},\partial_y)=\prod_{j=1}^{k-1}(\partial_y-K_j(p,y,D_x,D_{\alpha,y})).$$

Теорема 25. Пусть $s\ge\max\{2m,\max\limits_{1\le j\le r}m_j+q\}$, выполнены условия $1'$, 3, 4, 5 при $p\in Q_{p_0}=\{p\in C,|\arg p|<\frac{\pi}{2},|p|\ge p_0>0\}$. Тогда существует такое число

$p_0 > 0$, что при всех $p \in Q_{p_0}$ для любого решения $v(x,t) \in H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ задачи (20), (22) справедлива априорная оценка

$$\left\|v,|p|\right\|_{s,\alpha,q} \le c(\left\|F,|p|\right\|_{s-2m,\alpha,q} + \sum_{j=1}^{r_3}\left\|G_j,|p|\right\|_{s-m_j-\frac{1}{2}q}) \quad (29)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от p, v, F, G_j, $j = 1,2,...,r_3$.

В главе 5 построен регуляризатор и доказаны теоремы о существовании и единственности решений общей краевой задачи в полупространстве для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, коэффициенты которого зависят от переменной y и от комплексного параметра p.

Теорема 26. Пусть $s \ge \max\{2m, \max\limits_{1\le j\le r} m_j + q\}$ - действительное число и выполнены условия $1'$, 3 - 5. Тогда существует правый регуляризатор задачи (20), (22), то есть такой оператор

$$R: H_{s-2m,\alpha,q}(R_+^n) \times \prod_{j=1}^{r_3} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1}) \to H_{s,\alpha,q}(R_+^n), \text{ что}$$

$$\tilde{A}R(F,\bar{G}) = (F,\bar{G}) + \tilde{T}(F,\bar{G}), \quad (30)$$

где $\tilde{A}$ - оператор, порожденный задачей (20). (22),

$$\tilde{A}: H_{s,\alpha,q}(R_+^n) \to H_{s-2m,\alpha,q}(R_+^n) \times \prod_{j=1}^{r_3} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1}),$$

а оператор $\tilde{T}$ является ограниченным оператором из

$$H_{s-2m,\alpha,q}(R_+^n) \times \prod_{j=1}^{r_3} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1}) \text{ в } H_{s-2m+1,\alpha,q}(R_+^n) \times \prod_{j=1}^{r_3} H_{s-\frac{1}{2}q+1-m_j}(R^{n-1})$$

$\bar{G} = (G_1, G_2, ...G_{r_3})$.

При выполнении априорной оценки (27) правый регуляризатор задачи является одновременно и левым регуляризатором (см. [24]).

Теорема 27. Пусть $s \ge \max\{2m, \max\limits_{1\le j\le r_3} m_j + q\}$, выполнены условия $1'$,3 - 5 при $p \in Q_{p_0} = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| \ge p_0 > 0\}$. Пусть $F(\mathrm{p},x,\mathrm{y}) \in H_{s-2m,\alpha,q}(R_+^n)$,

$G_j(\mathrm{p},x)\in H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1})$, $\mathrm{j}=1,2,...\mathrm{r}_3$. Тогда существует такое число $p_0>0$, что при всех $p\in Q_{p_0}$ существует единственное решение $v(x,t)\in H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ задачи (20), (22).

В шестой главе диссертации исследуется начально – краевая задача для параболического уравнения высокого порядка с вырождением по пространственной переменной.

А именно, в $R^{n+1}_{++}=\{(x,t,y):x\in R^{n-1},0<t<+\infty,0<y<+\infty\}$ рассматривается линейное дифференциальное уравнение вида

$$A(\mathrm{y},\partial_t,D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y)v(\mathrm{t},x,y)=F(\mathrm{t},x,y), \tag{31}$$

где

$$A(\mathrm{y},\partial_t,D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y)v=\sum_{|\tau|+j_1+qj_2+rj_3\le 2m}a_{\tau j_1j_2j_3}(\mathrm{y})D_x^\tau D_{\alpha,\mathrm{y}}^{j_1}\partial_y^{j_2}\partial_t^{j_3}v\,. \tag{32}$$

Здесь m,k,l натуральные числа $q=\dfrac{2m}{k}>1,\ r=\dfrac{2m}{l}>1,\ a_{\tau j_1j_2j_3}(\mathrm{y})$ - некоторые ограниченные на $\bar{R}^1_+$ функции, $a_{00k0}(\mathrm{y})\neq 0$, $a_{000l}(\mathrm{y})\neq 0$ при всех $y\in\bar{R}^1_+$. Без ограничения общности будем считать, что $a_{00k0}(\mathrm{y})=1$ при всех $t\in\bar{R}^1_+$.

На границе $y=0$ множества R^{n+1}_{++} задаются граничные условия вида

$$B_j(\partial_t,D_x,\partial_y)v\big|_{y=0}=\sum_{|\tau|+rj_3+qj_2\le m_j}b_{\tau j_2j_3}\partial_t^{j_3}D_x^\tau\partial_y^{j_2}\,v\big|_{y=0}=G_j(\mathrm{t},x),\ j=1,2,...,\mu. \tag{33}$$

На границе $t=0$ множества R^{n+1}_{++} задаются начальные условия вида

$$\partial_t^j\,v\big|_{t=0}=\Phi_j(\mathrm{x},\mathrm{y}),\ j=1,2,...,l-1. \tag{34}$$

Основой использованного в главе 6 метода служит известная схема, связывающая параболические задачи с эллиптическими задачами, содержащими комплексный параметр p.

Вначале из результатов главы 5 выводится однозначная разрешимость задачи (20), (22) в пространстве аналитических функций. Отсюда, в силу изоморфизма, устанавливаемого преобразованием Лапласа, доказывается разрешимость однородной параболической задачи в изоморфном пространстве $W^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_2)$.

Наконец, при выполнении условий согласования начальных и граничных условий, выводится теорема о разрешимости задачи (31), (33), (34) в пространствах $\hat{W}_{2,\gamma}(Y_1,Y_2)$.

Рассмотрим абстрактную функцию $u(\mathrm{t})$ со значениями в гильбертовом пространстве Y_1, такую, что $u(\mathrm{t})=0$ при $t<0$. Предположим, что существует преобразование Фурье функции $e^{-\gamma t}u(\mathrm{t})$ $(\gamma\geq 0)$, принадлежащее гильбертову пространству $Y_0\supset Y_1$. Будем говорить, что функция $V(p)$ принадлежит пространству $W^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)$, $a\geq 0$, $\gamma\geq 0$ если конечна норма

$$\|u\|_{W^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)}=\{\int\limits_{R^1}\|e^{-\gamma t}u(\mathrm{t})\|^2_{Y_1}\,dy+\int\limits_{R^1}|\gamma+i\tau|^{2a}\,\|F_{y\to\tau}[e^{-\gamma t}u(\mathrm{t})]\|^2_{Y_0}\,d\tau\}^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $E^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)$ множество функций $V(p)$, где p - комплексное число, для которого $\operatorname{Re}p>\gamma$, таких что функции $V(p)$ принимают значения в гильбертовом пространстве $Y_1\subset Y_0$, являются аналитическими функциями в полуплоскости $\operatorname{Re}p>\gamma$ и для них конечна норма

$$\|u\|_{E^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)}=\sup_{\rho>\gamma}\{\int\limits_{\operatorname{Re}p=\rho}(\|V(p)\|^2_{Y_1}+|p|^{2a}\,\|V(p)\|^2_{Y_0})dp\}^{\frac{1}{2}}.$$

Преобразование Лапласа устанавливает взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между пространствами $W^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)$ и $E^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)$.

Если начальные условия (34) однородны, то есть

$\partial^j_t v|_{t=0}=0,\ j=1,2,...,l-1,$ (35)

то задача (31), (33), (35) с помощью преобразования Лапласа может быть сведена к эквивалентной задаче

$$A(p^r_1,\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y)v(x,\mathrm{y})=f(p,x,\mathrm{y}), \tag{36}$$

$$B_j(\mathrm{p}^r_1,D_x,\partial_y)v|_{y=0}=g_j(\mathrm{t},x),\ \mathrm{j}=1,2,...,\mathrm{r}_3. \tag{37}$$

Задача (36), (37) является задачей в полупространстве $y \geq 0$ для вырождающегося эллиптического уравнения с комплексным параметром $p = p_1^r$. Такие задачи были исследованы в главах 4, 5. Используя результаты этих глав, получаем следующее утверждение.

Теорема 28. Пусть $s \geq \max\{2m, \max\limits_{1\leq j\leq r_1} m_j + \frac{1}{2}\max\{q, \mathrm{r}\}$, s - кратно $2m$. Пусть выполнены условия $1'$, 3 – 5. Тогда существует такое число $\gamma_0 > 0$, что при всех $\gamma > \gamma_0$ и любых $F(t,x,y) \in H^{s-2m}_{r,\gamma,\alpha.q}(R^{n+1}_{++}) \equiv W_{2,\gamma}^{\overline{\frac{s-2m}{r}}}(\mathrm{H}_{s-2m,\alpha,q}(\mathrm{R}^n_+), L_2(\mathrm{R}^n_+))$ и

$$\mathrm{G}_j(x,y) \in H^{\sigma_j}_{r,\gamma}(R^n_+) \equiv W_{2,\gamma}^{\overline{\frac{s-2m}{r}}}(\mathrm{H}_{\sigma_j}(\mathrm{R}^{n-1}), L_2(\mathrm{R}^{n-1}),\ \sigma_j = s - m_j - \frac{1}{2}q,\ j = 1,2,...,r_3$$

задача (31), (33), (35) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $H^s_{r,\gamma,\alpha.q}$,причем справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{H^s_{r,\gamma,\alpha,q}} \leq c(\|F\|_{H^{s-2m}_{r,\gamma,\alpha,q}} + \sum_{j=1}^{r_3} \langle\langle G_j \rangle\rangle_{H^{\sigma_j}_{r,\gamma,}}) \ .$$

Рассмотрим теперь задачу (31), (33), (34). Введем наряду с пространствами $W^a_{2,\gamma}(Y_1, Y_0)$ пространства $\hat{W}^a_{2,\gamma}(Y_1, Y_0)$ абстрактных функций $t \to u(t), \mathrm{t} \in \mathrm{R}^1_+$ со значениями в $Y_1 \subset Y_0$ с конечной нормой

$$\|u\|_{\hat{W}^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)} = \{\int\limits_{R^1_+} \|e^{-\gamma t}u(\mathrm{t})\|^2_{Y_1} dy + \sum_{j=0}^{a} \int\limits_{R^1_+} \|\partial_t^j (e^{-\gamma t}u(\mathrm{t})]\|^2_{Y_0} dt\}^{\frac{1}{2}} . \tag{38}$$

Здесь $a \geq 0$ - целое число.

В дальнейшем используются пространства $\hat{W}^a_{2,\gamma}(Y_1, Y_0)$ при следующем конкретном выборе пространств Y_1, Y_0 :

$$\hat{H}^s_{r,\gamma,\alpha.q}(R^{n+1}_{++}) \equiv \hat{W}_{2,\gamma}^{\frac{s}{r}}(\mathrm{H}_{s,\alpha,q}(\mathrm{R}^n_+), L_2(\mathrm{R}^n_+)),\ \hat{H}^\beta_{r,\gamma}(R^n_+) \equiv \hat{W}_{2,\gamma}^{\frac{\beta}{r}}(\mathrm{H}_{\sigma_j}(\mathrm{R}^{n-1}), L_2(\mathrm{R}^{n-1}) \ .$$

Задача (31), (33), (34) сводится к задаче (31), (33), (35), если выполнено следующее условие согласования.

Условие 6. Для набора функций $F(t,x,y)\in \hat{H}^{s-2m}_{r,\gamma,\alpha.q}(R^{n+1}_{++})$, $G_j(x,y)\in \hat{H}^{\sigma_j}_{r,\gamma}(R^n_+)$, $\sigma_j = s - m_j - \frac{1}{2}q,\ j=1,2,...,r_3;\ \Phi_{\mu_1}(x,t)\in \hat{H}^{\beta_{\mu_1}}_{\alpha,q}(R^n_+)$ $\beta_\mu = s-\mu r-\frac{1}{2}r,\ \mu=1,2,...,l-1$ существует такая функция $v_0(y,x,t)\in \hat{H}^s_{r,\gamma,\alpha,q}(R^{n+1}_{++})$, что

1) выполняется условие $\partial_t^j v\big|_{t=0} = \Phi_j(\mathrm{x},\mathrm{y}),\ j=1,2,...,l-1$;
2) после продолжения функций $F - Av_0, G_j - B_j v_0\,|_{y=0},\ j=1,2,...,r_3$ нулем при $y<0$ справедливы включения $F - Av_0 \in \hat{\mathrm{H}}^{s-2m}_{r,\gamma,\alpha,q}$, $G_j - B_j v_0\,|_{y=0} \in \hat{\mathrm{H}}^{\sigma_j}_{r,\gamma}$, $j=1,2,...,r_3$;
3) существует постоянная $c>0$, что справедлива оценка
$$\|v_0\|_{\hat{H}^s_{r,\gamma,\alpha,\mathrm{q}}} \le c\sum_{j=0}^{l-1}\|\Phi_j\|_{\hat{H}^{\beta_\mu}_{r,\gamma}}\ .$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 29. Пусть выполнено условие 6 и условия теоремы 28. Тогда существует такое $\gamma_0>0$, что при всех $\gamma>\gamma_0$ и любых $F(t,x,y)\in \hat{H}^{s-2m}_{r,\gamma,\alpha.q}(R^{n+1}_{++})$,

$$\mathrm{G}_j(x,y)\in \hat{H}^{\sigma_j}_{r,\gamma}(R^n_+),\ \sigma_j = s-m_j-\frac{1}{2}q,\ j=1,2,...,r_3,$$

$$\Phi_{\mu_1}(x,t)\in \hat{H}^{\beta_{\mu_1}}_{\alpha,q}(R^n_+),\ \beta_{\mu_1} = s-\mu_1 r-\frac{1}{2}r,\ \mu_1 = 0,1,...,l-1$$

задача (31), (33), (34) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $\hat{H}^s_{r,\gamma,\alpha.q}(R^{n+1}_{++})$, причем справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{\hat{H}^s_{r,\gamma,\alpha,q}} \le C(\|F\|_{\hat{H}^{s-2m}_{r,\gamma,\alpha,q}} + \sum_{j=1}^{r_3}\langle\langle G_j\rangle\rangle_{\hat{H}^{\sigma_j}_{r,\gamma}} + \sum_{\mu_1=0}^{l-1}\|\Phi_{\mu_1}\|_{\hat{H}^{\beta_{\mu_1}}_{\alpha.q}})\ .$$

ГЛАВА 1

ВЕСОВЫЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ КОМПЛЕКСНОГО ПАРАМЕТРА

1.1 Формулы коммутации и вспомогательные оценки

Для доказательства теорем 1 - 9 нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения, приводимые в этом параграфе.

Через $H_s(R^1)$ $(-\infty < s < +\infty)$ обозначается известное пространство Соболева - Слободецкого (см. [46]) функций, заданных на R^1. Норма в этом пространстве обозначается через $\|\cdot\|_s$. Обозначим через $S(R^n)$ множество функций класса $C^\infty(R^n)$, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со всеми производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$, а через $S'(R^n)$ пространство обобщенных функций медленного роста (см. [47]).

В дальнейшем будем обозначать буквой c различные положительные константы, не зависящие от параметра p.

В работе используется следующее утверждение, представляющее частный случай соответствующего утверждения работы [48].

Лемма 1.1.1. Пусть $f(x)(1+|x|)^{-s} \in L_2(R^1)$ (s – действительное число), $g(x) \in S(R^1)$, тогда

$$f(x) \cdot g(x) = F^{-1}_{\tau \to x}[F_{x \to \tau}[f] * F_{x \to \tau}[g]], \tag{1.1.1}$$

$$F_{x \to \tau}[f \cdot g] = F_{x \to \tau}[f] * F_{x \to \tau}[g]. \tag{1.1.2}$$

Участвующие в (1.1.1) - (1.1.2) операции понимаются в смысле теории обобщенных функций S' (см. [47]). В частности, под сверткой $f * g$

понимают такую обобщенную функцию, которая действует на основную функцию $\varphi \in S(R^1)$ по правилу

$$(f * g, \varphi) = \lim_{k \to +\infty} (f(x) \cdot g(y), \eta_k(x, y)\varphi(x + y)), \tag{1.1.3}$$

если предел существует и не зависит от выбора последовательности $\eta_k(x, y) \to 1$ (см. [47]).

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.1.2. Пусть функция $\beta(\tau)$ принадлежит пространству $C^N(R^1)$ $(N \ge \sigma,\ \sigma \in R^1)$. Пусть функция $\lambda(p, \tau, y)$ принадлежит $C^\infty\,(Q \times \Omega \times R^1)$, где $p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \dfrac{\pi}{2}, |p| > 0\}$ - конус в комплексной плоскости, $\Omega \in R^1$ - произвольное открытое множество, $y \in R^1$, и при всех $j, l = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы оценки

$$\left|\partial_\tau^j \partial_y^j \lambda(p, \tau, y)\right| \le c_{jl}(|p| + |y|)^{\sigma - j} \tag{1.1.4}$$

с некоторыми константами c_{jl} >0.

Тогда для любой функции $w(\tau) \in S(R^1)$ справедлива формула представления

$$\beta(\tau)F^{-1}_{y\to\tau}[\lambda(p,\tau,y)F_{\tau\to y}[w]] - F^{-1}_{y\to\tau}[\lambda(p,\tau,y)F_{\tau\to y}[\beta(\tau)w]] =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} F^{-1}_{y\to\tau}[\lambda_i(p,\tau,y)F_{\tau\to y}[D_\tau^i\beta(\tau)\cdot w]] + F^{-1}_{y\to\tau}[\int_{-\infty}^{\infty} g_N(p,\tau,y-z,z)\cdot$$

$$\cdot F_{\tau\to(y-z)}[D_\tau^N\beta(\tau)]F_{\tau\to z}[w]dz], \tag{1.1.5}$$

где

$$\lambda_i(p,\tau,y) = \frac{(-1)^i}{i!}\partial_y^i\lambda(p,\tau,y) \quad , \tag{1.1.6}$$

$$g_N(p,\tau,y-z,z) = N\int_0^1 \lambda_N(p,\tau,y-\theta(y-z))(1-\theta)^{N-1}d\theta. \tag{1.1.7}$$

Доказательство. Обозначим

$$\tilde{w}(y) = F_{\tau\to y}[w],\ \ \tilde{\beta}_i(y) = F_{\tau\to y}[D_\tau^i\beta(\tau)],\ \ i = 0,1,\ldots,N. \tag{1.1.8}$$

Используя формулу Тейлора, получим равенство:

$$\lambda(p,\tau,y)=\lambda(p,\tau,x+y)+\sum_{i=1}^{N-1}\lambda_i(p,\tau,x+y)x^i+g_N(p,\tau,x,y)x^N, \qquad (1.1.9)$$

где λ_i, g_N определены в (1.1.6), (1.1.7). Используя равенство (1.1.9), выводим:

$$\begin{aligned}&(\tilde\beta*(\lambda\tilde w)-\lambda\tilde\beta*\tilde w,\varphi)=\\&=\sum_{i=1}^{N-1}\lim_{k\to+\infty}(\tilde\beta_i(x)\cdot\tilde w(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y)\lambda_i(p,\tau,x+y))+\\&+\lim_{k\to+\infty}(\tilde\beta_N(x)\cdot\tilde w(y),\eta_k(x,y)\varphi(x+y)g_N(p,\tau,x,y)).\end{aligned} \qquad (1.1.10)$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\tilde\beta*(\lambda\tilde w)-\lambda\tilde\beta*\tilde w=\sum_{i=1}^{N-1}\lambda_i(p,\tau,x)\tilde\beta_i(x)*\tilde w(x)+R_N(\tilde\beta_N,\tilde w), \qquad (1.1.11)$$

если пределы в правой части (1.1.10) существуют и не зависят от выбора последовательности $\eta_k(x,y)\to 1$. Здесь $R_N(\tilde\beta_N,\tilde w)$ - обобщенная функция из $S'(R^1)$, действующая по правилу

$$\begin{aligned}&(R_N(\tilde\beta_N,\tilde w)(x),\varphi(x))=\lim_{k\to+\infty}(\tilde\beta_N(x)\cdot\tilde w(y),\eta_k(x,y)g_N(p,\tau,x,y)\varphi(x+y))=\\&=\lim_{k\to+\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde\beta_N(x-y)\tilde w(y)\eta_k(x-y,y)g_N(p,\tau,x-y,y)dy\varphi(x)dx.\end{aligned} \qquad (1.1.12)$$

Покажем существование предела (1.1.12). Для этого достаточно доказать включение

$$G(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde\beta_N(x-y)\cdot g_N(p,\tau,x-y,y)\tilde w(y)dy\in L_2(R^1). \qquad (1.1.13)$$

Кроме того, из (1.1.13) будет следовать, что $R_N(\tilde\beta_N,\tilde w)$ - регулярный функционал на $L_2(R^1)$.

Оценим $G(x)$ из (1.1.13) по норме $L_2(R^1)$:

$$\|G\|_{L_2(R^1)}\le\left\|\int_{R^1}\left|\tilde\beta_N(x-y)\tilde w(y)\right|\cdot\left|g_N(p,\tau,x-y,y)dy\right|\right\|_{L_2(R^1)}. \qquad (1.1.14)$$

Из (1.1.4), (1.1.6) и (1.1.7) выводим неравенство

$$\left|g_N(p,\tau,x-y,y)\right|\le c\int_0^1(|p|+|y+\theta(x-y)|^2)^{\frac{1}{2}(\sigma-N)}d\theta. \tag{1.1.15}$$

Воспользовавшись далее неравенством Питре (см. [49]):

$$(1+|z_1|^2)^{\frac{s}{2}}(1+|z_2|^2)^{-\frac{s}{2}}\le c(1+|z_1-z_2|^2)^{\frac{|s|}{2}} \tag{1.1.16}$$

при $z_1=y+\theta(x-y),\ z_2=y,\ \ s=\sigma-N$ в правой части неравенства (1.1.15), устанавливаем при $N\ge\sigma,\ 0\le\theta\le 1$ оценку

$$\left|g_N(p,\tau,x-y,y)\right|\le c(|p|+|x-y|^2)^{\frac{1}{2}(N-\sigma)}(|p|+|y|^2)^{\frac{1}{2}(\sigma-N)}. \tag{1.1.17}$$

Используя в правой части (1.1.14) неравенство (1.1.17) и неравенство Минковского, выводим оценку

$$\|G\|_{L_2(R^1)}\le c\int_{R^1}\left\|(|p|+|x-y|^2)^{\frac{1}{2}(N-\sigma)}\tilde{\beta}_N(x-y)\right\|_{L_2(R^1)}\cdot(|p|+|y|^2)^{\frac{1}{2}(\sigma-N)}\left|\tilde{w}(y)\right|dy \tag{1.1.18}$$

Из (1.1.8) и условий леммы вытекает, что выражение $\left\|(|p|+|x-y|^2)^{\frac{1}{2}(N-\sigma)}\tilde{\beta}_N(x-y)\right\|_{L_2(R^1)}$, представляющее собой норму функции $D_\tau^N\beta(\tau)$ в пространстве $H_{N-\sigma}(R^1)$, конечно.

Таким образом, с помощью неравенства Коши - Буняковского из (1.1.18) получим оценку

$$\|G\|_{L_2(R^1)}\le c\left\|\tilde{\beta}_N\right\|_{N-\sigma}\cdot\|w\|_{\sigma-N+\delta}, \tag{1.1.19}$$

где $\delta>\dfrac{1}{2}$.

Так как по условию $w\in S(R^1)$, то из неравенства (1.1.19) следует включение (1.1.13). Таким образом, переходя к пределу при $k\to+\infty$ в (1.1.12), получим равенство

$$(R_N(\tilde{\beta}_N,w),\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\beta}_N(x-y)g_N(p,\tau,x-y,y)\tilde{w}(y)dy\varphi(x)dx. \tag{1.1.20}$$

Покажем теперь, что существуют свертки $\tilde{\beta}_i*\tilde{w},\ i=1,2,...,N-1$.

Заметим, что из условий леммы вытекает справедливость следующих неравенств:

$$\left|D_\tau^i \beta(\tau)\right| \le c(1+|\tau|)^{N-i},\ i=1,2,...N,\ \forall\ \tau \in R^1. \qquad (1.1.21)$$

Неравенство (1.1.21) следует из оценки $\left|D_\tau^N \beta(\tau)\right| \le c < +\infty,\ \forall \tau \in R^1$ и очевидного тождества

$$D_\tau^i \beta(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau}\int_{-\infty}^{\tau_1}...\int_{-\infty}^{\tau_{N-i-1}} D_\eta^N \beta(\eta) d\eta d\tau_{N-i-1}...d\tau_1.$$

Неравенства (1.1.21) означают, что функции $D_\tau^i \beta(\tau),\ i=1,2,...,N-1$ удовлетворяют при $s > N-i+\frac{1}{2}$ условиям леммы 1.1.1. Так как $w(\tau) \in S(R^1)$, то из леммы 1.1.1 (см. (1.1.2)) с учетом (1.1.8) выводим, что существует свертка

$$\tilde{\beta}_i(x) * \tilde{w}(x) = F_{\tau\to x}[D_\tau^i \beta(\tau)\cdot w(\tau)],\ i=1,2,...,N-1.$$

Отсюда и из (1.1.10), (1.1.20) следует равенство

$$\tilde{\beta} * (\lambda\tilde{w}) - \lambda\tilde{\beta} * \tilde{w} = \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i(x) F_{\tau\to x}[D_\tau^i \beta \cdot w] + R_N(\tilde{\beta}_N, \tilde{w}), \qquad (1.1.22)$$

где $R_N(\tilde{\beta}_N, \tilde{w})$ - регулярная обобщенная функция, определенная в (1.1.20).

Докажем формулы (1.1.5). Так как $\beta(\tau)(1+|\tau|)^{-s} \in L_2(R^1)$ при $s > N+\frac{1}{2}$ и $\lambda(x)\tilde{w}(x) \in S(R^1)$, то из леммы 1.1.1 следует равенство

$$\beta(\tau) F_{x\to\tau}^{-1}[\lambda(x)\tilde{w}(x)] = F_{x\to\tau}^{-1}[\tilde{\beta}]\cdot F_{x\to\tau}^{-1}[\lambda(x)\tilde{w}(x)] =$$
$$= F_{x\to\tau}^{-1}[\tilde{\beta}(x) * (\lambda\tilde{w})(x)]. \qquad (1.1.23)$$

Аналогично получим равенство

$$F_{\tau\to x}[\beta(\tau) w(\tau)] = \tilde{\beta}(x) * \tilde{w}(x). \qquad (1.1.24)$$

Используя (1.1.22), (1.1.23) и (1.1.24), получаем искомое равенство (1.1.5).

Следствие 1.1.1. Пусть функция $\beta(\tau)$ удовлетворяет условиям леммы 1.1.2. Пусть функция $\lambda(\mathrm{p},\tau,y)$ принадлежит $C^\infty(R^1)$ и

$\left|\partial_y^j \lambda(p,\tau,y)\right| \le c < +\infty,\ \ j = 0, 1, 2,...,$ где число $c > 0$ не зависит от p,τ,y. Тогда при всех $w \in S(R^1)$ справедливо равенство (1.1.5).

Доказательство. Из условий следствия 1.1.1 выводим справедливость (1.1.13), так как в силу неравенства Минковского

$\|G\|_{L_2(R^1)} \le c\|\beta_N\|_{L_2(R^1)} \cdot \|w\|_{L_1(R^1)} < \infty$.

Повторяя теперь доказательство леммы 1.1.2. получим утверждение следствия 1.1.1.

В дальнейшем нам потребуются некоторые утверждения, доказанные в [50]. Мы приведем эти утверждения без доказательства.

Лемма 1.1.3. Пусть выполнено условие 1 и функция $f(t)$ принадлежит $C^{s_1}[0,+\infty)$, где число s_1 определено в условии 1, пусть $\left|\partial_t^i f(t)\right| \le c < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty), i = 0, 1,..., s_1$. Тогда при $s_1 \ge N \ge \max\limits_{0\le p\le l}\{2p + \dfrac{l+\rho-p}{\nu}\}$ ($\rho > 0,\ l > 0$ - действительные числа) равномерно по $t \in [0,+\infty)$ ограничена величина

$$\left|\alpha^{-\rho}(t)(\alpha(t)\partial_t)^N (f(t)\alpha^{-l}(t))\right| \le c < +\infty. \tag{1.1.25}$$

Следствие 1.1.2. Пусть выполнено условие 1. Тогда при

$s_1 - l \ge N \ge \max\limits_{0\le p\le l}\{2p + \dfrac{l-p+\frac{1}{2}}{\nu}\}$ ($l = 1, 2,..., s_1,\ s_1$ - определено в условии 1)

для всех $t \in [0,+\infty)$ справедлива оценка

$$\left|\alpha^{-\frac{1}{2}}(t)(\alpha(t)\partial_t)^N (\theta_i^l(t)\alpha^{-l}(t))\right| \le c < \infty,\ \ i = 0, 1,..., l.$$

Следствие 1.1.3. Пусть выполнено условие 1. Тогда при

$s_1 \ge N \ge \max\limits_{0\le p\le \frac{1}{2}}\{2p + \dfrac{\frac{3}{2}-p}{\nu}\} = \max\{\dfrac{3}{2\nu}, 1 + \dfrac{1}{\nu}\}$ выполняется оценка

$$\left|\alpha^{-1}(t)(\alpha(t)\partial_t)^N(\alpha^{-\frac{1}{2}}(t))\right| \le c < +\infty$$

при всех $t \in [0,+\infty)$, где число s_1 определено в условии 1.

Следствие 1.1.4. Пусть выполнено условие 1. Тогда при $s_1 \ge N \ge \max\limits_{0\le p\le\frac{1}{2}}\{2p + \frac{\frac{1}{2}-p}{\nu}\} = \max\{\frac{1}{2\nu}, 1\}$ и при всех $t \in [0,+\infty)$ выполняется оценка $\left|(\alpha(t)\partial_t)^N \alpha^{-\frac{1}{2}}(t)\right| \le c < +\infty.$

Лемма 1.1.4. Пусть выполнено условие 1 и $s_1 \ge l+i;\quad i, l = 1,2,\dots$ Предположим, что функция $u(t)$ принадлежит $C^{l+i}[0,+\infty)$. Тогда для функции

$$G_i u(t) = \sum_{j=0}^{l} \alpha^{-l}(t)(\alpha(t)\partial_t)^i(\theta_j^l(t))\partial_{\alpha,t}^j u(t), \tag{1.1.26}$$

где функции $\theta_i^l(t)$ строятся по рекуррентным соотношениям

$$\begin{cases} \theta_i^{l+1}(t) = \theta_{i-1}^l(t) + \partial_{\alpha,t}\theta_i^l(t) - (l+\frac{1}{2})\alpha'(t), \quad 1 \le i \le l \\ \theta_0^{l+1}(t) = \partial_{\alpha,t}\theta_0^l(t) - (l+\frac{1}{2})\alpha'(t),\ \theta_l^l \equiv 1, \quad \theta_0^l = -\dfrac{\alpha'(t)}{2}, \end{cases} \tag{1.1.27}$$

справедлива формула представления

$$G_i u(t) = \sum_{j=0}^{l}\sum_{i_1=0}^{i-1} b_{i_1,j}^i(t)\partial_{\alpha,t}^{i_1}\partial_t^j u(t), \tag{1.1.28}$$

где ограниченные при $t \in [0;+\infty)$ функции $b_{i_1,j}^i(t)$ принадлежат $C^{s_1-l-i}[0,+\infty)$ и зависят лишь от функции $\alpha(t)$ и её производных до порядка $l+i$.

Лемма 1.1.5. Пусть выполнено условие 1, $s_1 \ge l+i;\ l, i = 1, 2,\dots s_1$, предположим, что функция $u(t)$ принадлежит $C^{l+i}[0,+\infty)$. Тогда справедлива формула представления

$$\sum_{j=0}^{l}(\alpha\partial_t)^i(\theta_j^l(t)\alpha^{-l}(t))\partial_{\alpha,t}^j u(t) = \sum_{j=0}^{l}\sum_{i_1=0}^{i-1} b_{i_1,j}^i(t)\partial_{\alpha,t}^{i_1}\partial_t^j u(t), \tag{1.1.29}$$

функции $\theta_j^l(t),\ j=0,1,...,l$ определены в (1.1.27), а функции $b_{i_1,j}^i(t)$ принадлежат $C^{s_1-l-1}[0,+\infty)$.

Следствие 1.1.5. Пусть выполнены условия леммы 1.1.5 при $l=1$. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} J &= \sum_{j=0}^{1}(\alpha(t)\partial_t)^i(\theta_j^1(t)\alpha^{-1}(t))\cdot\partial_{\alpha,t}^j u(t) = \\ &= P_{i,1}(t)\partial_t u(t) - \sum_{i_1=1}^{i} c_{i,i_1}\partial_t(\alpha\partial_t)^{i_1-1}(\frac{\alpha'(t)}{2})P_{i-i_1,1}(t)u(t), \end{aligned} \tag{1.1.30}$$

где функции $P_{N,l}\in C^{s_1-N}[0,+\infty)$ строятся по рекуррентным формулам

$$\begin{cases} P_{N,l}(t) = P_{N-1,l}^{'}(t)\alpha(t) - lP_{N-1,l}(t)\alpha'(t) \\ P_{1,l}(t) = f'(t)\alpha(t) - l\alpha'(t)f(t). \end{cases} \tag{1.1.31}$$

где функции $P_{i,1}(t)$ определяются по рекуррентным соотношениям (1.1.27) при $l=1$, $f(t)\equiv 1$, c_{i,i_1} - биномиальные коэффициенты, $i=1,2,...,s_1$, $P_{0,1}(t)\equiv 1$.

Введем функцию $\beta(\tau)$ такую, что

$$\beta(\tau) = \alpha^{-\frac{1}{2}}(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}, \tag{1.1.32}$$

где $t=\varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau=\varphi(t)=\int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Лемма 1.1.6. Пусть выполнено условие 1 и $1+\frac{1}{\nu}\le N\le s_1$. Если функция $u(t)$ принадлежит $C_0^N[0,+\infty)$, то функция $\beta(\tau)w(\tau)$ принадлежит $L_1(R^1)$, где $\beta(\tau)$ определена в (1.1.32),

$$w(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}D_{\alpha,t}^N u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)},\ D_{\alpha,t} = -\sqrt{-\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}\,. \tag{1.1.33}$$

Следствие 1.1.6. Пусть выполнены условия леммы 1.1.6. Тогда справедливо включение

$$D_\tau^j\beta(\tau)\cdot w(\tau)\in L_1(R^1),\quad j=1,2,...,N, \tag{1.1.34}$$

где функции $\beta(\tau)$ и $w(\tau)$ определены соответственно в (1.1.32), (1.1.33).

Следствие 1.1.7. Пусть выполнены условия леммы 1.1.6. Тогда $w(\tau)$ принадлежит $L_1(R^1)$, где функция $w(\tau)$ определена в (1.1.33).

Лемма 1.1.7. Пусть $v(x,t)\in H_{s,\alpha}(R_+^n)$, s – действительное число, $b(t)\in C^{[|s|]+1}[0,+\infty)$ и $\left|\partial_t^i b(t)\right|\le c<\infty$ при всех $t\in[0,+\infty]$, $i=0,1,...,[|s|]+1$. Тогда выполняется оценка $\left\|b(t)v(x,t),|p|\right\|_{s,\alpha}\le c\left\|v,|p|\right\|_{s,\alpha}$ с константой $c>0$, не зависящей от v.

Здесь и в дальнейшем $\|\cdot\|_{s,\alpha}$ - норма в пространстве $H_{s,\alpha}(R_+^n)$.

1.2. Композиция весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим от комплексного параметра, из класса $S_{\alpha,p}^m$

Рассмотрим композицию весовых псевдодифференциальных операторов $G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)$, где

$$G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)=F_\alpha^{-1}[g(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[u]],\qquad(1.2.1)$$

$$Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)=F_\alpha^{-1}[q(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[u]].\qquad(1.2.2)$$

Так как преобразование F_α связано с преобразованием Фурье равенством (2) , то

$$G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F_{\eta\to\tau}^{-1}[g(p,t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[\sqrt{\alpha(t)}\,u(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}]]_{\tau=\varphi(t)}\ ,$$

$$Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F_{\eta\to\tau}^{-1}[q(p,t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[\sqrt{\alpha(t)}\,u(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}]]_{\tau=\varphi(t)}\,.$$

Следовательно, композицию псевдодифференциальных операторов $G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ и $Q(t,\xi,D_{\alpha,t})$ можно записать в виде

$$G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[g(p,t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[\sqrt{\alpha(\varphi^{-1}(\tau))}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha(\varphi^{-1}(\tau))}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]]]]\Bigg|_{\tau=\varphi(t)}=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}\cdot$$

$$\cdot[F^{-1}_{\eta\to\tau}[q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]]]]_{\tau=\varphi(t)}.$$

Таким образом,

$$G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}G(p,\tau,\xi,D_\tau)Q(p,\tau,\xi,D_\tau)[u_\alpha(\tau)]\Bigg|_{\tau=\varphi(t)}, \qquad (1\ .2.3)$$

где

$$G(p,\tau,\xi,D_\tau)u(\tau)=F^{-1}_{\eta\to\tau}[g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u(\tau)]], \qquad (1.2.4)$$

$$Q(p,\tau,\xi,D_\tau)u(\tau)=F^{-1}_{\eta\to\tau}[q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u(\tau)]],$$

$t=\varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau=\varphi(t)=\int\limits_t^d\frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Выясним, какому классу символов принадлежит символ $g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)$, если $g(p,t,\xi,\eta)\in S^{m_1}_{\alpha,p}$. Так как $g(p,t,\xi,\eta)\in S^{m_1}_{\alpha,p}$, то в силу определения 3 для всех $l=0,1,2,...$ имеем оценки

$$\left|(\alpha(t)\partial_t)^j\partial^l_\eta g(p,t,\xi,\eta)\right|\le c_{jl}(|p|+|\xi|+|\eta|)^{m_1-l}. \qquad (1.2.5)$$

Заметим, что

$$(-\alpha(t)\partial_t)g(p,t,\xi,\eta)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}=\partial_\tau g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta),$$

то есть

$$(-\alpha(t)\partial_t)^j g(p,t,\xi,\eta)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}=\partial^j_\tau g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta). \qquad (1.2.6)$$

Отсюда

$$\left|\partial^j_\tau\partial^l_\eta g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\right|\le c_{jl}(|p|+|\xi|+|\eta|)^{m_1-l+\delta j}. \qquad (1.2.7)$$

Определение 1.2.1. Будем говорить, что символ $\lambda(p,\tau,\xi,\eta)$ принадлежит при всех $\xi\in R^{n-1}$ классу символов $S^m_p(\Omega_1)$, m - действительное число, $\Omega_1 \subset R^1$, $\delta \in [0,1)$, если $\lambda(p,\tau,\xi,\eta)$ принадлежит пространству $C^\infty(\Omega_1)$ по переменной τ и пространству $C^\infty(R^1)$ по переменной η. При этом для всех $j, l = 0, 1, 2,...$ справедливы оценки

$$\left|\partial_\tau^j \partial_\eta^l \lambda(p,\tau,\xi,\eta)\right| \le c_{jl}(|p| + |\xi| + |\eta|)^{m-l+\delta j}. \tag{1.2.8}$$

Из (1.2.5) и (1.2.7) следует, что если $g(p,t,\xi,\eta) \in S_{\alpha,p}^{m_1}$, то $\tilde{g}(p,\tau,\xi,\eta) = \hat{g}(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta) \in S_p^{m_1}$.

Кроме того, из (1.2.3) следует, что для того чтобы исследовать композицию операторов $G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ и $Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ достаточно исследовать композицию операторов $G(p,\tau,\xi,D_\tau)$ и $Q(p,\tau,\xi,D_\tau)$.

Обозначим через B^∞ совокупность таких бесконечно дифференцируемых функций $f(\tau)$ на R^1, что $f(\tau)$ и все её производные ограничены на R^1.

Назовем ядром оператора $G(p,\tau,\xi,D_\tau)$ функцию

$$k(\tau,\xi,z) = F_{\eta\to z}^{-1}[g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)]. \tag{1.2.9}$$

По аналогии с работой [51] докажем следующее утверждение.

Лемма 1.2.1. Пусть $g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta) \in S_p^m$ (m - действительное число), $f(\tau) \in B^\infty$. Тогда функция

$$h(p,\tau,\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} k(p,\tau,\xi,\tau - y)e^{-i(y-\tau)\xi} f(y)dy \tag{1.2.10}$$

при $\eta \to \infty$ допускает асимптотическое разложение

$$h(p,\tau,\xi,\eta) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i)^j}{j!} \partial_\eta^j g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta) \cdot f^{(j)}(\tau),$$

где $f^{(j)}(\tau)$ - производная порядка j от функции $f(\tau)$.

При этом для любых $N > 0$ найдется $N_1 > 0$, что функция

$$T_{N_1}(p,\tau,\xi,\eta)=h(p,\tau,\xi,\eta)-\sum_{j=0}^{N_1-1}\frac{(i)^j}{j!}\partial_\eta^j g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\cdot f^{(j)}(\tau) \tag{1.2.11}$$

принадлежит классу S_δ^{-N}.

Доказательство. Запишем (1.2.10) в виде

$$h(p,\tau,\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}k(p,\tau,\xi,z)f(\tau-z)e^{iz\eta}dz. \tag{1.2.12}$$

Разложим функцию $f(\tau-z)$ по формуле Тейлора в окрестности точки τ, получим

$$f(\tau-z)=\sum_{j=0}^{N_1-1}\frac{1}{j!}f^{(j)}(\tau)(-z)^j+g_{N_1}(\tau,z)z^{N_1}, \tag{1.2.13}$$

где

$$g_{N_1}(\tau,z)=\frac{(-1)^{N_1}}{(N_1-1)!}\int_0^1 f^{(N_1)}(\tau-\theta z)(1-\theta)^{N_1-1}d\theta.$$

Применяя (1.2.13) в (1.2.12), получим равенство

$$\begin{gathered}h(p,\tau,\xi,\eta)=\sum_{j=0}^{N_1-1}\int_{-\infty}^{\infty}k(p,\tau,\xi,z)\cdot\frac{1}{j!}(-z)^j f^{(j)}(\tau)e^{iz\eta}dz+\\+\int_{-\infty}^{\infty}k(p,\tau,\xi,z)\cdot g_{N_1}(\tau,z)z^{N_1}e^{iz\eta}dz.\end{gathered} \tag{1.2.14}$$

Используя свойства преобразования Фурье, получим

$$(-z)^j k(p,\tau,\xi,\eta)=(-z)^j F_{\eta\to z}^{-1}[g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)]=$$
$$=F_{\eta\to z}^{-1}[\partial_\eta^j g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)](-i)^j(-1)^j=(i)^j F_{\eta\to z}^{-1}[\partial_\eta^j g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)].$$

Применяя это равенство в правой части равенства (1.2.14), получим равенство

$$h(p,\tau,\xi,z)=\sum_{j=0}^{N_1-1}\int_{-\infty}^{\infty}(i)^j\cdot\frac{1}{j!}F^{-1}_{\eta\to z}[\partial^j_\eta g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)]f^{(j)}(\tau)e^{iz\eta}dz+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}k(p,\tau,\xi,z)g_{N_1}(\tau,z)z^{N_1}e^{iz\eta}dz=\sum_{j=0}^{N_1-1}\frac{(i)^j}{j!}\partial^j_\eta g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)f^{(j)}(\tau)+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}k(p,\tau,\xi,z)g_{N_1}(\tau,z)z^{N_1}e^{iz\eta}dz.$$

Отсюда следует, что

$$T_{N_1}(p,\tau,\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}k(p,\tau,\xi,z)g_{N_1}(\tau,z)z^{N_1}e^{iz\eta}dz. \qquad (1.2.15)$$

Обозначим $k_{N_1}(p,\tau,\xi,z)=k(p,\tau,\xi,z)\cdot z^{N_1}$. Тогда

$$k_{N_1}(p,\tau,\xi,z)=z^{N_1}F^{-1}_{\eta\to z}[g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)]=F^{-1}_{\eta\to z}[(\frac{1}{i}\partial_\eta)^{N_1}g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)]\;.(1.2.16)$$

Заметим, что для любого $M\geq 0$ при $N_1\geq N+m$ ядро $k_{N_1}(p,\tau,\xi,z)$ есть непрерывная функция, удовлетворяющая оценкам

$\left|\partial^l_z k_{N_1}(p,\tau,\xi,z)\right|\leq\dfrac{c}{(|p|+|\xi|+|z|)^{M+N+1}}$, константа c оценивается через конечное число констант c_{jl} из (1.2.7) при $j=0$.

Для $g_{N_1}(\tau,z)=\dfrac{(-1)^{N_1}}{(N_1-1)!}\displaystyle\int_0^1 f^{(N_1)}(\tau-\theta z)(1-\theta)^{N_1-1}d\theta$ вытекает оценка

$\left|\partial^l_z g_{N_1}(\tau,z)\right|\leq c\max\limits_{|y|\leq|z|}\left|f^{(l+N_1)}(\tau+y)\right|$.

Если $N_1\geq N+m$, то, интегрируя в (1.2.15) по частям N раз и оценивая получившиеся интегралы по абсолютной величине с помощью последних двух оценок, мы докажем неравенство

$$(|p|+|\xi|+|\eta|)^N\left|T_{N_1}(\tau,\xi,\eta)\right|\leq c\sum_{N_1\leq l\leq N_1+N}\sup(\max_{|y|\leq|z|}\frac{\left|f^{(l)}(\tau+y)\right|}{(|p|+|z|)^M}),$$

Причем константа c оценивается через конечное число констант c_{jl} из (1.2.7) при $j=0$.

Аналогичным образом оцениваются и производные

$\partial_\tau^j \partial_\eta^l T_{N_1}(p,\tau,\xi,\eta) = \partial_\tau^j \partial_\eta^l \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(p,\tau,\xi,z) g_{N_1}(\tau,z) z^{N_1} e^{iz\eta} dz.$ Только здесь можно интегрировать по частям $N+l$ раз. Тем самым установим, что

$\left|\partial_\tau^j \partial_\eta^l T_{N_1}(\tau,\xi,\eta)\right| \le c_{jl}(|p|+|\xi|+|\eta|)^{-N-l}.$

Таким образом, функция (1.2.11) принадлежит классу S_δ^{-N}.

Утверждение теоремы 1 следует теперь из следующего утверждения.

Теорема 1.2.1. Пусть $G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ и $Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ - весовые псевдодифференциальные операторы с символами $g(p,t,\xi,\eta)$ и $q(p,t,\xi,\eta)$, принадлежащими соответственно классам $S_{\alpha,p}^{m_1}(\Omega)$ и $S_{\alpha,p}^{m_2}(\Omega)$ (m_1, m_2- действительные числа). $\Omega \in \overline{R}_+^1$, $p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \dfrac{\pi}{2}, |p| > 0\}$. Тогда для любого $N \ge 0$ существует такое $N_1 > 0$ и такой символ $T_{N_1}(p,t,\xi,\eta) \in S_{\alpha,p}^{-N}$, что справедливо равенство

$$G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})\, Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) - \sum_{j=1}^{N_1-1} R_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) = T_{N_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t}), \qquad (1.2.17)$$

где $T_{N_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ - весовой псевдодифференциальный оператор вида (1.2.1) с символом $T_{N_1}(p,t,\xi,\eta)$. $R_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ - весовой псевдодифференциальный оператор с символом

$$r_j(p,t,\xi,\eta) = \frac{1}{j!} \partial_\eta^j g(p,t,\xi,\eta) \cdot (\alpha(t)\partial_t)^j q(p,t,\xi,\eta). \qquad (1.2.18)$$

Доказательство. Пусть $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$, тогда в силу (1.2.3) получим равенство

$$G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}G(p,\tau,\xi,D_\tau)Q(p,\tau,\xi,D_\tau)[u_\alpha(\tau)]= \tag{1.2.19}$$
$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha(t)}}G(p,\tau,\xi,D_\tau)\int_{-\infty}^{\infty}q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{-i\tau\eta}\tilde{u}(\eta)d\eta,$$

где $\tilde{u}(\eta)=F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$.

Равенство (1.2.19) можно записать в виде

$$G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha(t)}}\int_{-\infty}^{\infty}G(p,\tau,\xi,D_\tau)[q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{-i\tau\eta}]\cdot$$
$$\cdot\tilde{u}(\eta)d\eta=\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha(t)}}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{i\tau\xi}G(p,\tau,\xi,D_\tau)[q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{-i\tau\eta}]]e^{-i\tau\xi}\cdot\tilde{u}(\tau)d\tau.$$

Отсюда следует, что символом оператора $G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ является функция $e^{i\tau\xi}G(p,\tau,\xi,D_\tau)[q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{-i\tau\eta}]$, которую можно представить, как $r(p,\tau,\xi,\eta,\eta)$, где $r(p,\tau,\xi,\eta,y)=\int k(p,\tau,\xi,\tau-y)q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{-i(y-\tau)\xi}dy.$

По лемме 1.2.1 для любых $N>0$ найдется $N_1>0$ такое, что функция

$$T_{N_1}(p,\tau,\xi,\eta)=r(p,\tau,\xi,\eta,y)-\sum_{j=0}^{N_1-1}\frac{(i)^j}{j!}\partial_\eta^j g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\cdot f^{(j)}(\tau)=$$
$$=r(p,\tau,\xi,\eta,y)-\sum_{j=0}^{N_1-1}r_j(p,\tau,\xi,\eta)$$

принадлежит классу S_p^{-N}. Здесь $f(\tau)=q(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)$. Следовательно,

$T_{N_1}(p,t,\xi,\eta)=g(p,t,\xi,\eta)q(p,t,\xi,\eta)-\sum_{j=0}^{N_1-1}r_j(p,t,\xi,\eta)$, то есть для любого $N\geq 0$ существует такое $N_1>0$ и такой символ $T_{N_1}(p,t,\xi,\eta)\in S_{\alpha,p}^{-N}$, что справедливо равенство (1.2.17).

