ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

на правах рукописи

КУПЦОВА ЕКАТЕРИНА ВАЛЕРИЕВНА

МНОГОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ГЕНЕРАТОРЕ НА ДВУХ СВЯЗАННЫХ КОНТУРАХ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата

физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических

наук, профессор В.Г. Задорожний

Воронеж - 2018

Содержание 2

Введение

Актуальность темы. С развитием радиотехники в 20 веке исследования нелинейных колебательных систем стало занимать больше места в физике и технике. Изучение таких систем решало большое количество проблем по устойчивости и частоте колебаний. Появились методы анализа нелинейных систем дифференциальных уравнений с малым параметром при нелинейной части. Изучая колебания напряжения в одноконтурном электрическом автогенераторе, Ван-дер-Поль разработал метод приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Многие задачи удается решить вводя в уравнение малый параметр и находя приближенное решение в виде степенного ряда по степеням малого параметра. Этому методу и его обобщениям посвящено огромное количество научных исследований, укажем, например, авторов Андронов А.А., Арнольд В.И., Бернштейн И.Л., Боголюбов Н.Н., Васильева А.Б., Волосов В.М., Гребенников Е.А., Колмогоров А.Н., Коломиец В.Г., Крылов Н.М., Ланда П.С., Ломов С.А., Малкин И.Г., Мандельштам Л.И., Митропольский Ю.А., Мозер Д., Пуанкаре А., Стокер Смейл Хейл Дж., и др.

Многочисленные математические модели механических и электрических устройств рассмотрены, например, в работах: Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний - М.: Физматгиз1959 , Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю.А., Асимптотические методы в методы в теории нелинейных колебаний - М.: Наука, 1974, Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем - М.: Наука, 1979, Ланда П.С. Автоколебательные системы с конечным числом степеней свободы – М.: Наука, 1980, Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний –М.: Гостехиздат, 1956, Найфэ А. Методы возмущений - М.: Мир, 1976 и др.

В данной работе рассматриваются автоколебания в автогенераторе на двух связанных контурах. Физическая задача предложена Непринцевым В.И., который изучал электрические автогенераторы на связанных контурах. Математическая модель автогенератора на двух связанных контурах представляет собой систему двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Непринцев В. пытался найти условия, при которых в автогенераторе могут быть устойчивые двухчастотные колебания (с несоизмеримыми частотами). В физических моделях колебания можно проследить с помощью осциллографа. Оказалось, что обычно в автогенераторе устанавливаются одночастотные колебания. Возникла гипотеза, что колебания в автогенераторе синхронизируются. Поскольку параметры автогенератора принимают континуум значений, то численным перебором вариантов исследовать задачу невозможно. Хейл Дж. В работе Integral Manifolds of perturbed differential systems. Ann. Math. 73, 1961, p. 496-531 рассматривал систему двух уравнений Ван дер Поля с малым параметром и ставил задачу выяснения всех возможных типов автоколебаний, но, на наш взгляд, в общем виде задача является слишком сложной. Поэтому актуальной задачей является аналитическое исследование автогенератора на двух связанных контурах.

Целью диссертационной работы является исследование видов возможных ограниченных автоколебаний (одночастотных, двухчастотных или многочастотных) в автогенераторе на двух связанных контурах Ван дер Поля, вопросы устойчивости колебаний, приближенное нахождение колебаний. Нахождение условий на параметры системы, обеспечивающих существование таких колебаний.

Методика исследований. В работе систематически используется метод усреднения Крылова – Боголюбова, который позволяет ответить на вопросы существования ограниченных решений и условиях их устойчивости без нахождения этих ограниченных решений, а также позволяет найти приближенные решения в аналитическом виде. Сначала получается математическая модель автогенератора в виде системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и приводится к безразмерной форме. Малый параметр вводится в виде малого возмущения характеристики нелинейного элемента. Оказалось, что нужно рассматривать два варианта задачи. Первый вариант при малых частотах колебаний в автогенераторе и более громоздкий вариант, когда в автогенераторе высокие частоты колебаний. Далее система сводится к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка – это облегчает переход к полярной системе координат и приведение уравнения к стандартному виду. Находится усредненная система. Оказалось, что удается найти все стационарные точки усредненной системы и провести исследование колебаний на устойчивость.