1.3. Теорема об ограниченности весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим от комплексного параметра, из класса $S^{m}_{\alpha,p}$

Заметим, что

$$\|G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)\|^2_{L_2(R^1_+)} = \int_0^\infty \left|F^{-1}_\alpha[g(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[u]]\right|^2 dt =$$

$$= \int_0^\infty \left| \left. \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]] \right|^2 \right|_{\tau=\varphi(t)} dt.$$

Сделав замену переменной $t=\varphi^{-1}(\tau)$, получим $dt=(\varphi^{-1}(\tau))'_\tau d\tau = -\alpha(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)} d\tau$. Таким образом, получаем равенство

$$\begin{aligned}\|G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)\|^2_{L_2(R^1_+)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\|F^{-1}_{\eta\to\tau}[g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]]\right\|^2 d\tau = \\ &= \left\|F^{-1}_{\eta\to\tau}[g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]]\right\|^2_{L_2(R^1)} = \|G(p,\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)\|^2_{L_2(R^1)}.\end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Следовательно, норма оператора $G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ в пространстве $L_2(R^1_+)$ равна норме оператора $G(p,\tau,\xi,D_\tau)$, определённого в (1.2.4), в пространстве $L_2(R^1)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.3.1. Пусть $g(p,t,\xi,\eta)\in S^0_{\alpha,p}(\Omega)$, $\Omega\subset \bar{R}^1_+$, $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\frac{\pi}{2},\ |p|>0\}$, тогда существует такая константа $c>0$, что для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$ справедлива оценка

$$\|G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u\|_{L_2(R^1_+)} \le c\|u\|_{L_2(R^1_+)} \tag{1.3.2}$$

с константой $c>0$, не зависящей от параметра p.

Доказательство. Докажем вначале теорему 1.3.1 при следующем дополнительном предположении. Будем считать, что $g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)=0$ при $|\tau-a|>A$, где $A>0$ - некоторое число, $a\in R^1$.

Рассмотрим равенство

$$f(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\eta} p(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta) F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]d\eta.$$

Перейдем в этом равенстве к преобразованию Фурье, получим

$$\tilde{f}(z)=\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}_1(p,z-\eta,\xi,\eta)\tilde{u}_\alpha(\eta)d\eta, \tag{1.3.3}$$

где

$$g_1(p,\tau,\xi,\eta)=g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta),\ \tilde{g}_1(p,z,\xi,\eta)=F_{\tau\to z}[g_1(p,\tau,\xi,\eta)],\ \ \tilde{u}_\alpha(\eta)=F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$$

.

С помощью интегрирования по частям в интеграле

$$\tilde{g}_1(p,z,\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau z} g_1(p,\tau,\xi,\eta)d\tau$$

получим, что с некоторыми константами $c>0$ выполняются неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}_1(p,z-\eta,\xi,\eta)|d\eta \le c\int \frac{d\eta}{(|p|+|\eta|)^2};\ \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{g}_1(p,z-\eta,\xi,\eta)|dz \le c\int \frac{dz}{(|p|+|z|)^2}.$$

Отсюда и из (1.3.3) выводим неравенство

$$\left\|\tilde{f}(z)\right\|_{L_2(R^1)} \le c\left\|u_\alpha(\tau)\right\|_{L_2(R^1)}. \tag{1.3.4}$$

Заметив, что

$$\left\|u_\alpha(\tau)\right\|_{L_2(R^1)} = \left\|u(t)\right\|_{L_2(R^1_+)}, \tag{1.3.5}$$

получаем из (1.3.4) утверждение теоремы 1.3.1 при дополнительном предположении.

Докажем теперь теорему 1.3.1 в общем случае. Выберем некоторое $A>0$ и установим, что для любого $a\in R^1$ справедливо неравенство

$$\int\limits_{|\tau-a|\le A} |G(p,\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)|^2 d\tau \le c\{ \int\limits_{|\tau-a|\le 3A} |u_\alpha(\tau)|^2 d\tau + $$
$$+ \int\limits_{|\tau-a|\le A} (\int\limits_{-\infty}^{\infty} r(p,\tau-y)|u(y)|dy)^2 d\tau\}, \tag{1.3.6}$$

где $r(p,z)=(|p|+|z|)^{-2}$. Константа c не зависит от выбора функции $u(t)\in C_0^\infty(R_+^1)$ и $a\in R^1$. Пусть $\varphi(\tau)$ - такая основная функция с носителем в шаре $|\tau|\le 3A$, что $\varphi(\tau)=1$ в шаре $|\tau|\le 2A$, причём, $|\varphi(\tau)|\le 1$. Тогда для оператора $\varphi(\tau-a)P(\tau,\xi,D_\tau)$ символ равен нулю при $|\tau-a|>3A$ и мы можем воспользоваться доказанной только оценкой:

$$\|\varphi(\tau-a)G(p,\tau,\xi,D_\tau)v_\alpha(\tau)\|_{L_2(R^1)} \le c\|v_\alpha(\tau)\|_{L_2(R^1)} = c\|v(t)\|_{L_2(R_+^1)}, \tag{1.3.7}$$

причём из предыдущих рассуждений видно, что константа $c>0$ не зависит от $v(t)\in C_0^\infty(R_+^1)$ и $a\in R^1$.

Обозначим $f(p,\tau)=G(p,\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)$ и заметим, что при $|\tau-a|\le 2A$ справедливо равенство

$$f(p,\tau)=\varphi(\tau-a)G(p,\tau,\xi,D_\tau)[\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)]+G(p,\tau,\xi,D_\tau)[(1-\varphi(\tau-a))u_\alpha(\tau)].$$

Воспользовавшись неравенством (1.3.7), получим оценку

$$\|\varphi(\tau-a)G(p,\tau,\xi,D_\tau)[\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)]\|_{L_2(R^1)} \le c\|\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)\|_{L_2(R^1)},$$

следовательно

$$\int\limits_{|\tau-a|\le A} |g(p,\tau,\xi,D_\tau)[\varphi(\tau-a)u_\alpha(\tau)]|^2 d\tau \le c \int\limits_{|\tau-a|\le 3A} |u_\alpha(\tau)|^2 d\tau. \tag{1.3.8}$$

Так как $1-\varphi(\tau-a)$=0 в шаре $|\tau-a|\le 2A$, то

$$G(p,\tau,\xi,D_\tau)[(1-\varphi(\tau-a))u_\alpha(\tau)] = \int\limits_{|y-a|>2A} k(p,\tau,\xi,\tau-y)(1-\varphi(y-a))u_\alpha(y)dy,$$

где $k(p,\tau,\xi,z)$ - ядро псевдодифференциального оператора $G(p,\tau,\xi,D_\tau)$, определенное в (1.2.9).

Так как $g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\in S_p^m$, то по определению $|\partial_\tau^i\partial_\eta^l g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)|\le c_{il}(|p|+|\xi|+|\eta|)^{m-l}$. По определению ядра имеем

$k(p,\tau,\xi,z)=F^{-1}_{\eta\to z}[g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)]$. Так как преобразование Фурье любой абсолютно интегрируемой функции является непрерывной и ограниченной функцией, то можно утверждать, что функция $z^q\partial^i_\tau\partial^j_z k(p,\tau,\xi,z)$ для любых $i,\ j$ при $q>m+j+1$ будет непрерывной и ограниченной функцией при всех $\tau\in R^1,\ z\in R^1$ и $|z|^q\left|\partial^i_\tau\partial^j_z k(p,\tau,\xi,z)\right|\le c_{ij}<\infty$. То есть при всех $z\ne 0$ справедливо неравенство

$$\left|\partial^i_\tau\partial^j_z k(p,\tau,\xi,z)\right|\le c_{ij}|z|^{-q}. \tag{1.3.9}$$

Из (1.3.9) получим, что $|k(p,\tau,\xi,\tau-y)|\le c(|p|+|\tau-y|)^{-2}$ при $|\tau-y|\ge A$. Отсюда при $|\tau-a|\ge A$ получаем, что

$$|G(p,\tau,\xi,D_\tau)[(1-\varphi(\tau-a))u_\alpha(\tau)]|\le c\int\limits_{-\infty}^{\infty}(|p|+|\tau-y|)^{-2}|u(y)|dy. \tag{1.3.10}$$

Неравенство (1.3.6) вытекает теперь из неравенств (1.3.8) и (1.3.10).

Чтобы закончить теперь доказательство теоремы, достаточно в неравенстве (1.3.6) выбрать $A=1$ и просуммировать неравенства (1.3.6) по всем a, принадлежащим множеству целых чисел. Так как отрезки $|\tau-a|\le 1$ покрывают все R^1, причем, каждая точка $\tau\in R^1$ принадлежит не более чем двум таким отрезкам, то получим, что с некоторой константой выполняется неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|G(p,\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)|^2d\tau\le c\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|u_\alpha(\tau)|^2d\tau+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}(|p|+|\tau-y|)^{-2}|u_\alpha(y)|dy\Big)^2d\tau\Big).$$

Остается заметить, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty}(|p|+|\tau-y|)^{-2}|u_\alpha(y)|dy\Big)^2d\tau\le c\int\limits_{-\infty}^{\infty}|u_\alpha(\tau)|^2d\tau=c\int\limits_{0}^{\infty}|u(t)|^2dt.$$

Теорема 1.3.2. Пусть $g(p,t,\xi,\eta)\in S^m_{\alpha,p}(\Omega)$ (m - действительное число), $\Omega\subset\overline{R}^1_+$, $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\dfrac{\pi}{2},\ |p|>0\}$. Тогда весовой псевдодифференциальный оператор $G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ для любого действительного s есть ограниченный оператор из $H_{s+m,\alpha}(R_+^1)$ в $H_{s,\alpha}(R_+^1)$.

Доказательство. Из (1.3.1) вытекает, что для доказательства теоремы достаточно доказать, что оператор $G(p,\tau,\xi,D_\tau)$, определённый в (1.2.4), является ограниченным оператором из $H_{s+m}(R^1)$ в $H_s(R^1)$.

Обозначим через $\Lambda^s(p,\xi,D_\tau)$ псевдодифференциальный оператор вида

$$\Lambda^s(p,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)=F^{-1}_{\eta\to\tau}[(|p|+|\xi|+|\eta|)^s F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]]. \tag{1.3.11}$$

Заметим, что для функции $u(t)\in C_0^\infty(R_+^1)$ справедливо равенство

$$\|G(p,\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)\|_s=\|\Lambda^s(p,\xi,D_\tau)G(p,\tau,\xi,D_\tau)\Lambda^{-m-s}(p,\xi,D_\tau)v(\tau)\|_{L_2(R^1)}, \tag{1.3.12}$$

где $v(\tau)=\Lambda^{s+m}(p,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)$, $\|\cdot\|_s$ - норма в пространстве $H_s(R^1)$.

Из теоремы 1.2.1 следует, что $\Lambda^s(p,\xi,D_\tau)G(p,\tau,\xi,D_\tau)\Lambda^{-m-s}(p,\xi,D_\tau)$ есть псевдодифференциальный оператор с символом из класса S_p^0. Таким образом, из (1.3.12) в силу теоремы 1.3.1 получим

$$\|G(p,\tau,\xi,D_{\alpha,t})u\|_{s,\alpha}=\|G(p,\tau,\xi,D_\tau)u_\alpha(\tau)\|_s=$$

$$\|\Lambda^s(p,\xi,D_\tau)G(p,\tau,\xi,D_\tau)\Lambda^{-m-s}(p,\xi,D_\tau)v(\tau)\|_{L_2(R^1)}\le.$$

$$\le c\|v(\tau)\|_{L_2(R^1)}\le c\|u(t),|p|\|_{s+m,\alpha}$$

Теорема 1.3.2 доказана.

1.4. Оценки коммутатора весового псевдодифференциального оператора с переменным символом, зависящим от комплексного параметра, из класса $S_{\alpha,p}^m$ и операторов дифференцирования $\dfrac{\partial^l}{\partial t^l}$

Обозначим

$$\lambda_i(p,t,\xi,\eta)=\frac{(-1)^i}{i!}\partial_\eta^i\lambda(p,t,\xi,\eta),\ i=1,2,...,N, \tag{1.4.1}$$

$$g_N(p,t,\xi,\eta-y,y)=\frac{(-1)^N}{N!}\int_0^1\lambda_N(p,t,\xi,\eta-z(\eta-y))(1-z)^{N-1}dz. \tag{1.4.2}$$

Рассмотрим операторы $Q_{i,\sigma}$, $i=1,2,...,N-1$; $R_{N,l,\sigma}$.

$$Q_{i,\sigma}[v(x,t)]=F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\alpha}[\lambda_i(p,t,\xi,\eta)F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]], \tag{1.4.3}$$

$$\begin{aligned}R_{N,l,\sigma}v(x,t)=\sum_{j=0}^{l}\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\eta\to\tau}[\int_{R^1}F_{\tau\to(\eta-y)}[D_\tau^N\beta_{i,l}(\tau)]\cdot\\ \cdot F_{x\to\xi}F_{\tau\to y}[(\partial^j_{\alpha,t}v)_\alpha(x,\tau)]g_N(p,t,\xi,\eta-y,y)\,dy\big]_{\tau=\varphi(t)},\end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Здесь

$$\beta_{j,l}(\tau)=\left.\frac{\theta_j^l(t)}{\alpha^l(t)}\right|_{t=\varphi^{-1}(\tau)},\ j=0,1,...,l, \tag{1.4.5}$$

а функции $\theta_j^l(t)$ определены в (1.1.34).

Здесь и в дальнейшем

$$\tau=\varphi(t)=\int_t^d\frac{ds}{\alpha(s)}. \tag{1.4.6}$$

Заметим, что для любой функции $v(x,t)\in C_0^\infty(R_+^n)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}\partial^l_{\alpha,t}K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v=\sum_{p_1=0}^{l}c_{p_1l}F_\alpha^{-1}F^{-1}_{\xi\to x}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1}\lambda(p,t,\xi,\eta)\cdot\\ \cdot F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial^{l-p_1}_{\alpha,t}v(x,t)]],\end{aligned} \tag{1.4.7}$$

где c_{p_1l} - биномиальные коэффициенты.

Таким образом, отсюда и из (1.1.33) получим равенство

$$\partial_t^l K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v=\sum_{i=0}^{l}\frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)}\partial_{\alpha,t}^i K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v=$$

$$=\sum_{i=0}^{l}\frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)}\sum_{p_1=0}^{i}c_{p_1 i}F_\alpha^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1}\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^{i-p_1}v(x,t)]]=$$

$$=\frac{\theta_0^l(t)}{\alpha^l(t)}F_\alpha^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}[\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v]]+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)}F_\alpha^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}[\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^i v]]+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{i}\frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)}c_{p_1 i}F_\alpha^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1}\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^{i-p_1}v(x,t)]]= \qquad (1.4.8)$$

$$=\sum_{i=0}^{l}\frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)}F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha^{-1}[\lambda(p,t,\xi,\eta)]F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^i v]]+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{i}\frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)}c_{p_1 i}F_\alpha^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1}\lambda(p,t,\xi,\eta)]F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^{i-p_1}v]].$$

С другой стороны, в силу (1.1.33) получим, что

$$K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})\partial_t^l v=K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})[\sum_{i=0}^{l}\frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)}\partial_{\alpha,t}^i v]. \qquad (1.4.9)$$

Почленно вычитая, из (1.4.8) равенство (1.4.9), получим равенство

$$M_{l,\sigma}v=\sum_{i=0}^{l}[\frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)}K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})[\partial_{\alpha,t}^i v]-$$

$$-K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})[\frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)}\partial_{\alpha,t}^i v]]+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{i}\frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)}c_{p_1 i}F_\alpha^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1}\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^{i-p_1}v]]. \qquad (1.4.10)$$

Из (1.4.10) следует, что для того чтобы прокоммутировать весовой псевдодифференциальный оператор $K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ и оператор ∂_t^l, достаточно изучить коммутатор оператора $K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ с функциями $\dfrac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.4.1. Пусть символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^{\sigma}_{\alpha,p}(\Omega)$, $\Omega\subset\bar{R}^1_+$, $\sigma\in R^1$, $p\in Q=\{p\in C, |\arg p|<\frac{\pi}{2}, |p|>0\}$. Пусть выполнено условие 1. Тогда для оператора $M_{l,\sigma}$, определенного в (10) при всех $v(x,t)\in C_0^{\infty}(R^n_+)$ справедлива формула представления

$$M_{l,\sigma}v(x,t)=\sum_{i=1}^{N-1}Q_{i,\sigma}[\sum_{j=0}^{l}\sum_{i_1=0}^{i-1}b^i_{i_1,j}(t)D^{i_1}_{\alpha,t}\partial^j_t v(x,t)]+$$

$$+R_{N,l,\sigma}v(x,t)+ \tag{1.4.11}$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{i}\frac{\theta^l_i(t)}{\alpha^l(t)}c_{p_1l}F^{-1}_{\alpha}F^{-1}_{\xi\to x}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1}\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_{\alpha}[\partial^{i-p_1}_{\alpha,t}v]],$$

где функции $Q_{i,\sigma}$, $R_{N,l,\sigma}$ определены в (1.4.3), (1.4.4), c_{p_1l} - биномиальные коэффициенты, $b^i_{i_1,j}(t)\in C^{s_1-l-i}[0;+\infty)$ - ограниченные функции, функции $\theta^l_i(t)$ определены в (1.1.34).

Доказательство. Из следствия 1.1.1. вытекает, что функция $\beta_{j,l}(\tau)$ (см. 1.4.5) удовлетворяет условиям леммы 1.1.2. Следовательно, учитывая (2) и равенство $F^{-1}_{\alpha}[w(\eta)](t)=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, справедливое при $t>0$ для $w(\eta)\in L_2(R^1)$, получим с учетом равенства (1.4.10) из леммы 1.1.2 следующее равенство

$$M_{l,\sigma}v=\sum_{i=1}^{N-1}F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\alpha}[\lambda_i(p,t,\xi,\eta)F_{\alpha}F_{x\to\xi}[\sum_{j=0}^{l}\{(\alpha\partial_t)^i(\frac{\theta^l_j(t)}{\alpha^l(t)})\partial^j_{\alpha,t}v]]$$

$$+R_{N,l,\sigma}v(x,t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{i}\frac{\theta^l_i(t)}{\alpha^l(t)}c_{p_1l}F^{-1}_{\alpha}F^{-1}_{\xi\to x}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1}\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_{\alpha}[\partial^{i-p_1}_{\alpha,t}v]].$$

Воспользовавшись леммой 1.1.5, выводим из последнего равенства формулу (1.4.11).

В дальнейшем через c будем обозначать положительные константы, не зависящие от p

Теорема 1.4.2. Пусть выполнены условия теоремы 1.4.1. Тогда для любой функции $v(x,t)\in C_0^\infty(R_+^n)$ справедлива оценка

$$\|M_{l,\sigma}v\|_{L_2(R_+^n)} \le c(\sum_{j=0}^{l}\|\partial_t^j v,|p|\|_{\sigma-1,\alpha} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{l}\|\partial_t^{i-p_1}v,|p|\|_{\sigma,\alpha}) \qquad (1.4.12)$$

с константой $c>0$, не зависящей от v.

Доказательство. Из (1.4.1) и (1.4.3) с помощью теоремы 2 получим

$$\left\|\sum_{i=1}^{N-1}Q_{i,\sigma}[\sum_{j=0}^{l}\sum_{i_1=0}^{i}b_{i_1,j}^i(t)D_{\alpha,t}^{i_1}\partial_t^l v]\right\|_{L_2(R_+^n)} \le c\sum_{j=0}^{l}\|\partial_t^j v,|p|\|_{\sigma-1,\alpha}. \qquad (1.4.13)$$

Аналогично оценке функции $G(x)$ в лемме 1.1.2, получим оценку

$$\|R_{N,l,\sigma}v(x,t)\|_{L_2(R_+^n)} \le c\sum_{j=0}^{l}\|\partial_t^j v,|p|\|_{\sigma-N+\varepsilon,\alpha}, \qquad (1.4.14)$$

где $\varepsilon>\frac{1}{2}$ - некоторое действительное число.

Так как $(\alpha(t)\partial_t)^{p_1}\lambda(t,\xi,\eta)\in S_{\alpha,p}^{\sigma}(\Omega)$, то с помощью теоремы 2 получим оценку

$$\left\|\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{i}\frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)}c_{p_1i}F_\alpha^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1}\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^{i-p_1}v]]\right\|_{L_2(R_+^n)} \le$$
$$\le c\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{i}\|\partial_{\alpha,t}^{i-p_1}v,|p|\|_{\sigma,\alpha}. \qquad (1.4.15)$$

Выбирая $N\ge 1+\varepsilon$, получим из (1.4.11) и (1.4.13) - (1.4.15)

$$\left\|M_{l,\sigma}v\right\|_{L_2(R_+^n)} \le \left\|\sum_{i=1}^{N-1}Q_{i,\sigma}[\sum_{j=0}^{l}\sum_{i_1=0}^{i-1}b_{i_1,j}^{i}(t)D_{\alpha,t}^{i_1}\partial_t^j v(x,t)]\right\|_{L_2(R_+^n)} + \left\|R_{N,l,\sigma}v(x,t)\right\|_{L_2(R_+^n)} +$$

$$+\left\|\sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{i}\frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)}c_{p_1 i}F_\alpha^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1}\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^{i-p_1}v]]\right\|_{L_2(R_+^n)} \le$$

$$\le c(\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{\sigma-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{\sigma-N+\delta,\alpha} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{l}\left\|\partial_t^{i-p_1}v,|p|\right\|_{\sigma,\alpha}) \le$$

$$\le c(\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{\sigma-1,\alpha} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{l}\left\|\partial_t^{i-p_1}v,|p|\right\|_{\sigma,\alpha}).$$

Следствие 1.4.1. Пусть $s\in R^1$, $\sigma\in R^1$ и выполнено условие 1 с заменой в нем σ на $s+\sigma$. Пусть $\lambda(\mathrm{p},t,\xi,\eta)\in S_{\alpha,p}^{\sigma}(\Omega)$, $\Omega\subset\overline{R}_+^1$, $p\in Q=\{p\in C, |\arg p|<\frac{\pi}{2}, |p|>0\}$. Тогда для любой функции $v(x,t)\in C_0^\infty(R_+^n)$ и $l=1, 2,...$ справедлива оценка

$$\left\|M_{l,\sigma}v,|p|\right\|_{s,\alpha} \le c(\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{s+\sigma-1,\alpha} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{p_1=1}^{l}\left\|\partial_t^{i-p_1}v,|p|\right\|_{s+\sigma,\alpha}) \qquad (1.4.16)$$

с константой $c>0$, не зависящей от v.

Доказательство. Аналогично оценке нормы функции $G(x)$ (см. неравенства ((1.1.14)-(1.1.19)) получим оценку

$$\left\|R_{N,l,\sigma}v,|p|\right\|_{s,\alpha} \le c\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_{\alpha,t}^j v,|p|\right\|_{s+\sigma-N+\varepsilon,\alpha},$$

где $\varepsilon>\frac{1}{2}$ - произвольное число.

Кроме того, из (1.4.1), (1.4.3) и (7) с помощью равенства (3) и леммы 1.1.7 выводим оценку $\left\|Q_{i,\sigma}[\sum_{j=0}^{l}\sum_{i_1=0}^{i-1}b_{i_1,j}^{i}(t)D_{\alpha,t}^{i_1}\partial_t^j v,|p|\right\|_{s,\alpha} \le c\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{s+\sigma-1,\alpha}$.

Аналогично оценке (1.4.15) выводим неравенство

$$\left\| \sum_{j=1}^{l} \sum_{p_1=1}^{j} \frac{\theta_j^l(t)}{\alpha^l(t)} c_{p_1 i} F_\alpha^{-1} F_{\xi\to x}^{-1}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1} \lambda(p,t,\xi,\eta) F_{x\to\xi} F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^{j-p_1} v]], |p| \right\|_{s,\alpha} \le$$

$$\le c \sum_{j=1}^{l} \sum_{p_1=1}^{j} \left\| \partial_{\alpha,t}^{j-p_1} v, |p| \right\|_{s+\sigma,\alpha}.$$

Следовательно, при $N \ge 1+\varepsilon$ получим

$$\left\| M_{l,\sigma} v, |p| \right\|_{s,\alpha} \le \left\| \sum_{i=1}^{N-1} Q_{i,\sigma} [\sum_{j=0}^{l} \sum_{i_1=0}^{i-1} b_{i_1,j}^i(t) D_{\alpha,t}^{i_1} \partial_t^j v(x,t)], |p| \right\|_{s,\alpha} + \left\| R_{N,l,\sigma} v(x,t), |p| \right\|_{s,\alpha} +$$

$$+ \left\| \sum_{i=1}^{l} \sum_{p_1=1}^{i} \frac{\theta_i^l(t)}{\alpha^l(t)} c_{p_1 i} F_\alpha^{-1} F_{\xi\to x}^{-1}[(\alpha(t)\partial_t)^{p_1} \lambda(p,t,\xi,\eta) F_{x\to\xi} F_\alpha[\partial_{\alpha,t}^{i-p_1} v]], |p| \right\|_{s,\alpha} \le$$

$$\le c(\sum_{j=0}^{l} \left\| \partial_t^j v, |p| \right\|_{s+\sigma-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l} \left\| \partial_t^j v, |p| \right\|_{s+\sigma-N+\delta,\alpha} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{p_1=1}^{l} \left\| \partial_t^{i-p_1} v, |p| \right\|_{s+\sigma,\alpha}) \le$$

$$\le c(\sum_{j=0}^{l} \left\| \partial_t^j v, |p| \right\|_{s+\sigma-1,\alpha} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{p_1=1}^{l} \left\| \partial_t^{i-p_1} v \right\|_{s+\sigma,\alpha}).$$

Доказательство теоремы 3. Докажем оценку (11) вначале для функций $v(x,t) \in C_0^\infty(R_+^n)$. Из следствия 1.4.1 получим оценку

$$\left\| M_{l,\sigma} v, |p| \right\|_{s,\alpha} \le c(\sum_{j=0}^{l} \left\| \partial_t^j v, |p| \right\|_{s+\sigma-1,\alpha} + \sum_{i=1}^{l} \sum_{p_1=1}^{l} \left\| \partial_t^{i-p_1} v, |p| \right\|_{s+\sigma,\alpha}). \tag{1.4.17}$$

Оценим последнее слагаемое в правой части этого неравенства. Сделав замену $i - p_1 = j$, получим

$$\sum_{i=1}^{l} \sum_{p_1=1}^{l} \left\| \partial_t^{i-p_1} v, |p| \right\|_{s+\sigma,\alpha} \le c \sum_{j=0}^{l-1} \left\| \partial_t^j v, |p| \right\|_{s+\sigma,\alpha}.$$

Применяя последнее неравенство в правой части неравенства (1.4.17), получим неравенство

$$\left\| M_{l,\sigma} v, |p| \right\|_{s,\alpha} \le c_1(\sum_{j=0}^{l} \left\| \partial_t^j v, |p| \right\|_{s+\sigma-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l-1} \left\| \partial_t^j v, |p| \right\|_{s+\sigma,\alpha}).$$

Таким образом, справедливость теоремы 3 для функций $v(x,t) \in C_0^\infty(R_+^n)$ установлена. В общем случае справедливость теоремы 3 следует из того, что множество функций $C_0^\infty(R_+^n)$ плотно в пространстве $H_{s,\alpha}(R_+^n)$.

Следствие 1.4.2. При выполнении условий теоремы 3 справедлива оценка

$$\left\|\partial_t^l K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v,|p|\right\|_{s,\alpha} \le c\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{s+\sigma,\alpha}.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться очевидным равенством $\partial_t^l K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t}) = K^{(\sigma)}(t,D_x,D_{\alpha,t})\partial_t^l + M_{l,\sigma}$ и теоремами 2 и 3.

Следствие 1.4.3. При выполнении условий теоремы 3 для любого $\varepsilon > 0$, существует такое число $c(\varepsilon) > 0$, что справедлива оценка

$$\left\|M_{l,\sigma}v,|p|\right\|_{s,\alpha} \le \varepsilon\sum_{j=0}^{l}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{s+\sigma,\alpha} + c(\varepsilon)\sum_{j=0}^{l-1}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{L_2(R_+^n)}. \quad (1.4.18)$$

Здесь $c > 0$ - некоторая константа не зависящая от v, ε, p; константа $c(\varepsilon) > 0$ не зависит от v, p.

Для доказательства достаточно воспользоваться в правой части оценки (11) неравенством

$(\varepsilon\tilde{\eta})^j \le (\varepsilon\tilde{\eta})^{j_2} + c$

где $0 < j_1 \le j_2$, $\tilde{\eta} \in R^1$, $\varepsilon > 0$ - любое число, $c > 0$ - некоторая константа.

Из этого неравенства, равенства (3) и оценки (11) получаем оценку (1.4.18).

Доказательство теоремы 4. Воспользуемся равенством

$$\Lambda^k \partial_t^{l_1} M_{l,q} = \Lambda^k (M_{l+l_1,q} - M_{l_1,q}\partial_t^l), \quad (1.4.19)$$

где $M_{j,q}$ - коммутатор операторов $K^{(q)}(t,D_x,D_{\alpha,t})$ и ∂_t^j,

$$\Lambda^k(p,D_x,D_{\alpha,t})v = F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha^{-1}[(|p|+|\xi|+|\eta|)^k F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,t)]]. \quad (1.4.20)$$

Отсюда и из теоремы 3 получим

$$\left\|\Lambda^k \partial_t^{l_1} M_{l,q} v\right\|_{L_2(R_+^n)} \le \left\|M_{l+l_1,q} v,|p|\right\|_{k,\alpha} + \left\|M_{l_1,q}\partial_t^l v,|p|\right\|_{k,\alpha} \le$$

$$\le c_1(\sum_{j=0}^{l+l_1}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{k+q-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l+l_1-1}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{k+q,\alpha}) +$$

$$+c_2(\sum_{j=0}^{l_1}\left\|\partial_t^{l+j} v,|p|\right\|_{k+q-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l_1-1}\left\|\partial_t^{l+j} v,|p|\right\|_{k+q,\alpha}) \le$$

$$\le c_3(\sum_{j=0}^{l+l_1}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{k+q-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l+l_1-1}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{k+q,\alpha} + \sum_{j=0}^{l_1-1}\left\|\partial_t^{l+j} v,|p|\right\|_{k+q,\alpha})$$

Возьмем $k = s - ql_1$, получим

$$\left\|\Lambda^{s-ql_1} \partial_t^{l_1} M_{l,q} v\right\|_{L_2(R_+^n)} \le c(\sum_{j=0}^{l+l_1}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{s-ql_1+q-1,\alpha} + \sum_{j=0}^{l+l_1-1}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{s-ql_1+q,\alpha} +$$

$$+\sum_{j=0}^{l_1-1}\left\|\partial_t^{l+j} v,|p|\right\|_{s-ql_1+q,\alpha}).$$

Просуммируем последние неравенства по l_1 от 0 до $\left[\frac{s}{q}\right]$, получим

$$\sum_{l_1=0}^{[\frac{s}{q}]}\left\|\Lambda^{s-ql_1} \partial_t^{l_1} M_{l,q} v\right\|_{L_2(R_+^n)} \le$$

$$\le c(\sum_{l_1=0}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l+l_1}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{s-ql_1+q-1,\alpha} + \sum_{l_1=0}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l+l_1-1}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{s-ql_1+q,\alpha} + \tag{1.4.21}$$

$$+\sum_{l_1=0}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l_1-1}\left\|\partial_t^{l+j} v,|p|\right\|_{s-ql_1+q,\alpha})$$

Оценим каждое слагаемое в правой части неравенства (1.4.21).

Заметим, что для первого слагаемого $s - ql_1 + q - 1 + qj \le$

$\le s - ql_1 + q - 1 + q(l + l_1) = s + ql + q - 1$. Отсюда и из определения нормы в пространстве $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$, получим

$$\sum_{l_1=0}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l+l_1}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{s-ql_1+q-1,\alpha} \le c_1\left\|v,|p|\right\|_{s+ql+q-1,\alpha,q}. \tag{1.4.22}$$

$$\sum_{l_1=0}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l+l_1-1}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{s-ql_1+q,\alpha} \le c_2\left\|v,|p|\right\|_{s+ql,\alpha,q}.$$

Заметив, что $s+ql \le s+ql+q-1$, получим, что

$$\sum_{l_1=0}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l+l_1-1}\left\|\partial_t^j v,|p|\right\|_{s-ql_1+q,\alpha} \le c_2\left\|v,|p|\right\|_{s+ql+q-1,\alpha,q}. \qquad (1.4.23)$$

$$\sum_{l_1=0}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l_1-1}\left\|\partial_t^{l+j} v,|p|\right\|_{s-ql_1+q,\alpha} \le c_4\left\|v,|p|\right\|_{s+ql,\alpha,q} \le c_4\left\|v,|p|\right\|_{s+ql+q-1,\alpha,q}. \qquad (1.4.24)$$

Применяя неравенства (1.4.22)-(1.4.24) в правой части неравенства (1.4.21), получим

$$\sum_{l_1=0}^{[\frac{s}{q}]}\left\|\Lambda^{s-ql_1}\partial_t^{l_1}M_{l,q}v\right\|_{L_2(R_+^n)} \le c\left\|v,|p|\right\|_{s+ql+q-1,\alpha,q}.$$

Учитывая определение нормы в пространстве $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$, получим из последнего неравенства оценку

$$\left\|M_{l,q}v,|p|\right\|_{s,\alpha,q} \le c\left\|v,|p|\right\|_{s+ql+q-1,\alpha,q}.$$

Что и доказывает теорему 4.

1.5. Граничные значения весового псевдодифференциального оператора с переменным символом, зависящим от комплексного параметра, из класса $S_{\alpha,\delta}^m$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.5.1. Пусть выполнено условие 1 и символ $\lambda(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора принадлежит классу $S_{\alpha,p}^{\sigma}(\Omega)$, $\Omega \subset \overline{R}_+^1$, $p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$. Тогда для любой функции $v(x,t) \in C_0^\infty(R_+^n)$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to+0} K^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = F^{-1}_{\xi\to x}[\lambda(p,0,\xi,0)F_{x\to\xi}[v(x,0)]] + \\ +\lim_{t\to+0} F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\alpha}[g_N(p,t,\xi,\eta)F_{\alpha}F_{x\to\xi}[D^N_{\alpha,t}v]], \tag{1.5.1}$$

где $N>0$ - целое число и s_1 в условии 1, такое, что $s_1 \ge N$;

$$g_N(p,t,\xi,\eta) = N\int_0^1 \lambda_N(p,t,\xi,\theta\eta)(1-\theta)^{N-1}d\theta, \\ \lambda_j(p,t,\xi,\eta) = \frac{(-1)^j}{j!}\partial^j_\eta \lambda(p,t,\xi,\eta),\ j=1,\,2,...,\,N. \tag{1.5.2}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора. Получим

$$\lambda(p,t,\xi,\eta) = \lambda(p,t,\xi,0) + \sum_{i=1}^{N-1}\lambda_j(p,t,\xi,0)\eta^i + g_N(p,t,\xi,\eta)\eta^N\,, \tag{1.5.3}$$

где функции λ_i, g_N определены в (1.5.2).

Используя равенство (1.5.3), получим равенство

$$F^{-1}_{\alpha}[\lambda(p,t,\xi,\eta)F_{\alpha}[v(x,t)]] = F^{-1}_{\alpha}[\lambda(p,t,\xi,0)F_{\alpha}[v]] + \\ +\sum_{i=1}^{N-1} F^{-1}_{\alpha}[\lambda_i(p,t,\xi,0)F_{\alpha}[D^i_{\alpha,t}v(x,t)]] + F^{-1}_{\alpha}[g_N(p,t,\xi,\eta)F_{\alpha}[D^N_{\alpha,t}v]]. \tag{1.5.4}$$

Заметим, что справедливо равенство

$$F^{-1}_{\alpha}[\lambda_i(p,t,\xi,0)F_{\alpha}[D^i_{\alpha,t}v(x,t)]] = \lambda_i(p,t,\xi,0)D^i_{\alpha,t}v(x,t),\ \ i=1,2,.... \tag{1.5.5}$$

И так как $D^i_{\alpha,t}v(x,t)\big|_{t=0} = 0$ при $i=1,\,2,...,\,N-1$, то

$$F^{-1}_{\alpha}[\lambda_i(p,t,\xi,0)F_{\alpha}[D^i_{\alpha,t}v(x,t)]]\big|_{t=0} = 0\,,\ i=1,\,2,...,\,N-1\,.$$

Отсюда и из (1.5.4) следует (1.5.1).

Лемма 1.5.2. Пусть выполнены условия леммы 1.5.1. Тогда для любой функции $u(t)\in C^\infty_0(R^1_+)$ при $N\ge\sigma$ справедливо равенство

$$F^{-1}_{\alpha}[g_N(p,t,\xi,\eta)F_{\alpha}[D^N_{\alpha,t}u(t)]] = \{F^{-1}_{\eta\to\tau}[g_N(p,t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[\beta(\tau)w(\tau)]] + \\ +\sum_{i=1}^{N-1} F^{-1}_{\eta\to\tau}[g_{N,i}(p,t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[D^i_\tau\beta(\tau)\cdot w(\tau)]] + \\ +F^{-1}_{\eta\to\tau}[\int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau\to(\eta-y)}[D^{N_1}_\tau\beta(\tau)]\cdot \tilde{g}_{N,N_1}(p,t,\xi,\eta-y,y)F_{\tau\to y}[w]dy]\}\big|_{\tau=\varphi(t)}. \tag{1.5.6}$$

Здесь функции $\beta(\tau), w(\tau)$ определены в (1.1.46), (1.1.47),

$$N_1 \ge \max\{\frac{3}{2\nu}, 2+\frac{1}{2\nu}\},$$

$$g_{N,i}(p,t,\xi,\eta) = \frac{(-1)^i}{i!}\partial_\eta^i g_N(p,t,\xi,\eta), \tag{1.5.7}$$

$$\tilde{g}_{N,N_1}(p,t,\xi,\eta-y,y) = N\int_0^1 g_{N,N_1}(p,t,\xi,\eta-\theta(\eta-y))(1-\theta)^{N_1-1}d\theta. \tag{1.5.8}$$

Доказательство. Из следствия 1.1.4 следует, что функция $\beta(\tau)$ удовлетворяет условиям леммы 1.1.2. Кроме того, так как $\lambda(p,t,\xi,\eta) \in S^{\sigma}_{\alpha,p}(\Omega)$, то функция $g_N(p,t,\xi,\eta)$ принадлежит по переменной η пространству $C^{\infty}(R^1)$ и справедливы оценки

$$\left|\partial_\eta^i g_N(p,t,\xi,\eta)\right| \le c\int_0^1 (|p|+|\xi|+\theta\eta)^{\sigma-N-i}d\theta \le c < \infty \tag{1.5.9}$$

при всех $i = 0, 1, 2, ...$ для $N \ge \sigma$

Отсюда и из следствия 1.1.2 и леммы 1.1.2 получим равенство (1.5.6)

Лемма 1.5.3. Пусть выполнены условия леммы 1.5.1; $u(t) \in C_0^{\infty}(R_+^1)$. Тогда при всех $\xi \in R^{n-1}$ и t, принадлежащих носителю функции $u(t)$, функция

$$f_0(p,t,\xi,\eta) = F_{\tau\to\eta}[\beta(\tau)w(\tau)]g_N(p,t,\xi,\eta) \tag{1.5.10}$$

принадлежит по переменной η пространству $L_1(R^1)$ при

$$N \ge \max\{\sigma+1, 1+\frac{1}{\nu}\}.$$

Здесь функции $\beta(\tau), w(\tau)$ определены в (1.1.46), (1.1.47).

Доказательство. Из (1.5.9) при всех $N \ge \sigma + 1$ получим

$$|\eta g_N(p,t,\xi,\eta)| \le c\left|\int_0^{|\eta|} (|p|+|\xi|+\theta_1)^{\sigma-N}d\theta_1\right| \le c_1 < \infty$$

с некоторой константой $c_1 > 0$, не зависящей от ξ, t. Значит, функция $g_N(p,t,\xi,\eta)$ принадлежит по переменной η пространству $L_2(R^1)$. Из леммы

1.1.6 следует, что функция $\beta(\tau)w(\tau)\in L_2(R^1)$, а, значит, $F_{\tau\to\eta}[\beta(\tau)w(\tau)]\in L_2(R^1)$. Отсюда и из (1.5.10) получаем, что функция принадлежит по η пространству $L_1(R^1)$, как произведение двух функций из $L_2(R^1)$.

Следствие 1.5.1. Пусть выполнены условия леммы 1.5.3. Тогда при всех $\xi\in R^{n-1}$ и t, принадлежащих носителю функции $u(t)$, функция

$$f_i(p,t,\xi,\eta)=g_{N,i}(p,t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[D_\tau^i\beta(\tau)\cdot w(\tau)]$$

принадлежит по переменной η пространству $L_1(R^1)$.

Доказательство. Из (1.5.7) и (1.5.9) выводим неравенства $\left|\eta g_{N,i}(p,t,\xi,\eta)\right|\le c<\infty,\ i=1,2,...,N_1-1,$ при всех $\xi\in R^{n-1},\eta\in R^1$. Следовательно, $g_{N,i}(t,\xi,\eta)$ принадлежит $L_2(R^1)$ по переменной η при каждом $\xi\in R^{n-1}$, $t\in[0,+\infty)$. Воспользовавшись следствием 1.1.6, выводим, что $D_\tau^i\beta(\tau)w(\tau)\in L_2(R^1)$. Воспользовавшись формулой (1.1.26), устанавливаем, что функция $D_\tau^i\beta(\tau)w(\tau)=P_{i,\frac{1}{2}}(t)D_{\alpha,t}^N u(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$ (где $P_{i,\frac{1}{2}}(t)$ определены в (1.1.27) при $l=\frac{1}{2}, f(t)\equiv 1$) является непрерывной и ограниченной на R^1. Следовательно, функция $D_\tau^i\beta(\tau)w(\tau)\in L_2(R^1)$.

Таким образом, функции $f_i(p,t,\xi,\eta), i=1,2,...,N_1-1$ принадлежат при каждом $\xi\in R^{n-1}$ пространству $L_1(R^1)$ как произведение двух функций из $L_2(R^1)$.

Теорема 1.5.1. Пусть выполнено условие 1 и символ $\lambda(t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора принадлежит классу $S_{\alpha,p}^\sigma(\Omega),\ \Omega\subset\bar{R}_+^1,\ \sigma\in R^1,\ p\in Q=\{p\in C, \left|\arg p\right|<\frac{\pi}{2}, \left|p\right|>0\}$. Тогда для любой функции $v(x,t)\in C_0^\infty(R_+^n)$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to+0}F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha^{-1}[g_N(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[D_{\alpha,t}^N v(x,t)]]=0 \qquad (1.5.11)$$

при $N \ge \max\{\sigma+1, 1+\frac{1}{\nu}\}$.

Доказательство. Так как $g_{N,i}(p,t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[D_\tau^i\beta(\tau)\cdot w(\tau)] \in L_1(R^1)$ по переменной $\eta \in R^1$, при всех $\xi \in R^{n-1}$ и t, принадлежащих носителю функции $u(t)$, то в силу леммы Римана – Лебега, получим, что

$F_{\eta\to\tau}^{-1}[g_{N,i}(p,t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[D_\tau^i\beta(\tau)w(\tau)]] \to 0$ при $|\tau| \to \infty$.

Заметим, что условие $\tau \to +\infty$ равносильно условию $t = \varphi^{-1}(\tau) \to +0$. Отсюда получим, что

$$\sum_{i=0}^{N-1} \lim_{t\to+0} F_{\eta\to\tau}^{-1}[g_{N,i}(p,t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[D_\tau^i\beta(\tau)\cdot w(\tau)]]\Big|_{\tau=\varphi(t)} = 0, \tag{1.5.12}$$

где $g_{N,0}(p,t,\xi,\eta) \equiv g_N(p,t,\xi,\eta)$.

Из (1.5.6) и (1.5.12) следует, что для доказательства теоремы 1.5.1 осталось доказать, что

$$\lim_{\tau\to+\infty} F_{\eta\to\tau}^{-1}[\int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau\to(\eta-y)}[D_\tau^{N_1}\beta]\tilde{g}_{N,N_1}(p,t,\xi,\eta-y,y)F_{\tau\to y}[w]dy] = 0, \tag{1.5.13}$$

где функция $\tilde{g}_{N,N_1}$ определена в (1.5.8).

Для доказательства (1.5.13) достаточно показать, что

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\tau\to(\eta-y)}[D_\tau^{N_1}\beta]\tilde{g}_{N,N_1}(p,t,\xi,\eta-y,y)F_{\tau\to y}[w]dy \in L_1(R^1) \tag{1.5.14}$$

при всех $\xi \in R^1$ и t, принадлежащих носителю функции $u(t)$.

Из (1.5.8) и (1.5.9) получим, что $|\tilde{g}_{N,N_1}(p,t,\xi,\eta-y,y)| \le c < \infty$ при $N+N_1 \ge \sigma$, причем константа $c>0$ не зависит от $t,\ \xi,\ \eta,\ y$.

Отсюда с помощью неравенства Минковского получим

$$\|J\|_{L_1(R^1)} \le c\|F_{\tau\to y}[D_\tau^{N_1}\beta(\tau)]\|_{L_1(R^1)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |F_{\tau\to y}[w]|dy. \tag{1.5.15}$$

Оценим правую часть неравенства (1.5.15). Покажем вначале, что $F_{\tau\to\eta}[D_\tau^{N_1}\beta(\tau)] \in L_1(R^1)$. Для этого достаточно доказать, например, что

$$\lim_{|\eta|\to\infty}\eta^2 F_{\tau\to y}[D_\tau^{N_1}\beta(\tau)]=\lim_{|\eta|\to\infty}F_{\tau\to y}[D_\tau^{N_1+2}\beta(\tau)]=0\,. \qquad (1.5.16)$$

Действительно, учитывая, что $\alpha(t)=const$ при $t\ge d>0$, получаем из следствия 1.1.3, что $\frac{1}{\alpha(t)}(\alpha\partial_t)^{N_1}(\alpha^{-\frac{1}{2}}(t))\in L_2(R_+^1)$ при всех $N_1\ge\max\{\frac{3}{2\nu},1+\frac{1}{\nu}\}$.

Таким образом, как было замечено при доказательстве леммы 1.1.6, функция $D_\tau^{N_1}\beta(\tau)\equiv(\alpha\partial_t)^{N_1}(\alpha^{-\frac{1}{2}}(t))\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$ принадлежит $L_1(R^1)$ при всех $N_1\ge\max\{\frac{3}{2\nu},1+\frac{1}{\nu}\}$, откуда и вытекает справедливость равенства (1.5.16).

Таким образом, чтобы оценить правую часть (1.5.15) сверху некоторой константой, остается показать, что $F_{\tau\to\eta}[w]\in L_1(R^1)$. Для этого достаточно доказать, например, что

$$\lim_{|\eta|\to\infty}\eta^2 F_{\tau\to\eta}[w(\tau)]=0\,. \qquad (1.5.17)$$

Так как $\eta^2 F_{\tau\to\eta}[w]=F_\alpha[D_{\alpha,t}^{N+2}u(t)]$, то при $N+2\ge 1+\frac{1}{\nu}$ получаем из следствия 1.1.7 равенство (1.5.17). Отсюда и из (1.5.15) получим (1.5.14).

Теорема 1.5.1 доказана.

Доказательство теоремы 5. Утверждение теоремы 5 для функций $v(x,t)\in C_0^\infty(R_+^n)$ следует из леммы 1.5.1 и теоремы 1.5.1. В общем случае утверждение теоремы 5 следует из того, что множество функций $C_0^\infty(R_+^n)$ плотно в пространстве $H_{q+\sigma,\alpha,q}(R_+^n)$.

Доказательство теоремы 6. Выберем в равенстве (1.5.4) N так, чтобы выполнялось неравенство $\max\{\sigma+1,1\}<N<s_1$. Тогда из условий теоремы 6 и (1.5.4) следует, что

$$\lim_{t\to+\infty}K^{(\sigma)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(\xi,t)=\lim_{t\to+\infty}F_\alpha^{-1}[g_N(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[D_{\alpha,t}^N u]]. \qquad (1.5.18)$$

Из (1.5.18) следует, что для доказательства теоремы 6 остается установить равенство

$$\lim_{t\to+\infty} F_{\alpha}^{-1}[g_N(p,t,\xi,\eta)F_{\alpha}[D_{\alpha,t}^N u(\xi,t)]]=0. \tag{1.5.19}$$

Так как по условию $\alpha(t)=c=const>0$ при $t\ge d>0$, то, используя определение преобразования F_{α}, получим

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+\infty} F_{\alpha}^{-1}[g_N(p,t,\xi,\eta)F_{\alpha}[D_{\alpha,t}^N u(\xi,t)]]=\\&=\frac{1}{\sqrt{c}}\lim_{\tau\to-\infty} F_{\eta\to\tau}^{-1}[g_N(p,t,\xi,\eta)F_{\alpha}[D_{\alpha,t}^N u(\xi,t)]]\end{aligned}. \tag{1.5.20}$$

Из (1.5.20) следует, что для доказательства теоремы 6 достаточно показать, что

$$\lim_{\tau\to-\infty} F_{\eta\to\tau}^{-1}[g_N(p,t,\xi,\eta)F_{\alpha}[D_{\alpha,t}^N u(\xi,t)]]=0. \tag{1.5.21}$$

Это равенство докажем с помощью леммы Римана-Лебега. Из этой леммы вытекает, что равенство (1.5.21) справедливо, если при всех $\xi\in R^{n-1}$ и $t\in[0;+\infty)$ справедливо включение

$$g_N(p,t,\xi,\eta)F_{\alpha}[D_{\alpha,t}^N u(\xi,t)]\in L_1(R^1) \tag{1.5.22}$$

по переменной $\eta\in R^1$.

Докажем включение (1.5.22). Заметим, что так как $\lambda(p,t,\xi,\eta)\in S_{\alpha,p}^{\sigma}$, то из (1.5.2) получим оценку $\left|g_N(p,t,\xi,\eta)\right|\le c\int\limits_0^1(|p|+|\xi|+|\theta\eta|)^{\sigma-N}d\theta$.

Следовательно, при $N>\max\{\sigma+1,1\}$ получим

$$\left|\eta g_N(p,t,\xi,\eta)\right|\le c\int\limits_0^{|\eta|}(|p|+|\xi|+|\theta_1|)^{\sigma-N}d\theta_1\le c<\infty. \tag{1.5.23}$$

Причем константа $c>0$ не зависит от $t,\xi,\eta.$

Из (1.5.23) следует, что функция $g_N(p,t,\xi,\eta)$ принадлежит по переменной η пространству $L_2(R^1)$ при всех $\xi\in R^{n-1}$, $t\in[0;+\infty)$.

Так как по условию теоремы 6 функция $D^N_{\alpha,t}u(\xi,t)$ принадлежит по переменной t пространству $L_2(R^1_+)$ при всех $\xi\in R^{n-1}$, то функция $F_\alpha[D^N_{\alpha,t}u(\xi,t)]$ принадлежит по переменной η пространству $L_2(R^1)$ при всех $\xi\in R^{n-1}$.

Отсюда выводим неравенство

$$\begin{aligned}&\left\|g_N(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[D^N_{\alpha,t}u(\xi,t)]\right\|_{L_1(R^1)}\le\left\|g_N(p,t,\xi,\eta)\right\|_{L_2(R^1)}\cdot\\&\cdot\left\|F_\alpha[D^N_{\alpha,t}u(\xi,t)]\right\|_{L_2(R^1)}\le\tilde c<\infty.\end{aligned}\tag{1.5.24}$$

Здесь нормы берутся по переменной η и константа $\tilde c>0$ не зависит от $t,\xi,\eta.$

Из неравенства (1.5.24) следует включение (1.5.22), из которого в силу (1.5.18)-(1.5.21) следует, что

$$\lim_{t\to+\infty}K^{(\sigma)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(\xi,t)=0.$$

Теорема 6 доказана.

1.6. Сопряженный оператор и неравенство Гординга для весовых псевдодифференцильных операторов с переменным символом, зависящим от комплексного параметра, из класса $S^m_{\alpha,p}$

Установим еще ряд важных свойств весовых псевдодифференцильных операторов с переменным символом.

Теорема 1.6.1. Пусть $\lambda_j(p,t,\xi,\eta)\in S^{m_j}_{\alpha,p}(\Omega),\ \Omega\in\overline{R}^1_+,$

$p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\dfrac{\pi}{2},\ |p|>0\}$, где последовательность m_j $(j=0,1,...,)$ - убывающая и $m_j\to-\infty$ при $j\to+\infty$. Тогда существует такой символ $\lambda(t,\xi,\eta)\in S^{m_0}_{\alpha,p}(\Omega)$, что для всех $N>0$ справедливо соотношение

$$\lambda - \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j \in S^{m_N}_{\alpha,p} . \tag{1.6.1}$$

Если выполнено условие (1.6.1) то будем писать, что

$$\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j. \tag{1.6.2}$$

Доказательство. Выберем последовательность отрезков $k_j \in \overline{R}^1_+$.

$k_1 \subset k_2 \subset ... \to \Omega$. Выберем такую функцию $\psi \in C^\infty(R^1)$, что $\psi(\eta) = 0$ при $|\eta| \le \frac{1}{2}$; $\varphi(\eta) = 1$ при $|\eta| \ge 1$. Построим функцию $\lambda(t,\xi,\eta)$ следующим образом:

$$\lambda(p,t,\xi,\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi(\varepsilon_j \eta) \lambda_j(p,t,\xi,\eta), \tag{1.6.3}$$

где числа ε_j выбраны настолько малыми, что

$$\left| (\alpha(t)\partial_t)^i \partial^l_\eta (\varphi(\varepsilon_j \eta) \lambda_j(p,t,\xi,\eta)) \right| \le 2^{-j} (|p| + |\xi| + |\eta|)^{m_j + 1 - l} \tag{1.6.4}$$

при $i + l \le j$.

Легко проверить, что ряд (1.6.3) сходится, кроме того, функция, определенная в (1.6.3), принадлежит классу $S^{m_0}_{\alpha,p}$. Таким образом, из (1.6.3) получаем справедливость соотношения (1.6.1).

Теорема 1.6.2. Пусть $\lambda_j(t,\xi,\eta) \in S^{m_j}_{\alpha,p}(\Omega)$, $\Omega \in \overline{R}^1_+$, $p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$, где $j = 0,1,...$; m_j - убывающая последовательность, стремящаяся к $-\infty$. Пусть $\lambda(p,t,\xi,\eta) \in C^\infty(Q \times \Omega \times R^{n-1} \times R^1)$. Пусть существуют такие константы c_{kl} и $\mu = \mu(k,l)$, что

$$\left| (\alpha(t)\partial_t)^k \partial^l_\eta \lambda(p,t,\xi,\eta)) \right| \le c_{kl} (|p| + |\xi| + |\eta|)^\mu . \tag{1.6.5}$$

Если существует такая последовательность $\mu_k \to +\infty$, что

$$\left|\lambda(t,\xi,\eta)-\sum_{j=0}^{k}\lambda_j(t,\xi,\eta)\right|\le c_k(|p|+|\xi|+|\eta|)^{-\mu_k}, \tag{1.6.6}$$

то $\lambda(p,t,\xi,\eta)\in S^{m_0}_{\alpha,p}$ и выполнено соотношение (1.6.1).

Доказательство. В силу теоремы 1.6.1 мы можем выбрать такой символ $q(p,t,\xi,\eta)\in S^{m_0}_{\alpha,p}(\Omega)$, что $q=\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j$. Остается показать, что $\lambda(p,t,\xi,\eta)-q(p,t,\xi,\eta)\in S^{-\infty}_{\alpha,p}(\Omega)$. Из (1.6.6) следует оценка

$$|\lambda(p,t,\xi,\eta)-q(p,t,\xi,\eta)|\le c_{k,N}(|p|+|\xi|+|\eta|)^{-N},\ t\in\Omega. \tag{1.6.7}$$

Необходимо проверить теперь, что такое же неравенство справедливо и для функции $(\alpha(t)\partial_t)^k\partial^l_\eta(\lambda(p,t,\xi,\eta)-q(p,t,\xi,\eta))$. Это легко доказывается с помощью неравенств

$$\sup_{t\in\Omega}|\partial_t f(t)|^2\le c\sup_{t\in\Omega}|f(t)|\cdot\sum_{j=0}^{2}\sup_{t\in\Omega}|\partial^j_t f(t)|. \tag{1.6.8}$$

Аналогично теореме 1.6.2 доказывается следующее утверждение.

Следствие 1.6.1. Пусть $\lambda_j(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\in S^{m_j}_p$, где $j=0,1,2,...,$ m_j - убывающая последовательность, стремящаяся к $-\infty$. Пусть $\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\in C^\infty(Q\times R^1\times R^{n-1}\times R^1)$. Пусть существуют такие константы c_{kl} и $\mu=\mu(k,l)$, что

$$|\partial^k_\tau\partial^l_\eta\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)|\le c_{kl}(|p|+|\xi|+|\eta|)^{\mu}. \tag{1.6.9}$$

Если существует такая последовательность $\mu_k\to+\infty$, что

$$\left|\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)-\sum_{j=0}^{k}\lambda_j(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\right|\le c_{kl}(|p|+|\xi|+|\eta|)^{-\mu_k},$$

то $\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\in S^{m_0}_p$ и $\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)-\sum_{j=0}^{N}\lambda_j\in S^{m_N}_p$.

Рассмотрим теперь класс операторов, на вид более общий, чем класс весовых псевдодифференцильных операторов и покажем, что при некоторых условиях эти классы совпадают.

Рассмотрим оператор вида

$$
\begin{aligned}
&Au(\xi,t) = F^{-1}_{\alpha_{\eta\to t}} F_{\alpha_{y\to\eta}}[a(p,t,y,\xi,\eta)u(\xi,y)] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau} F_{\theta\to\eta}[a(p,\varphi^{-1}(\tau),\varphi^{-1}(\theta),\xi,\eta)u_\alpha(\xi,\theta)]\Big|_{\substack{\tau=\varphi(t)\\ \theta=\varphi(y)}} = \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta\tau} \int_{-\infty}^{\infty} a(p,\varphi^{-1}(\tau),\varphi^{-1}(\theta),\xi,\eta)u_\alpha(\xi,\theta)e^{i\theta\eta}d\theta\cdot d\eta\Big|_{\substack{\tau=\varphi(t)\\ \theta=\varphi(y)}} = \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha(t)}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(p,\varphi^{-1}(\tau),\varphi^{-1}(\theta),\xi,\eta)u_\alpha(\xi,\theta)e^{i(\theta-\tau)\eta}d\theta\, d\eta\Big|_{\substack{\tau=\varphi(t)\\ \theta=\varphi(y)}},
\end{aligned}
\tag{1.6.10}
$$

где $\tau=\varphi(t)=\int_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$, $\varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau=\varphi(t)$;

$u_\alpha(\tau)=\sqrt{\alpha(t)}\,u(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.6.1. Пусть $\lambda(p,t,\xi,\eta)\in S^m_{\alpha,p}$, $v(\tau)\in S(R^1)$, тогда для всех $\eta,\, z\in R^1$ справедливо неравенство

$$
\left|\int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{i\tau z}d\tau\right| \le c_N(|p|+|\xi|+|\eta|)^m(1+|z|)^{-N} \tag{1.6.11}
$$

для любого $N>0$.

Утверждение леммы вытекает из равенства

$$
\left|z^k\int_{-\infty}^{\infty} v(\tau)\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{i\tau z}d\tau\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} D^k_\tau(v(\tau)\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta))e^{i\tau z}d\tau\right|
$$

и того, что $\lambda(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\in S^m_p$, если $\lambda(p,t,\xi,\eta)\in S^m_{\alpha,p}$. (Класс S^m_p определён в определении 1.2.1).

Заметим, что если $u(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$, то для функции $u_\alpha(\tau)=\sqrt{\alpha(t)}\,u(t)\big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$ справедливо неравенство

$$
\left|\int_{-\infty}^{\infty} u_\alpha(y)a(p,t,y,\xi,\eta)e^{iy\eta}dy\right| \le c_N(1+|\xi|+|\eta|)^{m-N}. \tag{1.6.12}
$$

Следовательно, интеграл (1.6.10) абсолютно сходится при $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$. Аналогично, дифференцируя под знаком интеграла (1.6.10) и проводя аналогичные рассуждения можно показать, что

$$A: C_0^\infty(R_+^1) \to C^\infty(R^1). \tag{1.6.13}$$

Рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} A_1 u(\tau) &= F_{\eta\to\tau}^{-1} F_{\theta\to\eta}[a_1(p,\tau,\theta,\xi,\eta)u_\alpha(\theta)] = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a_1(p,\tau,\theta,\xi,\eta)u_\alpha(\theta)e^{i\eta(\theta-\tau)}d\theta d\eta, \end{aligned} \tag{1.6.14}$$

где

$$a_1(p,\tau,\theta,\xi,\eta) = a(p,\varphi^{-1}(\tau),\varphi^{-1}(\theta),\xi,\eta). \tag{1.6.15}$$

Заметим, что

$$Au(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} A_1 u_\alpha(\xi,\tau)\Big|_{\tau=\varphi(t)}. \tag{1.6.16}$$

Определение 1.6.1. Пусть $\tilde{\Omega}$ - открытое множество в R^1. Будем говорить, что $a_1(p,\tau,\theta,\xi,\eta) \in \tilde{S}^{m,p}(\tilde{\Omega})$, $m \in R^1$, если $a_1(p,\tau,\theta,\xi,\eta) \in C^\infty(Q\times\tilde{\Omega}\times\tilde{\Omega}\times R^{n-1}\times R^1)$ и на компактных подмножествах множества $\tilde{\Omega}\times\tilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\left|\partial_\tau^j \partial_\theta^k \partial_\eta^l a_1(p,\tau,\theta,\xi,\eta)\right| \le c_{jkl}(|p|+|\xi|+|\eta|)^{m-l},$$

где $j,k,l = 0,1,2,...$; $c_{jkl} > 0$ не зависит от τ,θ,ξ,η.

Заметим, что если $a(p,t,y,\xi,\eta) \in S^{m,\alpha,p}$, то функция $a_1(p,\tau,y,\xi,\eta)$ принадлежит классу $\tilde{S}^{m,p}$.

По аналогии с работой [49] докажем следующее утверждение.

Теорема 1.6.3. Пусть $a_1(p,\tau,\theta,\xi,\eta) \in \tilde{S}^{m,p}$. Тогда найдется такой символ $\tilde{\lambda}(p,\tau,\xi,\eta) \in S_p^m$, что $A_1 = \tilde{K}(p,\tau,\xi,D_\tau)$, где $\tilde{K}(p,\tau,\xi,D_\tau)$ -

псевдодифференциальный оператор с символом $\tilde{\lambda}(p,\tau,\xi,\eta)$. А именно, $\tilde{\lambda}(p,\tau,\xi,\eta)=e^{i\tau\eta}A_1(e^{-i\tau\eta})$, причём справедливо асимптотическое разложение

$$\tilde{\lambda}(p,\tau,\xi,\eta)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{i^j}{j!}\partial_\eta^j\partial_\theta^j a_1(p,\tau,\theta,\xi,\eta)\Big|_{\theta=\tau}. \tag{1.6.17}$$

Доказательство. Очевидно, функция $\tilde{\lambda}(p,\tau,\xi,\eta)=e^{i\tau\eta}A_1(e^{-i\tau\eta})$ - корректно определённая гладкая функция своих аргументов. Если применить линейный оператор A_1 к функции $u(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(\eta)e^{-iy\eta}d\eta$, то получим равенство

$$A_1u(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(\eta)\tilde{\lambda}(\tau,\xi,\eta)e^{-i\tau\eta}d\eta.$$

Остается показать, что $\tilde{\lambda}\in S_p^m$ и выполнено соотношение (1.6.17). Заметим, что общий член в правой части (1.6.17) принадлежит классу S_p^{m-j}.

Пусть $b(p,\tau,\theta,\xi,z)=a(p,\tau,\tau+\theta,\xi,z)$ и

$$\tilde{b}(p,\tau,y,\xi,z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}b(p,\tau,\theta,\xi,z)e^{iy\theta}d\theta.$$

Тогда

$$\tilde{\lambda}(p,\tau,\xi,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{b}(p,\tau,y,\xi,z+y)dy. \tag{1.6.18}$$

Из условий, на функцию $a_1(p,\tau,\theta,\xi,z)$ следует, что

$$\left|\partial_\tau^j\partial_\theta^k\partial_z^l b(p,\tau,\theta,z)\right|\le c(|p|+|\xi|+|z|)^{m-l}. \tag{1.6.19}$$

Из (1.6.19) следует оценка

$$\left|\partial_\tau^j\partial_z^l\tilde{b}(p,\tau,y,z)\right|\le c(|p|+|\xi|+|z|)^{m-l}. \tag{1.6.20}$$

Таким образом, функция $\tilde{\lambda}(p,t,\xi,z)$ и любая производная этой функции ограничены некоторой степенью $(|p|+|z|+|\xi|)$.

Рассмотрим разложение Тейлора функции $\tilde{b}(p,\tau,y,\xi,z+y)$ по последнему аргументу в точке z.

Используя (1.6.20) получим

$$\left|\tilde{b}(p,\tau,y,\xi,z+y)-\sum_{l=0}^{N-1}\frac{1}{l!}(i\partial_z)^l\tilde{b}(p,\tau,y,\xi,z)y^l\right|\le$$
$$\le c_\nu |y|^N(|p|+|y|)^{-\nu}\sup_{0\le\varepsilon\le1}(|p|+|z+\varepsilon y|)^{m-N}, \tag{1.6.21}$$

где ν может быть нулем или любым положительным числом. При $\nu=N$ правую часть (1.6.21) можно оценить величиной $c(|p|+|z|)^{m-N}$ если $|y|\le\frac{1}{2}|z|$. Если $N>0$ достаточно велико, то правую часть (1.6.21) можно оценить произвольной степенью величины $(|p|+|y|)^{-1}$ при $|z|\le 2|y|$. Таким образом,

$$\left|\tilde{\lambda}(p,\tau,\xi,z)-\sum_{l=0}^{N-1}\frac{(i)^l}{l!}\partial_z^l\partial_\theta^l b(p,\tau,\theta,z)\big|_{\theta=0}\right|\le c(|p|+|z|)^{m+1-N}.$$

Теперь теорема 1.6.3 следует непосредственно из следствия 1.6.1.

Из (1.6.14) - (1.6.16) вытекает следующая теорема.

Теорема 1.6.4. Пусть A – оператор вида (1.6.10), причём $a(p,t,y,\xi,\eta)\in S^{m,\alpha,p}$, $m\in R^1$, $p\in Q=\{p\in C, |\arg p|<\frac{\pi}{2}, |p|>0\}$. Тогда найдется такой символ $\lambda(p,t,\xi,\eta)\in S^m_{\alpha,p}$, что $A=K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$, где $K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ - весовой псевдодифференциальный оператор с символом $K(p,t,\xi,\eta)$. Причём

$$K(p,t,\xi,\eta)=\sqrt{\alpha(t)}\exp(i\eta\int_t^d\frac{d\rho}{\alpha(\rho)})A(\frac{1}{\sqrt{\alpha(y)}}\exp(-i\eta\int_y^d\frac{d\rho}{\alpha(\rho)})).$$

При этом справедливо асимптотическое разложение

$$\lambda(p,t,\xi,\eta)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{i^j}{j!}(\alpha(y)\partial_y)^j\partial_\eta^j a(p,t,y,\xi,\eta)\big|_{y=t}. \tag{1.6.22}$$

Теорема 7 вытекает теперь из теоремы 1.6.4.

Определение 1.6.3. Сопряженным оператором $K^*(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ к весовому псевдодифференциальному оператору $K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ называется оператор, удовлетворяющий равенству

$$(K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(\xi,t),v(\xi,t))_{L_2(R^1_+)}=(u(\xi,t),K^*(p,t,\xi,D_{\alpha,t})v(\xi,t))_{L_2(R^1_+)}. \tag{1.6.23}$$

Определение 1.6.4. Сопряженным оператором $K^*(p,\tau,\xi,D_\tau)$ к псевдодифференциальному оператору $K(p,\tau,\xi,D_\tau)$ называется оператор, удовлетворяющий равенству

$$(K(p,\tau,\xi,D_\tau)u(\xi,\tau),v(\xi,\tau))_{L_2(R^1)}=(u(\xi,\tau),K^*(p,\tau,\xi,D_\tau)v(\xi,\tau))_{L_2(R^1)}. \qquad (1.6.24)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.6.5. Пусть $K(p,\tau,\xi,D_\tau)$ - псевдодифференциальный оператор с символом $\lambda(p,\tau,\xi,\eta)\in S_p^m$, $m\in R^1$, $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\dfrac{\pi}{2},\ |p|>0\}$. Тогда сопряженный оператор $K^*(p,\tau,\xi,D_\tau)$ - есть псевдодифференциальный оператор с символом $\lambda^*(p,\tau,\xi,\eta)\in S_p^m$. Причем

$$\lambda^*(p,\tau,\xi,\eta)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{i^l}{l!}\partial_\tau^l\partial_\eta^l\bar{\lambda}(p,\tau,\xi,\eta) \quad , \qquad (1.6.25)$$

где $\bar{\lambda}(p,\tau,\xi,\eta)$ - функция, комплексно сопряженная к $\lambda(p,\tau,\xi,\eta)$.

Доказательство. Пусть $u(\tau),v(\tau)\in S(R^1)$, тогда

$$(K(p,\tau,\xi,D_\tau)u(\tau),v(\tau))_{L_2(R^1)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{v}(\tau)\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(x-\tau)\eta}\lambda(p,\tau,\xi,\eta)u(x)dxd\eta d\tau=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{u}(x)\overline{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\tau-x)}\tilde{\lambda}(p,\tau,\xi,\eta)v(\tau)d\tau d\eta dx}= \qquad (1.6.26)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x)\overline{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\eta(\tau-x)}\tilde{\lambda}(p,\tau,\xi,\eta)v(\tau)d\tau d\eta dx}=(u,K(p,\tau,\xi,D_\tau)^*v)_{L_2(R^1)},$$

где

$$K(p,x,\xi,D_x)^*v=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(x-\tau)\eta}\bar{\lambda}(p,\tau,\xi,\eta)v(\tau)d\tau d\eta.$$

Соотношение (1.6.25) вытекает теперь из (1.6.17).

Теорема 1.6.6. Пусть

$\lambda(p,t,\xi,\eta)\in S^m_{\alpha,p}$, $m\in R^1$, $p\in Q=\{p\in C, |\arg p|<\dfrac{\pi}{2}, |p|>0\}$. Тогда оператор $K^*(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$, сопряженный к весовому псевдодифференциальному оператору $K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$, является весовым псевдодифференциальным оператором с символом $\lambda^*(p,t,\xi,\eta)\in S^m_{\alpha,p}$, для которого справедливо асимптотическое разложение

$$\lambda^*(p,t,\xi,\eta)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{i^j}{j!}(\alpha(t)\partial_t)^j\partial^j_\eta\overline{\lambda}(p,t,\xi,\eta). \tag{1.6.27}$$

Доказательство. Пусть $u(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$, $v(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$. Тогда

$$(k(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t),v(t))_{L_2(R^1_+)}=\int_0^\infty F^{-1}_\alpha[\lambda(p,t,\xi,\eta]F_\alpha[u(t)]](t)\overline{v}(t)dt=$$

$$=\int_0^\infty\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha(t)}}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(p,t,\xi,\eta)e^{-i\varphi(t)\eta}(\int_0^\infty u(y)e^{i\varphi(y)\eta}\frac{dy}{\sqrt{\alpha(y)}})d\eta\cdot\overline{v(t)}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{+\infty}\lambda(p,t,\xi,\eta)e^{i\eta(\varphi(y)-\varphi(t))}u(y)\frac{dy}{\sqrt{\alpha(y)}})d\eta\cdot\overline{v(t)}dt=$$

$$=\overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\int_0^{+\infty}\lambda(p,t,\xi,\eta)e^{i\eta(\varphi(y)-\varphi(t))}u(y)\frac{dy}{\sqrt{\alpha(y)}}}d\eta\overline{v}(t)dt}=$$

$$=\overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}\overline{\lambda}(p,t,\xi,\eta)\cdot e^{i\eta(\varphi(t)-\varphi(y))}\overline{u}(y)\frac{dy}{\sqrt{\alpha(y)}}v(t)dt}=$$

$$=\overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{\alpha(y)}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{+\infty}\overline{\lambda}(p,t,\xi,\eta)e^{i\eta(\varphi(t)-\varphi(y))}v(t)\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}d\eta\cdot\overline{u(y)}dy}=$$

$$\begin{aligned}&=\overline{\int_0^\infty F^{-1}_{\alpha_{\eta\to y}}F_{\alpha_{t\to y}}[\overline{\lambda}(p,t,\xi,\eta)v(t)](y)\cdot\overline{u}(y)dy}=\\&=\int_0^\infty u(y)\overline{F^{-1}_{\alpha_{\eta\to y}}F_{\alpha_{t\to y}}[\overline{\lambda}(p,t,\xi,\eta)\overline{v}(t)]}(y)dy=\\&=(u(y),K(p,y,\xi,D_{\alpha,t})^*v(y))_{L_2(R^1_+)},\end{aligned}\tag{1.6.28}$$

где $\varphi(t)=\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$. $K(p,y,\xi,D_{\alpha,t})^* v(y)=F^{-1}_{\alpha_{\eta\to y}}[F_{\alpha_{t\to\eta}}[\bar{\lambda}(p,t,\xi,\eta)v(t)]]$.

Соотношение (1.6.27) вытекает теперь из (1.6.22) и (1.6.28).

Из теоремы 1.6.6, очевидно, вытекает теорема 8.

Теорема 1.6.7. Пусть $\lambda(p,t,\xi,\eta)\in S^0_{\alpha,p}$ и $\lambda(p,t,\xi,\eta)\geq c>0$. Тогда найдётся такой весовой псевдодифференциальный оператор $B(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ с символом из класса $S^0_{\alpha,p}(\Omega)$, что оператор $\operatorname{Re}K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})-B^*B$ есть весовой псевдодифференциальный оператор с символом из класса $S^{-\infty}_{\alpha,p}$, где

$\operatorname{Re}K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})=\frac{1}{2}(K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})+K^*(p,t,\xi,D_{\alpha,t}))$.

Доказательство. Построим символ весового псевдодифференциального оператора $B(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$,

$b(p,t,\xi,\eta)=\sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j(p,t,\xi,\eta)$, где $b_j(p,t,\xi,\eta)\in S^{-j}_{\alpha,p}(\Omega)$.

Возьмём

$$b_0(p,t,\xi,\eta)=\sqrt{\operatorname{Re}\lambda(p,t,\xi,\eta)}. \qquad (1.6.29)$$

Так как $\lambda(p,t,\xi,\eta)\in S^0_{\alpha,p}(\Omega)$ и $\operatorname{Re}\lambda(p,t,\xi,\eta)\geq c>0$, то из (1.6.29) следует, что $b_0(p,t,\xi,\eta)\in S^0_{\alpha,p}$.

Из (1.6.27) и теоремы о композиции весовых псевдодифференциальных операторов следует, что $k(p,t,\xi,D_{\alpha,t})-B_0^*(p,t,\xi,D_{\alpha,t})B_0(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ есть весовой псевдодифференциальный оператор с символом из класса $S^{-1}_{\alpha,p}(\Omega)$. Здесь $B_0(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ - весовой псевдодифференциальный оператор с символом $b_0(p,t,\xi,\eta)$.

Действуя по индукции, предположим, что в асимптотическом представлении функции $b(p,t,\xi,\eta)$ уже найдены члены $b_0,b_1,...,b_j$ и требуется выбрать член $b_{j+1}\in S^{-j-1}_{\alpha,p}(\Omega)$ так, чтобы

$$\operatorname{Re} K(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) = (\sum_{l=0}^{j} B_l^*(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) + B_{j+1}^*(p,t,\xi,D_{\alpha,t}))\cdot$$

$$\cdot(\sum_{l=0}^{j} B_l\,(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) + B_{j+1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})) + R_{j+1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t}), \qquad (1.6.30)$$

где $R_{j+1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ - весовой псевдодифференциальный оператор с символом из класса $S_{\alpha,p}^{-j-2}(\Omega)$.

По предположению индукции справедливо равенство

$$\operatorname{Re} K(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) =$$
$$= (\sum_{l=0}^{j} B_l^*(p,t,\xi,D_{\alpha,t})(\sum_{l=0}^{j} B_l\,(p,t,\xi,D_{\alpha,t})) + R_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t})^{,} \qquad (1.6.31)$$

где $R_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ - весовой псевдодифференциальный оператор с символом из класса $S_{\alpha,p}^{-j-1}(\Omega)$.

Рассмотрим оператор

$$(\sum_{l=0}^{j+1} B_l^*(p,t,\xi,D_{\alpha,t})(\sum_{l=0}^{j+1} B_l\,(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) = (\sum_{l=0}^{j} B_l^*(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) + B_{j+1}^*(p,t,\xi,D_{\alpha,t}))\cdot$$

$$\cdot(\sum_{l=0}^{j} B_l\,(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) + B_{j+1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})) = \sum_{l=0}^{j} B_l^* \sum_{l=0}^{j} B_l\ +$$
$$+ B_0^* B_{j+1} + B_{j+1}^* B_0 + \sum_{l=1}^{j} B_l^* B_{j+1} + B_{j+1}^* \sum_{l=1}^{j} B_j + B_{j+1}^* B_{j+1}. \qquad (1.6.32)$$

Обозначим

$$\tilde{R}_{j+1} = -\sum_{l=1}^{j} B_l^* B_{j+1} - B_{j+1}^* \sum_{l=1}^{j} B_l\ . \qquad (1.6.33)$$

Тогда из (1.6.31) - (1.6.33) получим равенство

$$\operatorname{Re} K(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) =$$
$$= (\sum_{l=0}^{j+1} B_l^*(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) \sum_{l=0}^{j+1} B_l\,(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) + [R_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) - \qquad (1.6.34)$$
$$- B_0^* B_{j+1}^* - B_{j+1}^* B_0] + \tilde{R}_{j+1}.$$

Выберем теперь символ $b_{j+1}(p,t,\xi,\eta) \in S_{\alpha,p}^{-j-1}(\Omega)$ так, чтобы оператор

$$J_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) = R_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) - B_0^*(p,t,\xi,D_{\alpha,t})B_{j+1}^*(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) - \\ -B_{j+1}^*(p,t,\xi,D_{\alpha,t})B_0(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) \quad (1.6.35)$$

был весовым псевдодифференциальным оператором с символом из класса $S_{\alpha,p}^{-j-2}(\Omega)$. Возьмем $b_{j+1}(p,t,\xi,\eta) = \frac{1}{2}b_0^{-1}(p,t,\xi,\eta)r_j(p,t,\xi,\eta)$, где $r_j(p,t,\xi,\eta)$ - символ весового псевдодифференциального оператора $R_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$. Из определения оператора $\operatorname{Re}K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ и равенства (1.6.31) получим, что оператор $R_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ самосопряженный, то есть $R_j^* = R_j$. Заметим, что символ b_o оператора $B_0(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$, есть вещественнозначная функция, то есть $b_0(p,t,\xi,\xi) = \bar{b}_0(p,t,\xi,\eta)$.

Значит, главная часть символа $b_{j+1}^*(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $B_{j+1}^*(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ равна $\frac{1}{2}b_0^{-1}(t,\xi,\eta)r_j(t,\xi,\eta)$. Отсюда с помощью теорем 1.6.6 и 1.3.2 получим, что символ весового псевдодиффернециального оператора $J_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$, определённого в (1.6.35), принадлежит классу $S_{\alpha,p}^{-j-2}(\Omega)$.

Обозначим

$$R_{j+1} = \tilde{R}_{j+1} + J_j, \quad (1.6.36)$$

где оператор $\tilde{R}_{j+1}$ определен в (1.6.33).

Из (1.6.33) и (1.6.36) выводим с помощью теорем 1.6.6. и 1.3.2, что $R_{j+1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ - есть весовой псевдодифференциальный оператор с символом из класса $S_{\alpha,p}^{-j-2}(\Omega)$. Теорема 1. 6. 7 доказана.

Теорема 1.6.8. Пусть $P(t,\xi,D_{\alpha,t})$ весовой псевдодифференциальный оператор с символом $\lambda(p,t,\xi,\eta) \in S_{\alpha,p}^m(\Omega)$. Пусть $\operatorname{Re}\lambda(p,t,\xi,\eta) \geq c(|p|+|\xi|+|\eta|)^m$, $c>0$ при $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$. Тогда для любого

$s \in R^1$ и произвольного отрезка $K \subset \Omega$ при всех $u(t) \in C_0^\infty(K)$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t),u(t))_{L_2(R_+^1)} \ge c_0 \left\|u,|p|\right\|^2_{\frac{m}{2},\alpha,|\xi|} - c_1 \left\|u,|p|\right\|^2_{s,\alpha,|\xi|}. \qquad (1.6.37)$$

Здесь $(\cdot,\cdot)_{L_2(R_+^1)}$ - скалярное произведение в $L_2(R_+^1)$.

Здесь и в дальнейшем использованы обозначения

$$K(p,\mathrm{t},\xi,D_{\alpha,\mathrm{t}})\mathrm{u(t)} = F_\alpha^{-1}[\lambda(p,\mathrm{t},\xi,\eta)F_\alpha[\mathrm{u(t)}]] \qquad (1.6.38)$$

$$\left\|\mathrm{u},|p|\right\|^2_{s,\alpha,|\xi|} = \int_{R^1} (|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha[v(\mathrm{t})]\right|^2 d\eta \qquad (1.6.39)$$

Доказательство. Заменяя, оператор $K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ на

$$Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) = \Lambda^{-\frac{m}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})\Lambda^{-\frac{m}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t}),$$

где $\Lambda^{-\frac{m}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})u = F_\alpha^{-1}[(|p|+|\xi|+|\eta|)^{-\frac{m}{2}}F_\alpha[u]]$, мы можем без ограничения общности считать, что $m=0$.

Таким образом, можно считать, что $\lambda(p,t,\xi,\eta) \in S^0_{\alpha,p}$ и $\operatorname{Re}\lambda(p,t,\xi,\eta) \ge c > 0$..

Применяя теорему 1.6.7 к символу $r(p,t,\xi,\eta) = \operatorname{Re}\lambda(p,t,\xi,\eta) - \dfrac{c}{2}$, найдем такой весовой псевдодифференциальный оператор $B(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ с символом $b(p,t,\xi,\eta) \in S^0_{\alpha,p}$, что

$S(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) = \operatorname{Re}K(p,t,\xi,D_{\alpha,t}) - B^*(p,t,\xi,D_{\alpha,t})B(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ есть весовой псевдодифференциальный оператор с символом из класса $S^{-\infty}_{\alpha,p}$.

Следовательно, $\operatorname{Re}(K(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t),u(t))_{L_2(R_+^1)} - \dfrac{c}{2}(u,u)_{L_2(R_+^1)} =$

$$= (B^*Bu,u)_{L_2(R_+^1)} + \operatorname{Re}(Su,u)_{L_2(R_+^1)}$$

Отсюда следует справедливость неравенства (1.6.37).

Из теоремы 1.6.8 с помощью равенства Парсеваля получим утверждение теоремы 9.

ГЛАВА 2

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ВЕСОВОЙ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР С ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ КОМПЛЕКСНОГО ПАРАМЕТРА, И ПРОИЗВОДНУЮ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПО ПЕРЕМЕННОЙ T

2.1. Вспомогательные утверждения.

Рассмотрим следующие операторы с переменными коэффициентами

$$\tilde{A}^{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u(\xi,t)=K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u-\partial_t u, \tag{2.1.1}$$

$$\tilde{A}_r^{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u(\xi,t)=\frac{1}{r}\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,\mathrm{t},\xi,D_{\alpha,t})u+K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u-\partial_t u, \tag{2.1.2}$$

$$\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u=$$
$$=\frac{1}{r}\Lambda_{\pm}^{2r_o}(p,\xi,D_{\alpha,t})u+\mu K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u\pm(1-\mu)u-\partial_t u, \tag{2.1.3}$$

где $K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})=F_{x\to\xi}[K_{\pm}^{(q)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})]$, $K_{\pm}^{(q)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ - весовой псевдодифференциальный оператор с символом $\lambda_{\pm}(p,t,\xi,\eta)$, удовлетворяющим условию 2, $\mu\in[0,1]$, $r=1,2,...$, $r_0>0$ - целое число, $2r_0\geq q>1$, $u(\xi,t)=F_{x\to\xi}[v(x,t)]$, весовой псевдодифференциальный оператор $\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})$ определен равенством

$$\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})=F_{\alpha}^{-1}[\pm(|p|^2+|\xi|^2+\eta^2)^{r_0}F_{\alpha}[\cdot]]. \tag{2.1.4}$$

В дальнейшем в этой главе мы обозначаем норму в пространстве $L_2(R_+^1)$ через $\|\cdot\|$.

Рассмотрим также операторы

$$\tilde{A}^{\pm,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u=K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u-\partial_t u\pm r_1 u, \tag{2.1.5}$$

$$\tilde{A}_r^{\pm,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u=\frac{1}{r}\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u+K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u-\partial_t u\pm r_1 u, \qquad (2.1.6)$$

$$\begin{gathered}\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u=\frac{1}{r}\Lambda_{\pm}^{2r_o}(p,\xi,D_{\alpha,t})u+\\ +\mu K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u\pm(1-\mu)u-\partial_t u\pm r_1 u,\end{gathered} \qquad (2.1.7)$$

где $r_1>0$ - некоторое число.

В дальнейшем через c будем обозначать положительные константы, не зависящие от параметра p .

Докажем ряд вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства теорем 10 - 15.

Лемма 2.1.1. Пусть $\mu\in[0,1],\ r=1,2,\ldots,$ $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\frac{\pi}{2},\ |p|>0\}$. Пусть функция $\lambda_{\pm}(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяет условию 2. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^{\infty}(R_+^1)$ и любого $s_0\in R^1$ справедливо неравенство

$$\begin{gathered}\mu\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0+\frac{q}{2}}\|u\|^2+\mu^2(|p|^2+|\xi|^2)^q\|u\|^2+\mu(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\|u\|^2\le\\ \le c(\|\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm}u\|^2\mp\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2+\mu^2\|u,|p|\|_{s_0,\alpha,|\xi|}^2),\end{gathered} \qquad (2.1.8)$$

где постоянная $c>0$ не зависит от $r,p,\ \mu;\ \ \xi\in R^{n-1}$ и функции $u(t)$.

Здесь норма $\|u,|p|\|_{s_0,\alpha,|\xi|}^2$ определена в (1.6.39).

Доказательство. Умножим равенство (2.1.3) скалярно в $L_2(R_+^1)$ на функцию $\pm\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}u(t)$, получим неравенство

$$\begin{gathered}\pm\frac{\mu}{r}\mathrm{Re}(\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u,(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}u)+\mu^2(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\mathrm{Re}(K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,u)+\\ +(1-\mu)\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\|u\|^2\mp\mu\mathrm{Re}(\partial_t u,u)(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}=\\ =\pm\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\mathrm{Re}(\tilde{A}_{p,\mu}^{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u,u).\end{gathered} \qquad (2.1.9)$$

Из (2.1.4) и равенства (3) получим оценку

$$\pm\frac{\mu}{r}\operatorname{Re}(\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u,(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}u)\ge c\frac{\mu}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0+\frac{q}{2}}\|u\|^2. \qquad (2.1.10)$$

Из условия 2 и теоремы 1.6.8 получим неравенство

$$\pm\operatorname{Re}(K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t),u(t))\ge c_0\|u,|p|\|^2_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}-c_1\|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}, \qquad (2.1.11)$$

где $s_0\in R^1$ - любое число. Здесь $c_0>0,\ c_1>0$ - некоторые константы.

Используя неравенство Коши - Буняковского, получим

$$\left|(\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u,\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}u)\right|\le\varepsilon\mu^2(|p|^2+|\xi|^2)^q\|u\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\|\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}u\|^2 \qquad (2.1.12)$$

для любого $\varepsilon>0$.

Применим неравенства (2.1.10), (2.1.11), (2.1.12) и равенство $\operatorname{Re}(\partial_t u,u)=-\frac{1}{2}|u(0)|^2$ в (2.1.9). Получим неравенство.

$$c\frac{\mu}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0+\frac{q}{2}}\|u\|^2+\mu^2(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}(c_0\|u,|p|\|^2_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}-c_1\|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|})+$$
$$+(1-\mu)\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\|u\|^2\pm\frac{1}{2}\mu|u(0)|^2(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\le$$
$$\le\varepsilon\mu^2(|p|^2+|\xi|^2)^q\|u\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\|\tilde{A}^{\pm}_{p,\mu}u\|^2.$$

Выбирая в последнем неравенстве число $\varepsilon>0$ достаточно малым, получим неравенство (2.1.8).

Следствие 2.1.1. Пусть выполнены условия леммы 2.1.1. Тогда при $r_1\ge r_2$, где $r_2>0$ - достаточно большое число, для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$ справедливо неравенство

$$\frac{\mu}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0+\frac{q}{2}}\|u\|^2+\mu^2(|p|^2+|\xi|^2)^q\|u\|^2+\mu(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\|u\|^2+$$
$$+\mu r_1(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\|u\|^2\le c(\|\tilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}u\|^2\mp\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2). \qquad (2.1.13)$$

Доказательство. Повторяя доказательство леммы 2.1.1, выводим оценку

$$\frac{\mu}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0+\frac{q}{2}}\|u\|^2+\mu^2(|p|^2+|\xi|^2)^q\|u\|^2+\mu(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\|u\|^2+$$

$$+\mu r_1(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\|u\|^2\le c(\|\tilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}u\|^2\mp\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2+\mu^2\|u,|p|\|_{s_0,\alpha,|\xi|}).$$

Так как $s_0\in R^1$ - произвольное число, то выбирая $s_0=0$, получим из последнего неравенства оценку

$$\frac{\mu}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0+\frac{q}{2}}\|u\|^2+\mu^2(|p|^2+|\xi|^2)^q\|u\|^2+\mu(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\|u\|^2+$$

$$+\mu r_1(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\|u\|^2-c\mu^2\|u\|^2\le c(\|\tilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}u\|^2\mp\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2).$$

Учитывая, что $\mu\in[0,1]$ и выбирая $r_1\ge 2c$, получим из этой оценки оценку (2.1.13).

Лемма 2.1.2. Пусть выполнены условия леммы 2.1.1. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R_+^1)$ и любого $s_0\in R^1$ справедливы оценки

$$\begin{gathered}\frac{1}{r^2}(|p|^2+|\xi|^2)^{2r_0}\|u\|^2+\frac{\mu}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0+\frac{q}{2}}\|u\|^2+\frac{1}{r}(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}\|u\|^2\le\\ \le c_1(\|\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\|^2\mp\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}|u(0)|^2+\frac{\mu}{r}\|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}),\end{gathered}\tag{2.1.14}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{r}(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}\|u\|^2+\mu(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\|u\|^2+(1-\mu)^2\|u\|^2\le\\ \le c_2(\|\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\|^2\mp(1-\mu)|u(0)|^2+\mu(1-\mu)\|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}),\end{gathered}\tag{2.1.15}$$

где постоянные $c_1>0,\ c_2>0$ не зависят от $\mu\in[0,1],\ r=1,2,...,\xi\in R^{n-1},\ u(t)$.

Доказательство. Умножим равенство (2.1.3) скалярно в $L_2(R_+^1)$ на функцию $\pm\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^l u(t)$, получим

$$\pm\frac{1}{r^2}\operatorname{Re}(\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u,(|p|^2+|\xi|^2)^l u)\pm$$
$$\pm\frac{\mu}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^l\operatorname{Re}(K_{\pm}^{(q)}(t,\xi,D_{\alpha,t})u,u)+$$
$$+(1-\mu)\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^l\|u\|^2\mp\frac{1}{r}\operatorname{Re}(\partial_t u,u)(|p|^2+|\xi|^2)^l= \tag{2.1.16}$$
$$=\pm\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^l\operatorname{Re}(\tilde{A}_{p,\mu}^{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u,u).$$

Из (2.1.4) и равенства (3) получим оценку

$$\pm\frac{1}{r^2}\operatorname{Re}(\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u,(|p|^2+|\xi|^2)^l u)\ge c\frac{1}{r^2}(1+|\xi|^2)^{r_0+l}\|u\|^2. \tag{2.1.17}$$

Из условия 2 и теоремы 1.6.8 получим неравенство

$$\pm\operatorname{Re}(K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t),u(t))\ge c_0\|u,|p|\|^2_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}-c_1\|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}, \tag{2.1.18}$$

где $s_0\in R^1$ - любое число. Здесь $c_0>0,\ c_1>0$ - некоторые константы.

Используя неравенство Коши - Буняковского, получим

$$\left|(\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u,\frac{1}{r}(1+|\xi|^2)^l u)\right|\le\varepsilon\frac{1}{r^2}(1+|\xi|^2)^{2l}\|u\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left\|\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm}u\right\|^2 \tag{2.1.19}$$

для любого $\varepsilon>0$.

Применим неравенства (2.1.17), (2.1.18), (2.1.19) и равенство $\operatorname{Re}(\partial_t u,u)=-\frac{1}{2}|u(0)|^2$ в (2.1.16). Получим неравенство.

$$c\frac{1}{r^2}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0+l}\|u\|^2+\frac{\mu}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^l(c_0\|u,|p|\|^2_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}-c_1\|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|})+$$
$$+(1-\mu)\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^l\|u\|^2\pm\frac{1}{2}\frac{1}{r}|u(0)|^2(|p|^2+|\xi|^2)^r\le$$
$$\le\varepsilon\frac{1}{r^2}(|p|^2+|\xi|^2)^{2l}\|u\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left\|\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm}u\right\|^2.$$

Выбирая в последнем неравенстве число $\varepsilon>0$ достаточно малым и $r=r_0$, получим неравенство (2.1.14).

Умножим теперь (2.1.3) скалярно в $L_2(R_+^1)$ на функцию $\pm(1-\mu)u(t)$, получим

$$\pm\frac{1-\mu}{p}\operatorname{Re}(\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u,u)\pm\mu(1-\mu)\operatorname{Re}(K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,u)+$$

$$+(1-\mu)^2\|u\|^2\mp(1-\mu)\operatorname{Re}(\partial_t u,u)= \qquad (2.1.20)$$

$$=\pm(1-\mu)\operatorname{Re}(\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u,u).$$

Из (2.1.4) и равенства (3) получим оценку

$$\pm\frac{1-\mu}{r}\operatorname{Re}(\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u,u)\geq c\frac{1-\mu}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}\|u\|^2. \qquad (2.1.21)$$

Из условия 2 и теоремы 1.6.8 выводим неравенство

$$\pm\operatorname{Re}(K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t),u(t))\geq c_0\|u\|,|p|_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}^2-c_1\|u,|p|\|_{s_0,\alpha,|\xi|}^2, \qquad (2.1.22)$$

где $s_0\in R^1$ - любое число. Здесь $c_0>0,\ c_1>0$ - некоторые константы.

Используя неравенство Коши - Буняковского, получим

$$\left|(\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u,(1-\mu)u)\right|\leq\varepsilon(1-\mu)^2\|u\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left\|\tilde{A}_{p,\mu}^{\pm}u\right\|^2 \qquad (2.1.23)$$

для любого $\varepsilon>0$.

Применим неравенства (2.1.21), (2.1.22), (2.1.23) и равенство $\operatorname{Re}(\partial_t u,u)=-\frac{1}{2}|u(0)|^2$ в (2.1.20). Получим неравенство.

$$c\frac{1-\mu}{r}(1+|\xi|^2)^{r_0}\|u\|^2+\mu(1-\mu)(c_0\|u,|p|\|_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}^2-c_1\|u,|p|\|_{s_0,\alpha,|\xi|}^2)+$$

$$+(1-\mu)^2\|u\|^2\pm\frac{1}{2}(1-\mu)|u(0)|^2\leq\varepsilon(1-\mu)^2\|u\|^2+\frac{1}{\varepsilon}\left\|\tilde{A}_{p,\mu}^{\pm}u\right\|^2.$$

Выбирая в последнем неравенстве число $\varepsilon>0$ достаточно малым, получим неравенство (2.1.15).

Следствие 2.1.2. При выполнении условий леммы 2.1.1 для любого $s_0\in R^1$ и любой функции $u(t)\in C_0^{\infty}(R_+^1)$ справедлива оценка

$$\|u\|^2\leq c(\left\|\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2\mp$$

$$\mp\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2\mp(1-\mu)|u(0)|^2+\|u,|p|\|_{s_0,\alpha,|\xi|}^2), \qquad (2.1.24)$$

где $\mu\in[0,1], r=1,2,...,$ постоянная $c>0$ не зависит от $p,r,\mu,\ \xi,u$.

Для доказательства достаточно почленно сложить неравенства (2.1.8) и (2.1.15) и воспользоваться неравенством $\mu^2 + (1-\mu)^2 \ge \frac{1}{2}$, справедливым при $\mu \in [0,1]$.

Следствие 2.1.3. Пусть выполнены условия леммы 2.1.1. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ при $r_1 \ge r_2$, где $r_2 > 0$ - достаточно большое число, справедливы оценки

$$\frac{1}{r^2}(|p|^2+|\xi|^2)^{2r_0}\|u\|^2 + \frac{\mu}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0+\frac{q}{2}}\|u\|^2 + \frac{1}{r}(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}\|u\|^2 \le$$
$$\le c_1(\|\tilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\|^2 \mp \frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}|u(0)|^2), \tag{2.1.25}$$

$$\frac{1}{r}(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}\|u\|^2 + \mu(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\|u\|^2 + (1-\mu)^2\|u\|^2 \le$$
$$\le c_2(\|\tilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\|^2 \mp (1-\mu)|u(0)|^2), \tag{2.1.26}$$

где постоянные $c_1 > 0,\ c_2 > 0$ не зависят от $\mu \in [0,1],\ r = 1,2,...,\ \xi \in R^{n-1},\ u(t)$.

Доказательство. Умножим (2.1.7) в $L_2(R_+^1)$ на функцию $\pm\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^l u(t)$, получим

$$(\tilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u, \pm\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^l u(t)) = (\frac{1}{r}\Lambda_\pm^{2r_o}(p,\xi,D_{\alpha,t})u +$$
$$+\mu K_\pm^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u \pm (1-\mu)u - \partial_t u \pm r_1 u, \pm\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^l u(t)),$$

Из (2.1.4) и равенства (3) получим оценку

$$\pm\frac{1}{r^2}\mathrm{Re}(\Lambda_\pm^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u,(|p|^2+|\xi|^2)^l u) \ge c\frac{1}{r^2}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0+l}\|u\|^2.$$

Повторяя доказательство леммы 2.1.2, выводим оценку

$$\frac{1}{r^2}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0+l}\|u\|^2 + \mu\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{l+\frac{q}{2}}\|u\|^2 + \frac{1}{r}(1-\mu)(1+|\xi|^2)^l\|u\|^2 +$$
$$+\frac{1}{r}r_1(|p|^2+|\xi|^2)^l\|u\|^2 \le c(\|\tilde{A}^{\pm,r_1}_{p,\mu}u\|^2 \mp \frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^l|u(0)|^2 + \mu\frac{1}{r}\|u,|p|\|_{s_0,\alpha,|\xi|}).$$

Так как $s_0 \in R^1$ - произвольное число, то выбирая $s_0 = 0$, получим из последнего неравенства оценку

$$\frac{1}{r^2}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0+l}\|u\|^2+\mu\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{l+\frac{q}{2}}\|u\|^2+\frac{1}{r}(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^l\|u\|^2+$$
$$+\frac{1}{r}r_1(1+|\xi|^2)^l\|u\|^2-c\mu\frac{1}{r}\|u\|^2\le c(\|\tilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}u\|^2\mp\frac{1}{r}(1+|\xi|^2)^l|u(0)|^2).$$

Учитывая, что $\mu\in[0,1]$ и выбирая $r_1\ge 2c$, получим из этой оценки оценку (2.1.25).

Умножим (2.1.7) скалярно в $L_2(R^1_+)$ на функцию $\pm(1-\mu)u(t)$, получим

$$\pm\frac{1-\mu}{r}\operatorname{Re}(\Lambda^{2r_0}_{\pm}(p,\xi,D_{\alpha,t})u,u)\pm\mu(1-\mu)\operatorname{Re}(K^{(q)}_{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,u)+$$
$$+(1-\mu)^2\|u\|^2\mp(1-\mu)\operatorname{Re}(\partial_t u,u)+(1-\mu)r_1\operatorname{Re}(u,u)=$$
$$=\pm(1-\mu)\operatorname{Re}(\tilde{A}^{\pm,r_1}_{p,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u,u).$$

Из (2.1.4) и равенства (3) получим оценку

$$\pm\frac{1-\mu}{r}\operatorname{Re}(\Lambda^{2r_0}_{\pm}(p,\xi,D_{\alpha,t})u,u)\ge c\frac{1-\mu}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}\|u\|^2.$$

Повторяя доказательство леммы 2.1.2, выводим оценку

$$\frac{1-\mu}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}\|u\|^2+\mu(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\|u\|^2+(1-\mu)^2\|u\|^2+$$
$$+(1-\mu)r_1\|u\|^2\le c(\|\tilde{A}^{\pm,r_1}_{p,\mu}u\|^2\mp(1-\mu)|u(0)|^2+\mu(1-\mu)\|u,|p|\|_{s_0,\alpha,|\xi|}).$$

Так как $s_0 \in R^1$ - произвольное число, то выбирая $s_0 = 0$, получим из последнего неравенства оценку

$$\frac{1-\mu}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}\|u\|^2+\mu(1-\mu)(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\|u\|^2+(1-\mu)^2\|u\|^2+$$
$$+(1-\mu)r_1\|u\|^2-c\mu(1-\mu)\|u\|^2\le c(\|\tilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}u\|^2\mp(1-\mu)|u(0)|^2).$$

Учитывая, что $\mu\in[0,1]$ и выбирая $r_1\ge 2c$, получим из этой оценки оценку (2.1.26).

Следствие 2.1.4. При выполнении условий леммы 2.1.1 для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R_+^1)$ при $r_1\ge r_2$, где $r_2>0$ - достаточно большое число, справедлива оценка

$$\|u\|^2\le c(\|\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\|^2\mp\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2\mp(1-\mu)|u(0)|^2,$$

где $\mu\in[0,1], r=1,2,...,$ постоянная $c>0$ не зависит от r, p, μ, ξ, u.

Доказательство. Для доказательства достаточно почленно сложить неравенства (2.1.14) и (2.1.26) и воспользоваться неравенством $\mu^2+(1-\mu)^2\ge\dfrac{1}{2}$ при $\mu\in[0,1]$.

Лемма 2.1.3. Пусть $\mu\in[0,1], r=1,2,...,\ \xi\in R^{n-1}$. Пусть выполнено условие $1'$ и функции $\lambda_\pm(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию 2. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R_+^1)$ и любого $\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}&\frac{\mu}{r}\|u,|p|\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}+\mu^2\|u,|p|\|^2_{q,\alpha,|\xi|}+(1-\mu)\|u,|p|\|^2_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}\le\\ &\le\varepsilon\|\partial_t u\|^2+c(\varepsilon)(\|\tilde{A}_{p,\mu}^{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\|^2\mp\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2\mp\\ &\mp(1-\mu)|u(0)|^2)+\mu^2c_1\|u,|p|\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}.\end{aligned}\qquad(2.1.27)$$

Здесь постоянная $c(\varepsilon)>0$ не зависит от p, μ, ξ, u; постоянная $c_1>0$ не зависит от $\varepsilon, r, p, \mu, \xi, u$; $s_0\in R^1$ - любое число.

Доказательство. Умножим скалярно в $L_2(R_+^1)$ равенство (2.1.3) на функцию $\mu\Lambda_\pm^q(p,\xi,D_{\alpha,t})u$. Получим

$$\begin{aligned}&\frac{\mu}{r}\mathrm{Re}(\Lambda_\pm^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_\pm^q(p,\xi,D_{\alpha,t})u)+\\ &+\mu^2\,\mathrm{Re}(K_\pm^q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_\pm^q(p,\xi,D_{\alpha,t})u)+\\ &+\mu(1-\mu)\mathrm{Re}(u,\Lambda_\pm^q(p,\xi,D_{\alpha,t})u)-\mu\mathrm{Re}(\partial_t u,\Lambda_\pm^{(q)}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)=\\ &=\mu\mathrm{Re}(\tilde{A}_{p,\mu}^{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u,\Lambda_\pm^q(p,,\xi,D_{\alpha,t})u).\end{aligned}\qquad(2.1.28)$$

С помощью неравенства (2.1.25) и равенства (3) находим оценку

$$\frac{\mu}{r}\operatorname{Re}(\Lambda_{\pm}^{2r_0}u,\Lambda_{\pm}^{q}u)\pm\mu(1-\mu)\operatorname{Re}(u,\Lambda_{\pm}^{q}u)\geq$$
$$\geq c(\frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}+\mu(1-\mu)\left\|u,|p|\right\|^2_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}). \qquad (2.1.29)$$

Если обозначить через $M^{\pm}_{1,\frac{q}{2}}$ коммутатор операторов ∂_t и $\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})$, то с помощью теорем 5 и 6 получим

$$\mu\operatorname{Re}(\partial_t u,\Lambda_{\pm}^{q}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)=\mp\frac{1}{2}\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|-\mu\operatorname{Re}(M^{\pm}_{1,\frac{q}{2}}u,\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}u). \qquad (2.1.30)$$

Используя теорему 1.2.1, получим

$$\mu^2\operatorname{Re}(K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{q}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)=\mu^2\operatorname{Re}(\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,$$
$$\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)=\mu^2\operatorname{Re}(K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)+$$
$$+\mu^2\operatorname{Re}(K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})u),$$

где $K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ - коммутатор операторов $K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ и $\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})$. В силу теоремы 1.2.1 $K_1(t,\xi,D_{\alpha,t})$ - есть весовой псевдодифференциальный оператор с символом из класса $S_{\alpha,p}^{\frac{3}{2}q-1}(\Omega)$.

Используя в последнем равенстве теорему 1.6.8, получим

$$\mu^2\operatorname{Re}(K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{q}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)\geq\mu^2 c\left\|u,|p|\right\|^2_{q,\alpha,|\xi|}-$$
$$-c_1\mu^2\left\|u,|p|\right\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}-\mu^2\left|(K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)\right|. \qquad (2.1.31)$$

Используя (2.1.29) – (2.1.31) в левой части равенства (2.1.20), получим оценку

$$\frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}+\mu(1-\mu)\left\|u,|p|\right\|^2_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}+\mu^2\left\|u,|p|\right\|^2_{q,\alpha,|\xi|}\leq$$
$$\leq c(\mu\left|(\tilde{A}^{\pm}_{p,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{q}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)\right|\mp\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2+ \qquad (2.1.32)$$
$$+\mu\left|(M^{\pm}_{1,\frac{q}{2}}u,\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}u)\right|+\mu^2\left|(K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)\right|.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, выводим с помощью теоремы 3 и неравенства $(\varepsilon\eta)^{j_1} \le (\varepsilon\eta)^{j_2} + c$, где $0 < j_1 < j_2$, $\eta \in R^1$, следующую оценку

$$\mu\left|(M^{\pm}_{1,\frac{q}{2}}u, \Lambda^{\frac{q}{2}}_{\pm}u)\right| \le \varepsilon(\|\partial_t u\|^2 + \mu^2\|u,|p|\|^2_{q,\alpha,|\xi|}) + c(\varepsilon)\mu^2\|u\|^2. \qquad (2.1.33)$$

Здесь $\varepsilon > 0, c > 0$ - некоторые константы.

Так как символ весового псевдодифференциального оператора $K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^{\frac{3}{2}q-1}_{\alpha,p}(\Omega)$, то используя теорему 1.3.2 и неравенство Коши - Буняковского, получим

$$\mu^2\left|(K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u, \Lambda^{\frac{q}{2}}_{\pm}(p,\xi,D_{\alpha,t})u\right| \le \varepsilon\mu^2\|u,|p|\|^2_{q,\alpha,|\xi|} +$$
$$+\frac{\mu^2}{\varepsilon}\|K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u\|^2_{-\frac{q}{2},\alpha,|\xi|} \le \varepsilon\mu^2\|u,|p|\|^2_{q,\alpha,|\xi|} + \qquad (2.1.34)$$
$$+\frac{c\mu^2}{\varepsilon}\|u,|p|\|^2_{q-1,\alpha,|\xi|} \le \mu^2\varepsilon_1\|u,|p|\|^2_{q,\alpha,|\xi|} + c(\varepsilon_1)\mu^2\|u\|^2.$$

С помощью неравенства Коши - Буняковского, получим

$$\mu\left|(\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u, \Lambda^{q}_{\pm}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)\right| \le \varepsilon\mu^2\|u,|p|\|^2_{q,\alpha,|\xi|} + \frac{1}{\varepsilon}\|\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}u\|^2.$$

Используя неравенства (2.1.33) – (2.1.34) выводим из (2.1.32) неравенство (2.1.27).

Следствие 2.1.5. Пусть выполнены условия леммы 2.1.3. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^{\infty}(R^1_+)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ при $r_1 \ge r_2$, где $r_2 > 0$ - достаточно большое число, справедливо неравенство

$$\frac{\mu}{r}\|u,|p|\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|} + \mu^2\|u,|p|\|^2_{q,\alpha,|\xi|} + (1-\mu)\|u,|p|\|^2_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|} \le$$
$$\le \varepsilon\|\partial_t u\|^2 + c(\varepsilon)(\|A^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\|^2 \mp (1+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2 \mp (1-\mu)|u(0)|^2), \qquad (2.1.35)$$

где константа $c(\varepsilon) > 0$ не зависит от p, μ, ξ, u.

Доказательство. Умножим скалярно в $L_2(R^1_+)$ тождество (2.1.7) на функцию $\mu\Lambda^{q}_{\pm}(p,\xi,D_{\alpha,t})u$. Получим

$$\frac{\mu}{r}\operatorname{Re}(\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{q}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)+\mu^2\operatorname{Re}(K_{\pm}^{q}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{q}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)+$$
$$+\mu(1-\mu)\operatorname{Re}(u,\Lambda_{\pm}^{q}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)-\mu\operatorname{Re}(\partial_t u,\Lambda_{\pm}^{(q)}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)+$$
$$+\mu r_1\operatorname{Re}(u,\Lambda_{\pm}^{(q)}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)=\mu\operatorname{Re}(\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u,\Lambda_{\pm}^{q}(p,\xi,D_{\alpha,t})u).$$

С помощью неравенства (2.1.25) и равенства (3) находим оценку

$$\frac{\mu}{r}\operatorname{Re}(\Lambda_{\pm}^{2r_0}u,\Lambda_{\pm}^{q}u)\pm\mu(1-\mu)\operatorname{Re}(u,\Lambda_{\pm}^{q}u)\geq c(\frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}^2+\mu(1-\mu)\left\|u,|p|\right\|_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}^2).$$

Если обозначить через $M_{1,\frac{q}{2}}^{\pm}$ коммутатор операторов ∂_t и $\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})$, то с помощью теорем 5 и 6 получим

$$\mu\operatorname{Re}(\partial_t u,\Lambda_{\pm}^{q}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)=\mp\frac{1}{2}\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|-\mu\operatorname{Re}(M_{1,\frac{q}{2}}^{\pm}u,\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}u).$$

Используя теорему 1.2.1, получим

$$\mu^2\operatorname{Re}(K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{q}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)=\mu^2\operatorname{Re}(\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,$$
$$\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)=\mu^2\operatorname{Re}(K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)+$$
$$+\mu^2\operatorname{Re}(K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})u),$$

где $K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ - коммутатор операторов $K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ и $\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})$. В силу теоремы 1.2.1 $K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ - есть весовой псевдодифференциальный оператор с символом из класса $S_{\alpha,p}^{\frac{3}{2}q-1}(\Omega)$.

Используя в последнем равенстве теорему 1.6.8, получим

$$\mu^2\operatorname{Re}(K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{q}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)\geq\mu^2 c\left\|u,|p|\right\|_{q,\alpha,|\xi|}^2-c_1\mu^2\left\|u,|p|\right\|_{s_0,\alpha,|\xi|}^2-$$
$$-\mu^2\left|(K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{\frac{q}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)\right|.$$

Используя (2.1.29) – (2.1.31) в левой части равенства (2.1.28), получим оценку

$$\frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}+\mu(1-\mu)\left\|u,|p|\right\|^2_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}+\mu^2\left\|u,|p|\right\|^2_{q,\alpha,|\xi|}\le$$

$$\le c(\mu\left|(\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda^{q}_{\pm}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)\right|\mp\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2+$$

$$+\mu\left|(M^{\pm}_{1,\frac{q}{2}}u,\Lambda^{\frac{q}{2}}_{\pm}u)\right|+\mu^2\left|(K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda^{\frac{q}{2}}_{\pm}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)\right|.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получим с помощью теоремы 3 и неравенства $(\varepsilon\eta)^{j_1}\le(\varepsilon\eta)^{j_2}+c$, где $0<j_1<j_2$, $\eta\in R^1$, следующую оценку

$$\mu\left|(M^{\pm}_{1,\frac{q}{2}}u,\Lambda^{\frac{q}{2}}_{\pm}u)\right|\le\varepsilon(\|\partial_t u\|^2+\mu^2\left\|u,|p|\right\|^2_{q,\alpha,|\xi|})+c(\varepsilon)\mu^2\|u\|^2.$$

Здесь $\varepsilon>0, c(\varepsilon)>0$ - некоторые константы.

Так как символ весового псевдодифференциального оператора $K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^{\frac{3}{2}q-1}_{\alpha,p}(\Omega)$, то используя теорему 1.3.2 и неравенство Коши - Буняковского, получим

$$\mu^2\left|(K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda^{\frac{q}{2}}_{\pm}(p,\xi,D_{\alpha,t})u\right|\le\varepsilon\mu^2\left\|u,|p|\right\|^2_{q,\alpha,|\xi|}+$$

$$+\frac{\mu^2}{\varepsilon}\left\|K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,|p|\right\|^2_{-\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}\le\varepsilon\mu^2\left\|u,|p|\right\|^2_{q,\alpha,|\xi|}+$$

$$+\frac{c\mu^2}{\varepsilon}\left\|u,|p|\right\|^2_{q-1,\alpha,|\xi|}\le\mu^2\varepsilon_1\left\|u,|p|\right\|^2_{q,\alpha,|\xi|}+c(\varepsilon_1)\mu^2\|u\|^2.$$

С помощью неравенства Коши - Буняковского, получим оценку

$$\mu\left|(\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u,\Lambda^{q}_{\pm}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)\right|\le\varepsilon\mu^2\left\|u,|p|\right\|^2_{q,\alpha,|\xi|}+\frac{1}{\varepsilon}\left\|\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}u\right\|^2.$$

Аналогично доказательству леммы 2.1.3 для оператора $\tilde{A}^{\pm,r_1}_{p,\mu}$, определенного в (2.1.7), получим оценку

$$\frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}+\mu^2\left\|u,|p|\right\|^2_{q,\alpha,|\xi|}+(1-\mu)\left\|u,|p|\right\|^2_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}+$$

$$+\mu r_1\left\|u,|p|\right\|^2_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}\le\varepsilon\|\partial_t u\|^2+c(\varepsilon)(\left\|\tilde{A}^{\pm,r_1}_{p,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u,|p|\right\|^2\mp$$

$$\mp\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2\mp(1-\mu)|u(0)|^2)+\mu^2 c_1\left\|u,|p|\right\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|},$$

где $s_0 \in R^1$ - любое число.

Полагая $s_0 = 0$ и выбирая в этом неравенстве r_1 так, чтобы $r_1 \geq 2c_1$, получим искомую оценку (2.1.35).

Лемма 2.1.4. При выполнении условий леммы 2.1.3 для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ справедлива оценка

$$\frac{1}{r^2}\left\|u,|p|\right\|^2_{2r_0,\alpha,|\xi|} + \frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|} + \frac{1-\mu}{p}\left\|u,|p|\right\|^2_{r_0,\alpha,|\xi|} \leq$$

$$\leq \varepsilon\left\|\partial_t u\right\|^2 + c(\varepsilon)(\left\|\tilde{A}^{\pm}_{p,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\| \mp \frac{1}{r}(|p|^2 + |\xi|^2)^{r_0}|u(0)|^2 \mp \qquad (2.1.36)$$

$$\mp\mu(|p|^2 + |\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2 \mp (1-\mu)|u(0)|^2) + c_1\frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}.$$

Доказательство. Умножим скалярно в $L_2(R_+^1)$ тождество (2.1.3) на функцию $\frac{1}{r}\Lambda_\pm^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u(t)$, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\mathrm{Re}(\Lambda_\pm^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u, \Lambda_\pm^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u) + \\
&+\frac{\mu}{r}\mathrm{Re}(K_\pm^{q}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u, \Lambda_\pm^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u) + \\
&+\frac{1}{r}(1-\mu)\mathrm{Re}(u, \Lambda_\pm^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u) - \frac{1}{r}\mathrm{Re}(\partial_t u, \Lambda_\pm^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u) = \\
&= \frac{1}{r}\mathrm{Re}(\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u, \Lambda_\pm^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u).
\end{aligned} \qquad (2.1.37)$$

С помощью неравенства (2.1.25) и равенства (3) находим оценку

$$\frac{1}{r^2}\mathrm{Re}(\Lambda_\pm^{2r_0}u, \Lambda_\pm^{2r_0}u) \pm \frac{1}{r}(1-\mu)\mathrm{Re}(u, \Lambda_\pm^{2r_0}u) \geq c(\frac{1}{r^2}\left\|u,|p|\right\|^2_{2r_0,\alpha,|\xi|} + \frac{1}{r}(1-\mu)\left\|u,|p|\right\|^2_{r_0,\alpha,|\xi|}).$$

Если обозначить через $M^{\pm}_{1,\frac{q}{2}}$ коммутатор операторов ∂_t и $\Lambda_\pm^{\frac{q}{2}}(p,\xi,D_{\alpha,t})$, то с помощью теорем 5 и 6 получим

$$\frac{1}{r}\mathrm{Re}(\partial_t u, \Lambda_\pm^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u) = \mp\frac{1}{2}\frac{1}{r}(|p|^2 + |\xi|^2)^{r_0}|u(0)| - \frac{1}{r}\mathrm{Re}(M^{\pm}_{1,r_0}u, \Lambda_\pm^{r_0}u).$$

Используя теорему 1.2.1, получим

$$\frac{\mu}{r}\mathrm{Re}(K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)=$$

$$=\frac{\mu}{r}\mathrm{Re}(\Lambda_{\pm}^{r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)=$$

$$=\frac{\mu}{r}\mathrm{Re}(K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})\Lambda_{\pm}^{r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)+$$

$$+\frac{\mu}{r}\mathrm{Re}(K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u),$$

где $K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ - коммутатор операторов $K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ и $\Lambda_{\pm}^{r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})$. В силу теоремы 1.2.1 $K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ - есть весовой псевдодифференциальный оператор с символом из класса $S_{\alpha,p}^{\frac{3}{2}q-1}(\Omega)$.

Используя в последнем равенстве теорему 1.6.8, получим

$$\frac{\mu}{r}\mathrm{Re}(K_{\pm}^{(q)}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)\geq\frac{\mu}{r}c\left\|u,|p|\right\|_{2r_0,\alpha,|\xi|}^2-c_1\frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|_{s_0,\alpha,|\xi|}^2-$$

$$-\frac{\mu}{r}\left|(K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)\right|.$$

Используя последние неравенства в левой части равенства (2.1.37), получим оценку

$$\frac{1}{r^2}\left\|u,|p|\right\|_{2r_0,\alpha,|\xi|}^2+\frac{1}{r}(1-\mu)\left\|u,|p|\right\|_{r_0,\alpha,|\xi|}^2+\frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}^2\leq$$

$$\leq c(\frac{1}{r}\left|(\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)\right|\mp\frac{1}{r}(1+|\xi|^2)^{r_0}|u(0)|^2+$$

$$+\frac{1}{r}\left|(M_{1,r_0}^{\pm}u,\Lambda_{\pm}^{r_0}u)\right|+\frac{\mu}{r}\left|(K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)\right|.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получим с помощью теоремы 3 и неравенства $(\varepsilon\eta)^{j_1}\leq(\varepsilon\eta)^{j_2}+c$, где $0<j_1<j_2$, $\eta\in R^1$, оценку

$$\frac{1}{r}\left|(M_{1,r_0}^{\pm}u,\Lambda_{\pm}^{r_0}u)\right|\leq\varepsilon(\left\|\partial_t u\right\|^2+\frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|_{q,\alpha,|\xi|}^2)+c(\varepsilon)\frac{\mu}{r}\left\|u\right\|^2.$$

Здесь $\varepsilon>0,c(\varepsilon)>0$ - некоторые константы.

Так как символ весового псевдодифференциального оператора $K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S_{\alpha,p}^{\frac{3}{2}q-1}(\Omega)$, то используя теорему 1.3.2 и неравенство Коши - Буняковского, получим

$$\frac{\mu}{r}\left|(K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,\Lambda_{\pm}^{r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u\right| \le \varepsilon\frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|_{2r_0,\alpha,|\xi|}^2 +$$
$$+\frac{\mu}{\varepsilon r}\left\|K_1(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,|p|\right\|_{-r_0,\alpha,|\xi|}^2 \le \varepsilon\frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|_{2r_0,\alpha,|\xi|}^2 +$$
$$+\frac{c\mu}{\varepsilon r}\left\|u,|p|\right\|_{2r_0-1,\alpha,|\xi|}^2 \le \varepsilon_1\frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|_{2r_0,\alpha,|\xi|}^2 + c(\varepsilon_1)\frac{\mu}{r}\|u\|^2.$$

С помощью неравенства Коши - Буняковского, выводим оценку

$$\frac{1}{r}\left|(\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u,\Lambda_{\pm}^{2r_0}(p,\xi,D_{\alpha,t})u)\right| \le \varepsilon\frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|_{2r_0,\alpha,|\xi|}^2 + \frac{1}{\varepsilon r}\left\|\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm}u\right\|^2.$$

Повторяя доказательство леммы 2.1.3, получим оценку (2.1.36).

Следствие 2.1.6. Пусть выполнены условия леммы 2.1.3. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^{\infty}(R_+^1)$ и любого числа $\varepsilon>0$ при $r_1\ge r_2$, где $r_2>0$ - достаточно большое число, справедливо неравенство

$$\frac{1}{r^2}\left\|u,|p|\right\|_{2r_0,\alpha,|\xi|}^2 + \frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}^2 + \frac{1-\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|_{r_0,\alpha,|\xi|}^2 \le$$
$$\le \varepsilon\|\partial_t u\|^2 + c(\varepsilon)(\left\|\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \mp \frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}|u(0)|^2 \mp \tag{2.1.38}$$
$$\mp\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2 \mp (1-\mu)|u(0)|^2).$$

Доказательство следствия 2.1.6 аналогично доказательству следствия 2.1.4.

Лемма 2.1.5. Пусть выполнены условия леммы 2.1.3. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^{\infty}(R_+^1)$ справедлива оценка

$$\|\partial_t u\|^2 \le c\{\left\|\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \mp \mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2 \mp$$
$$\mp\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}|u(0)|^2 \mp (1-\mu)|u(0)|^2 + \left\|u,|p|\right\|_{s_0,\alpha,|\xi|}^2\cdot(\frac{\mu}{r}+\mu^2+(1-\mu)\mu)\}, \tag{2.1.39}$$

где константа $c>0$ не зависит от r, p, μ, ξ, u. Здесь $s_0\in R^1$ - любое число.

Доказательство. Из (2.1.5) получим оценку

$$\|\partial_t u\|^2 \le c(\|\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\| + \frac{1}{r}\|u,|p|\|_{2r_0,\alpha,|\xi|} + \mu\|u,|p|\|_{q,\alpha,|\xi|} + (1-\mu)\|u\|) . \quad (2.1.40)$$

Применяя в правой части этого неравенства оценки (2.1.31), (2.1.27), (2.1.24) и выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получим неравенство (2.1.39).

Следствие 2.1.7. Пусть выполнены условия леммы 2.1.3. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ при $r_1 \ge r_2$, где $r_2 > 0$ - достаточно большое число, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} &\|\partial_t u\|^2 \le c(\|\tilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\|^2 \mp \mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2 \mp \\ &\mp \frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}|u(0)|^2 \mp (1-\mu)|u(0)|^2). \end{aligned} \quad (2.1.41)$$

Доказательство. Из (2.1.7) получим оценку

$$\begin{aligned} &\|\partial_t u\| \le c(\|\tilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\| + \frac{1}{r}\|u,|p|\|_{2r_0,\alpha,|\xi|} + \mu\|u,|p|\|_{q,\alpha,|\xi|} + \\ &+(1-\mu)\|u\| + r_1\|u\|). \end{aligned}$$

Применяя в правой части этого неравенства следствия 2.1.3 – 2.1.7 и выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, получим оценку (2.1.41).

Лемма 2.1.6. Пусть $s = 1,2,...,$ $\mu \in [0,1]$, $r = 1,2,...,$ $\xi \in R^{n-1}$ $p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$. Пусть выполнено условие $1'$. Пусть функции $\lambda_\pm(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию 2. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ справедливы формулы представления

$$\begin{aligned} &\partial_t^s u(0) = \tilde{\beta}^s_\pm(r,p,\mu,\xi)u(0) - \sum_{j=0}^{s-1}\tilde{\beta}^j_\pm(r,p,\mu,\xi)\partial_t^{s-j-1}\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}u\big|_{t=0} + \\ &+\sum_{j=0}^{s-2}\tilde{\beta}^j_\pm(r,p,\mu,\xi)(\frac{1}{r}M^{\pm}_{s-j-1,2r_0}u\big|_{t=0} + \mu M^{\pm}_{s-j-1,q}u\big|_{t=0}). \end{aligned} \quad (2.1.42)$$

$$\begin{aligned} &\partial_t^s u(0) = \tilde{\beta}^s_\pm(r,p,\mu,\xi)u(0) - \sum_{j=0}^{s-1}\tilde{\beta}^j_\pm(r,p,\mu,\xi)\partial_t^{s-j-1}\tilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}u\big|_{t=0} + \\ &+\sum_{j=0}^{s-2}\tilde{\beta}^j_\pm(r,p,\mu,\xi)(\frac{1}{r}M^{\pm}_{s-j-1,2r_0}u\big|_{t=0} + \mu M^{\pm}_{s-j-1,q}u\big|_{t=0}), \end{aligned} \quad (2.1.43)$$

где

$$\tilde{\beta}_{\pm}(r,p,\mu,\xi) = \pm\frac{1}{r}(|p|^2 + |\xi|^2)^{r_0} + \mu\lambda_{\pm}(p,0,\xi,0) \pm (1-\mu), \tag{2.1.44}$$

операторы $\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}$, $\tilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}$ определены в (2.1.3), (2.1.7), $M^{\pm}_{j,q}$- коммутатор операторов ∂_t^j и $K^{(q)}_{\pm}(t,\xi,D_{\alpha,t})$, $M^{\pm}_{j,2r_0}$- коммутатор операторов ∂_t^j и $\Lambda^{2r_0}(\xi,D_{\alpha,t})$.

Доказательство проведем методом математической индукции. При $s=1$ из тождества (2.1.3) находим

$$\partial_t u(0) = -\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu} u\big|_{t=0} + \mu K^{(q)}_{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u\big|_{t=0} +$$
$$+\frac{1}{r}\Lambda^{2r_0}_{\pm}(\xi,D_{\alpha,t})u\big|_{t=0} \pm (1-\mu)u(0).$$

Отсюда и из теоремы 5 получаем формулу (2.1.43) при $s=1$.

Предположим, что формула (2.1.43) справедлива при некотором $s_0 \ge 1$ и докажем справедливость (2.1.43) при $s = s_0+1$. Продифференцировав тождество (2.1.3) s_0 раз по $t>0$, получим

$$\partial_t^{s_0+1}u(0) = -\partial_t^{s_0}\tilde{A}^{\pm}_{p,\mu} u\big|_{t=0} + \mu K^{(q)}_{\pm}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})\partial_t^{s_0} u\big|_{t=0} +$$
$$+\frac{1}{r}\Lambda^{2r_0}_{\pm}(\xi,D_{\alpha,t})\partial_t^{s_0} u\big|_{t=0} \pm (1-\mu)\partial_t^{s_0}u(0) + \mu M^{\pm}_{s_0,q} u\big|_{t=0} + \frac{1}{r}M^{\pm}_{s_0,2r_0} u\big|_{t=0},$$

где $M^{\pm}_{s_0,q}$ ($M^{\pm}_{s_0,2r_0}$) коммутатор операторов $\partial_t^{s_0}$и $K^{(q)}_{\pm}$ ($\partial_t^{s_0}$ и $\Lambda^{2r_0}_{\pm}$).

Применив в правой части последнего равенства теорему 5, находим

$$\begin{aligned}\partial_t^{s_0+1}u(0) &= -\partial_t^{s_0}\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu} u\big|_{t=0} + \beta_{\pm}(r,p,\mu,\xi)\partial_t^{s_0} u\big|_{t=0} + \\ &+\mu M^{\pm}_{s_0,q} u\big|_{t=0} + \frac{1}{r}M^{\pm}_{s_0,2r_0} u\big|_{t=0},\end{aligned} \tag{2.1.45}$$

где функция $\beta_{\pm}(r,p,\mu,\xi)$ определена в (2.1.44).

Если во втором слагаемом правой части (2.1.45) использовать формулу (2.1.43), справедливую при $s=s_0$ по предположению индукции, то получим равенство (2.1.43) и для $s=s_0+1$.

Рассмотрим операторы

$$\Phi_{r,\mu}(\xi,D_{\alpha,t}) = \frac{1}{r}\Lambda^{2r_0}_{+}(\xi,D_{\alpha,t}) + \mu\Lambda^{q}_{+}(\xi,D_{\alpha,t}) + (1-\mu)I, \tag{2.1.46}$$

и обозначим

$$\Phi_{r,\mu}(\xi,0)=\varphi(r,\mu,\xi)I, \qquad (2.1.47)$$

$$\tilde{N}_{s,r,\mu,\xi}u=\{\sum_{l=1}^{[s/q]}\sum_{j=0}^{l}((\frac{1}{r^j})^2\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{s+2r_0j-ql,\alpha,|\xi|}+$$

$$+\mu^{2j}\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{s-q(l-j),\alpha,|\xi|}+(1-\mu)^{2j}\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|})\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.1.48)$$

Лемма 2.1.7. Пусть $s\geq q>1$ - действительное число $\mu\in[0,1]$, $r=1,2,...,$ $\xi\in R^{n-1}$, $p\in Q=\{p\in C, |\arg p|<\frac{\pi}{2}, |p|>0\}$ Пусть выполнено условие $1'$ и функции $\lambda_{\pm}(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию 2. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^{\infty}(R_+^1)$ и любого $\varepsilon>0$ справедливо неравенство

$$\sum_{l=1}^{[s/q]}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi(r,\mu,\xi)\left|\partial_t^l u(0)\right|^2\leq\varepsilon\tilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u+$$

$$+c(\varepsilon)\sum_{i=0}^{[s/q]}(\mu^2+\frac{1}{r^2})\left\|\partial_t^i u\right\|^2+c_1(\tilde{N}^2_{s,r,\mu,\xi}\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u+ \qquad (2.1.49)$$

$$+\sum_{l=1}^{[s/q]}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)|u(0)|^2),$$

где постоянная $c(\varepsilon)>0$ не зависит от r,p,μ,ξ,u, а постоянная $c>0$ не зависит от $\varepsilon,\ p,\ \mu,\ \xi,\ u$.

Здесь операторы $\varphi(r,\mu,\xi)$, $\tilde{N}_{s,r,\mu,\xi}$ определены в (2.1.47) – (2.1.48).

Доказательство. Используя лемму 2.1.3, получим оценку

$$\sum_{l=1}^{[s/q]}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi(r,p,\mu,\xi)\left|\partial_t^l u(0)\right|^2\leq$$

$$\leq c\sum_{l=1}^{[s/q]}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi(r,p,\mu,\xi)\{\left|\beta_{\pm}^{l}(r,\mu,\xi)\right|^2|u(0)|^2+$$

$$+\sum_{j=0}^{l-1}\left|\beta_{\pm}^{j}(r,\mu,\xi)\right|^2\left|\partial_t^{l-j-1}\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}u\Big|_{t=0}\right|^2+ \qquad (2.1.50)$$

$$+\sum_{j=0}^{l-2}\left|\beta_{\pm}^{j}(r,\mu,\xi)\right|^2(\left|\frac{1}{r}M^{\pm}_{l-j-1,2r_0}u\Big|_{t=0}\right|^2+\left|\mu M^{\pm}_{l-j-1,q}u\Big|_{t=0}\right|^2)\},$$

где операторы $M^{\pm}_{l-j-1,2r_0}$, $M^{\pm}_{l-j-1,q}$ определены в лемме 2.1.6.

С помощью теоремы 6 получим, что

$$\left|\frac{1}{r}M^{\pm}_{l-j-1,2r_0}\,u\big|_{t=0}\right|^2+\left|\mu M^{\pm}_{l-j-1,q}\,u\big|_{t=0}\right|^2=$$
$$=-2\,\mathrm{Re}(\frac{1}{r}\partial_t M^{\pm}_{l-j-1,2r_0}u,\frac{1}{r}M^{\pm}_{l-j-1,2r_0}u)-2\,\mathrm{Re}(\mu\partial_t M^{\pm}_{l-j-1,q}u,\mu M^{\pm}_{l-j-1,q}u), \tag{2.1.51}$$

$$\left|\partial_t^{l-j-1}\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}\,u\big|_{t=0}\right|^2=-2\,\mathrm{Re}(\partial_t^{l-j}\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}u,\partial_t^{l-j-1}\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}u). \tag{2.1.52}$$

Из (2.1.52) с помощью неравенства Коши - Буняковского получим неравенство

$$\sum_{l=1}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l-1}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi(r,\mu,\xi)\left|\beta^j_{\pm}(r,p,\mu,\xi)\right|^2\left|\partial_t^{l-j-1}\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}\,u\big|_{t=0}\right|^2\le$$
$$\le c\sum_{l=1}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l-1}\{(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2j}(r,p,\mu,\xi)\left\|\partial_t^{l-j}\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}u\right\|^2+ \tag{2.1.53}$$
$$+\varphi^{2j+1}(r,\mu,\xi)(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\left\|\partial_t^{l-j-1}\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}u\right\|^2\}\le$$
$$\le\tilde{N}^2_{s,r,\mu,\xi}\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u.$$

Аналогично, из (2.1.51) получим оценку

$$I\equiv\sum_{l=1}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l-1}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi(r,\mu,\xi)\left|\beta^j_{\pm}(r,\mu,\xi)\right|^2\cdot$$
$$\cdot(\left|\frac{1}{r}M^{\pm}_{l-j-1,2r_0}\,u\big|_{t=0}\right|^2+\left|\mu M^{\pm}_{l-j-1,q}\,u\big|_{t=0}\right|^2)\le$$

$$\le c\sum_{l=1}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l-1}\{\varphi^{2j}(r,\mu,\xi)(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}(\left\|\frac{1}{r}\partial_t M^{\pm}_{l-j-1,2r_0}u\right\|^2+\left\|\mu\partial_t M^{\pm}_{l-j-1,q}u\right\|^2)+$$
$$+\varphi^{2(j+1)}(r,\mu,\xi)(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}(\left\|\frac{1}{p}M^{\pm}_{l-j-1,2r_0}u\right\|^2+\left\|\mu M^{\pm}_{l-j-1,q}u\right\|^2)\}.$$

Учитывая, что $\partial_t M^{\pm}_{l-j-1,q}=M^{\pm}_{l-j,q}-M^{\pm}_{1,q}\partial_t^{l-j-1}$ и $\partial_t M^{\pm}_{l-j-1,2r_0}=M^{\pm}_{l-j,2r_0}-M^{\pm}_{1,2r_0}\partial_t^{l-j-1}$, выводим из последнего неравенства оценку

$$I \le c\sum_{l=1}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l-1}\{\left\|\frac{1}{r}\Phi^{j}_{r,\mu}(\xi,D_{\alpha,t})M^{\pm}_{l-j,2r_0}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|}+$$

$$+\left\|\frac{1}{r}\Phi^{j}_{r,\mu}M^{\pm}_{1,2r_0}\partial_t^{l-j-1}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|}+\left\|\mu\Phi^{j}_{r,\mu}M^{\pm}_{l-j,q}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|}+$$

$$+\left\|\mu\Phi^{j}_{r,\mu}M^{\pm}_{1,q}\partial_t^{l-j-1}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|}+\left\|\frac{1}{r}\Phi^{j+1}_{r,\mu}M^{\pm}_{l-j-1,2r_0}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|}+$$

$$+\left\|\mu\Phi^{j+1}_{r,\mu}M^{\pm}_{l-j-1,q}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|}\}.$$

Используя в этом неравенстве следствие 1.4.3, получим оценку

$$\sum_{l=1}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l-1}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi(r,\mu,\xi)\left|\beta^{j}_{\pm}(r,p,\mu,\xi)\right|^2\cdot$$

$$\cdot(\left|\frac{1}{r}M^{\pm}_{l-j-1,2r_0}u\big|_{t=0}\right|^2+\left|\mu M^{\pm}_{l-j-1,q}u\big|_{t=0}\right|^2)\le \tag{2.1.54}$$

$$\le \varepsilon\tilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u+c(\varepsilon)\sum_{i=1}^{[\frac{s}{q}]}(\frac{1}{r^2}+\mu^2)\left\|\partial_t^i u\right\|^2.$$

Применяя оценки (2.1.54) и (2.1.53) в правой части неравенства (2.1.50), выводим оценку (2.1.49).

2.2. Доказательство априорных оценок решений задачи Дирихле для вырождающихся псевдодифференциальных уравнений с переменным по t символом, зависящем от комплексного параметра

Лемма 2.2.1. Пусть $\mu\in[0,1]$, $r=1,2...$, $\xi\in R^{n-1}$, $s\ge 0$, $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\dfrac{\pi}{2},\ |p|>0\}$. Пусть выполнено

условие $1'$ и функции $\lambda_{\pm}(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию 2. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^{\infty}(R^1_+)$ справедливо неравенство

$$\tilde N^2_{q,r,\mu,\xi}u \le$$

$$\le c(\left\|\tilde A^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \mp \varphi(r,\mu,\xi)\left|u(0)\right|^2 + \quad (2.2.1)$$

$$+(\mu^2+\frac{\mu}{r}+\mu(1-\mu))\left\|u,|p|\right\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}),$$

где постоянная $c>0$ не зависит от $r, p, \mu, v, u(t), s_0 \in R^1$-любое действительное число.

Доказательство. Сложим почленно неравенства (2.1.27), (2.1.36), (2.1.39) , получим

$$\frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|} + \mu^2\left\|u,|p|\right\|^2_{q,\alpha,|\xi|} + (1-\mu)\left\|u,|p|\right\|^2_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|} + \frac{1}{r^2}\left\|u,|p|\right\|^2_{2r_0,\alpha,|\xi|} + \frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|} +$$

$$+\frac{1-\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|^2_{r_0,\alpha,|\xi|} + \left\|\partial_t u\right\|^2 \le c(\varepsilon)\{\left\|\tilde A^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \mp \mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}\left|u(0)\right|^2 \mp$$

$$\mp\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}\left|u(0)\right|^2 \mp (1-\mu)\left|u(0)\right|^2) + \mu^2 c_1\left\|u,|p|\right\|^2_{s_0,\alpha} +$$

$$+c_1\frac{\mu}{r}\left\|u,|p|\right\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|} + \left\|u,|p|\right\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}\cdot(\frac{\mu}{r}+\mu^2+(1-\mu)\mu)\}.$$

Выберем число $\varepsilon>0$ достаточно малым, получим

$$\tilde N^2_{q,r,\mu,\xi}u = \sum_{j=0}^{l}((\frac{1}{r^j})^2\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{q+2r_0j-ql,\alpha,|\xi|} + \mu^{2j}\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{q-q(l-j),\alpha,|\xi|} +$$

$$+(1-\mu)^{2j}\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{q-ql,\alpha,|\xi|}) \le c(\left\|\tilde A^{\pm}_{r,\mu}(t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2 \mp \varphi(r,\mu,\xi)\left|u(0)\right|^2 +$$

$$(\mu^2+\frac{\mu}{r}+\mu(1-\mu))\left\|u,|p|\right\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}.$$

Следствие 2.2.1. Пусть выполнены условия леммы 2.2.1. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R_+^1)$ при $r_1 \ge r_2$, где $r_2>0$ - достаточно большое число, справедливо неравенство

$$\tilde N^2_{q,r,\mu,\xi}u \le c\left(\left\|\tilde A^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)\right\|^2 \mp \varphi(r,\mu,\xi)\left|u(0)\right|^2\right), \qquad (2.2.2)$$

где постоянная $c>0$ не зависит от p, μ, v, u.

Доказательство. Сложим почленно неравенства (2.1.35), (2.1.38), (2.1.41) , получим

$$\frac{\mu}{r}\left\| u,|p|\right\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}+\mu^2\left\| u,|p|\right\|^2_{q,\alpha,|\xi|}+(1-\mu)\left\| u,|p|\right\|^2_{\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}+\frac{1}{r^2}\left\| u,|p|\right\|^2_{2r_0,\alpha,|\xi|}+\frac{\mu}{r}\left\| u,|p|\right\|^2_{r_0+\frac{q}{2},\alpha,|\xi|}+$$
$$+\frac{1-\mu}{r}\left\| u,|p|\right\|^2_{r_0,\alpha,|\xi|}+\left\|\partial_t u\right\|^2\le c(\varepsilon)\{\left\|\tilde{A}^{\pm,r_1}_{p,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2\mp\mu(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}|u(0)|^2\mp$$
$$\mp\frac{1}{r}(|p|^2+|\xi|^2)^{r_0}|u(0)|^2\mp(1-\mu)|u(0)|^2)\}$$

Выберем число $\varepsilon>0$ достаточно малым, получим

$$\tilde{N}^2_{q,r,\mu,\xi}u=\sum_{j=0}^{l}((\frac{1}{r^j})^2\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{q+2r_0j-ql,\alpha,|\xi|}+\mu^{2j}\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{q-q(l-j),\alpha,|\xi|}+$$
$$+(1-\mu)^{2j}\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{q-ql,\alpha,|\xi|})\le c\left(\left\|\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\right\|^2\mp\varphi(r,\mu,\xi)|u(0)|^2\right).$$

Лемма 2.2.2. При выполнении условий леммы 2.2.1 для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$ справедливо неравенство

$$\tilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u\le c\Big(\tilde{N}^2_{s,r,\mu,\xi}\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u\mp$$
$$\mp\sum_{l=1}^{[s/q]}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)|u(0)|^2+\sum_{l=0}^{[s/q]}\left\|\partial_t^l u,|p|\right\|^2_{s_1,\alpha,|\xi|}\Big),\tag{2.2.3}$$

где $s_1\in R^1$ - любое действительное число, $s\ge 0$ - действительное число.

Доказательство. Применим неравенство (2.2.1) к функции $\Lambda_{\pm}^{s-ql}(\xi,D_{\alpha,t})\Phi^j_{r,\mu}(\xi,D_{\alpha,t})\partial_t^{l-j}u(t)$, где операторы $\Lambda^{s-ql},\Phi_{r,\mu}$ определены соответственно в (2.1.4) и (2.1.45). Получим оценку

$$\sum_{l=1}^{[s/q]}\sum_{j=0}^{l}\{\left\|\Phi_{r,\mu}(\xi,D_{\alpha,t})\Lambda_+^{s-ql}(\xi,D_{\alpha,t})\Phi^j_{r,\mu}(\xi,D_{\alpha,t})\partial_t^{l-j}u\right\|^2+$$
$$+\left\|\partial_t\Lambda_+^{s-ql}(\xi,D_{\alpha,t})\Phi^j_{r,\mu}\partial_t^{l-j}u\right\|^2\}\le c\sum_{l=1}^{[s/q]}\sum_{j=0}^{l}\{\left\|\tilde{A}^{\pm}_{p,\mu}\Lambda_+^{s-ql}\Phi^j_{r,\mu}\partial_t^{l-j}u\right\|^2\mp$$
$$\mp\varphi(r,\mu,\xi)\left|\Lambda_+^{s-ql}\Phi^j_{r,\mu}\partial_t^{l-j}u\big|_{t=0}\right|^2+\tag{2.2.4}$$
$$+\sum_{l=1}^{[s/q]}\sum_{j=0}^{l}\mu\varphi(r,\mu,\xi)\left\|\Lambda_+^{s-ql}\Phi^j_{r,\mu}\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}\},$$

где $s_0\in R^1$ - любое число.

Прокоммутируем операторы $\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ и $\Lambda^{s-ql}_{+}\Phi^{j}_{r,\mu}\partial^{l-j}_{t}$, получим

$$\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}\Lambda^{s-ql}_{+}\Phi^{j}_{r,\mu}\partial^{l-j}_{t} =$$
$$= \Lambda^{s-ql}_{+}\Phi^{j}_{r,\mu}\left(\partial^{l-j}_{t}\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu} - \mu M^{\pm}_{l-j,q} - \frac{1}{r}M^{\pm}_{l-j,2r_0}\right) - \tilde{M}_{1,s-ql,j}\partial^{l-j}_{t}, \tag{2.2.5}$$

где $M^{\pm}_{j,q}$, $M^{\pm}_{j,2r_0}$, $\tilde{M}_{1,\,s-ql,\,j}$ коммутаторы соответственно операторов ∂^{j}_{t} и $K^{(q)}_{\pm}$; ∂^{j}_{t} и $\Lambda^{2r}_{\pm}$; ∂_t и $\Lambda^{s-ql}_{+}\Phi^{j}_{r,\mu}$.

Используя равенство

$$\left|\Lambda^{s-ql}_{+}\Phi^{j}_{r,\mu}\partial^{l-j}_{t}u\big|_{t=0}\right|^2 = (|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\left|\varphi^{j}(r,\mu,\xi)\partial^{l-j}_{t}u(0)\right|^2 \tag{2.2.6}$$

в правой части неравенства (2.2.4), получим неравенство

$$\begin{aligned}
&\tilde{N}^2_{s+q,p,\mu,\xi}u \le c\{\tilde{N}^2_{s,p,\mu,\xi}\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u +\\
&+\sum_{l=1}^{[s/q]}\sum_{j=0}^{l}(\mp(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)\left|\partial^{l-j}_{t}u(0)\right|^2 +\\
&+\left\|\tilde{M}_{1,s-ql,j}\partial^{l-j}_{t}u\right\|^2 + \mu^2\left\|\Phi^{j}_{r,\mu}M_{l-j,q}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|} +\\
&+\frac{1}{r^2}\left\|\Phi^{j}_{r,\mu}M^{\pm}_{l-j,2r_0}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|} + \mu\varphi(r,\mu,\xi)\left\|\Lambda^{s-ql}_{+}\Phi^{j}_{r,\mu}\partial^{l-j}_{t}u,|p|\right\|_{s-ql,\alpha,|\xi|}) +\\
&+\sum_{l=1}^{[sq^{-1}]}\sum_{j=0}^{l}\mu\varphi(r,\mu,\xi)\left\|\Lambda^{s-ql}\Phi^{j}_{r,\mu}\partial^{l-j}_{t}u,|p|\right\|_{s_0,\alpha,|\xi|}\}.
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Оценим нормы коммутаторов в правой части неравенства (2.2.7). С помощью следствия 1.4.3 получим оценку

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\left\|\Phi^{j}_{r,\mu}M^{\pm}_{l-j,2r_0}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|} \le\\
&\le \varepsilon\sum_{i=0}^{l-j}\frac{1}{r^2}\Big(\frac{1}{r^{2j}}\left\|\partial^{i}_{t}u,|p|\right\|^2_{s-ql+2r_0(j+1),\alpha,|\xi|} + \mu^{2j}\left\|\partial^{i}_{t}u,|p|\right\|^2_{s-q(l-j)+2r_0,\alpha,|\xi|} +\\
&+(1-\mu)^{2j}\left\|\partial^{i}_{t}u,|p|\right\|^2_{s-ql+2r_0,\alpha,|\xi|}\Big) + c(\varepsilon)\sum_{i=0}^{l-j}\Big(\frac{1}{r^2}+\mu^2+(1-\mu)^2\Big)\left\|\partial^{i}_{t}u\right\|^2,
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

где $\varepsilon > 0$ - любое число.

Аналогично оценке (2.2.8) выводим неравенство

$$\left\| M^{\pm}_{1,s-ql,j}\partial_t^{l-j}u\right\|^2 \le \varepsilon\sum_{i=0}^{1}\{\frac{1}{r^{2j}}\left\|\partial_t^{i+l-j}u,|p|\right\|^2_{s-ql+2r_0 j,\alpha,|\xi|}+$$

$$+\mu^{2j}\left\|\partial_t^{i+l-j}u,|p|\right\|^2_{s-q(l-j),\alpha,|\xi|}+(1-\mu)^{2j}\left\|\partial_t^{i+l-j}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|}\}+ \tag{2.2.9}$$

$$+c(\varepsilon)\sum_{i=0}^{1}(\frac{1}{r^2}+\mu^2+(1-\mu)^2)\left\|\partial_t^{i+l-j}u\right\|^2.$$

Используя теорему 1.4.2, выводим оценку

$$\mu^2\left\|\Phi^j_{r,\mu}M^{\pm}_{l-j,q}u,|p|\right\|^2_{s-ql,\alpha,|\xi|}\le \varepsilon\sum_{i=0}^{l-j}\mu^2\left(\frac{1}{r^{2j}}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-ql+2r_0(j+1),\alpha,|\xi|}+\right.$$

$$+\mu^{2j}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-q(l-j)+2r_0,\alpha,|\xi|}+(1-\mu)^{2j}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-ql+2r_0,\alpha,|\xi|})+$$

$$+c(\varepsilon)\sum_{i=0}^{l-j}(\mu^2+\frac{1}{r^2}+(1-\mu)^2)\left\|\partial_t^i u\right\|^2+c_1\sum_{i=0}^{l-j-1}\mu^2(\frac{1}{r^{2j}}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-ql+q+2r_0 j,\alpha,|\xi|}+ \tag{2.2.10}$$

$$\left.+\mu^{2j}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-q(l-j)+q,\alpha,|\xi|}+\left(1-\mu\right)^{2j}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-ql+q,\alpha,|\xi|}\right).$$

Применяя неравенства (2.2.8) - (2.2.10) в правой части неравенства (2.2.7), получим неравенство

$$\tilde N^2_{s+q,r,\mu,\xi}u\le\varepsilon\tilde N^2_{s+q,r,\mu,\xi}u+c(\varepsilon)\sum_{i=0}^{[\frac{s}{q}]+1}\left\|\partial_t^i u\right\|^2(\frac{1}{r^2}+\mu^2+(1-\mu)^2)+$$

$$+c(\tilde N^2_{s,r,\mu,\xi}A^{\pm}_{r,\mu}u\mp\sum_{l=1}^{[\frac{s}{q}]}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)|u(0)|^2+$$

$$+\sum_{l=1}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l}\sum_{i=0}^{l-j-1}\mu^2(\frac{1}{r^{2j}}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-ql+q+2r_0 j,\alpha,|\xi|}+\mu^{2j}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-q(l-j)+q,\alpha,|\xi|}+$$

$$+(1-\mu)^{2j}\left\|\partial_t^i u,|p|\right\|^2_{s-ql+q,\alpha,|\xi|}+\mu\varphi(r,\mu,\xi)\left\|\Lambda_+^{s-ql}\Phi^j_{r,\mu}\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{s_0,\alpha,|\xi|}).$$

Отсюда при $q>1$ выводим неравенство

$$\tilde N^2_{s+q,r,\mu,\xi}u\le\varepsilon\tilde N^2_{s+q,r,\mu,\xi}u+c(\varepsilon)\sum_{i=0}^{[\frac{s}{q}]+1}(\frac{1}{r^2}+\mu^2+(1-\mu)^2)\left\|\partial_t^i u\right\|^2+$$

$$+c_1(\tilde N^2_{s,r,\mu,\xi}\tilde A^{\pm}_{r,\mu}u\mp\sum_{l=1}^{[\frac{s}{q}]}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)|u(0)|^2+\tilde N^2_{s+q-1,r,\mu,\xi}u+$$

$$+\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]}\sum_{j=0}^{l}\mu\varphi(r,\mu,\xi)\left\|\partial_t^{l-j}u,|p|\right\|^2_{s_0+s+2r_0j-ql,\alpha,|\xi|}).$$

Применяя в последнем неравенстве неравенство Эрлинга – Ниренберга, получим оценку

$$\tilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u\le\varepsilon\tilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u+c(\varepsilon)\sum_{i=0}^{[\frac{s}{q}]+1}(\frac{1}{r^2}+\mu^2+(1-\mu)^2)\left\|\partial_t^iu\right\|^2+$$

$$+c_2(\tilde{N}^2_{s,r,\mu,\xi}\hat{A}^{\pm}_{r,\mu}u\mp\sum_{l=1}^{[\frac{s}{q}]}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)|u(0)|^2+\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]}\left\|\partial_t^lu,|p|\right\|^2_{s_0+s+(2r_0-q)l,\alpha,|\xi|}).$$

Обозначим $s_1=s_0+s+(2r_0-q)l$. Так как $s_0\in R^1$ произвольное число, то $s_1\in R^1$ - произвольное число.

Применяя для оценки $\left\|\partial_t^iu\right\|^2$неравенство Эрлинга - Ниренберга и выбирая в последнем неравенстве число $\varepsilon>0$ достаточно малым, получим оценку (2.2.3).

Следствие 2.2.2. Пусть выполнены условия леммы 2.2.1. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$ при $s\ge 0$ справедлива оценка

$$\tilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u\le c\{\tilde{N}^2_{s,r,\mu,\xi}\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}u\mp\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}|u(0)|^2+\|u\|^2\}.\qquad(2.2.11)$$

Доказательство.Согласно лемме 2.2.2 справедливо неравенство

$$\tilde{N}^2_{s+q,r,\mu,\xi}u\le c\Big(\tilde{N}^2_{s,r,\mu,\xi}\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u\mp$$

$$\mp\sum_{l=1}^{[s/q]}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)|u(0)|^2+\sum_{l=0}^{[s/q]}\left\|\partial_t^lu,|p|\right\|^2_{s_1,\alpha,|\xi|}\Big).$$

Возьмем $s_1=0$ и оценим выражение $\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]}\left\|\partial_t^lu\right\|^2$ с помощью неравенства Эрлинга – Ниренберга, в силу которого справедлива оценка

$\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]}\left\|\partial_t^lu\right\|^2\le\varepsilon\left\|\partial_t^{[\frac{s}{q}]+1}u\right\|^2+c(\varepsilon)\|u\|^2$. Получим

$$\tilde N^2_{s+q,r,\mu,\xi}u \le c\Big(\tilde N^2_{s,r,\mu,\xi}\tilde A^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u \mp$$

$$\mp\sum_{l=1}^{[s/q]}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)|u(0)|^2+\sum_{l=0}^{[s/q]}\left\|\partial_t^l u\right\|^2_{s_1,\alpha,|\xi|}\Big)\le$$

$$\le c\Big(\tilde N^2_{s,r,\mu,\xi}\tilde A^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u \mp\sum_{l=1}^{[s/q]}(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)|u(0)|^2)+$$

$$+\varepsilon\left\|\partial_t^{[\frac{s}{q}]+1}u\right\|^2+c(\varepsilon)\|u\|^2$$

Выбирая $\varepsilon>0$ достаточно малым, и, используя в полученном неравенстве оценку (2.2.1) при $s_0=0$, получим оценку (2.2.11).

Следствие 2.2.3. Пусть выполнены условия леммы 2.2.1. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$ при $r_1\ge r_2$, где $r_2>0$ - достаточно большое число, справедливо неравенство

$$\begin{gathered}\tilde N^2_{s+q,r,\mu,\xi}u\le c\{\tilde N^2_{s,r,\mu,\xi}A^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u\mp\\ \mp\sum_{l=1}^{[\frac{s}{q}]}\varphi^{2l+1}(r,\mu,\xi)(|p|^2+|\xi|^2)^{s-ql}|u(0)|^2\}.\end{gathered}\tag{2.2.12}$$

Здесь $s\ge0$ - действительное число.

Для доказательства достаточно применить неравенство (2.2.2) к функции $\Lambda_{\pm}^{s-ql}(\xi,D_{\alpha,t})\varPhi^j_{r,\mu}(\xi,D_{\alpha,t})\partial_t^{l-j}u$ и повторить доказательство леммы 2.2.2.

Следствие 2.2.4. Пусть выполнены условия леммы 2.2.1. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R^1_+)$ при $s\ge0$ справедлива оценка

$$\begin{gathered}\|u\|^2_{s+q,\alpha,q,|\xi|}\le c\{\left\|\tilde A^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u\right\|^2_{s,\alpha,q,|\xi|}\mp\\ \mp(|p|^2+|\xi|^2)^{s+\frac{q}{2}}|u(0)|^2+\|u\|^2\}.\end{gathered}\tag{2.2.13}$$

Здесь константа $c>0$ не зависит от ξ, u, t. Оператор $\tilde A^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)$ определен в (2.1.3).

Неравенство (2.2.13) вытекает из (2.2.2) при $\mu=1$, $r=+\infty$, если воспользоваться тождеством $\varphi(+\infty,1,\xi)=(1+|\xi|^2)^{\frac{q}{2}}$ и неравенством

$$c^{-1}\|u,|p|\|_{s,\alpha,q,|\xi|} \le \tilde{N}^2_{s,+\infty,1,\xi}u \le c\|u,|p|\|_{s,\alpha,q,|\xi|}.$$

Следствие 2.2.5. Пусть выполнены условия леммы 2.2.1. Тогда для любой функции $u(t)\in C_0^\infty(R_+^1)$ при $r_1 \ge r_2$, где $r_2 > 0$ - достаточно большое число, справедливо неравенство

$$\|u,|p|\|^2_{s+q,\alpha,q,|\xi|} \le c\{\|\tilde{A}^{\pm,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)u,|p|\|^2_{s,\alpha,q,|\xi|} \mp (|p|^2+|\xi|^2)^{s+\frac{q}{2}}|u(0)|^2\}, \quad (2.2.14)$$

где константа $c>0$ не зависит от $\xi,\ u,\ t,\ p$.

Утверждение следствия 2.2.5 вытекает из (2.2.12) при $\mu=1,\ r=+\infty$.

Доказательство теорем 10, 11, 12, 13. Так как множество $C_0^\infty(R_+^n)$ плотно в $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ ($s\ge 0$ - действительное число), то теоремы 10 и 11 достаточно доказать на функциях $v(x,t)\in C_0^\infty(R_+^n)$. Но тогда функция $u(\xi,t)=F_{x\to\xi}[v(x,t)]$ при всех $\xi\in R^{n-1}$ принадлежит по переменной t пространству $C_0^\infty(R_+^1)$. Таким образом, теоремы 10 и 11 вытекают из оценок (2.2.13).

Аналогично из оценок (2.2.14) вытекают утверждения теорем 12 и 13.

Доказательство теорем 14, 15. Так как множество $C_0^\infty(R_+^n)$ плотно в $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ ($s\ge 0$ - действительное число), то теоремы 14 и 15 достаточно доказать на функциях $v(x,t)\in C_0^\infty(R_+^n)$. В этом случае функция $u(\xi,t)=F_{x\to\xi}[v(x,t)]$ при всех $\xi\in R^{n-1}$ принадлежит по переменной t пространству $C_0^\infty(R_+^1)$. Воспользуемся оценкой (2.2.13), получим неравенство

$$\|u,|p|\|^2_{s+q,\alpha,q,|\xi|} - c\|u\|^2 \le c\{\|\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,|p|\|^2_{s,\alpha,q,|\xi|} \mp (|p|^2+|\xi|^2)^{s+\frac{q}{2}}|u(0)|^2\}.$$

или

$$\frac{1}{2}\|u,|p|\|^2_{s+q,\alpha,q,|\xi|} + (\frac{1}{2}\|u,|p|\|^2_{s+q,\alpha,q,|\xi|} - c\|u\|^2) \le c\{\|\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,|p|\|^2_{s,\alpha,q,|\xi|} \mp$$

$$\mp (|p|^2+|\xi|^2)^{s+\frac{q}{2}}|u(0)|^2\}.$$

Так как $p \in Q_{p_0}$, то $|p| > p_0$. Таким образом , из определения нормы в пространстве $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ следует, что существует такое число p_0, что при всех $|p| > p_0$ справедливо неравенство $\frac{1}{2}\|u,|p|\|^2_{s+q,\alpha,q,|\xi|} - c\|u\|^2 \geq 0$. Отсюда и из предыдущего неравенства получим, оценку

$$\|u,|p|\|^2_{s+q,\alpha,q,|\xi|} \leq c_1\{\|\tilde{A}^{\pm}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u,|p|\|^2_{s,\alpha,q,|\xi|} \mp (|p|^2 + |\xi|^2)^{s+\frac{q}{2}}|u(0)|^2\} ,$$

где константа $c_1 > 0$ не зависит от ξ, u, t, p.

Используя в этом неравенстве равенство Парсеваля и равенство (3), получим утверждения теорем 14 и 15.

ГЛАВА 3

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ВЕСОВОЙ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР, С ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ КОМПЛЕКСНОГО ПАРАМЕТРА, И ПРОИЗВОДНУЮ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПО ПЕРЕМЕННОЙ T

Рассмотрим в R_+^n задачи вида

$$\tilde{A}_r^{-,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v(x,t)=f(x,t), \tag{3.1}$$

$$v(x,t)\big|_{t=0}=0; \tag{3.2}$$

$$\tilde{A}_{rr}^{+,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v(x,t)=f(x,t), \tag{3.3}$$

где

$$\tilde{A}_r^{\pm,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)=F_{x\to\xi}[\tilde{A}_r^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)], \tag{3.4}$$

операторы $A_r^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)$ определены в (2.1.6), $2r_0\ge q>1$, r_0 - натуральное число.

Лемма 3.1. Пусть $s\ge 0,\ \mu\in[0,1],\ r=1,2,\dots$. $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\dfrac{\pi}{2},\ |p|>0\}$. Пусть выполнено условие 1' и функции $\lambda_\pm(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию 2. Тогда при $r_1\ge r_2$, где $r_2>0$ - достаточно большое число, для любой функции $v(x,t)\in\tilde{H}_{s+q}^{\alpha}(R_+^n)$, справедливо неравенство

$$N_{s+q,r,\mu}v\le c_1N_{s,r,\mu}\tilde{A}_{r,\mu}^{+,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v. \tag{3.5}$$

Если, кроме того, если $v(x,t)\big|_{t=0}=0$, то справедлива оценка

$$N_{s+q,r,\mu}v\le c_2N_{s,r,\mu}\tilde{A}_{r,\mu}^{-,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v, \tag{3.6}$$

где константы $c_1>0,\ c_2>0$ не зависят от $r,p,\ \mu,\ v$.

Здесь $\tilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)=F^{-1}_{\xi\to x}[\tilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)]$. (3.7)

Операторы $\tilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)$ определены в (2.1.7).

Введем оператор

$$N_{s,r,\mu}v=\left\{\int\limits_{R^{n-1}}\tilde{N}^2_{s,r,\mu,\xi}\,F_{x\to\xi}\left[v\left(x,t\right)\right]d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3.8)$$

где функционал $N_{s,r,\mu,\xi}$ определен в (2.1.48), $r=1,2,...$ и $\mu\in\left[0,1\right]$, $\xi\in R^{n-1}$.

Определение3.1. Обозначим через $\hat{H}^{\alpha}_{s}\left(R^n_+\right)$ пространство функций, для которых конечна норма (3.8) при $r=1,2,...$ и $\mu\in\left[0,1\right]$.

Доказательство леммы 3.1. По построению $\hat{H}^{\alpha}_{s}(R^n_+)\subset H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$. Так как $C^{\infty}_0(R^n_+)$ плотно в $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$, то $C^{\infty}_0(R^n_+)$ плотно в $\hat{H}^{\alpha}_{s}(R^n_+)$. Следовательно, оценки (3.5) и (3.6) вытекают из (2.2.12).

Теорема 3.1. Пусть выполнено условие 1' и функции $\lambda_{\pm}(\mathrm{p},t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию 2. Пусть $f(x,t)\in\hat{H}^{\alpha}_{s}(R^n_+)$ ($s\geq 0$ - действительное число). Тогда при $r_1\geq r_2$, где $r_2>0$ - достаточно большое число, существует единственное решение задачи (3.1)- (3.2) ((3.3)), принадлежащее $\hat{H}^{\alpha}_{s+q}(R^n_+)$. Для этого решения справедлива априорная оценка (3.6) ((3.5)) при $\mu=1$.

При доказательстве теоремы 3.1 мы будем использоватьследующую лемму о продолжении по параметру, доказательство которой содержится, например, в работе [52].

Лемма 3.2. Пусть $\tilde{A}_{\mu}$ - семейство линейных операторов, действующих из банахова пространства H'_1 в банахово пространство H'_0, с областью определения $D\subset H'_1$, не зависящей от параметра $\mu\in\tilde{Q}\subset R^n$. Пусть $\left\|\cdot\right\|'_{1,\mu}$; $\left\|\cdot\right\|'_{0,\mu}$ - нормы в пространствах H'_1, H'_0 соответственно, зависящие от параметра

$\mu \in \tilde{Q}$, эквивалентные при любых $\mu \in \tilde{Q}$. Предположим, что выполняется априорная оценка

$$\|u\|'_{1,\mu} \le c_1(\mu)\|\tilde{A}_\mu u\|'_{0,\mu} \tag{3.9}$$

при всех $\mu \in \tilde{Q}$, $u \in D$. Пусть также справедлива оценка

$$\left\|\left(\tilde{A}_\mu - \tilde{A}_\lambda\right)u\right\|'_{0,\mu} \le c_2(\mu,\lambda)\|u\|'_{1,\mu} \tag{3.10}$$

при всех $\lambda,\ \mu \in \tilde{Q}$, $u \in D$, причем, для любого $\mu \in \tilde{Q}$ существует число $\tilde{r} = \tilde{r}(\mu)$ такое, что $c_2(\mu,\lambda)c_1(\mu) < 1$ при всех $\lambda \in \tilde{Q}$, для которых $|\lambda - \mu| < \tilde{r}(\mu)$. Предположим, что при $\mu = \mu_0$ существует ограниченный обратный оператор $\hat{A}_{\mu_0}^{-1} : H'_0 \to H'_1$ и для $\mu^* \in \tilde{Q}$ существует конечная последовательность шаров $U_j = \left\{\lambda : |\mu_j - \lambda| \le \tilde{r}(\mu_j)\right\}$ с центрами в точках $\mu_j \in \tilde{Q}$, $j = 1,2,...,l$ таких, что $\mu_j \in U_{j-1}$, $\mu^* \in U_l$. Тогда существует ограниченный обратный оператор $\hat{A}_{\mu^*}^{-1} : H'_0 \to H'_1$.

Доказательство теоремы 3.1. Для доказательства достаточно проверить, что выполнены условия леммы 3.2. Из (2.1.7) получим, что $\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t) = \mu\tilde{A}_{r,1}^{\pm,r_1} + (1-\mu)\tilde{A}_{r,0}^{\pm,r_1}$, где $r = 1,2,...$, $\mu \in [0,1]$. Рассмотрим операторы $\hat{\tilde{A}}_{r,\mu}^{\pm,r_1}$ определяемые соответственно операторами $\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)$ $(r = 1,2,...,\ \mu \in [0,1])$ и областями определения $D(\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm,r_1}) = D^{\pm} \subset \hat{H}_{s+q}^{\alpha}(R_+^n)$, причем

$$D^- = \{v \in \hat{H}_{s+q}^{\alpha}(R_+^n),\ v(x,t)|_{t=0} = 0\},$$
$$D^+ = \{v \in \hat{H}_{s+q}^{\alpha}(R_+^n),\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\hat{\tilde{A}}_{r,\mu}^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v(x,t) = f(x,t),\ f(x,t) \in \hat{H}_s^{\alpha}(R_+^n). \tag{3.11}$$

Из леммы 3.1 получим оценку

$$\|v\|'_{1,\mu} \le c_1 \left\| \hat{\hat{A}}^{\pm,r_1}_{r,\mu} v \right\|'_{0,\mu}, \tag{3.12}$$

где константа $c_1 > 0$ не зависит от $p,\ \mu,\ v$;

$\|v\|'_{1,\mu} = N_{s+q,r,\mu} v,\ \|v\|'_{0,\mu} = N_{s,r,\mu} v.$

Заметим что

$\hat{\hat{A}}^{\pm,r_1}_{r,\lambda} - \hat{\hat{A}}^{\pm,r_1}_{r,\mu} = (\lambda-\mu) K^{(q)}_{\pm}(p,t,D_x,D_{\alpha,t}) \pm (\mu-\lambda)$.

Из этого равенства вытекает оценка

$$\left\| (\hat{\hat{A}}^{\pm,r_1}_{r,\lambda} - \hat{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}) v \right\|'_{0,\mu} \le c|\lambda-\mu| N_{s,r,\mu} \Lambda^q_{\pm}(\mathrm{p}, D_x, D_{\alpha,t}) v \le$$

$$\le \tilde{c}_1 |\lambda-\mu| N_{s+q,r,\mu} v = \tilde{c}_1 |\lambda-\mu| \|v\|'_{1,\mu}, \tag{3.13}$$

где постоянная $\tilde{c}_1 > 0$ не зависит от r, p, μ, λ, v.

Возьмем $\tilde{r} = \dfrac{1}{c_1 \tilde{c}_1}$. Тогда если $|\mu-\lambda| < \tilde{r}$, то $\tilde{c}_1 c_1 |\mu-\lambda| < 1$. Таким образом выполнены все условия леммы 3.2. Кроме того, число шагов, указанных в лемме 3.2 от $\mu = 0$ до $\mu = 1$ конечно.

Заметим далее, что из результатов работ [29], [30] вытекает однозначная разрешимость задач (3.11) при $\mu = 0$. Значит, в силу леммы 3.2 получим однозначную разрешимость задач (3.11) при $\mu = 1$, то есть однозначную разрешимость задач (3.1)- (3.2) и (3.3).

Следствие 3.1. При выполнении условий теоремы 3.1 решения задач (3.1)- (3.2) и (3.3) принадлежат пространству $H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$.

Это утверждение следует из оценок (3.5), (3.6) и неравенства $\|v\|_{s+q,\alpha,q} \le N_{s+q,r,1} v$.

Доказательство теорем 18 и 19. Заметим, что достаточно рассматривать однородное условие при $t = 0$.

Рассмотрим вначале случай, когда $f(x,t) \in H_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}(R_+^n)$. Из теоремы 3.1 следует существование и единственность решения $v_r(x,t)$ задач (3.1)-(3.2), для которого справедлива оценка (3.6) при $\mu = 1$.

Покажем, что последовательность $\{v_r(x,t)\}_{r=1}^{+\infty}$ фундаментальна в $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$. Имеем

$$
\begin{aligned}
0 = &\left\| (\tilde{A}_r^{-,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v_r - \tilde{A}_r^{-,r_1}v_l), |p| \right\|_{s,\alpha,q} \geq \\
\geq &\left\| \tilde{A}^{-,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)\left(v_r - v_l\right), |p| \right\|_{s,\alpha,q} - \\
-&\frac{1}{r}\left\| \Lambda_\pm^{2r_0}(\mathrm{p},D_x,D_{\alpha,t})v_r, |p| \right\|_{s,\alpha,q} - \frac{1}{l}\left\| \Lambda_\pm^{2r_0}(\mathrm{p},D_x,D_{\alpha,t})v_l, |p| \right\|_{s,\alpha,q},
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

где $\tilde{A}^{-,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t) = F_{\xi\to x}^{-1}[\tilde{A}^{-,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)]$, а оператор $\tilde{A}^{-,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)$ определен в (2.1.5).

Из (3.14) и теоремы 12 получим

$$
\left\| (v_r - v_l), |p| \right\|_{s+q,\alpha,q} \leq c\left(\frac{1}{r}\left\| v_r, |p| \right\|_{s+2r_0,\alpha,q} + \frac{1}{l}\left\| v_l, |p| \right\|_{s+2r_0,\alpha,q} \right). \tag{3.15}
$$

Применив в правой части (3.15) оценку (3.6) при $\mu = 1$ получим

$$
\begin{aligned}
&\left\| (v_r - v_l), |p| \right\|_{s+q,\alpha,q} \leq c\left(\frac{1}{r}N_{s+2r_0-q,r,1}f + \frac{1}{l}N_{s+2r_0-q,l,1}f \right) \leq \\
&\leq c_1\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{l} \right)\left\| f, |p| \right\|_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}.
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Из (3.16) получим фундаментальность последовательности $\{v_r(x,t)\}$ в $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$. Так как пространство $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ полное, то существует такая функция $v(x,t) \in H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$, что $v(x,t) = \lim\limits_{r\to+\infty} v_r(x,t)$ в $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$. Докажем, что построенная функция $v(x,t)$ является решением задачи (17) (при $G \equiv 0$), если $f(x,t) \in H_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}(R_+^n)$.

Функция $v(x,t)$, очевидно, удовлетворяет условиям (3.2). Покажем, что она удовлетворяет уравнению (15). Для этого достаточно показать, что $A_r^- v_r \to A^- v$ в $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ при $r \to +\infty$. С учетом (3.6) получим неравенство

$$
\begin{aligned}
&\left\|(A_r^- v_r - A^- v),|p|\right\|_{s,\alpha,q} \le \left\|A^-\left(v_r - v\right),|p|\right\|_{s,\alpha,q} + \\
&+\frac{1}{r}\left\|\Lambda_-^{2r_0}(\mathrm{p},D_x,D_{\alpha,t})v_r,|p|\right\|_{s,\alpha,q} \le c\{\left\|v_r - v,|p|\right\|_{s+q,\alpha,q} + \frac{1}{r}N_{s+2r_0,r,1}v_p\} \le \\
&\le c_1\{\left\|v_r - v,|p|\right\|_{s+q,\alpha,q} + \frac{1}{r}N_{s+2r_0-q,r,1}F\} \le \\
&\le c_2\{\left\|v_r - v,|p|\right\|_{s+q,\alpha,q} + \frac{1}{r}\left\|F,|p|\right\|_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}\},
\end{aligned}
\tag{3.17}
$$

где число $c_2 > 0$ не зависит от r.

Так как правая часть неравенства (3.17) стремится к нулю при $r \to +\infty$, то $A^-(D_x, D_{\alpha,t}, \partial_t)v = F$.

Таким образом, функция $v(x,t) \in H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ является решением задачи (15), (3.2) при $F(x,t) \in H_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}(R_+^n)$. Но так как пространство $H_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}(R_+^n)$ плотно вложено в пространство $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ при $2r_0 \ge q$, то в силу теоремы 12 получим, что существует единственное решение задачи (17) при любой функции $f(x,t) \in H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$.

Аналогично доказывается теорема 19.

Доказательство теорем 16 и 17. Заметим, что

$$
\tilde{A}^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v = \tilde{A}^{\pm}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v \pm r_1 v, \tag{3.18}
$$

где операторы $\tilde{A}^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)$ определены в (2.1.5)

$$
\begin{aligned}
&\tilde{A}^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t) = F^{-1}_{\xi\to x}[\tilde{A}^{\pm,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)], \\
&\tilde{A}^{\pm}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v = K_{\pm}^{(q)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v - \partial_t v.
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Из теоремы 16 следует, что существует единственное решение задачи (17) при $r_1 \ge r_2$, где $r_2 > 0$ - достаточно большое число. Обозначим через $R_{r_1}^-$ - оператор, обратный оператору, порожденному задачей (17).

$$R_{r_1}^-(F,G) = v,\ v(x,t)\big|_{t=0} = G(x). \tag{3.20}$$

Покажем, что оператор $R_{r_1}^-$ является правым регулятором задачи (15). Из (3.18) получим

$$\begin{aligned} &\tilde{A}^-(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)R_{r_1}^-(F,G) = \tilde{A}^{-,r_1}R_{r_1}^-(F,G) + r_1R_{r_1}^-(F,G) = \\ &= F(x,t) + r_1R_{r_1}^-(F,G), \end{aligned} \tag{3.21}$$

причем $R_{r_1}^-(F,G)\big|_{t=0} = G(x)$.

Из (3.21) и априорной оценки (19) следует, что построенный оператор R_r^- является правым регулятором задачи (15).

Так как для задачи (15) справедлива априорная оценка (19), то правый регулятор является и левым регулятором.

Аналогично доказывается теорема 17.

Аналогично лемме 3.1 доказывается следующее утверждение.

Лемма 3.3. Пусть $s \ge 0,\ \mu \in [0,1],\ r = 1,2,\dots$. $p \in Q_{p_0} = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > p_0 > 0\}$. Пусть выполнено условие 1' и функции $\lambda_\pm(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию 2. Тогда существует такое число p_0, что для всех $p \in Q_{p_0}$ для любой функции $v(x,t) \in \tilde{H}_{s+q}^{\alpha}(R_+^n)$, справедливо неравенство

$$N_{s+q,r,\mu}v \le c_1 N_{s,r,\mu}\tilde{A}_{r,\mu}^{+,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v. \tag{3.22}$$

Кроме того, справедлива оценка

$$N_{s+q,r,\mu}v \le c_2 N_{s,r,\mu}\tilde{A}_{r,\mu}^{-,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v, \tag{3.23}$$

где константы $c_1 > 0,\ c_2 > 0$ не зависят от r, p, μ, v.

$$\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t) = F_{\xi\to x}^{-1}[\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)]\ . \tag{3.24}$$

Операторы $\tilde{A}_{r,\mu}^{\pm,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)$ определены в (2.1.7).

Доказательство теорем 20, 21.

Заметим, что достаточно рассматривать однородное условие при $t=0$.

Рассмотрим операторы $\hat{\tilde{A}}^{\pm,r_1}_{r,\mu}$ определяемые соответственно операторами $\tilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)$ $(r=1,2,...,\ \mu\in[0,1])$ и областями определения $D(\tilde{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu})=D^{\pm}\subset\hat{H}^{\alpha}_{s+q}(R^n_+)$, причем

$$D^{-}=\{v\in\hat{H}^{\alpha}_{s+q}(R^n_+),\ v(x,t)\big|_{t=0}=0\},$$

$$D^{+}=\{v\in\hat{H}^{\alpha}_{s+q}(R^n_+),\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\hat{\tilde{A}}^{\pm,r_1}_{r,\mu}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v(x,t)=f(x,t),\ f(x,t)\in\hat{H}^{\alpha}_{s}(R^n_+). \tag{3.25}$$

Из леммы 3.3 получим оценку

$$\|v\|'_{1,\mu}\le c_1\left\|\hat{\tilde{A}}^{\pm,r_1}_{r,\mu}v\right\|'_{0,\mu}, \tag{3.26}$$

где константа $c_1>0$ не зависит от $p,\ \mu,\ v$;

$$\|v\|'_{1,\mu}=N_{s+q,r,\mu}v,\ \ \|v\|'_{0,\mu}=N_{s,r,\mu}v.$$

Заметим что

$$\hat{\tilde{A}}^{\pm,r_1}_{r,\lambda}-\hat{\tilde{A}}^{\pm,r_1}_{r,\mu}=(\lambda-\mu)K^{(q)}_{\pm}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})\pm(\mu-\lambda).$$

Из этого равенства вытекает оценка

$$\left\|(\hat{\tilde{A}}^{\pm,r_1}_{r,\lambda}-\hat{A}^{\pm,r_1}_{r,\mu})v\right\|'_{0,\mu}\le c|\lambda-\mu|N_{s,r,\mu}\Lambda^{q}_{\pm}(\mathrm{p},D_x,D_{\alpha,t})v\le$$

$$\le\tilde{c}_1|\lambda-\mu|N_{s+q,r,\mu}v=\tilde{c}_1|\lambda-\mu|\|v\|'_{1,\mu}, \tag{3.27}$$

где постоянная $\tilde{c}_1>0$ не зависит от r,p,μ,λ,v.

Возьмем $\tilde{r}=\dfrac{1}{c_1\tilde{c}_1}$. Тогда если $|\mu-\lambda|<\tilde{r}$, то $\tilde{c}_1c_1|\mu-\lambda|<1$. Таким образом выполнены все условия леммы 3.2. Кроме того, число шагов, указанных в лемме 3.2 от $\mu=0$ до $\mu=1$ конечно.

Так же, как при доказательстве теоремы 3.1 заметим, что из результатов работ [29], [30] вытекает однозначная разрешимость задач (3.25) при $\mu = 0$. Значит, в силу леммы 3.2 получим однозначную разрешимость задач (3.25) при $\mu = 1$, то есть однозначную разрешимость задач (3.1)- (3.2) и (3.3).

При этом решения задач (3.1)- (3.2) и (3.3) принадлежат пространству $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$. Это утверждение следует из оценок (3.22), (3.23) и неравенства $\|v\|_{s+q,\alpha,q} \le N_{s+q,r,1} v$.

Докажем вначале теорему 20. Рассмотрим вначале случай, когда $f(x,t) \in H_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}(R_+^n)$.Выше было доказано существование и единственность решений $v_r(x,t)$ задач (3.1)-(3.2) при r=1,2…, для которых справедливы оценки (3.23) при $\mu = 1$.

Покажем, что последовательность $\{v_r(x,t)\}_{r=1}^{+\infty}$ фундаментальна в $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$. Имеем

$$0 = \left\| (\tilde{A}_r^{-,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t) v_r - \tilde{A}_r^{-,r_1} v_l), |p| \right\|_{s,\alpha,q} \ge$$
$$\ge \left\| \tilde{A}^{-,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)\left(v_r - v_l\right), |p| \right\|_{s,\alpha,q} - \tag{3.28}$$
$$-\frac{1}{r}\left\| \Lambda_{\pm}^{2r_0}(\mathrm{p},D_x,D_{\alpha,t}) v_r, |p| \right\|_{s,\alpha,q} - \frac{1}{l}\left\| \Lambda_{\pm}^{2r_0}(\mathrm{p},D_x,D_{\alpha,t}) v_l, |p| \right\|_{s,\alpha,q},$$

где $\tilde{A}^{-,r_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t) = F_{\xi\to x}^{-1}[\tilde{A}^{-,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)]$, а оператор $\tilde{A}^{-,r_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)$ определен в (2.1.5).

Из (3.28) и теоремы 14 получим оценку

$$\left\| (v_r - v_l), |p| \right\|_{s+q,\alpha,q} \le c\left(\frac{1}{r}\left\| v_r, |p| \right\|_{s+2r_0,\alpha,q} + \frac{1}{l}\left\| v_l, |p| \right\|_{s+2r_0,\alpha,q} \right). \tag{3.29}$$

Применив в правой части (3.29) оценку (3.23) при $\mu = 1$ получим

$$\left\|(v_r - v_l),|p|\right\|_{s+q,\alpha,q} \le c\left(\frac{1}{r}N_{s+2r_0-q,r,1}f + \frac{1}{l}N_{s+2r_0-q,l,1}f\right) \le$$
$$\le c_1\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{l}\right)\left\|f,|p|\right\|_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}. \tag{3.30}$$

Из (3.30) получим фундаментальность последовательности $\{v_r(x,t)\}$в $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$. Так как пространство $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ - полное, то существует такая функция $v(x,t)\in H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$, что $v(x,t)=\lim\limits_{r\to+\infty}v_r(x,t)$ в $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$. Докажем, что построенная функция $v(x,t)$ является решением задачи (15) (при $G\equiv 0$), если $f(x,t)\in H_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}(R_+^n)$.

Функция $v(x,t)$, очевидно, удовлетворяет условиям (3.2). Покажем, что она удовлетворяет уравнению (15). Для этого достаточно показать, что $A_r^- v_r \to A^- v$ в $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ при $r\to+\infty$. С учетом (3.23) получим неравенство

$$\left\|(A_r^- v_r - A^- v),|p|\right\|_{s,\alpha,q} \le \left\|A^-\left(v_r - v\right),|p|\right\|_{s,\alpha,q} +$$
$$+\frac{1}{r}\left\|\Lambda_-^{2r_0}(\mathrm{p},D_x,D_{\alpha,t})v_r,|p|\right\|_{s,\alpha,q} \le c\{\left\|v_r - v,|p|\right\|_{s+q,\alpha,q} + \frac{1}{r}N_{s+2r_0,r,1}v_p\} \le$$
$$\le c_1\{\left\|v_r - v,|p|\right\|_{s+q,\alpha,q} + \frac{1}{r}N_{s+2r_0-q,r,1}F\} \le \tag{3.31}$$
$$\le c_2\{\left\|v_r - v,|p|\right\|_{s+q,\alpha,q} + \frac{1}{r}\left\|F,|p|\right\|_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}\},$$

где число $c_2>0$ не зависит от $r,\ p$.

Так как правая часть неравенства (3.31) стремится к нулю при $r\to+\infty$, то $A^-(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v=F$.

Таким образом, функция $v(x,t)\in H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ является решением задачи

(15), (3.2) при $F(x,t)\in H_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}(R_+^n)$. Но так как пространство

$H_{\frac{2r_0}{q}(s+2r_0-q),\alpha,q}(R_+^n)$ плотно вложено в пространство $H_{s+q,\alpha,q}(R_+^n)$ при $2r_0\ge q$, то в силу теоремы 14 получим, что существует единственное решение задачи (17) при любой функции $f(x,t) \in H_{s+q,\alpha,q}(R_{+}^{n})$.

Аналогично доказывается теорема 21.

ГЛАВА 4
АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ОБЩИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА, ЗАВИСЯЩИХ ОТ КОМПЛЕКСНОГО ПАРАМЕТРА

4.1. Вспомогательные оценки

Пусть $z_i(\mathrm{p},\mathrm{y},\xi,\eta)$ $(i=1,2,...,k)$ – z – корни уравнения (23). Тогда функции $\lambda_i(\mathrm{p},\mathrm{y},\xi,\eta)=z_i(\mathrm{p},\mathrm{y},\xi,\eta+\sqrt{-1}),\ i=1,...,k,$ удовлетворяют следующему условию.

Условие 4.1.1. Функции $\lambda_i(\mathrm{p},\mathrm{y},\xi,\eta)\in S^q_{\alpha,p}(\Omega),\ \Omega\subset\overline{R}^1_+$ и при всех $y\in\Omega,\ p\in Q,\ \ \xi\in R^{n-1},\ \ \eta\in R^1$ справедливы оценки

$$\operatorname{Re}\lambda_i(\mathrm{p},\mathrm{y},\xi,\eta)\le -c_1(|p|+|\xi|+|\eta|)^q,\ i=1,2,...,r_1; \tag{4.1.1}$$

$$\operatorname{Re}\lambda_i(\mathrm{p},\mathrm{y},\xi,\eta)\ge -c_2(|p|+|\xi|+|\eta|)^q,\ i=r_1+1,...,k \tag{4.1.2}$$

с постоянными $c_1>0,\ c_2>0$, не зависящими от p,y,ξ,η.

Рассмотрим операторы

$$\hat{Q}_i(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y)=(-1)^i\prod_{j=1}^{k-i}(\partial_y-\tilde{K}_j(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})),\ \ i=0,1,...,k-r_1. \tag{4.1.3}$$

$$\hat{Q}_i(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y)=(-1)^{k-r}\prod_{j=1}^{k-i}(\partial_y-\tilde{K}_j(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})),$$

$$i=k-r_1+1,...,k-1. \tag{4.1.4}$$

$$\hat{Q}_k(\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y)=I, \tag{4.1.5}$$

где $\tilde{K}_j(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})$ - весовые псевдодифференциальные операторы с символами $\lambda_j(\mathrm{p},\mathrm{y},\xi,\eta)$.

Следуя работе [42] определим скалярное произведение в $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ формулой

$$(v,w)_{s,\alpha}=(\tilde{\Lambda}^s(\mathrm{p},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})v,\tilde{\Lambda}^s(\mathrm{p},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})w), \tag{4.1.6}$$

где $(\cdot,\cdot)$ скалярное произведение в $L_2(R_+^n)$,

$\tilde{\Lambda}^s(\mathrm{p}, D_x, D_{\alpha,\mathrm{y}}) = F_{\xi\to x}^{-1} F_\alpha^{-1}[\{(|p|^2 + |\xi|^2)^{\frac{1}{2}} - i\eta\}^s F_{x\to\xi} F_\alpha[\cdot]]$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4.1.1. Пусть $s \in R^1,\ p \in Q,\ q > 1,\ l = 1,\dots, k - r_1$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = (\max\{0; s\} + \frac{1}{2})q$ и условие 4.1.1. Тогда при всех $v(x,\mathrm{y}) \in C_0^\infty(R_+^n)$ и любого $s_1 \in R^1$ справедлива оценка

$$
\begin{gathered}
c_1 \left\| \hat{Q}_l(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y)v, |p| \right\|^2_{(s+1)q,\alpha} \le \mathrm{Re}(\hat{Q}_{l-1}v, \hat{Q}_l v)_{(s+\frac{1}{2})q,\alpha} + \\
+\left|(M_{1,(s+\frac{1}{2})q} \hat{Q}_l v, \tilde{\Lambda}^{(s+\frac{1}{2})q} \hat{Q}_l v)\right| + c_2 \left\| v, |p| \right\|^2_{s_1,\alpha},
\end{gathered}
\tag{4.1.7}
$$

где постоянные $c_1 > 0, c_2 > 0$, не зависят от v. $M_{1,(s+\frac{1}{2})q}$ - коммутатор операторов ∂_t и $\tilde{\Lambda}^{(s+\frac{1}{2})q}$.

Доказательство. Обозначим $v_l = \hat{Q}_l v,\ l = 1,2,\dots,k - r_1$. По определению операторов $\hat{Q}_l$ получим

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Re}(\hat{Q}_{l-1}v, \hat{Q}_l v)_{(s+\frac{1}{2})q,\alpha} = -\mathrm{Re}(\partial_y v_l, v_l)_{(s+\frac{1}{2})q,\alpha} + \\
+\mathrm{Re}(\tilde{K}_{k-l+1}(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})v_l, v_l)_{(s+\frac{1}{2})q,\alpha},
\end{gathered}
\tag{4.1.8}
$$

где $\tilde{K}_{k-l+1}(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})$ - весовой псевдодифференциальный оператор с символом $\lambda_{k-l+1}(\mathrm{p},\mathrm{y},\xi,\eta)$. Из теоремы 9 получим, что для любого $s_1 \in R^1$, справедлива оценка

$$
\mathrm{Re}(\tilde{K}_{k-l+1}(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})v_l, v_l)_{(s+\frac{1}{2})q,\alpha} \ge c_1 \left\| v_l, |p| \right\|^2_{(s+1)q,\alpha} - c_2 \left\| v_l, |p| \right\|^2_{s_1,\alpha}.
$$

Применяя эту оценку в правой части равенства (4.1.8), получим неравенство (4.1.7).

Следствие 4.1.1. При выполнении условий леммы 4.1.1 для любой функции $v(x,\text{y}) \in C_0^\infty(R_+^n)$ и любых $s_1 \in R^1$, $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\left\|\hat{Q}_l v, |p|\right\|_{(s+1)q,\alpha} \le \varepsilon \left\|\partial_y \hat{Q}_l v, |p|\right\|_{sq,\alpha} + c(\varepsilon)\left\|\hat{Q}_l v, |p|\right\|_{(s+1)q-1,\alpha} + \\ + c_1(\left\|\hat{Q}_{l-1} v, |p|\right\|_{sq,\alpha} + \left\|v, |p|\right\|_{s_1,\alpha}), \tag{4.1.9}$$

где $c(\varepsilon) > 0,\ c_1 > 0$ - некоторые константы, не зависящие от v. Здесь $l = 1, ..., k - r_1;\ s_1 \in R^1$ - любое число.

Для доказательства достаточно воспользоваться в правой части неравенства (4.1.7) неравенством Коши –Буняковского.

Аналогично лемме 4.1.1 доказывается следующее утверждение.

Лемма 4.1.2. Пусть $s \in R^1,\ p \in Q,\ q > 1,\ l = k - r_1 + 1, ..., k$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = (\max\{0, s\} + \frac{1}{2})q$ и условие 2.1.2. Тогда при всех $v(x,\text{y}) \in C_0^\infty(R_+^n)$ и любого $s_1 \in R^1$ справедлива оценка

$$c_1\left\|\hat{Q}_l(\text{p},\text{y}, D_x, D_{\alpha,\text{y}}, \partial_y)v, |p|\right\|^2_{(s+1)q,\alpha} \le \operatorname{Re}(\hat{Q}_{l-1}v, \hat{Q}_l v) + \\ + \left|(M_{1,(s+\frac{1}{2})q}\hat{Q}_l v, \tilde{\Lambda}^{(s+\frac{1}{2})q}\hat{Q}_l v)\right| + \frac{1}{2}\left\|\hat{Q}_l\, v(x,\text{y})\big|_{y=0}, |p|\right\|^2_{(s+\frac{1}{2})q} + c_2\left\|v, |p|\right\|^2_{s_1,\alpha}, \tag{4.1.10}$$

где константы $c_1 > 0, c_2 > 0$ не зависят от v.

Следствие 2.1.2. При выполнении условий леммы 2.1.2 для любой $v(x,\text{y}) \in C_0^\infty(R_+^n)$ и любых $s_1 \in R^1$, $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\left\|\hat{Q}_l v, |p|\right\|_{(s+1)q,\alpha} \le \varepsilon \left\|\partial_t \hat{Q}_l v, |p|\right\|_{sq,\alpha} + c(\varepsilon)\left\|\hat{Q}_l v, |p|\right\|_{(s+1)q-1,\alpha} + \\ + c_1(\left\|\hat{Q}_{l-1} v, |p|\right\|_{sq,\alpha} + \left\|\hat{Q}_l\, v(x,t)\big|_{t=0}, |p|\right\|_{(s+\frac{1}{2})q} + \left\|v, |p|\right\|_{s_1,\alpha}) \tag{4.1.11}$$

с некоторыми константами $c_1 > 0, c(\varepsilon) > 0$, не зависящими от v.

Для доказательства достаточно в неравенстве (4.1.10) воспользоваться неравенством Коши - Буняковского и следствием 4.1.1.

Лемма 4.1.3. Пусть $q>1,\ s\in R^1,\ l=k-r_1+1,...,k-2,\ p\in Q$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma=q(k-l+\max(0;s))$ и условие 4.1.4. Тогда для всех функций $w(x,\mathrm{y})\in\Omega_{r_1}$ справедлива оценка

$$\left\|\hat{Q}_l\, w\big|_{t=0}, |p|\right\|_{(s+\frac{1}{2})q} \le c\Big(\sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i}\left\|\partial_t^{i_1} w, |p|\right\|_{(s+i+1)q-1,\alpha} + \\ +\sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i-1}\left\|\partial_t^{i_1} w, |p|\right\|_{(s+i+1)q,\alpha}\Big) \tag{4.1.12}$$

с постоянной $c>0$, не зависящей от w.

Здесь множество Ω_{r_1} описано в определении 6.

Доказательство. С помощью индукции по числу l получим, что для функций $w(x,\mathrm{y})\in H_{(|s|+1+k-l)q,\alpha,q}(R_+^n)$ справедливо равенство

$$\hat{Q}_l w(x,\mathrm{y})=\hat{Q}_{l,0}w(x,\mathrm{y})+\hat{Q}_{l,1}w(x,\mathrm{y}), \tag{4.1.13}$$

где $l=k-r_1+1,...,k$.

$$\hat{Q}_{l,0}=(-1)^{k-r}\partial_t^{k-l}+c_1\tilde{K}_1(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})\partial_y^{k-l-1}+ \\ +c_2\tilde{K}_1(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})\tilde{K}_2(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})\partial_y^{k-l-2}+....+ \\ +c_{kl}\tilde{K}_1(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})\cdot...\cdot\tilde{K}_{k-l}(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}}), \tag{4.1.14}$$

где c_i - некоторые числа, $\tilde{K}_j(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})$ - весовой псевдодифференциальный оператор с символом $\lambda_j(\mathrm{p},\mathrm{y},\xi,\eta)$. Оператор $\hat{Q}_{l,1}$ строится по рекуррентным формулам

$$\hat{Q}_{j-1,1}=(\partial_y-\tilde{K}_{k-j+1}(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}}))\hat{Q}_{j,1}+\hat{R}_j^1,\quad j=k-r_1+2,...,k-2. \tag{4.1.15}$$

$\hat{Q}_{k,1}=\hat{Q}_{k-1,1}=0,\ \hat{Q}_{k-2,1}=-M_1^1$,

где M_1^1 - коммутатор операторов ∂_y и $\tilde{K}_1(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})$,

$$\hat{R}_j^1=\tilde{c}_1M_1^1\partial_y^{k-j-1}+\tilde{c}_2M_1^{1,2}\partial_y^{k-j-2}+...+\tilde{c}_{k-l}M_1^{1,2,...,k-j}. \tag{4.1.16}$$

Здесь $\tilde{c}_i$ - некоторые константы. $M_1^{1,2,...,j}$ - коммутатор операторов ∂_y и $\tilde{K}_1(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})\tilde{K}_2(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})\cdot...\cdot\tilde{K}_j(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})$.

С помощью индукции по числу l докажем справедливость оценки

$$\sum_{i=0}^{1}\left\|\partial_y^i \hat{Q}_{l,1}w,|p|\right\|_{sq,\alpha} \le c(\sum_{i=0}^{k-l-2}\sum_{i_1=0}^{k-l-i}\left\|\partial_y^{i_1}w,|p|\right\|_{(s+i+1)q-1,\alpha} + \tag{4.1.17}$$
$$+\sum_{i=0}^{k-l-2}\sum_{i_1=0}^{k-l-1-i}\left\|\partial_y^{i_1}w,|p|\right\|_{(s+i+1)q,\alpha}).$$

Действительно, если $l=k-2$, то $\hat{Q}_{k-2,1}=-M_1^1$. Воспользовавшись равенством $\partial_t^i M_{j,s}=M_{i+j,s}-M_{i,s}\partial_t^j$, получим

$$\sum_{i=0}^{1}\left\|\partial_y^i \hat{Q}_{k-2,1}w,|p|\right\|_{sq,\alpha} = \sum_{i=0}^{1}\left\|\partial_y^i M_1^1 w,|p|\right\|_{sq,\alpha} \le \left\|M_1^1 w,|p|\right\|_{sq,\alpha} + \left\|\partial_y M_1^1 w,|p|\right\|_{sq,\alpha} \le$$
$$\le \left\|M_1^1 w,|p|\right\|_{sq,\alpha} + \left\|M_2^1 w,|p|\right\|_{sq,\alpha} + \left\|M_1^1\partial_y w,|p|\right\|_{sq,\alpha},$$

где M_2^1 - коммутатор операторов ∂_y^2 и $\tilde{K}_1(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})$.

Воспользуемся в последнем неравенстве теоремой 4. Получим

$$\sum_{i=0}^{1}\left\|\partial_y^i \hat{Q}_{k-2,1}w,|p|\right\|_{sq,\alpha} \le c(\sum_{i=0}^{1}\left\|\partial_y^i w,|p|\right\|_{sq+q-1,\alpha} + \left\|w,|p|\right\|_{sq+q,\alpha} +$$
$$+\sum_{i=0}^{2}\left\|\partial_y^i w,|p|\right\|_{sq+q-1,\alpha} + \sum_{i=0}^{1}\left\|\partial_y^i w,|p|\right\|_{sq+q,\alpha} + \sum_{i=0}^{1}\left\|\partial_y^{i+1} w,|p|\right\|_{sq+q-1,\alpha} + \tag{4.1.18}$$
$$+\left\|\partial_y w,|p|\right\|_{sq+q,\alpha}) \le c_1(\sum_{i=0}^{2}\left\|\partial_y^i w,|p|\right\|_{sq+q-1,\alpha} + \sum_{i=0}^{1}\left\|\partial_y^i w,|p|\right\|_{sq+q,\alpha}),$$

что доказывает справедливость оценки (4.1.17) при $l=k-2$. Предположим теперь, что оценка (4.1.17) справедлива при некотором $l=j$ $(k-r+1<j\le k-2)$ и докажем, что тогда она справедлива и при $l=j-1$.

По предположению индукции, используя теорему 4, получим

$$\sum_{i=0}^{1}\left\|\partial_y^{i+1} \hat{Q}_{j,1}w,|p|\right\|_{sq,\alpha} \le c(\sum_{i=0}^{k-j-2}\sum_{i_1=0}^{k-j-i+1}\left\|\partial_y^{i_1}w,|p|\right\|_{(s+i+1)q-1,\alpha} + \tag{4.1.19}$$
$$+\sum_{i=0}^{k-j-2}\sum_{i_1=0}^{k-j-i}\left\|\partial_y^{i_1}w,|p|\right\|_{(s+i+1)q,\alpha}).$$

Аналогично, по предположению индукции получим

$$\sum_{i=0}^{1}\left\|\partial_y^i \tilde{K}_{k-j+1}(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})\hat{Q}_{j,1}w,|p|\right\|_{sq,\alpha} \le c\sum_{i=0}^{1}\left\|\partial_y^j \hat{Q}_{j,1}w,|p|\right\|_{(s+1)q,\alpha} \le$$

$$\le c_1(\sum_{i=0}^{k-j-2}\sum_{i_1=0}^{k-j-i}\left\|\partial_y^{i_1}w,|p|\right\|_{(s+i+2)q-1,\alpha} + \sum_{i=0}^{k-j-2}\sum_{i_1=0}^{k-j-i-1}\left\|\partial_y^{i_1}w,|p|\right\|_{(s+i+2)q,\alpha}). \tag{4.1.20}$$

Из (4.1.16) с помощью теоремы 4 получим оценку

$$\sum_{i=0}^{1}\left\|\partial_y^i R_j^1 w,|p|\right\|_{sq,\alpha} \le c(\sum_{i=0}^{k-j-1}\sum_{i_1=0}^{k-j-i+1}\left\|\partial_y^{i_1}w,|p|\right\|_{(s+i+1)q-1,\alpha} + \sum_{i=0}^{k-j-1}\sum_{i_1=0}^{k-j-i}\left\|\partial_y^{i_1}w,|p|\right\|_{(s+i+1)q,\alpha}) \tag{4.1.21}$$

Из (4.1.19) - (4.1.21) и (4.1.15) получим справедливость оценки (4.1.17) при $l = j-1$. Таким образом, оценка (4.1.17) справедлива при всех $l = k - r_1 + 1,...,k-2.$

Аналогично неравенству (4.1.17) доказывается неравенство

$$\left\|\hat{Q}_{l,1}w,|p|\right\|_{(s+1)q,\alpha} \le$$

$$\le c(\sum_{i=0}^{k-l-2}\sum_{i_1=0}^{k-l-1-i}\left\|\partial_y^{i_1}w,|p|\right\|_{(s+i+2)q-1,\alpha} + \sum_{i=0}^{k-l-2}\sum_{i_1=0}^{k-l-2-i}\left\|\partial_y^{i_1}w,|p|\right\|_{(s+i+2)q,\alpha}). \tag{4.1.22}$$

Докажем теперь оценку (4.1.12). Так как $w(x,t)\in\Omega_{r_1}$, то из (4.1.13) и (2.1.14) с помощью теоремы 5, получим, что

$$\left\|\hat{Q}_l\, w\big|_{y=0},|p|\right\|_{(s+\frac{1}{2})q} = \left\|\hat{Q}_{l,1}\, w\big|_{y=0},|p|\right\|_{(s+\frac{1}{2})q}.$$

Из этого равенства и теоремы 6 получим

$$\left\|\hat{Q}_l\, w\big|_{y=0},|p|\right\|^2_{(s+\frac{1}{2})q} = -2\operatorname{Re}(\partial_y \tilde{\Lambda}^{(s+\frac{1}{2})q}\hat{Q}_{l,1}w, \tilde{\Lambda}^{(s+\frac{1}{2})q}\hat{Q}_{l,1}w).$$

Отсюда с помощью неравенства Коши - Буняковского получим оценку

$$\left\|\hat{Q}_l\, w\big|_{y=0},|p|\right\|_{(s+\frac{1}{2})q} \le c(\sum_{i=0}^{1}\left\|\partial_y^i \hat{Q}_{l,1}w,|p|\right\|_{sq,\alpha} + \left\|\hat{Q}_{l,1}w,|p|\right\|_{(s+1)q,\alpha}).$$

Используя в правой части этого неравенства оценки (4.1.17), (4.1.22) получим оценку (4.1.12).

Лемма 4.1.4. Пусть $q>1,\ \sigma_0 q \ge 2,\ s \ge -\sigma_0$ - действительные числа, $l = k - r_1 + 1,...,k$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = q(k - l + \max\{0; s\})$ и условие 4.1.1. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $c(\varepsilon)>0$, что для всех $v(x,\mathrm{y})\in C_0^\infty(R_+^n)$ справедлива оценка

$$\left\|\hat{Q}_l\Lambda_0^{\sigma_0 q}v\big|_{y=0},|p|\right\|_{(s+\frac{1}{2})q}\le\varepsilon\left\|v,|p|\right\|_{(s+1+k-l+\sigma_0)q,\alpha,q}+c(\varepsilon)\left\|v,|p|\right\|_{(s+1+k-l+\sigma_0)q-1,\alpha,q}. \quad (4.1.23)$$

Здесь и в дальнейшем оператор $\Lambda_0^{\sigma_0 q}(\mathrm{p},D_x,D_{\alpha,t})$ имеет вид

$$\Lambda_0^{\sigma_0 q}(\mathrm{p},D_x,D_{\alpha,t})v=F_{\xi\to x}^{-1}F_\alpha^{-1}[\{((|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}}-i\eta)^{\sigma_0 q}-(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}\sigma_0 q}\}F_{x\to\xi}F_\alpha[v]],$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (4.1.13), получим

$$\hat{Q}_l\Lambda_0^{\sigma_0 q}=\Lambda_0^{\sigma_0 q}\hat{Q}_{l,0}+J_{l,\sigma_0 q}+\hat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}, \quad (4.1.24)$$

где

$$\begin{aligned}J_{l,\sigma_0 q}&=(-1)^{k-r}M_{k-l,\sigma_0 q}+\breve{c}_1\tilde{K}_1(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})M_{k-l-1,\sigma_0 q}+\ldots+\\&+\breve{c}_{k-l-1}\tilde{K}_1(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})\tilde{K}_2(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})\cdot\ldots\cdot\tilde{K}_{k-l-1}(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})M_{1,\sigma_0 q}.\end{aligned} \quad (4.1.25)$$

Здесь $\breve{c}_i$ - некоторые числа, $M_{i,\sigma_0 q}$ - коммутатор операторов ∂_y^i *и* $\Lambda_0^{\sigma_0 q}$.

Используя теоремы 5 и 6 получим, что

$$\Lambda_0^{\sigma_0 q}(\mathrm{p},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})\hat{Q}_{l,0}\,v(x,\mathrm{y})\big|_{y=0}=\Lambda_0^{\sigma_0 q}(\mathrm{p},D_x,0)\hat{Q}_{l,0}\,v(x,\mathrm{y})\big|_{y=0}=0. \quad (4.1.26)$$

Отсюда и из равенства (4.1.24) получим

$$\begin{aligned}&\left\|\hat{Q}_l\Lambda_0^{\sigma_0 q}v\big|_{y=0},|p|\right\|^2_{(s+\frac{1}{2})q}=\\&-2\operatorname{Re}(\partial_y\tilde{\Lambda}^{(s+\frac{1}{2})q}(\hat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}+J_{l,\sigma_0 q})v,\tilde{\Lambda}^{(s+\frac{1}{2})q}(\hat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}+J_{l,\sigma_0 q})v)\\&\le\varepsilon\left\|\partial_t\tilde{\Lambda}^{(s+\frac{1}{2})q}(\hat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}+J_{l,\sigma_0 q})v,|p|\right\|^2_{-\frac{1}{2}q,\alpha}+\frac{1}{\varepsilon}\left\|(\hat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}+J_{l,\sigma_0 q})v,|p|\right\|_{(s+1)q,\alpha}.\end{aligned} \quad (4.1.27)$$

С помощью с помощью неравенства Коши Буняковскоговыводим неравенство

$$\begin{aligned}&\left\|\partial_y\tilde{\Lambda}^{(s+\frac{1}{2})q}(\hat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}+J_{l,\sigma_0 q})v,|p|\right\|_{-\frac{1}{2}q,\alpha}\le c\sum_{i=0}^{1}(\left\|\partial_y^i\hat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}v,|p|\right\|_{sq,\alpha}+\\&+\left\|\partial_y^i J_{l,\sigma_0 q}v,|p|\right\|_{sq,\alpha}).\end{aligned} \quad (4.1.28)$$

Из (4.1.25) с помощью теоремы 4 получим при $s\ge-\sigma_0$ оценку

$$\sum_{i=0}^{1}\left\|\partial_y^i J_{l,\sigma_0 q} v,|p|\right\|_{sq,\alpha} \le c(\sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i+1}\left\|\partial_y^{i_1} w,|p|\right\|_{(s+\sigma_0+i)q-1,\alpha}+$$
$$+\sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i}\left\|\partial_y^{i_1} v,|p|\right\|_{(s+\sigma_0+i)q,\alpha}) \le c_1(\left\|v,|p|\right\|_{(s+\sigma_0+k-l+1)q-1,\alpha,q}+ \tag{4.1.29}$$
$$+\left\|v,|p|\right\|_{(s+\sigma_0+k-l)q,\alpha,q}) \le c_2\left\|v,|p|\right\|_{(s+\sigma_0+k-l+1)q-1,\alpha,q}$$

при $q>1$.

Из (4.1.17) получим

$$\sum_{i=0}^{1}\left\|\partial_y^i \hat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q} v,|p|\right\|_{sq,\alpha} \le c(\sum_{i=0}^{k-l-2}\sum_{i_1=0}^{k-l-i}\left\|\partial_y^{i_1} v,|p|\right\|_{(s+i+1+\sigma_0)q-1,\alpha}+$$
$$+\sum_{i=0}^{k-l-2}\sum_{i_1=0}^{k-l-1-i}\left\|\partial_y^{i_1} v,|p|\right\|_{(s+\sigma_0+i+1)q,\alpha}) \le c_1\left\|v,|p|\right\|_{(s+\sigma_0+k-l+1)q-1,\alpha} \tag{4.1.30}$$

при $q>1$.

Используя (4.1.29) и (4.1.30) в правой части (4.1.28), получим оценку

$$\left\|\partial_y \tilde{\Lambda}^{(s+\frac{1}{2})q}(\hat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q}+J_{l,\sigma_0 q})v,|p|\right\|_{-\frac{1}{2}q,\alpha} \le c\left\|v,|p|\right\|_{(s+\sigma_0+k-l+1)q-1,\alpha}. \tag{4.1.31}$$

Из (4.1.22) получим при $q>1$ оценку

$$\left\|\hat{Q}_{l,1}\Lambda_0^{\sigma_0 q} v,|p|\right\|_{(s+1)q,\alpha} \le c(\sum_{i=0}^{k-l-2}\sum_{i_1=0}^{k-l-1-i}\left\|\partial_y^{i_1} v,|p|\right\|_{(s+\sigma_0+2)q-1,\alpha}+$$
$$+\sum_{i=0}^{k-l-2}\sum_{i_1=0}^{k-l-2-i}\left\|\partial_y^{i_1} w,|p|\right\|_{(\sigma_0+s+i+2)q,\alpha}) \le \tag{4.1.32}$$
$$\le c_1(\left\|v,|p|\right\|_{(s+\sigma_0+k-l+1)q-1,\alpha,q}+\left\|v,|p|\right\|_{(s+\sigma_0+k-l)q,\alpha,q}) \le c_2\left\|v,|p|\right\|_{(s+\sigma_0+k-l+1)q-1,\alpha,q}.$$

Из (4.1.25) с помощью теоремы 4 получим при $q>1$ оценку

$$\left\|J_{l,\sigma_0 q} v,|p|\right\|_{(s+1)q,\alpha} \le c\left\|v,|p|\right\|_{(s+\sigma_0+k-l+1)q-1,\alpha,q}. \tag{4.1.33}$$

Применяя (4.1.31) - (4.1.33) в правой части (4.1.27), получим оценку (4.1.23).

Лемма 2.1.5. Пусть $q>1$, $s-$действительные числа, $l=k-r+1,...,k-2$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma=q(k-l+\max\{0;s\})$ и условие 4.1.1. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $c(\varepsilon)>0$, что для всех $w(x,\mathrm{y})\in\Omega_{r_1}$ справедлива оценка

$$\left\|\hat{Q}_l w, |p|\right\|_{(s+1)q,\alpha} \le \varepsilon \left\|\partial_y \hat{Q}_l w, |p|\right\|_{sq,\alpha} + c(\varepsilon)\left\|\hat{Q}_l w, |p|\right\|_{(s+1)q-1,\alpha} + $$
$$+c(\left\|\hat{Q}_{l-1} w, |p|\right\|_{sq,\alpha} + \sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i}\left\|\partial_y^{i_1} w, |p|\right\|_{(s+i+1)q-1,\alpha} + \sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i-1}\left\|\partial_y^{i_1} w, |p|\right\|_{(s+i+1)q,\alpha}) \qquad (4.1.34)$$

с постоянной $c>0$, не зависящей от w, ε.

Для доказательства достаточно оценить правую часть неравенства (4.1.11) и выбрать $s_1 \le (s+1)q$.

Замечание 4.1.1. Пусть выполнены условия леммы 2.1.5 и $l=k-1$ или $l=k$. Тогда при всех $w(x,\text{y}) \in \Omega_{r_1}$ справедлива оценка

$$\left\|\hat{Q}_l w, |p|\right\|_{(s+1)q,\alpha} \le \varepsilon \left\|\partial_y \hat{Q}_l w, |p|\right\|_{sq,\alpha} + c(\varepsilon)\left\|Q_l w, |p|\right\|_{(s+1)q-1,\alpha} + c_1\left\|\hat{Q}_{l-1} w, |p|\right\|_{sq,\alpha} \qquad (4.1.35)$$

с постоянной $c_1>0$, не зависящей от ε, w.

Для доказательства достаточно заметить, что для всех $w(x,\text{y}) \in \Omega_{r_1}$ в силу (4.1.15) - (4.1.16) при $l=k$ и $l=k-1$ выполняется равенство $\hat{Q}_l\, w(x,\text{y})\big|_{y=0} = 0$, и воспользоваться оценкой (4.1.11).

Лемма 4.1.6. Пусть $q>1,\ \sigma_0 q \ge 2,\ s \ge -\sigma_0 -$действительные числа. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma = q(k-l+\max\{0;s\})$ и условие 2.1.1. Тогда для любого $\varepsilon>0$, существует такое число $c(\varepsilon)>0$, что при всех $v(x,\text{y}) \in C_0^\infty(R_+^n)$ справедливо неравенство

$$\left\|\hat{Q}_l \Lambda_0^{\sigma_0 q} v, |p|\right\|_{(s+1)q,\alpha} \le \varepsilon \left\|v, |p|\right\|_{(s+1+k-l+\sigma_0)q,\alpha,q} + c(\varepsilon)\left\|v, |p|\right\|_{(s+1+k-l+\sigma_0)q-1,\alpha,q} + $$
$$+c_1\left\|\hat{Q}_{l-1}\Lambda_0^{\sigma_0 q} v, |p|\right\|_{sq,\alpha} \qquad (4.1.36)$$

с константой $c_1>0$, не зависящей от v, ε.

Доказательство. Подставляя в неравенство (4.1.11) вместо функции $v(x,\text{y})$ функцию $w(x,\text{y}) = \Lambda_0^{\sigma_0 q} v$, получим

$$\left\|\hat{Q}_l \Lambda_0^{\sigma_0 q} v, |p|\right\|_{(s+1)q,\alpha} \le \varepsilon \left\|\partial_t \hat{Q}_l \Lambda_0^{\sigma_0 q} v, |p|\right\|_{sq,\alpha} + c(\varepsilon)\left\|\hat{Q}_l \Lambda_0^{\sigma_0 q} v, |p|\right\|_{(s+1)q-1,\alpha} + $$
$$+c_1(\left\|\hat{Q}_{l-1}\Lambda_0^{\sigma_0 q} v, |p|\right\|_{sq,\alpha} + \left\|\hat{Q}_l \Lambda_0^{\sigma_0 q}\, v(x,t)\big|_{t=0}, |p|\right\|_{(s+\frac{1}{2})q} + \left\|v, |p|\right\|_{s_1,\alpha}). \qquad (4.1.37)$$

Здесь $\varepsilon > 0,\ \ s_1 \in R^1$ – любые числа.

С помощью теорем 3 и 4 получим из (4.1.15) при $s \geq -\sigma_0$ оценку

$$\left\| \partial_t \hat{Q}_l \Lambda_0^{\sigma_0 q} v, |p| \right\|_{sq,\alpha} \leq c \left\| v, |p| \right\|_{(s+\sigma_0+k-l+1)q,\alpha,q}. \tag{4.1.38}$$

Воспользовавшись в правой части неравенства (4.1.37) неравенствами (4.1.38) и (4.1.23), получим оценку (4.1.36).

4.2. Факторизация оператора A и построение разделяющего оператора

В этом параграфе мы построим разделяющий оператор $\hat{Q}(\mathrm{p}, \mathrm{y}, D_x, D_{\alpha,\mathrm{y}}, \partial_y)$ и докажем теоремы 23, 24 . Для упрощения записей будем обозначать в этом параграфе через $\|\cdot\|$ норму в пространстве $L_2(R_+^n)$.

Доказательство теоремы 23. Рассмотрим оператор $\hat{Q}_0(\mathrm{p}, \mathrm{y}, D_x, D_{\alpha,\mathrm{y}}, \partial_y)$ определённый в (4.1.4) при $i = 0$. Так как функции $\lambda_i(\mathrm{p}, \mathrm{y}, \xi, \eta)$, $i = 1, 2, ..., k$, удовлетворяют условию 4.1.1, то с помощью теоремы 4 получим, что

$$\left\| (A(\mathrm{p}, \mathrm{y}, D_x, D_{\alpha,\mathrm{y}}, \partial_y)v - \hat{Q}_0(\mathrm{p}, \mathrm{y}, D_x, D_{\alpha,\mathrm{y}}, \partial_y)v), |p| \right\| \leq c \left\| v, |p| \right\|_{2m-1,\alpha,q} \tag{4.2.1}$$

для любых функций $v(x,t) \in H_{2m,\alpha,q}(R_+^n)$. При этом константа $c > 0$ в оценке (4.2.1) не зависит от v.

Так же как в параграфе 4.1 показываем, что функция $\lambda_i(\mathrm{p}, \mathrm{y}, \xi, \eta) - z_i(\mathrm{p}, \mathrm{y}, \xi, \eta)$, где $z_i(\mathrm{p}, t, \xi, \eta)$- z - корни уравнения (23) принадлежит классу $S_{\alpha,p}^{q-1}(\Omega)$. То есть в силу теоремы 4 получим

$$\left\| (\hat{Q}_0(\mathrm{p}, \mathrm{y}, D_x, D_{\alpha,\mathrm{y}}, \partial_y)v - \hat{Q}(\mathrm{p}, \mathrm{y}, D_x, D_{\alpha,\mathrm{y}}, \partial_y)v), |p| \right\| \leq c \left\| v, |p| \right\|_{2m-1,\alpha,q}, \tag{4.2.2}$$

где

$$\hat{Q}(\mathrm{p}, \mathrm{y}, D_x, D_{\alpha,\mathrm{y}}, \partial_y)v = \prod_{j=1}^{k} (\partial_y - K_j(\mathrm{p}, \mathrm{y}, D_x, D_{\alpha,\mathrm{y}}))v, \tag{4.2.3}$$

а $K_j(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}})$ - весовой псевдодифференциальный оператор с символом $z_j(\mathrm{p},\mathrm{y},\xi,\eta),\ \ j=1,2,...,k$. Из (4.2.1) и (4.2.2) вытекает утверждение теоремы 23.

Доказательство теоремы 24. Пусть $w(x,\mathrm{y})\in\Omega_{r_1}$ (см. определение 6), где r_1 - число z корней уравнения (23), лежащих в левой полуплоскости. Предположим вначале, что $r_1<k$. По построению $\hat{Q}_k=I$. Используя оценку (4.1.35) при $s=k-\frac{3}{2}-s_0$ $(s_0\ge 0)$ и $l=k$, получим оценку

$$\begin{gathered}\left\|w,|p|\right\|_{(k-s_0-\frac{1}{2})q,\alpha}\le\varepsilon\left\|\partial_y w,|p|\right\|_{(k-s_0-\frac{3}{2})q,\alpha}+c(\varepsilon)\left\|w,|p|\right\|_{(k-s_0-\frac{1}{2})q-1,\alpha}+\\+c_1\left\|\hat{Q}_{k-1}w,|p|\right\|_{(k-s_0-\frac{3}{2})q,\alpha}.\end{gathered}\tag{4.2.4}$$

Воспользовавшись теперь для оценки последнего слагаемого в правой части (4.2.4) оценкой (4.1.35) при $l=k-1,\ \ s=k-2-\frac{1}{2}-s_0$, получим

$$\begin{gathered}\left\|w,|p|\right\|_{(k-s_0-\frac{1}{2})q,\alpha}\le\varepsilon\left\|\partial_y w,|p|\right\|_{(k-s_0-\frac{3}{2})q,\alpha}+c(\varepsilon)\left\|w,|p|\right\|_{(k-s_0-\frac{1}{2})q-1,\alpha}+\\+c_1(\varepsilon_1)\left\|\partial_y\hat{Q}_{k-1}w,|p|\right\|_{(k-s_0-\frac{5}{2})q,\alpha}+c(\varepsilon_1)\left\|\hat{Q}_{k-1}w,|p|\right\|_{(k-s_0-\frac{3}{2})q-1,\alpha}+\left\|\hat{Q}_{k-2}w,|p|\right\|_{(k-s_0-\frac{5}{2})q,\alpha})\end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered}\left\|w,|p|\right\|_{(k-s_0-\frac{1}{2})q,\alpha}\le\varepsilon_2\sum_{l=k-1}^{k}\left\|\partial_y\hat{Q}_l w,|p|\right\|_{(l-s_0-\frac{3}{2})q,\alpha}+\\+c(\varepsilon_2)\sum_{l=k-1}^{k}\left\|\hat{Q}_l w,|p|\right\|_{(l-s_0-\frac{1}{2})q-1,\alpha}+c_1\left\|\hat{Q}_{k-2}w,|p|\right\|_{(k-2-s_0-\frac{1}{2})q,\alpha}\end{gathered}\tag{4.2.5}$$

для любого $\varepsilon_2>0$ с константой $c_1>0$, не зависящей от ε_2, w.

Воспользуемся для оценки последнего слагаемого леммой 4.1.5 последовательно при $l=k-2,\ s=k-3-\frac{1}{2}-s_0$; $l=k-3,\ s=k-4-\frac{1}{2}-s_0$;...;

$l=k-r_1+1,\ s=k-r_1-\frac{1}{2}-s_0$,

получим

$$
\begin{aligned}
&\left\|w,|p|\right\|_{(k-s_0-\frac{1}{2})q,\alpha} \le \varepsilon \sum_{l=k-r+1}^{k} \left\|\partial_y \hat{Q}_l w,|p|\right\|_{(l-s_0-\frac{3}{2})q,\alpha} + \\
&+c(\varepsilon)\sum_{l=k-r_1+1}^{k} \left\|\hat{Q}_l w,|p|\right\|_{(l-s_0-\frac{1}{2})q-1,\alpha} + c_1(\left\|\hat{Q}_{k-r} w,|p|\right\|_{(k-r_1-s_0-\frac{1}{2})q,\alpha} + \qquad (4.2.6)\\
&+\sum_{l=k-r_1+1}^{k-2}\sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i}\left\|\partial_y^{i_1} w,|p|\right\|_{(l-s_0-\frac{1}{2}+i)q-1,\alpha} + \sum_{l=k-r_1+1}^{k-2}\sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i-1}\left\|\partial_y^{i_1} w,|p|\right\|_{(l-\frac{1}{2}-s_0+i)q,\alpha}).
\end{aligned}
$$

Последовательно используя в правой части (4.2.6) следствие 4.1.1 при

$$
l=k-r_1,\ s=k-r_1-\frac{3}{2}-s_0;\ l=k-r_1-1,\ s=k-r_1-\frac{5}{2}-s_0;...;l=2,\ s=\frac{1}{2}-s_0
$$

получим оценку

$$
\begin{aligned}
&\left\|w,|p|\right\|_{(k-s_0-\frac{1}{2})q,\alpha} \le \varepsilon \sum_{l=2}^{k} \left\|\partial_y \hat{Q}_l w,|p|\right\|_{(l-s_0-\frac{3}{2})q,\alpha} + +c(\varepsilon)\sum_{l=2}^{k}\left\|\hat{Q}_l w,|p|\right\|_{(l-s_0-\frac{1}{2})q-1,\alpha} \\
&+c_1(\left\|\hat{Q}_1 w,|p|\right\|_{(\frac{1}{2}-s_0)q,\alpha} + \sum_{l=k-r_1+1}^{k-2}\sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i}\left\|\partial_y^{i_1} w,|p|\right\|_{(l-s_0-\frac{1}{2}+i)q-1,\alpha} + \qquad (4.2.7)\\
&\sum_{l=k-r_1+1}^{k-2}\sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i-1}\left\|\partial_y^{i_1} w,|p|\right\|_{(l-\frac{1}{2}-s_0+i)q,\alpha} + \left\|w,|p|\right\|_{s_1,\alpha}),
\end{aligned}
$$

где $s_1 \in R^1$ - любое число.

Воспользуемся в правой части (4.2.7) леммой 2.1.1 при $l=1,\ s=-s_0-\dfrac{1}{2}$,

получим оценку

$$
\begin{aligned}
&\left\|w,|p|\right\|^2_{(k-\frac{1}{2}-s_0)q,\alpha} \le \varepsilon \sum_{l=2}^{k} \left\|\partial_y \hat{Q}_l w,|p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{3}{2})q,\alpha} + \\
&+c(\varepsilon)\sum_{l=2}^{k}\left\|\hat{Q}_l w,|p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{1}{2})q-1,\alpha} + c_1\{\mathrm{Re}(\hat{Q}_0 w,\hat{Q}_1 w)_{-s_0 q,\alpha} + \\
&+\left|(M_{1,-s_0 q}\hat{Q}_1 w,\tilde{\Lambda}_0^{-s_0 q}\hat{Q}_1 w)\right| + \qquad (4.2.8)\\
&+\sum_{l=k-r_1+1}^{k-2}\sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i}\left\|\partial_y^{i_1} w,|p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{1}{2}+i)q-1,\alpha} + \\
&+\sum_{l=k-r_1+1}^{k-2}\sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i-1}\left\|\partial_y^{i_1} w,|p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{1}{2}+i)q,\alpha} + \left\|w,|p|\right\|_{s_1,\alpha}\}
\end{aligned}
$$

где $s_1 \in R^1$ - любое число.

Заметим, что из следствия 4.1.1 вытекает оценка

$$\left|(M_{1,-s_0q}\hat{Q}_1 w, \tilde{\Lambda}_0^{-s_0q}\hat{Q}_1 w)\right| \le \varepsilon \left\|\partial_y \hat{Q}_1 w, |p|\right\|^2_{-(s_0+\frac{1}{2})q,\alpha} + c(\varepsilon)\left\|\hat{Q}_1 w, |p|\right\|^2_{(\frac{1}{2}-s_0)q-1,\alpha}. \qquad (4.2.9)$$

Применяя (4.2.9) и (4.1.11) в правой части (4.2.8) и выбирая $s_1 \le (l - s_0 - \frac{1}{2})q$, получим из (4.2.8) оценку

$$\begin{aligned}
\left\|w, |p|\right\|^2_{(k-\frac{1}{2}-s_0)q,\alpha} &\le \varepsilon \sum_{l=1}^{k}\sum_{i=0}^{k-l}\sum_{i_1=0}^{k-l+1-i}\left\|\partial_y^{i_1} w, |p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{3}{2}+i)q,\alpha} + \\
&+ c(\varepsilon)\sum_{l=1}^{k}\sum_{i=0}^{k-l}\sum_{i_1=0}^{k-l-i}\left\|\partial_y^{i_1} w, |p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{1}{2}+i)q-1,\alpha} + \\
&+ c_1(\mathrm{Re}(\hat{Q}_0 w, \hat{Q}_1 w)_{-s_0q,\alpha} + \sum_{l=k-r_1+1}^{k-2}\sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i}\left\|\partial_y^{i_1} w, |p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{1}{2}+i)q-1,\alpha} + \\
&+ \sum_{l=k-r_1+1}^{k-2}\sum_{i=0}^{k-l-1}\sum_{i_1=0}^{k-l-i-1}\left\|\partial_y^{i_1} w, |p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{1}{2}+i)q,\alpha}).
\end{aligned} \qquad (4.2.10)$$

Докажем оценку (4.2.10) в случае $r_1 = k$. Используя для оценки последнего слагаемого в правой части (4.2.4) замечание 2.1.1при$l = k-1,\ s = k-2-\frac{1}{2}-s_0$ и лемму 2.1.5 последовательно при $l = k-2,\ s = k-3-\frac{1}{2}-s_0;...;\ l = 2,\ s = \frac{1}{2}-s_0$ получим оценку (4.2.6) при $r_1 = k-1$. Воспользовавшись в этом неравенстве леммой 4.1.2 при $l = 1,\ s = -s_0 - \frac{1}{2}$ устанавливаем, так же как и выше, оценку (4.2.10)

Из (4.2.10) и теоремы 23 следует оценка

$$\begin{aligned}
\left\|w, |p|\right\|^2_{(k-\frac{1}{2}-s_0)q,\alpha} &\le \varepsilon \sum_{l=1}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-l}\sum_{i_1=0}^{k-l+1-i}\left\|\partial_y^{i_1} w, |p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{3}{2}+i)q,\alpha} + \\
&+ c(\varepsilon)\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{i=0}^{k-l}\sum_{i_1=0}^{k-l-i+1}\left\|\partial_y^{i_1} w, |p|\right\|^2_{(l-s_0-\frac{1}{2}+i)q-1,\alpha} + c_1\,\mathrm{Re}(A(\mathrm{p}, \mathrm{y}, D_x, D_{\alpha,\mathrm{y}}, \partial_y)w, \hat{Q}_1 w)_{-s_0q,\alpha}.
\end{aligned}$$

Таким образом, теорема 24доказана. Причём, в качестве разделяющего оператора $\hat{Q}$ можно взять оператор $\hat{Q}_1$, определенный в (2.1.4) при $i = 1$.

Следствие 4.2.1. Пусть выполнены условия теоремы 24 и $\sigma_0 q \geq 2$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $c(\varepsilon) > 0$, что при всех $v(x, \text{y}) \in C_0^\infty(R_+^n)$ справедлива оценка

$$\left\| \tilde{\Lambda}_0^{\sigma_0 q} v, |p| \right\|_{(k-\sigma_0)q,\alpha}^2 \leq \varepsilon \left\| v, |p| \right\|_{qk,\alpha,q}^2 + c(\varepsilon) \left\| v, |p| \right\|_{kq-1,\alpha,q}^2 + \\ + c_1 \operatorname{Re}(\hat{Q}_0 \Lambda_0^{\sigma_0 q} v, \hat{Q}_1 \Lambda_0^{\sigma_0 q} v)_{(\frac{1}{2}-\sigma_0)q,\alpha} \tag{4.2.12}$$

с постоянной $c_1 > 0$, не зависящей от v, ε.

Для доказательства достаточно повторить доказательство теоремы 24при $s_0 = \sigma_0 - \dfrac{1}{2}$ с той лишь разницей, что вместо леммы 4.1.5 и замечания 4.1.2 следует воспользоваться леммой 4.1.16.

4.3. Доказательство априорной оценки решений общей краевой задачи в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с комплексным параметром.

Так как пространство $C_0^\infty(R_+^n)$ плотно в пространстве $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$, то теорему 22 достаточно доказать для функций из $C_0^\infty(R_+^n)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3.1. Пусть выполнено условие 1' при $s = 2m$ и условия 4, 5. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $c(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех $v(x, \text{y}) \in C_0^\infty(R_+^n)$ справедлива оценка

$$\left\| D_{\alpha,\text{y}}^{2m} v, |p| \right\| \leq \varepsilon \left\| v, |p| \right\|_{2m,\alpha,q} + c(\varepsilon)(\left\| v, |p| \right\|_{2m-1,\alpha,q} + \left\| A(\text{p}, \text{y}, D_x, D_{\alpha,\text{y}}, \partial_y) v, |p| \right\|). \tag{4.3.1}$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством $\left| ((|p| + |\xi| - i\eta)^{\sigma_0 q} - (|p| + |\xi|)^{\sigma_0 q}) \right| \geq |\eta|^{\sigma_0 q}$, справедливым при $\sigma_0 q \geq 2$. Получим оценку

$$\left\| D^{2m}_{\alpha,\mathrm{y}} v, |p| \right\| \le \left\| \Lambda_0^{\sigma_0 q} v, |p| \right\|_{2m-\sigma_0 q,\alpha} \tag{4.3.2}$$

при $2 \le \sigma_0 q \le 2m$.

Воспользуемся следствием 4.1.1, получим из (4.3.2) оценку

$$\begin{aligned} &\left\| D^{2m}_{\alpha,\mathrm{y}} v, |p| \right\|^2 \le \varepsilon \left\| v, |p| \right\|^2_{2m,\alpha,q} + c(\varepsilon) \left\| v, |p| \right\|^2_{2m-1,\alpha,q} + \\ &+c_1 \operatorname{Re}(\hat{Q}_0 \Lambda_0^{\sigma_0 q} v, \hat{Q}_1 \Lambda_0^{\sigma_0 q} v)_{(\frac{1}{2}-\sigma_0)q,\alpha}. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

С помощью теорем 3, 4 и неравенства Коши - Буняковскогополучим оценку

$$\begin{aligned} &\left| (\hat{Q}_0 \Lambda_0^{\sigma_0 q} v, \hat{Q}_1 \Lambda_0^{\sigma_0 q} v)_{(\frac{1}{2}-\sigma_0)q,\alpha} \right| \le \varepsilon \left\| v, |p| \right\|^2_{2m,\alpha,q} + \\ &+c(\varepsilon)(\left\| v, |p| \right\|^2_{2m-1,\alpha,q} + \left\| \hat{Q}_0 v, |p| \right\|^2). \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

Из (4.3.3) и (4.3.4) вытекает оценка (4.3.1)

Теорема 4.3.2. Пусть выполнены условия теоремы 4.3.1. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $c(\varepsilon) > 0$, что при всех $v(x,\mathrm{y}) \in C_0^\infty(R_+^n)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\left\| A(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,0,\partial_y) v, |p| \right\| \le \varepsilon \left\| v, |p| \right\|_{2m,\alpha,q} + c(\varepsilon) \left\| v, |p| \right\|_{2m-1,\alpha,q} + \\ &+c_1 \left\| A(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y) v, |p| \right\| \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

с константой $c_1 > 0$, не зависящей от v.

Доказательство. Из определения оператора $A(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y)$ получим

$$\begin{aligned} &\left\| A(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,0,\partial_y) v, |p| \right\| \le \left\| A(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y) v, |p| \right\| + \\ &+\left\| \sum_{|\tau|+j_1+qj_2+rj_3 \le 2m,\, j\ne 0} a_{\tau j_1 j_2 j_3}(\mathrm{y}) p^{j_3} D_x^\tau D^{j_1}_{\alpha,\mathrm{y}} \partial_y^{j_2} v, |p| \right\| \end{aligned} . \tag{4.3.6}$$

Оценивая вторую норму в правой части оценки (4.3.6) с помощью неравенства Коши Буняковского, получим

$$\begin{aligned} &\sum_{|\tau|+j+ql \le 2m,\, j\ne 0} \left\| D_x^\tau D^j_{\alpha,t} \partial_t^l v, |p| \right\| \le \varepsilon \left\| v, |p| \right\|_{2m,\alpha,q} + \\ &+c(\varepsilon)(\left\| A(t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t) v, |p| \right\| + \left\| v, |p| \right\|_{2m-1,\alpha,q}). \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Применяя неравенство (4.3.7) в правой части неравенства (4.3.6), получим неравенство (4.3.5).

Теорема 4.3.3. Пусть выполнены условия 1'при $s=2m$ и условия 4, 5, 6. Если порядки m_i граничных операторов B_i в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ не превосходят $2m-q$, то для решения $v(x,\mathrm{y})$ задачи (20), (22), (23), принадлежащего $H_{2m,\alpha,q}(R_+^n)$ справедлива априорная оценка

$$\left\|v,|p|\right\|_{2m,\alpha,q} \le \\ \le c(\left\|A(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y)v,|p|\right\| + \sum_{i=1}^{r_1}\left\|B_i\, v\big|_{y=0},|p|\right\|_{2m-m_i-\frac{1}{2}q} + \left\|v,|p|\right\|_{2m-1,\alpha,q}). \tag{4.3.8}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$A(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,0,\partial_y)v(x,\mathrm{y}) = F(x,\mathrm{y}). \tag{4.3.9}$$

Так как это уравнение не является вырождающимся, то из [46] следует априорная оценка

$$\left\|F_{\xi\to x}^{-1}[(|p|^2+|\xi|)^{2m}F_{x\to\xi}[v(x,\mathrm{y})]]\right\| + \left\|\partial_y^k v\right\| \le \\ \le c(\left\|A(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,0,\partial_y)v\right\| + \sum_{i=1}^{r_1}\left\|B_i\, v\big|_{y=0}\right\|_{2m-m_i-\frac{1}{2}q} + \|v\|). \tag{4.3.10}$$

Из (4.3.10) и (4.3.1) получим оценку

$$\left\|D_{\alpha,\mathrm{y}}^{2m}\right\| + \left\|F_{\xi\to x}^{-1}[(|p|^2+|\xi|)^{2m}F_{x\to\xi}[v]]\right\| + \left\|\partial_y^k v\right\| \le \\ \le c(\left\|A(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y)v\right\| + \left\|A(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,0,\partial_y)v\right\| + \sum_{i=1}^{r_1}\left\|B_i\, v\big|_{y=0}\right\|_{2m-m_i-\frac{1}{2}q}) + \\ +\varepsilon\|v\|_{2m,\alpha,q} + c(\varepsilon)\|v\|_{2m-1,\alpha,q}.$$

Используя в правой части последнего неравенства оценку (4.3.5), получим

$$\|v\|_{2m,\alpha,q} \le c(\left\|A(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y)v\right\| + \sum_{i=1}^{r_1}\left\|B_i\, v\big|_{y=0}\right\|_{2m-m_i-\frac{1}{2}q}) + \\ +\varepsilon\|v\|_{2m,\alpha,q} + c(\varepsilon)\|v\|_{2m-1,\alpha,q}.$$

Выбирая в этом неравенстве $\varepsilon>0$ достаточно малым, получим оценку (4.3.8)

Доказательство теоремы 22. Если порядки операторов B_i в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ не превосходит $2m-q$, то теорема 22при $s=2m$ вытекает из теоремы 4.3.3, так как пространство $C_0^\infty(R_+^n)$ плотно в $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$. Доказательство теоремы 22 в случае $s>2m$ и в случае, когда порядок хотя бы одного из операторов B_i в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}$ не меньше $2m-q$ проводиться стандартным методом (см., например, [30]).

Доказательство теоремы 25. Из теоремы 22 вытекает оценка

$$\left\|v,|p|\right\|_{s,\alpha,q} \le c(\left\|F,|p|\right\|_{s-2m,\alpha,q} + \left\|v,|p|\right\|_{s-1,\alpha,q} + \sum_{j=1}^{r_1}\left\|G_j,|p|\right\|_{s-m_j-\frac{1}{2}q}).$$

Запишем это неравенство в виде

$$\frac{1}{2}\left\|v,|p|\right\|_{s,\alpha,q} + (\frac{1}{2}\left\|v,|p|\right\|_{s,\alpha,q} - \left\|v,|p|\right\|_{s-1,\alpha,q}) \le c(\left\|F,|p|\right\|_{s-2m,\alpha,q} \sum_{j=1}^{r_1}\left\|G_j,|p|\right\|_{s-m_j-\frac{1}{2}q}).$$

Так как по условию теоремы$|p| \ge p_0 > 0,$ то из определения нормы в пространстве $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ вытекает, что существует такое число p_0, что при всех$|p| \ge p_0 > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}\left\|v,|p|\right\|_{s,\alpha,q} - \left\|v,|p|\right\|_{s-1,\alpha,q} > 0.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства вытекает неравенство (29). Теорема 25 доказана.

ГЛАВА 5
СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ОБЩЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА, ЗАВИСЯЩИХ ОТ КОМПЛЕКСНОГО ПАРАМЕТРА

5.1. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим теперь оператор

$$\hat{A}_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)=\tilde{K}_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t})-\partial_t,\ \ j=1,2,...,k\,, \tag{5.1.1}$$

где

$$\begin{aligned}&\tilde{K}_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t})=F_\alpha^{-1}\left[\lambda_j(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[\cdot]\right],\\&\lambda_j(p,t,\xi,\eta)=z_j(p,t,\xi,\eta+\sqrt{-1})\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

$z_j(p,t,\xi,\eta)\ -\ z$ - корни уравнения (23).

Рассмотрим функции, построенные по формулам

$$w_{j+1}(p,\xi,t)=\hat{A}_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)w_j(\mathrm{p},\xi,t),\quad j=1,2,...,k, \tag{5.1.3}$$

где функция $w_1(p,\xi,t)$ при всех $\xi\in R^{n-1}$ принадлежит по переменной t пространству $C_0^\infty(R_+^1)$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 5.1.1. Пусть при всех $\xi\in R^{n-1},\, p\in Q$ функция $w_1(\mathrm{p},\xi,t)$ принадлежит по переменной t пространству $C_0^\infty(R_+^1)$. Тогда справедливо равенство

$$\partial_t^s w_1(p,\xi,0)=\tilde{T}_{s,r_1}(w_1,...,w_{r_1})+\tilde{F}_{s,r_1}(w_{r_1+1})+\tilde{I}_{s,r_1}(w_1,...,w_{r_1}), \tag{5.1.4}$$

где $s=1,2,...,\ r_1=1,2,...,k$; функции $\tilde{T}_{s,r_1}(w_1,...,w_{r_1})$ строятся по рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned}&\tilde{T}_{s,r_1}(w_1,...,w_{r_1})=\tilde{T}_{s,r-1}(w_1,...,w_{r_1-1})+\sum\nolimits'_{r_1-1,s}\lambda_1^{l_1}(p,0,\xi,0)\cdot...\cdot\lambda_{r_1-1}^{l_{r-1}}(p,0,\xi,0)\cdot\\&\cdot\lambda_{r_1}^{s-|l|_{r_1}-(r_1-1)}(p,0,\xi,0)w_{r_1}(p,\xi,0),\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

$$\tilde{T}_{s,1}(w_1) = \lambda_1^s(p,0,\xi,0)w_1(\mathrm{p},\xi,0). \tag{5.1.6}$$

Здесь

$$|l|_j = l_1 + l_2 + \ldots + l_j, \ \sum{}'_{j,s} = \sum_{l_1=0}^{s-1} \sum_{l_2=0}^{s-l_1-2} \ldots \sum_{l_j=0}^{s-|l|_j-j},$$

$$\tilde{F}_{s,r_1}(w_{r_1+1}) = \sum{}'_{r_1,s} \lambda_1^{l_1}(p,0,\xi,0) \cdot \ldots \cdot \lambda_{r_1}^{l_{r_1}}(p,0,\xi,0)\partial_t^{s-|l|_{r_1}-r_1} w_{r_1+1}(p,\xi,0). \tag{5.1.7}$$

$$\begin{gathered}\tilde{I}_{s,r_1}(w_1,\ldots,w_{r_1}) = \tilde{I}_{s,r_1-1}(w_1,\ldots,w_{r_1-1}) + \\ +\sum{}'_{r_1,s-1} \lambda_1^{l_1}(p,0,\xi,0) \cdot \ldots \cdot \lambda_{r_1}^{l_{r_1}}(p,0,\xi,0) M_{s-|l|_{r_1}-r_1,r_1} w_{r_1}(p,\xi,0),\end{gathered} \tag{5.1.8}$$

$$\tilde{I}_{s,1}(w_1) = \sum_{l_1=0}^{s-2} \lambda_1^{l_1}(p,0,\xi,0) M_{s-l_1-1,1} w_1(p,\xi,0). \tag{5.1.9}$$

Здесь $M_{s,j}$ - коммутатор операторов ∂_t^s и $K_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$. По определению считается, что $\tilde{T}_{s,r} \equiv 0$, при $s \le 0, r_1 \le 0$, $\tilde{I}_{s,r_1} = 0$ при $s \le 2, r_1 \le 0$; $\tilde{F}_{s,r_1} = 0$ при $s \le 2, r_1 \le 0$;

Доказательство. Учитывая обозначение (5.1.1), получим из леммы 2.1.6 при $p = +\infty$ и $\mu = 1$ равенство

$$\begin{gathered}\partial_t^s w_j(p,\xi,0) = \lambda_j^s(p,0,\xi,0) w_j(p,\xi,0) - \\ -\sum_{l_1=0}^{s-1} \lambda_j^{l_1}(p,0,\xi,0)\partial_t^{s-l_1-1} w_{j+1}(p,\xi,0) + \\ +\sum_{l_1=0}^{s-2} \lambda_j^{l_1}(p,0,\xi,0) M_{s-l_1-1,j} w_j(p,\xi,t)|_{t=0},\end{gathered} \tag{5.1.10}$$

где $M_{s-l_1-1,j}$ - коммутатор операторов $\partial_t^{s-l_1-1}$ и $\tilde{K}_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$. Положив в (5.1.10) $j = 1,$ получим равенство (5.1.4) при $r_1 = 1.$ Предположим далее, что формула (5.1.4) справедлива при некотором $r_1 \ge 1$, то есть

$$\partial_t^s w_1(\xi,0) = \tilde{T}_{s,r_1}(w_1,\ldots,w_{r_1}) + \tilde{F}_{s,r_1}(w_{r_1+1}) + \tilde{I}_{s,r_1}(w_1,\ldots,w_{r_1}), \tag{5.1.11}$$

где $\tilde{T}_{s,r_1}, \tilde{F}_{s,r_1}, \tilde{I}_{s,r_1}$ находятся по формулам (5.1.4) - (5.1.9). С помощью формулы (5.1.10) находим равенство

$$\tilde{F}_{s,r_1}(w_{r_1+1}) = \sum\nolimits'_{r_1,s} \lambda_1^{l_1}(p,0,\xi,0)\cdot\ldots\cdot\lambda_{r_1}^{l_{r_1}}(p,0,\xi,0)\{\lambda_{r_1+1}^{s-|l|_{r_1}-l} w_{r_1+1}(p,\xi,0) +$$
$$+ \sum_{l_{r_1+1}=0}^{s-l_1-\ldots-l_{r_1}-r_1-2} M_{s-|l|_{r_1+1}-(r_1+1),r_1+1} w_{r_1+1}(\xi,0) + \tag{5.1.12}$$
$$+ \sum_{l_{r_1+1}=0}^{s-l_1-\ldots-l_1-r_1-1} \lambda_{r_1+1}^{l_{r_1+1}}(p,0,\xi,0)\partial_t^{s-l_{r_1+1}-(r_1+1)} w_{r_1+2}(p,\xi,0)\}.$$

Применяя (5.1.12) в правой части (5.1.11), устанавливаем справедливость равенства (5.1.3) при r_1+1.

Следствие 5.1.1. При выполнении условий леммы 5.1.1 справедливо равенство

$$\partial_t^s w_1(p,\xi,0) = \sum_{l=1}^{r_1} \tilde{T}_{s+1-l}(z_1(p,0,\xi,0),\ldots,z_l(p,0,\xi,0)) w_l(p,\xi,0) +$$
$$+\tilde{F}_{s,r_1}(w_{r_1+1}) + \tilde{I}_{s,r_1}(w_1,\ldots,w_{r_1}) + \sum_{l=1}^{r_1} \tilde{E}_{s,l}(\xi) w_l(p,\xi,0), \tag{5.1.13}$$

где функции $\tilde{F}_{s,r_1}$, $\tilde{I}_{s,r_1}$ находятся из рекуррентных соотношений (5.1.7) - (5.1.9).

$$\tilde{T}_j(z_1,\ldots,z_l) = \sum_{|\beta|_l=j} z_1^{\beta_1}(p,0,\xi,0)\cdot\ldots\cdot z_l^{\beta_l}(p,0,\xi,0). \tag{5.1.14}$$

$$\tilde{E}_{s,l}(\xi) = \tilde{T}_{s+1-l}(\lambda_1,\ldots,\lambda_l) - \tilde{T}_{s+1-l}(z_1,z_2,\ldots,z_l), \tag{5.1.15}$$

$z_j(p,t,\xi,\eta)$ – z - корни уравнения (23), $\lambda_j(p,t,\xi,\eta) = z_j(p,t,\xi,\eta+\sqrt{-1})$.

Для доказательства (5.1.13) достаточно заметить, что с помощью индукции по числу r_1 из рекуррентных соотношений (5.1.5) - (5.1.5) вытекает равенство

$$\tilde{T}_{s,r_1}(w_1,\ldots,w_{r_1}) = \sum_{l=1}^{r_1} T_{s+1-l}(\lambda_1,\ldots,\lambda_l) w_l(p,\xi,0). \tag{5.1.16}$$

После этого формула (5.1.4) может быть записана в виде (5.1.13).

Определение 5.1.1. Будем говорить, что $Q(z) = 0(\operatorname{mod} P(z))$, если многочлен $Q(z)$ делится без остатка на многочлен $P(z)$.

Нам понадобится следующая алгебраическая лемма, доказанная в работе [54].

Лемма 5.1.2. Пусть $\tilde{\mathrm{Q}}(z)=\sum_{\tilde{s}_1=0}^{j} a_{\tilde{s}_1} z^{\tilde{s}_1}$, $P(z)=\prod_{i=1}^{r_1}(z-z_i)$

Положим $\tilde{Q}_i(z_1,...,z_i)=\sum_{\tilde{s}_1=i-1}^{j} a_{\tilde{s}_1} \sum_{|\beta|_i=\tilde{s}_1-i+1} z_1^{\beta_1}\cdot ...\cdot z_i^{\beta_i}$, $1\le i\le r_1.$ Тогда $\tilde{Q}(z)=0(\operatorname{mod} P(z))$ тогда и только тогда, когда $\tilde{Q}_i(z_1,...,z_i)=0,\ 1\le i\le r_1.$

Запишем граничные операторы $B_i(\mathrm{p},\xi,\partial_t)=F_{x\to\xi}[B_i(\mathrm{p},D_x,\partial_t)]$ (см. (22)) в виде

$$B_i(\mathrm{p},\xi,\partial_t)=\sum_{j=0}^{\mu_i}\Lambda_{i,j}(\mathrm{p},\xi)\partial_t^j;\ \Lambda_{i,j}(\mathrm{p},\xi)=\sum_{|\tau|+\mathrm{rj}_3\le m_i-qj} b_{\tau ji}\, p^{j_3}\xi^{\tau}, \tag{5.1.17}$$

где $\mu_i=[m_i/q]$. Рассмотрим также операторы

$$B_i^0(\mathrm{p},\xi,\partial_t)=\sum_{j=0}^{\mu_i}\Lambda_{i,j}^0(\mathrm{p},\xi)\partial_t^j;\ \Lambda_{i,j}^0(\xi)=\sum_{|\tau|+\mathrm{rj}_3=m_i-qj} b_{\tau ji}\, p^{j_3}\xi^{\tau}, \tag{5.1.18}$$

Обозначим

$$B_{i,l}(p,\xi)=\sum_{\tilde{s}_1=l^*-1}^{\mu_i} T_{\tilde{s}_1+1-l}(z_1(p,0,\xi,0),...,z_l(p,0,\xi,0))\Lambda_{i,\tilde{s}_1}^0(\xi), \tag{5.1.19}$$

где $l,i=1,2,...,r_1$, r_1– число z - корней уравнения (23), лежащих в левой полуплоскости, величины $T_{\tilde{s}_1-l+1}(z_1(p,0,\xi,0),...,z_l(p,0,\xi,0))$ определены в (5.1.14). $l^*=\min\{l,\mu_i+2\}$.

Лемма 5.1.3. Условие 3 эквивалентно условию

$$\det\{B_{i,l}(p,\xi)\}_{i,l=1}^{r_1}\ne 0 \tag{5.1.20}$$

при всех $\xi\in R^{n-1}, |\xi|>0$, $p\in Q=\{p\in C, |\arg p|<\frac{\pi}{2}, |p|>0\}$

Доказательство. Рассмотрим многочлен вида

$$\tilde{Q}(\mathrm{p},\xi,z)=\sum_{i=1}^{r_1}\beta_i B_i^0(\mathrm{p},\xi,z)=\sum_{i=1}^{r_1}\beta_i\sum_{i=0}^{\mu_i}\Lambda_{i,j}^0(\mathrm{p},\xi)z^j, \tag{5.1.21}$$

который построен по произвольному набору чисел $\beta_1,\beta_2,...,\beta_{r_1}$.

Если обозначить $\mu^* = \max_{1 \le i \le r_1} \mu_i$ и положить $\Lambda_{i,\tilde{s}_1}(\mathrm{p},\xi) \equiv 0$ при $\mu_i + 1 \le \tilde{s}_1 \le \mu^*$, $i = 1,2,...,r_1$, то многочлен $\tilde{Q}(\mathrm{p},\xi,z)$ можно записать в виде

$$\tilde{Q}(\mathrm{p},\xi,z) = \sum_{\tilde{s}_1=0}^{\mu^*} \left(\sum_{i=1}^{r_1} \beta_i \Lambda^0_{i,\tilde{s}_1}(\mathrm{p},\xi) \right) z^{\tilde{s}_1}.$$

По лемме 5.1.2 условие $\tilde{Q}(\mathrm{p},\xi,z) = 0(\operatorname{mod} P(\mathrm{p},\xi,z))$ эквивалентно условию

$$\tilde{Q}_l(\mathrm{p},\xi,z_1,...,z_l) = \sum_{\tilde{s}_1=l-1}^{\mu^*} \left(\sum_{i=1}^{r_1} \beta_i \Lambda^0_{i,\tilde{s}_1}(\mathrm{p},\xi) T_{\tilde{s}_1-l+1}(\mathrm{p},\xi) \right) = 0 \qquad (5.1.22)$$

для всех $l = 1, 2,...,r_1$. Здесь мы обозначили $T_{\tilde{s}_1-l+1}(\mathrm{p},\xi) = T_{\tilde{s}_1+1-l}(z_1(p,0,\xi,0), z_2(p,0,\xi,0),...,z_l(p,0,\xi,0))$ (см. (5.1.14)). Учитывая (5.1.19), выводим из (5.1.22) равенство

$$\tilde{Q}_l(\mathrm{p},\xi,z_1,...,z_l) = \sum_{i=1}^{r_1} \beta_i B_{i,j}(p,\xi) = 0,\ l = 1,2,...,r_1.$$

Отсюда и из леммы 5.1.2 вытекает утверждение леммы 5.1.3.

Лемма 5.1.4. Пусть $\tilde{s}_1 \ge 0$ – действительное число, $s > 2$ – целое число, выполнено условие 1' с заменой s на $s + \tilde{s}_1$. Пусть функция $\lambda_1(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяет оценкам (4.1.1). Тогда для оператора $\tilde{I}_{s,1}(w_1)$, определённого в (5.1.9), справедливо неравенство

$$\left\langle \tilde{I}_{s,1}(w_1), |p| \right\rangle_{\tilde{s}_1+\frac{q}{2}} \le c \, \| w_1, |p| \|_{\tilde{s}_1+q(s+1)-1,\alpha,q,|\xi|}, \qquad (5.1.23)$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от ξ и функции $w_1(\xi,t)$,

$$\left\langle w|_{t=0}, |p| \right\rangle_s^2 = (|p|^2 + |\xi|^2)^s \, |w|_{t=0}|^2. \qquad (5.1.24)$$

$\|\cdot,|p|\|_{s,\alpha,q,|\xi|}$ - норма в пространстве $\tilde{H}_{s,\alpha,q}(R^1_+)$.

Доказательство. Из (5.1.9) с помощью теоремы 4 устанавливаем неравенство

$$\left\langle \tilde{I}_{s,1}(w_1),|p|\right\rangle^2_{\tilde{s}_1+\frac{q}{2}} \le c\sum_{p_1=0}^{s-2}|\operatorname{Re}(\partial_t M_{s-l_1-1,1}w_1, M_{s-l_1-1,1}w_1)|\cdot$$
$$\cdot(|p|+|\xi|^2)^{(\tilde{s}_1+qp_1+\frac{q}{2})} \le c_1\sum_{p_1=0}^{s-2}\|M_{s-l_1-1,1}w_1,|p|\|_{\tilde{s}_1+q(p_1+1),\alpha,q,|\xi|}, \tag{5.1.25}$$

где $M_{s-l_1-1,1}$ - коммутатор операторов $\partial_t^{s-l_1-1}$ и $\tilde{K}_1(\mathrm{p},\mathrm{t},\xi,D_{\alpha,t})$, $\tilde{K}_1(\mathrm{p},\mathrm{t},D_x,D_{\alpha,t})$ – весовой псевдодифференциальный оператор с символом $\lambda_1(\mathrm{p},\mathrm{t},\xi,\eta)$.

Заметим, что из теоремы 4 вытекает оценка

$$\|M_{s-l_1-1,1}w_1,|p|\|_{\tilde{s}_1,\alpha,q,|\xi|}\le c\|w_1,|p|\|_{\tilde{s}_1+(s-l_1)q-1,\alpha,q,|\xi|} \tag{5.1.26}$$

при $\tilde{s}_1\ge 0,\ s\ge p_1+1$.

Используя (5.1.26) в правой части (5.1.25), устанавливаем оценку (5.1.23).

Лемма 5.1.5. Пусть $\tilde{s}_1\ge 0$ – действительное число, $s>2$ – целое число, выполнено условие 1' (с заменой s на $s+\tilde{s}_1$), функции $\lambda_i(p,t,\xi,\eta),\ i=1,2,...,r_1$ удовлетворяют оценкам (2.1.1). Тогда для оператора $\tilde{I}_{s,r_1}(w_1,...,w_{r_1})$, определённого в (5.1.8) - 5.1.9), при произвольной функции $w_1(\xi,t)\in\tilde{H}_{\tilde{s}_1+(s+1)q,\alpha,q}(R^1_+)$ справедлива оценка

$$\left\langle \tilde{I}_{s,r_1}(w_1,...,w_{r_1}),|p|\right\rangle_{\tilde{s}_1+\frac{q}{2}} \le c\|w_1,|p|\|_{\tilde{s}_1+(s+1)q-1,\alpha,q,|\xi|}, \tag{5.1.27}$$

где функции $w_j,\ j=2,...,r_1$ определяются по функции $w_1(\xi,t)$ с помощью формулы (5.1.2), постоянная $c>0$ не зависит от ξ и функции w_1.

Доказательство. Воспользуемся для доказательства (5.1.27) методом математической индукции по числу r_1. При $r_1=1$ справедливость неравенства (5.1.27) вытекает из леммы 5.1.4.

Предположим, что оценка (5.1.27) справедлива при некотором $r_1=j-1\ge 1$ и покажем, что она справедлива и при $r_1=j$. Учитывая формулу (5.1.8), получим

$$\left\langle \tilde{I}_{s,j}(w_1,...,w_j),|p|\right\rangle_{\tilde{s}_1+\frac{q}{2}} \le \left\langle \tilde{I}_{s,j-1}(w_1,...,w_{j-1}),|p|\right\rangle_{\tilde{s}_1+\frac{q}{2}} +$$
$$+\sum\nolimits'_{j,s-1}\left\langle \lambda_1^{l_1}(\mathrm{p},\xi,0)\cdot...\cdot\lambda_j^{l_j}(\mathrm{p},\xi,0)M_{s-\|l\|_j-j,j}w_j\,|_{t=0},|p|\right\rangle_{\tilde{s}_1+\frac{q}{2}}, \tag{5.1.28}$$

где $\sum'_{j,s-1}$; $|1|_j$ определены в (5.1.6).

Оценивая последнюю сумму в правой части (5.1.28) с помощью теоремы 4 и неравенства Коши - Буняковского, устанавливаем с учётом (5.1.26) неравенство

$$\left\langle \lambda_1^{l_1}(\mathrm{p},\xi,0)\cdot...\cdot\lambda_j^{l_j}(\mathrm{p},\xi,0)M_{s-\|l\|_j-j,j}w_j\Big|_{t=0},|p|\right\rangle_{\tilde{s}_1+\frac{q}{2}} \le$$
$$\le c\,\|\,w_j,|p|\,\|_{\tilde{s}_1+q+(s-j+1)q-1,\alpha,q,|\xi|} \le c_1\,\|\,w_1,|p|\,\|_{\tilde{s}_1+(s+1)q-1,\alpha,q,|\xi|}\,.$$

Используя последнее неравенство в правой части (5.1.28), находим с учётом предположения индукции оценку (5.1.27).

Лемма 5.1.6. Пусть $\tilde{s}_1 \ge 0$ - действительное число, $s \ge 1$ - целое число, $w_1(\xi,t)\in \tilde{H}_{\tilde{s}_1+(s+1)q-1,\alpha,|\xi|}(R^1_+)$. Тогда для оператора $\tilde{E}_{s,l}(\xi)$ справедлива оценка

$$\left\langle \sum_{l=1}^{r_1}\tilde{E}_{s,l}(\xi)w_l\,|_{t=0},|p|\right\rangle_{\tilde{s}_1+\frac{q}{2}} \le c\,\|\,w_1,|p|\,\|_{\tilde{s}_1+(s+1)q-1,\alpha,q,|\xi|}, \tag{5.1.29}$$

где постоянная $c>0$ не зависит от ξ и функции w_1; величины $\tilde{E}_{s,l}(\xi)$ определены (5.1.15).

Доказательство. С помощью формулы Тейлора, учитывая условие 4.1.1, устанавливаем неравенство $|\,z_i(\mathrm{p},\xi,\sqrt{-1})-z_i(\mathrm{p},\xi,0)\,|\le c(|p|^2+|\,\xi\,|^2)^{\frac{1}{2}(q-1)}$ для любого $\xi\in R^{n-1}$.

Отсюда и из (5.1.14) - (5.1.15) выводим

$$\left\langle \sum_{l=1}^{r_1}\tilde{E}_{s,l}(\xi)w_l\,|_{t=0},|p|\right\rangle_{\tilde{s}_1+\frac{q}{2}} \le c\sum_{l=1}^{r_1}\left\langle w_l\,|_{t=0},|p|\right\rangle_{\tilde{s}_1+(s+1-l)q+\frac{q}{2}-1} \le c_1\sum_{l=1}^{r_1}\|\,w_l,|p|\,\|_{\tilde{s}_1+(s+2-l)q-1,\alpha,q,|\xi|}.$$

Из последнего неравенства получаем с помощью (5.1.2) оценку (5.1.29).

Рассмотрим операторы

$$R_i(w_1,...,w_{r_1}) = \sum_{s=0}^{\mu_i} \Lambda^0_{i,s}(\mathrm{p},\xi)(\tilde{I}_{s,r_1}(w_1,...,w_{r_1}) + \sum_{l=1}^{r_1} \tilde{E}_{s,l}(\xi) w_l(\xi,0)), \qquad (5.1.30)$$

где операторы $\tilde{I}_{s,r_1}$, $\tilde{E}_{s,l}$, $\Lambda^0_{i,s}$ определены соответственно в (5.1.8), (5.1.15), (5.1.16), $i = 1,2,...,r_1$.

Следствие 5.1.2. При выполнении условий леммы 5.1.5 для оператора $R_i(w_1,...,w_{r_1})$ справедлива оценка

$$\left\langle R_i(w_1,...,w_{r_1}),|p|\right\rangle_{\tilde{s}_1-m_i-\frac{q}{2}} \le c \, \| \, w_1,|p| \, \|_{\tilde{s}_1-1,\alpha,q,|\xi|}, \qquad (5.1.31)$$

где $\tilde{s}_1 \ge m_i + q$ – действительное число, постоянная $c > 0$ не зависит от w_1, ξ, p.

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что из (5.1.30) вытекает неравенство

$$\left\langle R_i,|p|\right\rangle_{\tilde{s}_1-m_i-\frac{q}{2}} \le c\sum_{s=0}^{\mu_i}\left\{\left\langle \tilde{I}_{s,r_1},|p|\right\rangle_{\tilde{s}_1-qs-\frac{q}{2}} + \sum_{l=1}^{r_1}\left\langle \tilde{E}_{s,l}(\xi) w_l \,|_{t=0},|p|\right\rangle_{\tilde{s}_1-qs-\frac{q}{2}}\right\}.$$

Применив теперь в правой части последнего неравенства оценки (5.1.27), (5.1.29) получим искомое неравенство (5.1.31).

5.2. Построение регуляризатора и доказательство теорем существования и единственности решений общей краевой задаче для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка с параметром

Пусть $z_i(p,t,\xi,\eta)$ $(i = 1,2,...,k) - z -$корни уравнения (23). Тогда из условия 5 следует, что функции $\lambda_i(p,t,\xi,\eta) = z_i(p,t,\xi,\eta + \sqrt{-1})$ удовлетворяют следующему условию.

Условие 5.2.1 Функции $\lambda_i(p,t,\xi,\eta)$ принадлежат $C^\infty(R^n)$ и при всех $t \in R^1_+$, $(\xi,\eta) \in R^n$, $|\xi| + |\eta| > 0$, $\quad p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \dfrac{\pi}{2}, |p| > 0\}$ справедливы неравенства

$$\left|\partial_\eta^j \lambda_i(p,t,\xi,\eta)\right| \le c_1(|p|^2+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}(q-j)},\ i=1,2,...,k,\ j=0,1,2,...,$$

$$\operatorname{Re}\lambda_i(p,t\xi,\eta) \ge c_2(|p|^2+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}q},\ i=r_1+1,...,k,$$

$$-\operatorname{Re}\lambda_i(p,t,\xi,\eta) \ge c_3(|p|^2+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}q},\quad i=1,\ ...,\ r_1,$$

где постоянные $c_i > 0$ $(i=1,2,3)$ не зависят от (p,t,ξ,η).

Заметим, что если функции $z_i(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию 2, то функции $\lambda_i(p,t,\xi,\eta)$ удовлетворяют условию 5.2.1.

По функциям $\lambda_i(p,t,\xi,\eta)$, $i=1,2,...,k$ построим операторы $\tilde{A}_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)$ с помощью формулы (5.1.1). Обозначим

$\hat{A}_j(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t) = F^{-1}_{\xi\to x}[\tilde{A}_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)]$.

Обозначим через $\hat{R}_j(W_{j+1},\Psi_j)$, $j=1,2,...,r_1$ - регуляризатор задачи

$$\begin{cases} \hat{A}_j(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)W_j(x,t) = W_{j+1}(x,t) \\ W_j(x,t)\big|_{t=0} = \psi_j(x);\ \lim\limits_{t\to+\infty} W_j(x,t) = 0, \end{cases} \tag{5.2.1}$$

а через $\hat{R}_j(W_{j+1})$, $j=r_1+1,...,k$ - регуляризатор задачи

$$\begin{cases} \hat{A}_j(p,t,D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)W_j(x,t) = W_{j+1}(x,t) \\ \lim\limits_{t\to+\infty} W_j(x,t) = 0. \end{cases} \tag{5.2.2}$$

Операторы $\hat{R}_j$, $j=1,...,k$ существуют в силу теоремы 16 и 17.

Доказательство теоремы 26. Правый регуляризатор задачи (20), (22), будем искать в виде

$$\hat{R}(F,\vec{G}) = W_1(x,t), \tag{5.2.3}$$

где $F(x,t)\in H_{s-2m,\alpha,q}(R^n_+)$, $\vec{G}=(G_1,G_2,..,G_{r_1})$, $G_i(x)\in H_{s-m_i-\frac{1}{2}q}(R^{n-1})$, $i=1,2,...,r_1$,

а функция $W_1(x,t)$ находится по формулам

$$W_j(x,t) = \hat{R}_j(W_{j+1}(x,t),\Psi_j(x)),\quad j=1,...,r_1, \tag{5.2.4}$$

$$W_j(x,t) = \hat{R}_j(W_{j+1}(x,t)),\quad j=r_1+1,...,k, \tag{5.2.5}$$

$$W_{k+1} = F(x,t), \tag{5.2.6}$$

где функции $\Psi_j,\ j=1,...,r_1$ будут указаны ниже. Обозначим $w_j(\xi,t) = F_{x\to\xi}[W_j(x,t)],\ \psi_j(\xi) = F_{x\to\xi}[\Psi_j(x)],\quad g_i(\xi) = F_{x\to\xi}[G_i(x)]$,

$$\tilde{B}_{i,l}(\mathrm{p},\xi) = \frac{(|p|^2+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}(m_j-q(l-1))}}{|\xi|^{m_i-q(l-1)}} B_{i,l}(\mathrm{p},\xi), \tag{5.2.7}$$

где функции $B_{i,l}(\mathrm{p},\xi)$ определены в (5.1.19)

Выберем теперь функции $\psi_l(\xi),\ l=1,2,...,r_1$ как решения при $|\xi|>0$ системы

$$\sum_{l=1}^{r_1} \tilde{B}_{i,l}(\mathrm{p},\xi)\psi_l(\xi) = g_i(\xi),\quad i=1,2,...,r_1, \tag{5.2.8}$$

где $\hat{g}_i(\xi) = g_i(\xi) - \sum_{j=0}^{\mu_i} \Lambda^0_{i,j}(\mathrm{p},\xi)\tilde{F}_{j,r}(w_{r_1+1})$, а функции $\tilde{F}_{j,r}$, $\Lambda^0_{i,j}$ определены в (5.1.7), (5.1.18).

Из (5.2.7), условия 6 и леммы 5.1.3. получим, что $\det\{\tilde{B}_{i,l}(\xi)\}_{i,l=1}^{r_1} \neq 0$ при $\xi\in R^{n-1},\ |\xi|\neq 0$. Значит, при каждом $\xi\in R^{n-1}, |\xi|\neq 0$ существует единственное решение системы (5.3.8). Это решение запишем в виде

$$\psi_l(\xi) = \sum_{l=1}^{r_1} d_{l,i}(\xi)\hat{g}_i(\xi),\quad l=1,2,...,r_1. \tag{5.2.9}$$

Так как при всех $\xi\in R^{n-1}, |\xi|\neq 0$ справедлива оценка

$$c_1(|p|^2+|\xi|^2)^{m_i-q(l-1)} \le |\tilde{B}_{i,l}(\xi)|^2 \le c_2(|p|^2+|\xi|)^{m_i-q(l-1)},$$

то при всех $\xi\in R^{n-1}, |\xi|\neq 0$ справедливы оценки

$$\tilde{c}_1(|p|^2+|\xi|)^{q(l-1)-m_i} \le |d_{i,l}(\xi)| \le \tilde{c}_2(|p|^2+|\xi|)^{q(l-1)-m_i} \tag{5.2.10}$$

с некоторыми константами $\tilde{c}_1>0$ и $\tilde{c}_2>0$.

Из (5.3.4) - (5.3.6) следует, что функция $W_1(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{A}_k\hat{A}_{k-1}...\hat{A}_1W_1(x,t) + \hat{T}W_1(x,t) = F(x,t), \tag{5.2.11}$$

где $\hat{T}$ - оператор, порядок которого в шкале пространств $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ не превосходит $2m-1$ (то есть его порядок меньше порядка оператора $\hat{A}_k\hat{A}_{k-1}...\hat{A}_1$)

Причём, $\lim\limits_{t\to+\infty} W_1(x,t)=0$.

Из (5.1.13), (5.1.17), (5.1.18) и (5.2.7) получим

$$B_i^0(\mathrm{p},\xi,\partial_t)\,w_1(\xi,t)\big|_{t=0}=\sum_{l=1}^{r_1}\tilde{B}_{i,l}(\mathrm{p},\xi)\psi_l(\xi)+$$

$$+\sum_{l=1}^{r_1}(B_{i,l}(\mathrm{p},\xi)-\tilde{B}_{i,l}(\mathrm{p},\xi))\psi_l(\xi)+\sum_{j=0}^{\mu_i}(\tilde{I}_{j,r_1}(w_1,w_2,....,w_{r_1})+$$

$$+\tilde{F}_{j,r_1}(w_{r_1+1})+\sum_{l=1}^{r_1}\tilde{E}_{i,l}(\xi)\Lambda^0_{i,j}(\mathrm{p},\xi).$$

Отсюда и из (5.2.10) получим

$$\begin{aligned}&B_i^0(\mathrm{p},\xi,\partial_t)\,w_1\big|_{t=0}=g_i(\xi)+R_i(w_1,w_2,...,w_{r_1})+\\&+\sum_{l=1}^{r_1}(B_{i,l}(\mathrm{p},\xi)-\tilde{B}_{i,l}(\mathrm{p},\xi))\psi_l(\xi),\end{aligned}\tag{5.2.12}$$

где оператор $R_i(w_1,w_2,...,w_{r_1})$ определен в (5.1.30).

Из (5.2.12) вытекает, что

$$B_i^0(\mathrm{p},D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)W_1(x,t)\big|_{t=0}=G_i(x)+\tilde{T}_i(F,\vec{G}),\tag{5.2.13}$$

где

$$\tilde{T}_i(F,\vec{G})=F^{-1}_{\xi\to x}[R_i(w_1,w_2,...,w_{r_1})+\sum_{l=1}^{r_1}(B_{i,l}(\mathrm{p},\xi)-\tilde{B}_{i,l}(\mathrm{p},\xi))\psi_l(\xi)]\,.\tag{5.2.14}$$

Покажем, что справедлива оценка

$$\left\|\tilde{T}_i(F,\vec{G}),|p|\right\|_{s-m_i-\frac{q}{2}+1}\le c(\left\|F,|p|\right\|_{s-2m,\alpha,q}+\sum_{j=1}^{r_1}\left\|G_i,|p|\right\|_{s-m_i-\frac{q}{2}}+\left\|W_1,|p|\right\|_{s-1,\alpha,q})\,.\tag{5.2.15}$$

Действительно, из (5.2.7) и (5.1.17) с помощью формулы Тейлора выводим оценку

$$\left\|F^{-1}_{\xi\to x}[(B_{i,l}(\xi,p)-\tilde{B}_{i,l}(\xi,p))],|p|\right\|_{s-m_1-\frac{q}{2}+1}\le c\left\|\Psi_l,|p|\right\|_{s-q(l-1)-\frac{q}{2}}.$$

Отсюда и из следствия 5.1.2 получим

$$\left\|\tilde{T}(F,\vec{G}),|p\right\|_{s-m_i-\frac{q}{2}+1} \le c(\left\|W_1(x,t),|p\right\|_{s,\alpha,q} + \sum_{l=1}^{r_1}\left\|\Psi_l,|p\right\|_{s-q(l-1)-\frac{q}{2}}). \qquad (5.2.16)$$

Из оценки (5.2.16) получим с учётом (5.2.4) - (5.2.6) оценку

$$\left\|\tilde{T}_i(F,\vec{G}),|p\right\|_{s-m_i-\frac{q}{2}+1} \le c(\left\|F,|p\right\|_{s-2m,\alpha,q} + \sum_{i=1}^{r_1}\left\|\Psi_i,|p\right\|_{s-q(i-1)q-\frac{1}{2}q} + \left\|W_1,|p\right\|_{s-1,\alpha,q}). \qquad (5.2.17)$$

Применяя в правой части (5.2.17) равенство (5.2.9) и оценку (5.2.10), получим оценку

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{T}_i(F,\vec{G}),|p\right\|_{s-m_i+1-\frac{q}{2}} \le c(\left\|F,|p\right\|_{s-2m,\alpha,q} + \sum_{l=1}^{r_1}\left\|G_l,|p\right\|_{s-m_l-\frac{1}{2}q} + \\ +\sum_{l=1}^{r_1}\sum_{j=0}^{\mu}\left\|F^{-1}_{\xi\to x}[\Lambda^0_{l,j}(\mathrm{p},\xi)\tilde{F}_{j,r_1}(w_{r_1+1})]\right\|_{s-m_l-\frac{q}{2}} + \left\|W_1\right\|_{s-1,\alpha,q}).\end{aligned} \qquad (5.2.18)$$

Применяя в правой части неравенства (5.2.18) неравенства (5.1.7), (5.2.5), (5.2.6) оценку (5.3.15).

Из (5.2.11), (5.2.13) и (5.2.15) следует, что оператор, построенный в (5.2.4) - (5.2.6), является правым регуляризатором задачи (5.2.11), (22). Отсюда и из теоремы 23 получим, что этот оператор является правым регуляризатором для задачи (20), (22). И так как для этой задачи справедлива априорная оценка (27), то правый регуляризатор является и левым регуляризатором.

Замечание 5.3.1. Из доказательства теоремы 26 следует, что существует регуляризатор для вырождающегося псевдодифференциального уравнения вида (5.2.11) при граничных условиях (22).

Доказательство теоремы 28. В теореме 27 было доказано существование такого оператора

$$\hat{R}: H_{s-2m,\alpha,q}(R^n_+)\times\prod_{j=1}^{r_1} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1}) \to H_{s,\alpha,q}(R^n_+),$$

что

$$\tilde{A}\hat{R}(F,\bar{G}) = (F,\bar{G}) + \tilde{T}(F,\bar{G}),$$

где $\tilde{A}$ - оператор, порожденный задачей (20), (22), а $\tilde{T}$ является ограниченным оператором из $H_{s-2m,\alpha,q}(R_+^n)\times\prod_{j=1}^{r_1}H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1})$ в $H_{s-2m+1,\alpha,q}(R_+^n)\times\prod_{j=1}^{r_1}H_{s-\frac{1}{2}q-m_j+1}(R^{n-1})$.

То есть $T(F,\bar{G})=\{\hat{T}(F,\bar{G}),\tilde{\mathrm{T}}_1(F,\bar{G}),...,\tilde{\mathrm{T}}_{r_1}(F,\bar{G})\}$, где оператор $\hat{T}(F,\bar{G})$ определен в (5.2.11), а операторы $\tilde{\mathrm{T}}_j(F,\bar{G})$, $\mathrm{j}=1,2,...,\mathrm{r}_1$ определены в (5.2.14).

Рассмотрим пространство $\hat{H}_{\alpha,q}^s=H_{s,\alpha,q}(R_+^n)\times\prod_{j=1}^{r_1}H_{\sigma_j}(R^{n-1})$, где $\sigma_j=s-m_j-\dfrac{q}{2}$.

Из (5.2.11) и (5.2.15) получим оценку

$$\left\|T(F,\bar{G}),|p|\right\|_{\hat{H}_{\alpha,q}^{s-2m}}=\left\|\hat{T}(F,\bar{G}),|p|\right\|_{s-2m,\alpha,q}+\sum_{j=1}^{r_1}\left\langle\left\langle\tilde{T}_j(F,\bar{G}),|p|\right\rangle\right\rangle_{s-m_j-\frac{q}{2}}\le$$

$$\le c(\left\|F,|p|\right\|_{s-2m-1,\alpha,q}+\sum_{j=1}^{r_1}\left\langle\left\langle G_j),|p|\right\rangle\right\rangle_{s-m_j-\frac{q}{2}-1}+\left\|\mathrm{w}_1,|p|\right\|_{s-1,\alpha,q}).$$

Используя в этом неравенстве оценку (29), получим при достаточно большом $p_0>0$ и $|p|\ge p_0$ неравенство

$$\left\|T(F,\bar{G}),|p|\right\|_{\hat{H}_{\alpha,q}^{s-2m}}\le c_1\left\|(F,\bar{G}),|p|\right\|_{\hat{H}_{\alpha,q}^{s-2m-1}}\le\frac{c_2}{|p|}\left\|(F,\bar{G}),|p|\right\|_{\hat{H}_{\alpha,q}^{s}}.$$

Так как $|p|\ge p_0>0$. То выбирая $p_0>0$ так, чтобы $\dfrac{c_2}{|p|}<\dfrac{1}{2}$, получим, что норма оператора $T:\hat{H}_{\alpha,q}^s\to\hat{H}_{\alpha,q}^s$ меньше единицы. Значит, существует обратный оператор $(I+T)^{-1}:\hat{H}_{\alpha,q}^s\to\hat{H}_{\alpha,q}^s$. Положим $R(F,\bar{G})=\hat{R}(F,\bar{G})(\mathrm{I}+\mathrm{T})^{-1}$. Тогда

$$\tilde{A}R(F,\bar{G})=\tilde{A}\hat{R}(I+T)^{-1}(F,\bar{G})=(I+T)(I+T)^{-1}(F,\bar{G})=(F,\bar{G}).$$

Таким образом, существование решения доказано.

Кроме того, справедлива оценка

$$\left\| R(F,\bar{G}),|p \right\|_{s-2m,\alpha,q} \le c \left\| (I+T)^{-1}(F,\bar{G}),|p \right\|_{\hat{H}^s_{\alpha,q}} \le c_1 \left\| (F,\bar{G}),|p \right\|_{\hat{H}^s_{\alpha,q}} \le$$

$$\le c_2 \Big(\left\| F,|p \right\|_{s-2m,\alpha,q} + \sum_{j=1}^{r_1} \left\langle \left\langle G_j),|p| \right\rangle \right\rangle_{s-m_j-\frac{q}{2}} \Big).$$

Из этой оценки следует единственность решения.

ГЛАВА 6

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ ПО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В настоящей главе исследуется общая параболическая задача для уравнений высокого порядка с вырождением по пространственной переменной. Частные случаи параболических задач с вырождением по пространственным переменным изучались в работах [37] – [39].

Основой использованного в работе метода служит известная схема М.С. Аграновича и М.И. Вишике [55], связывающая параболические задачи с эллиптическими задачами, содержащими комплексный параметр $p \in Q$, а также результаты работ [56], позволившие провести в главе 4 факторизацию вырождающегося эллиптическогооператора высокого порядка.

Приведенные в работе доказательства относятся лишь к тому случаю, когда пространственные переменные (x, y) изменяются в $R_+^n = \{(x, y) \,|\, \mathrm{x} \in \mathrm{R}^{n-1}, 0 < y < \infty\}$, причем вырождение происходит при $y = 0$. Перенесение полученных здесь результатов на случай вырождения на произвольной гладкой границе $\partial\Omega$ области $\Omega \subset R^n$ осуществляется хорошо известным методом «склеивания» (см. [57], [54], [58]).

6.1. Функциональные пространства

Рассмотрим абстрактные функции $t \to u(\mathrm{t})$ $(\mathrm{t} \in \mathrm{R}^1)$ со значениями в гильбертовом пространстве Y_1. Пусть $u(\mathrm{t}) = 0$ при $t < 0$. Предположим, что существует преобразование Фурье (в смысле теории обобщенных функций) функций $e^{-\gamma t} u(\mathrm{t})$ $(\gamma > 0)$, принадлежащее гильбертовому пространству $Y_0 \supset Y_1$.

Определение 6.1. Будем говорить, что функция $u(\mathrm{t})$ принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^a(\mathrm{Y}_{1,} Y_0)$ $(\mathrm{a} > 0, \gamma > 0)$, если конечна норма

$$\|u(\mathrm{t})\|_{W^{a}_{2,\gamma}(\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_0)} = \tag{6.1.1}$$
$$=\{\int_{R_1}\left\|e^{-\gamma t}u(\mathrm{t})\right\|^2_{Y_1}dt+\int_{R_1}|\gamma+i\tau|^{2a}\left\|F_{t\to\tau}[\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{u}]\right\|^2_{Y_0}d\tau\}^{1/2}.$$

Используя известные свойства преобразования Лапласа $V(\mathrm{p})=\mathrm{V}(\mathrm{p}+\mathrm{i}\,\tau)=\mathrm{F}_{t\to\tau}[\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{u}(\mathrm{t})](\mathrm{p}>\gamma)$ обобщенных функций (см. [55],[47]), можно ввести в пространстве $W^{a}_{2,\gamma}(\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_0)$ новую эквивалентную норму

$$\|u\|_{W^{a}_{2,\gamma}(\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_0)} = \tag{6.1.2}$$
$$=\{\sup_{\rho>\gamma}\int_{\mathrm{Re}\,p=\rho}[\|V(\mathrm{p})\|^2_{Y_1}+|p|^{2a}\|V(\mathrm{p})\|^2_{Y_0}]dp\}^{1/2}.$$

Обозначим через $E^{a}_{2,\gamma}(\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_0)$ $(\mathrm{a}>0,\gamma>0)$ множество функций $V(\mathrm{p})$ со значениями в гильбертовом пространстве $Y_1\subset Y_0$, аналитических в полуплоскости $\mathrm{Re}\,p>\gamma$ и таких, что конечна норма (6.1.2).

Известно, что преобразование Лапласа устанавливает взаимно-однозначное и взаимно непрерывное соответствие между пространствами $W^{a}_{2,\gamma}(\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_0)$ и $E^{a}_{2,\gamma}(\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_0)$ (см. [55] и [39]).

Далее рассмотрим абстрактные функции $t\to u(\mathrm{t}),\mathrm{t}\in\mathrm{R}^1$ со значениями в гильбертовом пространстве Y_1 такие, что при некотором $a\geq 0$ существуют сильные производные $\partial^j_t[\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{u}]$ в гильбертовом пространстве $Y_0\supset Y_1$ до порядка $j\leq[\mathrm{a}]$.

Определение 6.2. Будем говорить, что функция $u(\mathrm{t})$ принадлежит пространству $\hat{W}^{a}_{2,\gamma}(\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_0)$, $a>0,\gamma\geq 0$ если конечна норма

$$\|u\|^2_{\hat{W}_{2,\gamma}(\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_0)}=\int_{R_1^+}\left\{\left\|e^{-\gamma t}u(\mathrm{t})\right\|^2_{Y_1}+\sum_{j=0}^{[\mathrm{a}]}\left[\partial^j_t\left\|e^{-\gamma t}u(\mathrm{t})\right\|^2_{Y_0}+\int_{R_1^+}\frac{\left\|\partial^j_t(e^{-\gamma t}u(\mathrm{t}))-\partial^j_h(e^{-\gamma t}u(\mathrm{t}))\right\|^2_{\gamma_0}}{|t-h|^{1+2\{a\}}}dh\right]\right\}dt \tag{6.1.3}$$

В случае $a=[\mathrm{a}]$ последняя сумма в первой части (6.1.3) опускается.

Используя в определениях пространств $W_{2,\gamma}^{a}(\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_0)$, $\hat{W}_{2,\gamma}^{a}(\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_0)$, $E_{2,\gamma}^{a}(\mathrm{Y}_1,\mathrm{Y}_0)$ в качестве Y_1 и Y_0 пространства, введенные в главе 1, можно построить ряд новых пространств, используемых в дальнейшем. Нормы в этих пространствах могут быть получены из (6.1.1), (6.1.2), (6.1.3) с помощью подстановки в эти формулы норм конкретных пространств Y_1 и Y_0. Таким образом вводятся следующие пространства

$$H_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,q)}^{s}\left(R_{++}^{n+1}\right)=W_{2,\gamma}^{\frac{s}{r}}\left(H_{\mathrm{s},\alpha,q}\left(R_{+}^{n}\right),\mathrm{L}_2\left(R_{+}^{n}\right)\right),$$

$$\hat{H}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,q)}^{s}\left(R_{++}^{n+1}\right)=\hat{W}_{2,\gamma}^{\frac{s}{r}}\left(H_{\mathrm{s},\alpha,q}\left(R_{+}^{n}\right),\mathrm{L}_2\left(R_{+}^{n}\right)\right),$$

$$H_{(\mathrm{r},\gamma)}^{s}\left(R^{n}\right)=W_{2,\gamma}^{\frac{s}{r}}\left(H_{\mathrm{s}}\left(R^{n-1}\right),\mathrm{L}_2\left(R^{n-1}\right)\right),$$

$$\hat{H}_{(\mathrm{r},\gamma)}^{s}\left(R_{+}^{n}\right)=\hat{W}_{2,\gamma}^{\frac{s}{r}}\left(H_{\mathrm{s}}\left(R^{n-1}\right),\mathrm{L}_2\left(R^{n-1}\right)\right),$$

$$E_{(\mathrm{r},\alpha,q)}^{s}\left(Q_{\gamma}\times R_{+}^{n}\right)=E_{2,\gamma}^{\frac{s}{r}}\left(H_{(\mathrm{s},\alpha,q)}\left(R_{+}^{n}\right),\mathrm{L}_2\left(R_{+}^{n}\right)\right),$$

$$E_{(\mathrm{r})}^{s}\left(Q_{\gamma}\times R^{n-1}\right)=E_{2,\gamma}^{\frac{s}{r}}\left(H_{s}\left(R^{n-1}\right),\mathrm{L}_2\left(R^{n-1}\right)\right),$$

где $s\ge 0; q,r>1$. Через Q_{γ} обозначается множество

$$Q_{\gamma}=\left\{p \mid p\in C, \operatorname{Re} p>\gamma\ge 0\right\} \tag{6.1.5}$$

на комплексной плоскости C.

Нормы в пространствах $H_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,q)}^{s}\left(R_{++}^{n+1}\right)$, $\hat{H}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,q)}^{s}\left(R_{++}^{n+1}\right)$, $\mathrm{E}_{(\mathrm{r},\alpha,q)}^{s}\left(Q_{\gamma}\times R_{+}^{n}\right)$ обозначаются соответственно через $\|\cdot\|_{s,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}$, $\|\cdot\|_{s,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}^{+}$ и $|||\cdot|||_{s,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}$; нормы в пространствах $H_{(\mathrm{r},\gamma)}^{s}\left(R^{n}\right)$, $\hat{H}_{(\mathrm{r},\gamma)}^{s}\left(R^{n}\right)$, $\mathrm{E}_{(\mathrm{r})}^{s}\left(Q_{\gamma}\times R^{n-1}\right)$ обозначаются через $\left\langle\left\langle\cdot\right\rangle\right\rangle_{s,(\mathrm{r},\gamma)}$, $\left\langle\left\langle\cdot\right\rangle\right\rangle_{s,(\mathrm{r},\gamma)}^{+}$ и $\left\langle\left\langle\left\langle\cdot\right\rangle\right\rangle\right\rangle_{s,(\mathrm{r},\gamma)}$ соответственно.

Нам понадобятся нормы в пространствах $H^s(\mathrm{R}^{n-1}),\ \mathrm{H}_{s,\alpha,q}(\mathrm{R}^n_+)$, зависящие от параметра $|p|^{\frac{1}{r}},\ p\in C;\mathrm{r}>1$.

Норма в пространстве $H^s_{(\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^n_+)$

$$\left\| u;|p|^{\frac{1}{r}} \right\|_{s,(\alpha,q)} = \left\{ \int\limits_{R^{n-1}} \left(\left\| J^s_\alpha u \right\|^2_{H^0(\mathrm{R}^1_+)} + |p|^{\frac{2s}{r}} \left\| u \right\|^2_{H^0(\mathrm{R}^1_+)} \right) dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{6.1.6}$$

где $J^s_\alpha\left(1,D_\alpha,D_{\alpha,y}\right)v = F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}\left[\left(1+|\xi|^2+\eta^2\right)^{\frac{s}{2}} F_\alpha F_{x\to\xi}\left[v\right]\right]$ эквивалентна норме (4) с заменой параметра $|p|$ на $|p|^{\frac{1}{r}}$.

Норма в пространстве $H^s(\mathrm{R}^{n-1})$

$$\left\langle\left\langle w;|p|^{\frac{1}{r}} \right\rangle\right\rangle_s = \left\{ \left\langle\left\langle w \right\rangle\right\rangle^2_s + |p|^{2\frac{s}{r}} \left\langle\left\langle w \right\rangle\right\rangle^2_0 \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{6.1.7}$$

эквивалентна норме в пространстве $H^s(R^{n-1})$ при каждом значении параметра $|p|^{\frac{1}{r}}$.

Приведем необходимые нам в дальнейшем утверждения, являющиеся частными случаями соответствующих утверждений работы [54].

Лемма 6.1.1. Пусть $s\geq 0; r,q>1$. Для любой функции $u(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{y})\in \mathrm{H}^s_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,q)}(\mathrm{R}^{n+1}_+)$ производная $\partial^\mu_t D^\delta_x D^\nu_{\alpha y}\partial^\chi_y u$ принадлежит пространству $\mathrm{H}^{s-s_1}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,q)}(\mathrm{R}^{n+1}_+)$ при $s_1 = r\mu+|\delta|+\nu+q\chi<s$ и справедлива оценка

$$\left\|\partial^\mu_t D^\delta_x D^\nu_{\alpha y}\partial^\chi_y u\right\|_{s-s_1,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})} \leq c\left\|u\right\|_{s,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}. \tag{6.1.8}$$

Лемма 6.1.2. Пусть $s\geq 0; r,q>1$. Для любой функции $u(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{y})\in \mathrm{H}^s_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,q)}(\mathrm{R}^{n+1}_+)$ определено значение $\partial^\mu_t D^\delta_x \partial^\chi_y u\,|_{y=+0}\in H^{s-s_2}_{(\mathrm{r},\gamma)}(\mathrm{R}^n)$ при $s_2 = r\mu+|\delta|+q\chi+\frac{1}{2}q,\ s-s_2>0$ и справедлива оценка

$$\left\langle\left\langle \partial_t^{\mu} D_x^{\delta} \partial_y^{\chi} u\,|_{y=+0} \right\rangle\right\rangle_{s-s_2,(\mathrm{r},\gamma)} \le c\left\langle\left\langle u \right\rangle\right\rangle_{s,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}. \tag{6.1.9}$$

Лемма 6.1.3. Пусть $s \ge 0;\ r,\ q > 1$ и числа $\dfrac{s}{q}$ и $\dfrac{s}{r}$ – целые. Для любой функции $u \in \overset{\wedge}{\mathrm{H}}{}^{s}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,q)}(\mathrm{R}^{n+1}_{++})$ определено значение $\partial_t^{\mu} u\,|_{t=0} \in H^{s-\mu r-\frac{1}{2}r}_{(\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^{n}_{+})$ при $0 \le \mu < \dfrac{s}{r} - \dfrac{1}{2}$ и справедлива оценка

$$\left\| \partial_t^{\mu}\, \mathrm{u}\,|_{t=+0} \right\|_{s-\mu r-\frac{1}{2}r,(\alpha,\mathrm{q})} \le c\left\| u \right\|^{+}_{s,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}. \tag{6.1.10}$$

Лемма 6.1.4. Для функций из пространств $\overset{s}{\mathrm{H}}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,q)}(\mathrm{R}^{n+1}_{+})$, $\overset{\wedge}{\mathrm{H}}{}^{s}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,q)}(\mathrm{R}^{n+1}_{++})$, $\mathrm{s} > 0$ операции взятия обобщенной производной $D_x^{\delta} D_{\alpha y}^{\nu} \partial_y^{x}$ при $|\delta| + |\nu| + qx \le s$ и преобразования Лапласа перестановочны.

Лемма 6.1.5. Для функций из пространств $\overset{s}{\mathrm{H}}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,q)}(\mathrm{R}^{n+1}_{+})$, $\overset{\wedge}{\mathrm{H}}{}^{s}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,q)}(\mathrm{R}^{n+1}_{++})$ при $\mathrm{s} > \dfrac{q}{2}$ операции сужения на гиперплоскость $y = 0$ и преобразования Лапласа перестановочны.

Лемма 6.1.6. Пусть $s \ge 0; r, q > 1$. Если функция $V(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y})$ принадлежит $E^{s}_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{Q}_{\gamma} \times \mathrm{R}^{n}_{+})$, то функция $p^{\mu} D_x^{\delta} D_{\alpha y}^{\nu} \partial_y^{\chi} V(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y})$ принадлежит $E^{s-s_3}_{(\mathrm{r},\alpha,q)}$ при $s_3 = r\mu + |\delta| + \nu + q\chi < s$ и выполняется оценка

$$\left\|\left| p^{\mu} D_x^{\delta} D_{\alpha y}^{\nu} \partial_y^{\chi} V \right|\right\|_{s-s_{3,}\,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})} \le c\left\|\left| V \right|\right\|_{s,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}.$$

Лемма 6.1.7. Пусть $s > 0$. Если функция $V(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y})$ принадлежит $E^{s}_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{Q}_{\gamma} \times \mathrm{R}^{n}_{+})$, то функция $p^{\mu} D_x^{\delta} \partial_y^{\chi}\, \mathrm{V}\,|_{y=+0}$ принадлежит пространству $E^{s-s_4}_{(\mathrm{r})}(\mathrm{Q}_{\gamma} \times \mathrm{R}^{n-1})$ при $s_4 = r\mu + |\delta| + q\chi + \dfrac{1}{2}q < s$ и выполняется оценка

$$\left\langle\left\langle\left\langle p^{\mu} D_x^{\delta} \partial_y^{\chi}\, \mathrm{V}\,|_{y=+0} \right\rangle\right\rangle\right\rangle_{s-s_{4,}\,(\mathrm{r},\gamma)} \le c\left\|\left| V \right|\right\|_{s,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}.$$

Лемма 6.1.8. В пространстве $\overset{s}{\mathrm{H}}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,q)}(\mathrm{R}_{+}^{n+1})$ $(\overset{s}{\mathrm{H}}_{(\mathrm{r},\gamma)}(\mathrm{R}^{n}))$ множество бесконечно дифференцируемых в $R_1 \times \overline{R}_{+}^{n}$ $(\mathrm{R}^1 \times \mathrm{R}^{n-1})$, финитных по $t \in R^1, y \in R_{+}^1, x \in R^{n-1}$ функций образует всюду плотное множество.

Лемма 6.1.9. В пространстве $E_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}^{s}(\mathrm{Q}_{\gamma} \times \mathrm{R}_{+}^{n})$ $(E_{(r)}^{s}(\mathrm{Q}_{\gamma} \times \mathrm{R}^{n-1}))$ множество бесконечно-дифференцируемых по $(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{R}^{n-1} \times R_{+}^{1}$ и целых аналитических по $p \in C$ функций, принадлежащих $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}^{k}(\mathrm{Q}_{\gamma} \times \mathrm{R}_{+}^{n})$ $(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{(r)}^{k}(\mathrm{Q}_{\gamma} \times \mathrm{R}^{n-1}))$, образует всюду плотное множество.

6.2. Основные результаты

В области $\Omega = \left\{(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{y}) \,|\, 0 < \mathrm{t} < \infty, \mathrm{x} \in \mathrm{R}^{n-1}, 0 < y < \infty\right\}$ рассматривается начально-краевая задача

$$A\left(y,\partial_t,D_x,D_{\alpha y},\partial_y\right)u = F\left(t,x,y\right); \tag{6.2.1}$$

$$B_j\left(\partial_t,D_x,\partial_y\right)u\,|_{y=+0} = G_j(\mathrm{t},\mathrm{x}),\ \mathrm{j}=1,2,...,\mathrm{r}_1; \tag{6.2.2}$$

$$\partial_t^{\mu} u\,|_{t=+0} = \Phi_{\mu}(\mathrm{x},\mathrm{y}),\ \mu = 0,1,...,\mathrm{l}-1, \tag{6.2.3}$$

где операторы A, B_j $(\mathrm{j}=1,...,\mathrm{r}_1)$ – линейные дифференциальные операторы с символами

$$A(\mathrm{p},\xi,\eta,\mathrm{z}) \equiv \sum_{r\mu+|\delta|+\nu+q\chi \le 2m} a_{\mu\delta\nu x}(y)\, p^{\mu}\xi^{\delta}\eta^{\nu}z^{\chi};$$

$$\mathrm{B}_j(\mathrm{p},\xi,\mathrm{z}) \equiv \sum_{r\mu+|\delta|+q\chi \le m_j} b_{j\mu\delta x}\, p^{\mu}\xi^{\delta}z^{\chi},\ j=1,2,...,r_1;$$

$a_{\mu\delta\nu\chi}(\mathrm{y})$ –бесконечно дифференцируемые ограниченные функции, $\mathrm{b}_{j\mu\delta\chi}$ - комплексные числа, $q = \dfrac{2m}{k} > 1,\ r = \dfrac{2m}{l} > 1;\ m,k,l$ - натуральные числа, m_j $(\mathrm{j}=1,2,...\mathrm{r}_1)$, r_1 - целые неотрицательные числа, $r_1 \le k,\ a_{00k}(y) \equiv 1,\ a_{l000}(y) \ne 0$ при всех $y \in R_{+}^{1}$. Обозначим через $\sigma_j = s - m_j - \dfrac{q}{2}$.

Сформулируем основные условия, которым удовлетворяют операторы задачи.

Условие 6.2.1. При всех $(\xi,\eta)\in \mathrm{R}^n$, $y\in R^1_+$ и комплексных p, принадлежащих множеству $Q=\left\{p:\left|\arg p\right|<\dfrac{\pi}{2},\left|p\right|>0\right\}$ для $z_j(\mathrm{y,p},\xi,\eta)$ $(\mathrm{j}=1,2,...,\mathrm{k})$, являющихся корнями многочлена

$$A_0(\mathrm{y,p},\xi,\eta,\mathrm{z})=\sum_{r\mu+|\delta|+\nu+q\chi=2m} a_{\mu\delta\nu x}(\mathrm{y})p^{\mu}\xi^{\delta}\eta^{\nu}z^{\chi}$$

выполнены условия:

а) $\operatorname{Re} z_j(\mathrm{y,p},\xi,\eta)\neq 0,\ (\mathrm{j}=1,...,\mathrm{k})$;

б) функции $z_j(\mathrm{y,p},\xi,\eta)$ $(\mathrm{j}=1,...,\mathrm{k})$ являются бесконечно-дифференцируемыми функциями по η.

Пусть $z_j(\mathrm{y,p},\xi,\eta)$ $(\mathrm{j}=1,...\mathrm{r}_1)$ – корни многочлена $A_0(\mathrm{y,p},\xi,\eta,\mathrm{z})$, лежащие в левой полуплоскости; остальные $(\mathrm{k}-r_1)$ корней $z_{r_1+1},z_{r_1+2},...z_k$ этого многочлена в силу условия 6.2.1 лежат в правой полуплоскости при всех $(\xi,\eta)\in\mathrm{R}^n, p\in Q$ $(0\le r_1\le \mathrm{k}, \dfrac{2m}{q}=\mathrm{k}-$степень многочлена A_0 по z.

Условие 6.2.2. При всех $\xi\in R^{n-1}, p\in Q$ многочлены

$$\mathrm{B}_j^0(\mathrm{p},\xi,\mathrm{z})\equiv\sum_{r\mu+|\delta|+qx=m_j} b_{j\mu\delta x}p^{\mu}\xi^{\delta}z^{x},\ \ j=1,...\mathrm{r}_1$$

линейно независимы по модулю многочлена

$$G_{r_1}^0(\mathrm{y,p},\xi,\mathrm{z})\equiv\prod_{j=1}^{r_1}(\mathrm{z}-\mathrm{z}_j(\mathrm{y,p},\xi,0))\,.$$

Если все функции $\Phi_{\mu}(\mathrm{x,y})$ $(\mu=0,1,...\mathrm{l}-1)$ тождественно равны нулю, то, как известно, с помощью преобразования Лапласа задача (6.2.1)-(6.2.2) может быть сведена к эквивалентной ей задаче вида

$$A(\mathrm{y,p},\mathrm{D}_x,\mathrm{D}_{\alpha y},\mathrm{D}_y)\mathrm{V}(\mathrm{p,x,y})=\mathrm{F}(\mathrm{p,x,y}),\ (\mathrm{x,y})\in\mathrm{R}^n_+; \tag{6.2.4}$$

$$\mathrm{B}_j(\mathrm{p},\mathrm{D}_x,\mathrm{D}_y)\mathrm{V}(\mathrm{p,x,y})|_{y=+0}=G_j(\mathrm{p,x}),\ \mathrm{j}=1,...\mathrm{r}_1,\ \mathrm{x}\in\mathrm{R}^{n-1},; \tag{6.2.5}$$

где $p=\rho+i\tau-$ комплексный параметр.

Теорема 6.2.1. Пусть $s\geq 2m+\max m_j+\frac{1}{2}\max\{q,r\}, 1\leq j\leq r_1$, s– кратно 2m, и выполнены условия 1, 6.2.1 и 6.2.2, $p\in Q_\gamma$ Тогда существует $\gamma_0\geq 0$ такое, что при $\gamma>\gamma_0$ для любого решения $V(\mathrm{p,x,y})\in \mathrm{E}^s_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\bar{Q}_\gamma\times \mathrm{R}^n_+)$ задачи (6.2.4)-(6.2.5) справедлива априорная оценка

$$\left\|\left|V\right\|\right|_{s,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}\leq c\left\{\left\|\left|F\right\|\right|_{s-2m,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}+\sum_{j=1}^{r_1}\left\langle\left\langle\left\langle G_j\right\rangle\right\rangle\right\rangle_{\sigma_j,(\mathrm{r},\gamma)}\right\} \tag{6.2.6}$$

с константой $c>0$, не зависящей от p и функций F,V,G_j $(\mathrm{j}=1,2,...,\mathrm{r}_1)$.

Здесь $\sigma_j=s-m_j-\frac{q}{2}$.

Доказательство. В силу определения пространства $\mathrm{E}^s_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(Q_\gamma\times \mathrm{R}^n_+)$ при почти всех $p\in Q$ функция $V(\mathrm{p,x,y})$ принадлежит $H_{s,\alpha,q}(\mathrm{R}^n_+)$. Выберем теперь функцию $p=\zeta^r$ таким образом, что $\left|\arg\zeta\right|<\omega=\frac{\pi}{2r}$. Тогда из условий 6.2.1 и 6.2.2 следует, что многочлены по z $A_0(\zeta^r,\xi,\eta,\mathrm{z}), \left\{B_j^0(\zeta^r,\xi,\mathrm{z})\right\}_{j=1}^{r_1}$ удовлетворяют условиям 4-6 при $\zeta\in Q^\omega=\left\{\zeta\in C:\ \left|\arg\zeta\right|<\omega=\frac{\pi}{2r},\left|\zeta\right|>0\right\}$.

Так как $\left|\zeta\right|=\left|p\right|^{\frac{1}{r}}$, то из теоремы 25 выводим, что существует такое число $\gamma_0>0$, что при всех $\operatorname{Re}p>\gamma_0$ справедлива априорная оценка

$$\left\|V;\left|p\right|^{\frac{1}{r}}\right\|^2_{s,(\alpha,\mathrm{q})}\leq c\left\{\left\|F;\left|p\right|^{\frac{1}{r}}\right\|^2_{s-2m,(\alpha,\mathrm{q})}+\sum_{j=1}^{r_1}\left\langle\left\langle G_j;\left|p\right|^{\frac{1}{r}}\right\rangle\right\rangle^2_{\sigma_j}\right\}, \tag{6.2.7}$$

где постоянная $c>0$ не зависит от p,V,F и G_j, $j=1,...,\mathrm{r}_1$.

Заметим, что из лемм 6.1.7 и 6.1.8 вытекает, что $F=AV\in E^{s-2m}_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{Q}_\gamma\times \mathrm{R}^n_+)$ и $G_j=B_jV\,|_{y=+0}\in E^{\sigma_j}_{(\mathrm{r})}(\mathrm{Q}_\gamma\times \mathrm{R}^{n-1})$.

Проинтегрировав оценку (6.2.7) по $\operatorname{Re} p = \rho > \gamma$ и вычислив точные верхние границы по $\operatorname{Re}\rho > \gamma > \gamma_0$, получим требуемое неравенство (6.2.6).

Теорема 6.2.2. В условиях теоремы 6.2.1 при каждом $p \in Q_\gamma$ существует оператор $\Re$:

$$E^{s-2m}_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\bar{Q}_\gamma \times \mathrm{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{r_1} E^{\sigma_j}_{(\mathrm{r})}(\bar{Q}_\gamma \times \mathrm{R}^{n-1}) \to E^{s}_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\bar{Q}_\gamma \times \mathrm{R}^n_+),$$

такой, что

$$A\Re\left\{F;\bar{\mathrm{G}}\right\} = F,\ \mathrm{B}_j\,\Re\left\{F;\bar{\mathrm{G}}\right\}|_{y=+0} = G_j,\ j = 1,...,r_1,\ \bar{G} = \left\{G_1,...,G_{r_1}\right\}.$$

Доказательство. Из теоремы 27 следует существование при каждом $p : \operatorname{Re} p = \gamma > \gamma_0 > 0$ операторов $\hat{R}$ и $\hat{R}_0$ таких, что

$$\hat{R} : H_{s-2m,\alpha,q}(\mathrm{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{r_1} H_{\sigma_j}(\mathrm{R}^{n-1}) \to \mathrm{H}_{s,\alpha,q}(\mathrm{R}^n_+),$$

$$A\hat{R}\left\{F,\vec{G}\right\} = F;\ B_j\,\hat{R}\left\{F,\vec{G}\right\}|_{y=+0} = G_j,\ j = 1,...,r_1,$$

где $\sigma_j = s - m_j - \dfrac{q}{2}$.

Причем в силу теоремы 25 имеет место оценка:

$$\left\| V; |p|^{\frac{1}{r}} \right\|^2_{s,\alpha,\mathrm{q}} \le c\left\{ \left\| F; |p|^{\frac{1}{r}} \right\|^2_{s-2m,\alpha,\mathrm{q}} + \sum_{j=1}^{r_1} \left\langle\left\langle G_j; |p|^{\frac{1}{r}} \right\rangle\right\rangle^2_{\sigma_j,} \right\} \qquad (6.2.7)$$

Далее возьмем функции $F(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y})$, $\bar{G} = (\mathrm{G}_j(\mathrm{p},\mathrm{x}))_{j=1}^{r_1}$, такие, что:

а) $F(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y})$ является целой аналитической по $p \in Q_{\gamma_0}$, бесконечно-дифференцируемой функцией $(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{R}^n_+$ и принадлежит $\bigcap\limits_s E^s_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\bar{Q}_\gamma \times \mathrm{R}^n_+)$;

б) функции $G_j(\mathrm{p},\mathrm{x})$ являются целыми аналитическими функциями $p \in Q_{\gamma_0}$, бесконечно дифференцируемыми функциями $x \in R^{n-1}$, принадлежащими $\bigcap_{\sigma} E^{\sigma}_{(\mathrm{r})}(Q_\gamma \times \mathrm{R}^{n-1})$.

При выбранных правых частях $\{\mathrm{F},\bar{\mathrm{G}}\}$ и $p \in Q_\gamma, \gamma > \gamma_0$ решение $V = \hat{R}\{\mathrm{F},\bar{\mathrm{G}}\}$ будет принадлежать $H_{s,\alpha,q}(\mathrm{R}^n_+)$ и может быть также предоставлено в виде $V = \hat{R}_0\{\mathrm{F},\bar{G}\}$. Для этого решения будет справедлива оценка (6.2.7). По построению пространство $H_{s,\alpha,q}(\mathrm{R}^n_+)$ вложено в пространство С.Л. Соболева $H^{\frac{ks}{2m}}(\mathrm{R}^n_+)$ и для нормы $\|V(\mathrm{p},\cdot,\cdot)\|^{+}_{\frac{sk}{2m}}$ в этом пространстве справедлива оценка

$$\|V(\mathrm{p},\cdot,\cdot)\|^{+}_{\frac{sk}{2m}} \le c\left\|V(\mathrm{p},\cdot,\cdot);|p|^{\frac{1}{r}}\right\|_{s,\alpha,q} \tag{6.2.8}$$

с постоянной c>0 , не зависящей от p. При выполнении условия $\frac{ks}{2m} \ge s + \frac{n}{2} + 1$ пространство С.Л. Соболева $H^{\frac{ks}{2m}}(\mathrm{R}^n_+)$ вложено в пространство $C^s(\bar{\mathrm{R}}^n_+)$ (см. [59], [60]), причем выполняется оценка

$$\sum_{|\delta|+\chi \le s} \sup_{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{R}^n_+} \left|D^{\delta}_x D^{\chi}_y V(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y})\right| \le c_1 \|V(\mathrm{p},\cdot,\cdot)\|^{+}_{\frac{ks}{2m}} \tag{6.2.9}$$

Объединяя оценки (6.2.8) и (6.2.9), находим, что

$$\sum_{|\delta|+\chi \le s} \sup_{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{R}^n_+} \left|D^{\delta}_x D^{\chi}_y V(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y})\right| \le c\ c_1 \left\|V(\mathrm{p},\cdot,\cdot);|p|^{\frac{1}{r}}\right\|_{s,\alpha,q},$$

причем постоянные $c > 0$ и $c_1 > 0$ не зависят от p. Из последнего неравенства, в частности, вытекает также оценка

$$\sum_{\chi \le s} \sup_{(\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{R}^n_+} \left|D^{\chi}_{\alpha y} V(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y})\right| \le c\left\|V(\mathrm{p},\cdot,\cdot);|p|^{\frac{1}{z}}\right\|_{s,\alpha,q} \tag{6.2.10}$$

если функция $\alpha(\mathrm{y})$ удовлетворяет условию 1 при $N \ge s$.

Запишем также частный случай неравенства (6.2.10)

$$\sup_{(\mathrm{x},\mathrm{y})\in \mathrm{R}_+^n} |V(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y})| \le c_0 \qquad (6.2.11)$$

Обозначим через $A^{'}$ и $B_j^{'}$ операторы, получаемые из операторов A и B_j дифференцированием коэффициентов этих операторов по p, а через $F^{'}$ и $G_j^{'}$ обозначим $\dfrac{\partial F}{\partial p}$ и $\dfrac{\partial G_j}{\partial p}(\mathrm{j}=1,...,\mathrm{r}_1)$ соответственно. Рассмотрим задачу

$$A(\mathrm{p})\,\mathrm{V}'(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{F}'(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y}) - \mathrm{A}'(\mathrm{p})\,\mathrm{V}(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y})\,; \qquad (6.2.12)$$

$$B_j(\mathrm{p})\,\mathrm{V}'(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y})\,|_{y=+0} = G'_j(\mathrm{p},\mathrm{x}) - \mathrm{B}'_j(\mathrm{p})\,\mathrm{V}(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y}),\ \mathrm{j}=1,...,\mathrm{r}_1 \qquad (6.2.13)$$

относительно неизвестной функции $\mathrm{V}'(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y})$. Здесь $p\in Q_\gamma$, $V(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y})\in \mathrm{H}_{s,\alpha,q}(\mathrm{R}_+^n)$ решение задачи (6.2.4)-(6.2.5). В силу результатов работы [24] получим, что

$$A'V \in H_{s-2m,\alpha,q}(\mathrm{R}_+^n);\ \mathrm{B}'_j V\,|_{y=+0} \in H^{\sigma_j}(\mathrm{R}_{n-1})\ (\sigma_j = \mathrm{s}-\mathrm{m}_j - \frac{1}{2}\mathrm{q},\ \mathrm{j}=1,2,...,\mathrm{r}_1).$$

Таким образом, правые части (6.2.12) и (6.2.13) принадлежат соответственно $H_{s-2m,\alpha,q}(\mathrm{R}_+^n)$ и $H^{\sigma_j}(\mathrm{R}^{n-1})$. Следовательно, задача (6.2.12)-(6.2.13) имеет единственное решение $V'(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y})\in H_{s-2m,\alpha,q}(\mathrm{R}_+^n)$ при любом $p\in Q_\gamma(\gamma>\gamma_0)$.

Докажем равенство $V'(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y}) = \dfrac{\partial V}{\partial p}$ при $p\in Q_\gamma$. Для этого зафиксируем $p\in Q_\gamma$ и возьмем приращение Δp настолько малым, чтобы $p+\Delta p\in Q_\gamma$. Введем следующие обозначения:

$$\Delta A = A(\mathrm{p}+\Delta p) - \mathrm{A}(\mathrm{p})\,; \Delta B_j = B_j(\mathrm{p}+\Delta p) - B_j(\mathrm{p})\ \ ; \Delta V = V(\mathrm{p}+\Delta p) - V(\mathrm{p})$$

Поскольку $A(\mathrm{p}+\Delta p)\,\mathrm{V}(\mathrm{p}+\Delta p) - \mathrm{A}(\mathrm{p})\,\mathrm{V}(\mathrm{p}) = \Delta A\,\mathrm{V}(\mathrm{p}+\Delta p) + A(\mathrm{p})\Delta\,\mathrm{V}(\mathrm{p})$, то $\mathrm{A}(\mathrm{p})\Delta\,\mathrm{V} = \Delta F - \Delta A\,\mathrm{V}(\mathrm{p}+\Delta p)$

Аналогично устанавливаем соотношения

$$B_j(\mathrm{p})\Delta V\,|_{y=+0} = \Delta G_j - \Delta B_j\,\mathrm{V}(\mathrm{p}+\Delta p)\,|_{y=+0},\ j=1,...,r_1.$$

Отсюда и из (6.2.12) находим

$$\mathrm{A(p)}(\frac{\Delta V}{\Delta p}-\mathrm{V'})=(\frac{\Delta F}{\Delta p}-F')-(\frac{\Delta A}{\Delta p}-A')\,\mathrm{V}(\mathrm{p}+\Delta p)-\mathrm{A'}\Delta V\ ;$$

$$B_j(\mathrm{p})(\frac{\Delta V}{\Delta p}-\mathrm{V'})\,|_{y=+0}=(\frac{\Delta G_j}{\Delta p}-G_j\,')-(\frac{\Delta B_j}{\Delta p}-B_j\,')\,\mathrm{V}(\mathrm{p}+\Delta p)\,|_{y=+0}-\mathrm{B'}_j\,\Delta V\,|_{y=+0}\,.$$

Для оценки $\frac{\Delta V}{\Delta p}-\mathrm{V'}$ применим неравенство (6.2.11) и априорную оценку (6.2.7). Тогда получим

$$\left|\frac{\Delta V}{\Delta p}-\mathrm{V'}\right|\le c\{\left\|\frac{\Delta F}{\Delta p}-F'\right\|_{s-2m,\alpha,\mathrm{q}}+\sum_{j=1}^{r_1}\left\langle\!\left\langle\frac{\Delta G_j}{\Delta p}-G_j\,'\right\rangle\!\right\rangle_{\sigma_j}+\left\|(\frac{\Delta A}{\Delta p}-A')\,\mathrm{V}(\mathrm{p}+\Delta p)\right\|_{s-2m,\alpha,\mathrm{q}} \tag{6.2.14}$$
$$+\left\|A'(\mathrm{p})\Delta V\right\|_{s-2m,\alpha,\mathrm{q}}+\sum_{j=1}^{r_1}\left\langle\!\left\langle(\frac{\Delta B_j}{\Delta p}-B_j\,')\,\mathrm{V}(\mathrm{p}+\Delta p)\,|_{y=+0}\right\rangle\!\right\rangle_{\sigma_j}+\sum_{j=1}^{r_1}\left\langle\!\left\langle B'_j(\mathrm{p})\Delta V\,|_{y=+0}\right\rangle\!\right\rangle_{\sigma_j}\}$$

где постоянная c>0 не зависит от V,V',F,G_j,p и Δp.

Оценим далее каждое слагаемое в правой части (6.2.14) при $\Delta p\to 0$. Так как правые части $F(\mathrm{p,x,y}),\,\mathrm{G}_j(\mathrm{p,x})\ (\mathrm{j}=1,...,\mathrm{r}_1)$ принадлежат по предположению соответственно $\bigcap\limits_{\sigma}E^{\sigma}_{(\mathrm{r})}(\mathrm{Q}_\gamma\times\mathrm{R}^{n-1})$, то легко установить, что при $\Delta p\to 0$

$$\left\|\frac{\Delta F}{\Delta p}-F'\right\|_{s_0-2m,\alpha,\mathrm{q}}\le c_1\left|\Delta p\right|;$$

$$\left\langle\!\left\langle\frac{\Delta G_j}{\Delta p}-G_j\,'\right\rangle\!\right\rangle_{\sigma_j}\le c_2\left|\Delta p\right|,\ j=1,...,r_1$$

с постоянными $c_1>0$ и $c_2>0$, не зависящими от Δp. С помощью лемм 6.1.6 и 6.1.7 находим

$$\left\|(\frac{\Delta A}{\Delta p}-A')\,\mathrm{V}(\mathrm{p}+\Delta p)\right\|_{s\ -2m,\alpha,\mathrm{q}}\le c_2\left|\Delta p\right|\left\|V\right\|_{s,r,\gamma,\alpha,q};$$

$$\left\langle\!\left\langle\frac{\Delta G_j}{\Delta p}-G_j\,'\right\rangle\!\right\rangle_{\sigma_j}\le c_3\Delta p,\ j=1,...,r_1$$

причем $c_2>0$ и $c_3>0$ не зависят от Δp.

Как показано выше, функция ΔV является решением задачи (6.2.4)-(6.2.5) с правыми частями $\Delta F-\Delta AV(\mathrm{p}+\Delta p), \mathrm{G}_j-\Delta B_j V(\mathrm{p}+\Delta p)|_{y=+0},\ j=1,...,\mathrm{r}_1$. Поэтому для ΔV справедлива оценка (6.2.7), которая в рассматриваемом случае может быть записана в виде

$$\|\Delta V\|_{s_0,\alpha,\mathrm{q}}\le c\{\|\Delta F\|_{s-2m,\alpha,\mathrm{q}}+\|\Delta AV(p+\Delta p)\|_{s-2m,\alpha,\mathrm{q}}+ \\ +\sum_{j=1}^{r_1}(\langle\langle\Delta G_j\rangle\rangle_{\sigma_j}+\langle\langle\Delta B_j V(\mathrm{p}+\Delta p)|_{y=0}\rangle\rangle_{\sigma_j})\}.$$

Отсюда, как и выше, получаем оценку

$$\|A'(\mathrm{p})\Delta V\|_{s-2m,\alpha,\mathrm{q}}+\sum_{j=1}^{r_1}\langle\langle B'_j(\mathrm{p})\Delta V|_{y=0}\rangle\rangle_{\sigma_j}\le c_4|\Delta p|,$$

где константа $c_5>0$ не зависит от Δp.

Использование приведенных оценок в правой части (6.2.14) позволяет установить, что $\dfrac{\Delta V}{\Delta p}-\mathrm{V}'(\mathrm{p})\to 0$ при $\Delta p\to 0$ в любой точке $p\in Q_\gamma$.

Последнее означает, что при всех $p\in Q_\gamma$ существует $\dfrac{\partial V}{\partial p}=V'(\mathrm{p})\in \mathrm{H}^{s_0}_{(\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^n_+)$.

Аналогично можно показать, что при $|\delta|+\chi\le s$ функция $D_x^\delta\partial_y^\chi V(\mathrm{p})$ является аналитической функцией в Q_γ и $D_x^\delta D_{\alpha y}^\nu\partial_y^\chi V$ принадлежит $E^{s_1}_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{Q}_\gamma\times\mathrm{R}^n_+)$ для $s_1=s-|\delta|-\nu-q\chi\ge 0.$

Пусть далее $F\in E^{s-2m}_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{Q}_\gamma\times\mathrm{R}^n_+), \mathrm{G}_j\in E^{\sigma_j}_{(\mathrm{r})}(\mathrm{Q}_\gamma\times\mathrm{R}^{n-1}), \mathrm{j}=1,2,...,\mathrm{r}_1$. Построим последовательности функций $F_i\in\bigcap_s E^{s-2m}_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{Q}_\gamma\times\mathrm{R}^n_+)$ и $\mathrm{G}_{ji}\in\bigcap_\sigma E^{\sigma_j}_{(\mathrm{r})}(\mathrm{Q}_\gamma\times\mathrm{R}^{n-1}), \mathrm{i}=1,2,...$ таких, что (см. лемму 6.1.9)

$$\|F_i-F\|_{s-2m,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}\to 0 \text{ при } i\to\infty;$$

$$\langle\langle\langle G_{ji}-G_j\rangle\rangle\rangle_{\sigma_j,(\mathrm{r},\gamma)}\to 0 \text{ при } i\to\infty;$$

Пусть $V_i \in E^s_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{Q}_\gamma \times \mathrm{R}^n_+)$ – решение задачи (6.2.4) - (6.2.5) с правыми частями $F_i, G_j, i, j = 1,...,r_1$. Из априорной оценки (6.2.7) следует, что последовательность $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ фундаментальна в $E^s_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{Q}_\gamma \times \mathrm{R}^n_+)$. В силу полноты пространства $E^s_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{Q}_\gamma \times \mathrm{R}^n_+)$ существует предел $V \in E^s_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{Q}_\gamma \times \mathrm{R}^n_+)$ этой последовательности.

С другой стороны, при каждом $p \in Q_\gamma, \gamma > \gamma_0$ существует единственное решение $\hat{V}(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y}) \in \mathrm{H}^s_{(\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^n_+)$ задачи (6.2.4) - (6.2.5), представимое в виде $\hat{V}(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y}) = \hat{\Re}\left\{F, \vec{G}\right\}$. Стандартным способом показывается, что при $p \in Q_\gamma, (\gamma > \gamma_0)$ $\hat{\mathrm{V}}(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{V}(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y}) \in E^s_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{Q}_\gamma \times \mathrm{R}^n_+)$.

В силу оценки (6.2.6) оператор $\Re = \hat{\Re}$, рассматриваемый как оператор из $E^{s-2m}_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{Q}_\gamma \times \mathrm{R}^n_+) \times \prod_{j=1}^{r_1} E^{\sigma_j}_{(\mathrm{r})}(\mathrm{Q}_\gamma \times \mathrm{R}^{n-1})$ в $E^s_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{Q}_\gamma \times \mathrm{R}^n_+)$, является ограниченным оператором, действующим в указанных пространствах.

Теорема 6.2.3. Пусть $s \ge 2m + \max m_j + \frac{1}{2}\max\{q, r\}$, выполнены условия 1, 6.2.1 и 6.2.2, s– кратно 2m. Тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что при $\gamma > \gamma_0$ для любых $F(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{y})\mathrm{H}^{s-2m}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^1 \times \mathrm{R}^{n-1} \times \mathrm{R}^1_+)$ и $G_j(\mathrm{t},\mathrm{x}) \in \mathrm{H}^{\sigma_j}_{(\mathrm{r},\gamma)}(\mathrm{R}^1 \times \mathrm{R}^{n-1})$, $\mathrm{j} = 1,...\mathrm{r}_1$ задача (6.2.1) - (6.2.2) однозначно разрешима в пространстве $\mathrm{H}^s_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^{n+1}_{++})$, причем справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{s,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})} \le c'_s(\|F\|_{s-2m,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})} + \sum_{j=1}^{r_1} \left\langle\left\langle G_j \right\rangle\right\rangle_{\sigma_j,(\mathrm{r},\gamma)}). \tag{6.2.15}$$

Доказательство. Преобразование Лапласа устанавливает взаимно-однозначное и непрерывное соответствие между пространствами $\mathrm{H}^s_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^n_+)$ $(\mathrm{H}^\sigma_{(\mathrm{r},\gamma)}(\mathrm{R}^{n-1}))$ и $E^s_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{Q}_\gamma \times \mathrm{R}^n_+)$ $(E^s_{(\mathrm{r})}(\mathrm{Q}_\gamma \times \mathrm{R}^{n-1}))$. Это позволяет свести решение задачи (6.2.1) - (6.2.2) в пространстве $\mathrm{H}^s_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^{n+1}_{++})$ к решению задачи (6.2.4) - (6.2.5) в пространстве $E^{s}_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{Q}_{\gamma}\times \mathrm{R}^{n}_{+})$. Существование решения $V(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y})\in E^{s}_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{Q}_{\gamma}\times \mathrm{R}^{n}_{+})$ задачи (6.2.4) - (6.2.5) установлено в теореме 6.2.2 при $F=F_{t\to\tau}[\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{F}]\in E^{s-2m}_{(\mathrm{r},\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{Q}_{\gamma}\times \mathrm{R}^{n}_{+})$, $G_j=F_{t\to\tau}[\mathrm{e}^{-\gamma t}\varpi_j]\in E^{\sigma_j}_{(\mathrm{r})}(\mathrm{Q}_{\gamma}\times \mathrm{R}^{n-1})$, $\mathrm{j}=1,...,\mathrm{r}_1$. Поэтому функция $u(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{y})=\mathrm{F}^{-1}_{\tau\to t}[\mathrm{V}(\gamma+\mathrm{i}\,\tau,\mathrm{x},\mathrm{y})]$ является решением задачи (6.2.1) - (6.2.2) и принадлежит пространству $\mathrm{H}^{s}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^{n+1}_{++})$. Как известно (см. [55], [61]), из условия $\mathrm{u}\in \mathrm{H}^{s}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^{n+1}_{++})$ при $s\ge 2m+\frac{1}{2}r$ следует, что $\partial_t^{\mu}u\,|_{t=0}=0$ для $\mu=0,1,...,\frac{s}{r}-1$. Таким образом, функция $u(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{y})$ удовлетворяет условиям (6.2.3) при $\Phi_{\mu}\equiv 0\ (\mu=0,1,...,\mathrm{l}-1)$. Непосредственно из априорной оценки (6.2.6) для $V(\mathrm{p},\mathrm{x},\mathrm{y})$ вытекает справедливость оценки (6.2.15) для $u(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{y})$.

Условие 6.2.3. Пусть $s\ge 2m+\max m_j+\frac{1}{2}\max\{q,r\}, 1\le \mathrm{j}\le \mathrm{r}_1$. Для набора функций

$$\mathrm{F}(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{y})\in \hat{H}^{s-2m}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^{n+1}_{++}),\ G_j(\mathrm{t},\mathrm{x})\in \overset{\wedge}{\mathrm{H}}{}^{\sigma_j}_{(\mathrm{r},\gamma)}(\mathrm{R}^{n}_{+}),\ \mathrm{j}=1,2,...,\mathrm{r}_1, \Phi_{\mu}(\mathrm{x},\mathrm{y})\in \mathrm{H}^{\beta_{\mu}}_{(\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^{n}{}_{+}),$$

$\beta_{\mu}=s-\mu r-\frac{r}{2},\ \mu=0,1,...,l-1$ существует функция $v_0(\mathrm{t},\mathrm{x},\mathrm{y})\in \overset{\wedge}{\mathrm{H}}{}^{s}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^{n+1}_{++})$ такая, что:

а) выполняются условия $\partial_t^{\mu}v_0\,|_{t=0}=\Phi_{\mu}(\mathrm{x},\mathrm{y}), \mu=0,1,...,\mathrm{l}-1$;

б) после продолжения функций $F-Av_0$ и $\varpi_j-B_jv_0\,|_{y=0}$ нулем при t<0 справедливы включения

$$\mathrm{F}-\mathrm{Av}_0\in \mathrm{H}^{s-2m}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^{n+1}_{++}),\ G_j-B_jv_0\,|_{y=0}\in \mathrm{H}^{\sigma_j}_{(\mathrm{r},\gamma)}(\mathrm{R}^{n}_{+}),\ \mathrm{j}=1,2,...,\mathrm{r}_1,$$

в) существует постоянная $c'>0$ такая, что имеет место оценка

$$\|v_0\|^{t}_{s,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}\le c'\sum_{\mu=0}^{l-1}\|\Phi_{\mu}\|_{\beta_{\mu},(\alpha,\mathrm{q})}.$$

Теорема 6.2.4. Пусть выполнены условия теоремы 6.2.3. Тогда существует $\gamma_0 > 0$ такое, что при $\gamma > \gamma_0$ для любых $\mathrm{F(t,x,y)} \in \overset{\wedge}{\mathrm{H}}{}^{s-2m}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^{n+1}_{++}), \mathrm{G}_j(\mathrm{t,x}) \in \overset{\wedge}{\mathrm{H}}{}^{\sigma_j}_{(\mathrm{r},\gamma)}(\mathrm{R}^n_+), (\mathrm{j} = 1,2,...,\mathrm{r}_1), \Phi_\mu(\mathrm{x,y}) \in \mathrm{H}^{\beta_\mu}_{(\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^n_+), (\mu = 0,1,...,l-1),$ удовлетворяющих условию 6.2.3, задача (6.2.1) - (6.2.3) однозначно разрешима в пространстве $\overset{\wedge}{\mathrm{H}}{}^{s}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^{n+1}_{++})$, причем справедлива оценка

$$\|u\|^+_{s,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})} \le c''_s(\|F\|^+_{s-2m,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})} + \sum_{j=1}^{æ} \left\langle\left\langle \varpi_j \right\rangle\right\rangle_{\sigma_j,(\mathrm{r},\gamma)} + \sum_{\mu=0}^{l-1} \|\Phi_\mu\|_{\beta_\mu,(\alpha,\mathrm{q})}). \tag{6.2.16}$$

Доказательство. Пусть $v_0(\mathrm{t,x,y}) \in \overset{\wedge}{\mathrm{H}}{}^{s}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^{n+1}_{++})$ функция из условия 6.2.3. Положим $v(\mathrm{t,x,y}) = \mathrm{u(t,x,y)} - \mathrm{v}_0(\mathrm{t,x,y})$ и рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}
&Av = F = F - Av_0;\\
&B_j v|_{y=t_0} = G^1_j \equiv G_j - B_j v_0|_{y=+0};\\
&v|_{t=+0} = \partial_t v|_{t=+0} = ... = \partial^{l-1}{}_t v|_{t=+0} = 0
\end{aligned} \tag{6.2.17}$$

По условию 6.2.3 функция $F_1 \equiv F - Av_0$ принадлежит $\mathrm{H}^{s-2m}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^{n+1}_{++})$ и функции $G^1_1 = G_j - B_j v_0|_{t=+0}$ принадлежат $\mathrm{H}^{\sigma_j}_{(\mathrm{r},\gamma)}(\mathrm{R}^n_+),\ \mathrm{j} = 1,...,\mathrm{r}_1$. В силу теоремы 6.2.3 решение задачи (6.2.17) $v \in \mathrm{H}^{s}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^{n+1}_{++})$ существует, единственно и удовлетворяет оценке

$$\|v\|_{s,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})} \le c\{\|F_1\|_{s-2m,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})} + \sum_{j=1}^{r_1} \left\langle\left\langle G^1_j \right\rangle\right\rangle_{\sigma_j,(\mathrm{r},\gamma)}\}. \tag{6.2.18}$$

Тогда функция $u = v + v_0$ является решением задачи (6.2.1) - (6.2.3) и принадлежит $\overset{\wedge}{\mathrm{H}}{}^{s}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^{n+1}_{++})$. Учитывая леммы 6.1.5 и 6.1.6 из неравенства (6.2.18) выводим оценку

$$\|u\|_{s,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})} \le c\{\|F\|_{s-2m,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})} + \sum_{j=1}^{r_1} \left\langle\left\langle G_j \right\rangle\right\rangle_{\sigma_j,(\mathrm{r},\gamma)} + \|v_0\|_{s,(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}\}$$

Если в правой части последнего неравенства применить оценку для нормы v_0 в пространстве $\overset{\wedge}{\mathrm{H}}{}^{s}_{(\mathrm{r},\gamma,\alpha,\mathrm{q})}(\mathrm{R}^{n+1}_{++})$, указанную в условии 6.2.3, то мы приходим к требуемому неравенству (6.2.8).

Из теоремы 6.2.4 вытекает утверждение теоремы 29.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию свойств специального класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов; доказательству коэрцитивных априорных оценок и теорем о существовании решений краевых задач в полупространстве для специальных вырождающихся псевдодифференциальных уравнений, содержащих вырождающийся псевдодифференциальный оператор с переменным символом, зависящим от комплексного параметра, и производную первого порядка по переменной y; доказательству коэрцитивных априорных оценок и теорем разрешимости краевых задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка, зависящих от комплексного параметра; доказательству априорных оценок и теорем разрешимости начально - краевых задач для параболических уравнений с вырождением по пространственной переменной, коэффициенты которых зависят от y.

Основными результатами диссертационной работы являются следующие результаты.

Доказана теорема о композиции для нового класса весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим от комплексного параметра. Доказана теорема об ограниченности в специальных весовых пространствах, типа пространств С.Л. Соболева, для нового класса весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим от комплексного параметра.

Доказаны теоремы о коммутации весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим от комплексного параметра, и оператора дифференцирования. Доказаны теоремы о предельных при $y \to +0$ и $y \to +\infty$ значениях весового псевдодифференциального оператора с переменным по y символом, зависящим от комплексного параметра.

Установлена связь весового псевдодифференциального оператора с некоторым интегральным оператором. Исследованы свойства сопряженного оператора к весовому псевдодифференциальному оператору с переменным по y символом, зависящим от комплексного параметра. Доказан аналог неравенства Гординга для весовых псевдодифференциальных операторов с переменным по y символом, зависящим от комплексного параметра.

С использованием доказанных свойств весовых псевдодифференциальных операторов доказаны коэрцитивные априорные оценки в весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева решений граничных задач типа задач Дирихле в полупространстве R_+^n для вырождающихся псевдодифференциальных уравнений, содержащих весовой псевдодифференциальный оператор с переменным символом, зависящим от комплексного параметра, и производную $\frac{\partial}{\partial y}$. Построен регуляризатор для этих граничных задач. При дополнительных условиях доказаны также теоремы о существовании и единственности решения некоторых краевых задач для вырождающихся псевдодифференциальных уравнений, содержащих комплексный параметр.

Доказаны коэрцитивные априорные оценки решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с переменными по у коэффициентами, содержащих комплексный параметр. Построен регуляризатор и доказаны теоремы о существовании и единственности решений общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с переменными по у коэффициентами, содержащих комплексный параметр.

Получены априорные оценки решений и доказаны теоремы о существовании и единственности решении начально - краевых задач для некоторых классов вырождающихся параболических уравнений высокого порядка с переменными по y коэффициентами.

Литература

1. Антонцев С. Н. О локализации решений эллиптических уравнений с неоднородным анизотропным вырождением / С. Н. Антонцев, С. И. Шмарев // Сибирский математический журнал – 2005. – Т. 46. № 5. – С. 963-984.
2. Шкляева Е. В. Оптимальное управление фильтрацией жидкости / Е. В. Шкляева // Международная конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям : тез.докл. конф.,– Новосибирск, 2002. – С. 63.
3. Бочаров О. Б. Численное исследование гидрофизических процессов при сохранении различных неизотермических моделей фильтрации двухфазной жидкости / О. Б. Бочаров, И. Г. Телегин // Теплофизика и аэромеханика. – 2005. – Т. 12. № 4. – С. 457-467.
4. Монахов В. Н. Сопряжение основных математических моделей фильтрации двухфазных жидкостей / В. Н. Монахов // Математическое моделирование. – 2002. – Т. 14. № 10. – С. 109-115.
5. Крукиер Л. А. Распространение примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле / Л. А. Крукиер, Т. С. Мартынова // Математическое моделирование. – 2004. – Т. 16. № 1. – С. 3-11.
6. Задворнов О. А. Постановка и исследование стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием / О. А. Задворнов // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 1 (488). – С. 45-52.
7. Урев М. В. Сходимость метода конечных элементов для осесимметричной задачи магнитостатики / М. В. Урев // Сибирский журн. вычислительной математики. – 2006. – Т. 9. № 1. – С. 81-108.
8. Шишкин Г. И. Метод повышения точности для квазилинейного сингулярно возмущенного эллиптического уравнения конвекции – диффузии / Г. И. Шишкин // Сибирский журн. вычислительной математики. – 2006. – Т. 9. № 1. – С. 81-108.
9. Габасов Р. Ф. Особые оптимальные управления / Р. Ф. Габасов, Ф. М. Кирилова. – М. : Наука, 1973. – 256 с.

10. Жермоленко В. Н. Особые множества и динамические свойства билинейных систем управления / В. Н. Жермоленко // Фундаментальная и прикладная математика. – 2005. – Т. 11. № 8. – С. 105-117.
11. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М. В. Келдыш // Докл. Академии наук СССР. – 1951. –Т. 77.№ 2. – С. 181-183.
12. Олейник О. А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области / О. А. Олейник // Докл. Академии наук СССР. – 1952. –Т. 87. № 6. – С. 885-887.
13. Михлин С. Г. Вырождающиеся эллиптические уравнения / С. Г. Михлин // Вестн. Ленинградского гос. ун-та. – 1954. – № 8. – С. 19-48.
14. Вишик М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик // Математический сб. – 1954. – Т. 35 (77). Вып. 33. – С. 513-568.
15. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М. М. Смирнов. – М. : Наука, 1966. – 292 с.
16. Олейник О. А. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О. А.Олейник, Е. В. Радкевич // Итоги науки и техники / ВИНИТИ. – М., 1971. – Вып. Математический анализ. – С. 5-93.
17. Кондратьев В. А. Об асимптотических свойствах решений нелинейного уравнения теплопроводности / В. А. Кондратьев // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т. 34. № 2. – С. 246-255.
18. Кондратьев В. А. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка / В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис // Математический сб. – 1988. – Т. 135 (177). № 3. – С. 346-360.
19. Кондратьев В. А. Об асимптотических свойствах решений полулинейных эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических областях / В. А. Кондратьев // Труды конференции им. И. Г. Петровского. – М., 2006. – Вып. 25. – С. 98-111.

20. Егоров Ю. В. Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях / Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, О. А. Олейник // Математический сб. – 1998. – Т. 189. № 3. – С. 45-68.

21. Олейник О. А. О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О. А. Олейник // Математический сб. – 1966. – Т. 69 (111). Вып. 1. – С. 111-140.

22. Кон Д. Некоэрцитивные краевые задачи / Д. Кон, Л. Ниренберг // Пседодифференциальные операторы : сб. науч. тр. – М., 1967. – С. 88-165.

23. Глушко В. П. Коэрцитивность в L_2 общих граничных задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка / В. П. Глушко // Функциональный анализ и его приложения. – 1968. – Т. 2. Вып. 3. – С. 87-88.

24. Глушко В. П. Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка / В. П. Глушко // Труды Московского математического общества. – 1970. – Т. 23. – С. 113-178.

25. Рукавишников В. А. О коэрцитивности R_ν - обобщенного решения первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных / В. А. Рукавишников, А. Г. Ереклинцев // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41. № 12. – С. 1680-1689.

26. Рукавишников В. А. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с несогласованным вырождением исходных данных / В. А. Рукавишников // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32. № 3. – С. 402-408.

27. Вишик М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Математический сб. – 1969. – Т. 80 (112). Вып. 4. – С. 455-491.

28. Вишик М. И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Успехи математических наук. – 1970. – Т. 25. Вып. 4. – С. 29-56.

29. Глушко В. П. Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения с частными производными : тр. семинара акад. С. Л. Соболева. – Новосибирск, 1978. – № 2. – С. 49-68.

30. Глушко В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 1979. – 47 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048 – 79.

31. Леопольд Х. Г. Априорные оценки для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с невырождающейся второй производной / Х. Г. Леопольд. – Новосибирск, 1981. – 33 с. – Деп. в ВИНИТИ 29.08.81, № 4269 – 81.

32. Левендорский С. З. Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе / С. З. Левендорский // Математический сб. – 1980. – Т. 111 (153), вып. 4. – С. 483-501.

33. Исхоков С. А. О гладкости решения эллиптического уравнения с нестепенным вырождением / С. А. Исхоков // Докл. Академии наук. – 2001. – Т. 378, № 3. – С. 306-309.

34. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения /А.Т. Баруча-Рид – М.: Мир, 1966. – 351 с.

35. Bresis H. On a degenerate elliptic-parabolic equation / H.Bresis, W. Rosenkrantz , B. Singer // Comm. Pure and Appl. Math. -1971. – Vol. 24. №3.- P. 395 – 416.

36. Булавин В.Г. О существовании решения смешанной задачи для вырождающегося дифференциального уравнения, описывающего

диффузионный процесс /В.Г. Булавин, В.П. Глушко// Труды математического факультета Воронежского гос. университета. – 1972. – Вып. 7. – С. 29-39.

37. Архипов В.П. Априорная оценка решений краевых задач для некоторых эллиптико-параболических уравнений второго порядка/ В.П. Архипов, В.П. Глушко // Труды математического факультета Воронежского гос. университета. – 1971. – Вып. 3. – С. 22-34.

38. Архипов В.П., Глушко В.П. О разрешимости смешанных задач для уравнений второго порядка переменного типа / В.П. Архипов, В.П. Глушко // Труды математического факультета Воронежского гос. университета. – 1972. – Вып. 7. – С. 1-6.

39. Глушко В.П. О разрешимости смешанных задач для параболических уравнений второго порядка с вырождением /В.П. Глушко// Доклады академии наук СССР. – 1972. – Т. 207, № 2. – С.266-269.

40. Levine Howard A. Some exsistence and nonexsistence theorems for solutions of degenerate parabolic equations / Levine Howard A., Sacks Paul E. //J. Differ. Equat. – 1984. –Vol. 52, № 2. – P. 135 - 151.

41. Богатова В.П., Глушко В.П. Разрешимость начально-краевых задач для параболических уравнений высокого порядка с вырождением по пространственной переменной /В.П.Богатова, В.П. Глушко// Доклады академии наук СССР. – 1986. – Т. 291, №3. –С. 531-534.

42. Баев А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. – 1982. - Т. 265, № 5. - С. 1044 – 1046.

43. Баев А.Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка /А.Д. Баев// Доклады Академии наук. – 2008. - Т. 422, №6. - С. 727 – 728.

44. Баев А.Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов /А.Д. Баев, П.А. Кобылинский// Доклады Академии наук. – 2015. - Т. 460, № 2. - С. 133 – 135.

45. Баев А.Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов/А.Д. Баев, Н.И. Работинская //Доклады академии наук. – 2017. – Т. 477, № 1. - С. 7 -10.

46. Лионс Ж. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж. Лионс, Э. Мадженес. – М. : Мир, 1971. – 371с.

47. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – 4 е изд. – М. : Наука, 1981. – 512 с.

48. Глушко В. П. Об одном критерии существования свертки обобщенных функций / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж. - 1982. – 12 с. – Деп. в ВИНИТИ 22.11.82, № 5721-82.

49.Тейлор М.Псевдодифференциальные операторы / М. Тейлор. – М.: Мир, 1981. – 469 с.

50.Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж : Воронеж. гос. ун-т, 2008. – 240 с.

51. Грушин В. В. Псевдодифференциальные операторы / В. В. Грушин. – М. : Моск. ин-т электронного машиностроения, 1975. – 107 с.

52.Глушанкова Л. Я. Об одном псевдодифференциальном уравнении, порожденном граничной задачей переменного порядка / Л. Я. Глушанкова, В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж.- 1980. – 67 с. – Деп. в ВИНИТИ 4.11.80, № 4684-80.

53.Глушко В. П. Коэрцитивная разрешимость общих граничных задач для некоторых вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В.П. Глушко, М. Д. Баталин // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики : сб. науч. тр. – Новосибирск, 1975 – С. 59-88.

54.Глушко В. П. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка: пространства, операторы, граничные задачи /В.П.Глушко,Ю.Б. Савченко//Математический анализ. М., 1985. – С. 125 – 218. – Итоги науки и техники /ВИНИТИ. Т. 23.

55. Агранович М.С. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида /М.С. Агранович, М.И. Вишик//Успехи математических наук. -1964. – Т. 19, № 3. – С. 53 – 161.
56. Баев А.Д. Весовые псевдодифференциальные операторы в теории эллиптических задач с вырождением /А.Д. Баев, В.П. Глушко// Теоремы вложения и их приложения к задачам математической физики: Труды семинара С.Л. Соболева. – Новосибирск, - 1983. -№ 1. – С. 5 – 29.
57. Берс Л. Уравнения с частными производными/Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер - М.: Мир, 1966. – 351 с.
58. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными /Л. Хермандер - М.: Наука, 1978. – 255 с.
59. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения /С.М. Никольский - М.: Наука, 1977. – 456 с.
60. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы /Х. Трибель -М.: Мир, 1980. – 664 с.
61. Глушко В.П., Львин С.Я. О некоторых свойствах одного класса весовых пространств С.Л. Соболева /В.П.Глушко, С.Я. Львин//Краевые задачи для уравнений смешанного типа и смежные вопросы функционального анализа. – Нальчик, 1977. - №1. – С. 26 – 32.

Работы автора по теме диссертации

62. Ковалевский Р.А. Теоремы о предельных значениях одного класса весовых псевдодифференциальных операторов /А.Д. Баев,Р.А. Ковалевский// Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа». –Воронеж. -2009. - С.16-17.
63. Ковалевский Р.А. Свойства коммутации одного класса весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом и

операторов дифференцирования /А.Д. Баев,Р.А. Ковалевский// Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования. Часть 1. Материалы международной конференции. – Воронеж, - 2009. – С. 69-70.

64. Ковалевский Р.А. Об ограниченности и суперпозиции весовых псевдодифферннциальных операторов с переменным символом/А.Д. Баев,Р.А. Ковалевский// Современные методы теории краевых задач. Материалы весенней математической школы «Понтрягинские чтения XX». – Воронеж, - 2009. - С. 17-18.

65. Ковалевский Р.А. О некоторых свойствах весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом /А.Д. Баев,Р.А. Ковалевский// Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной конференции. – Воронеж. - 2009. Часть 1. - С. 44-46.

66. Ковалевский Р.А. Теорема о следах для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом/А.Д. Баев,Р.А. Ковалевский// Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования. Материалы IV Международной научной конференции. – Воронеж. – 2011. - С. 17-19.

67. Баев А.Д., Ковалевский Р.А., Давыдова, П.В. Садчиков. О неравенстве Гординга для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом /А.Д. Баев,Р.А. Ковалевский, М.Б. Давыдова, П.В. Садчиков// Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XXIV». – Воронеж. – 2013. -С. 31-33.

68. Ковалевский Р.А. Об одном классе псевдодифференциальных операторов с вырождением /А.Д. Баев,Р.А. Ковалевский// Доклады академии наук. - 2014. - Т. 454 . - № 1. С. 7-10.

69.BaevA.D.AClassofPseudodifferentialOperatorswithDegeneracy/A.D. Baev, R.A. Kovalevskii //DokladyMathematics. - 2014. -T. 89. - №1. -pp. 7-10.
70.Ковалевский Р.А. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов/А.Д. Баев,Р.А. Ковалевский// Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. -2014. - № 1. - С. 39 – 49.
71.Ковалевский Р.А. О предельных значениях весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим от параметра /А.Д. Баев А.Д.,Р.А. Ковалевский//Современные методы теории функций и смежные проблемы.Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа». - Воронеж. - 2015.- С. 175– 176.
72.Ковалевский Р.А. О формуле представления одного псевдодифференциального оператора с вырождением /А.Д. Баев, Р.А. Ковалевский// Материалы Международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа.Понтрягинские чтения XXVI». - Воронеж. - 2015. - С. 33 – 35.
73. Ковалевский Р.А. Краевые задачи для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений /А.Д. Баев А.Д., Р.А. Ковалевский // Доклады Академии наук. – 2015. - Т. 461. - №1. - С. 7 - 9.
74.KovalevskiiR.A. BoundaryValueProblemsforaClassofDegeneratePseudodifferetialEquations. DokladyMathematics. /A.D.Baev, R.A.Kovalevskii// – 2015. -Vol. 91. -No. 2. -pp. 131 – 133.
75.Ковалевский Р.А. Теоремы о «следах» для одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением /А.Д. Баев, Р.А. Ковалевский, М.Б. Давыдова// Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. - 2015.- № 2. - С. 63– 75.
76.Ковалевский Р.А.О сопряженном операторе для псевдодифференциального оператора с вырождением, символ которого

зависит от комплексного параметра /А.Д. Баев А.Д., Р.А. Ковалевский, С.А. Чечина// Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения XXVII»». – Воронеж. - 2016. С. 27 – 29.

77. Ковалевский Р.А.О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением /А.Д. Баев А.Д., Р.А. Ковалевский, П.А. Кобылинский//Доклады академии наук. - 2016.-Т. 471. № 4.- С. 387–390.

78. Kovalevskii R.A. On Degenerane Elliptic Equations of High Order and Pseudodifferetial Operators /A.D. Baev, R.A. Kovalevskii P.A. Kobilinskii //Doklady Mathematics. – 2016. - Vol. 94. - No. 3.- pp. 1–4.

79. КовалевскийР.А. ОбаналогенеравенстваГордингадляпсевдодифференциальногооператорасвырождением, символкоторого зависит от комплексного параметра/А.Д. Баев А.Д., Р.А. Ковалевский // Современные методы теории функций и смежные проблемы. Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа». - Воронеж . - 2017.- С. 114 – 116.

80. Ковалевский Р. А. О поведении на бесконечности весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим от комплексного параметра /Р.А. Ковалевский// Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения XXVIII»». – Воронеж. - 2017. - С. 95 – 97.

81. Ковалевский Р. А. О свойствах «следов» одного класса весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящем от комплексного параметра /Р.А. Ковалевский// Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения XXVIII»». – Воронеж. - 2017. - С. 97 – 99.

82. Ковалевский Р. А. О связи одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов и одного класса вырождающихся интегральных операторов /Р.А. Ковалевский// Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения XXVIII»»». – Воронеж. - 2017. - С. 99 – 102.
83. Ковалевский Р. А. О свойствах оператора, сопряженного к одному классу весовых псевдодифференцмальных операторов /Р.А. Ковалевский// Материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.Г. Крейна. – Воронеж. - 2017. - С. 117 – 119.
84. Ковалевский Р. А. Априорные оценки решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка /Р.А. Ковалевский// Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2018». – Воронеж. – 2018. - С. 241 – 245.
85. Ковалевский Р. А. О разрешимости начально – краевой задачи для вырождающегося параболического уравнения высокого порядка /Р.А. Ковалевский// Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2018». – Воронеж. – 2018. - С. 245 – 250.