Научная новизна. Результаты, полученные в диссертации, являются новыми, четко сформулированы и приведены строгие доказательства методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Наиболее существенные научные результаты:

1. Получена математическая модель автогенератора на двух связанных контурах Ван дер Поля в безразмерной форме.
2. Вычислены усредненные системы для колебаний, одна с малым сопротивлением в первом контуре, другая без предположения малости этого сопротивления.
3. Найдены стационарные точки усредненных уравнений.
4. Определен вид ограниченных автоколебаний – одночастотные либо двухчастотные.
5. Получены соотношения для коэффициентов системы, при которых ограниченные автоколебания являются асимптотически устойчивыми.
6. Найдены приближенные представления ограниченных автоколебаний.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер, но решается реальная физическая проблема о виде ограниченных автоколебаний в электрическом автогенераторе. Результаты могут быть использованы для расчетов параметров электрических схем с заранее заданными частотами автоколебаний.

Апробация работы.

Результаты докладывались:

Купцова Е.В. Условия асимптотической устойчивости двухчастотных колебаний в двухконтурном автогенераторе/ Е.В. Купцова//по материалам конференции Понтрягинские чтения — XXV. Воронежская весенняя математическая школа. 2014;

Задорожний В.Г. О задаче Коши для линейной системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка/В.Г. Задорожний, Е.В. Купцова// Воронежский Государственный Университет, Воронеж, 2017. - с.88-90;

Задорожний В.Г., О моментальных функциях решения стохастической линейной системы дифференциальных уравнений/В.Г. Задорожний, Е.В. Купцова// сборник материалов Международной конференции посвященной 100-летию со дня рождения Селима Григорьевича Крейна, Воронеж, 2017. – с.223–224;

Купцова Е.В. Приведение уравнений электрического автогенератора к стандартному виду метода усреднения/ Приведение уравнений электрического автогенератора к стандартному виду метода усреднения/ Е.В. Купцова// Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. науч. тр. междунар. конф.;

Купцова Е.В. Усредненная система для математической модели электрического автогенератора / Е.В. Купцова // Современные методы теории краевых задач : материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения – XXVI. – Воронеж, Издательский дом ВГУ, 2015. - С. 123-124.

Публикации по теме диссертации.

Основные результаты опубликованы в 10 работах, две из которых входят в список ВАК:

1. Задорожний В.Г. Математическое моделирование процессов в электрическом автогенераторе/В.Г. Задорожний, В.С. Купцов, Е.В. Купцова//Вестник Воронежского государственного технического университета, т.10, №1,2014. -с. 63-66

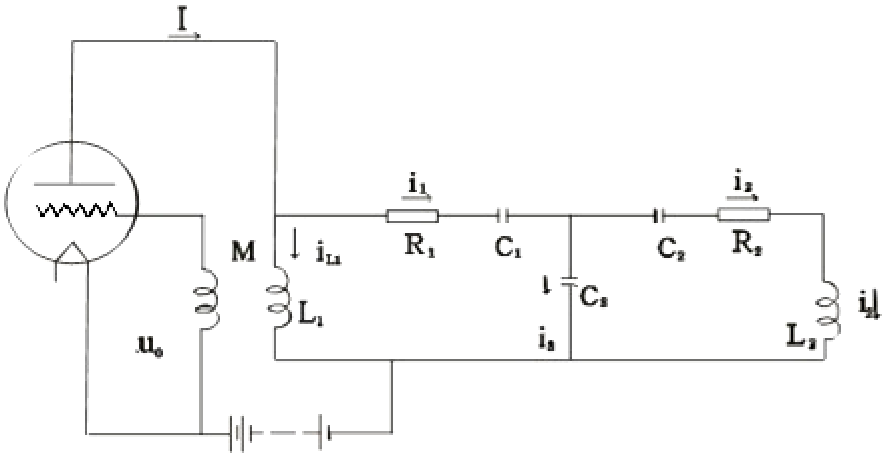
2. Купцова Е.В. Первые приближения для колебаний напряжения в системе связанных электрических контурах Ван-дер-Поля / Е.В. Купцова //Вестник Воронежского государственного университета, 2017. – С. 113-122.

Из совместных публикаций научному руководителю принадлежат постановки задач, а все исследования проведены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из содержания, введения, трех глав и заключения. Объем диссертации 95 страниц.

Краткое содержание диссертации

В первой главе строится математическая модель электрического автогенератора на двух связанных контурах Ван дер Поля



Здесь I - сила тока; u_0 – напряжение; R_1, R_2 - сопротивления; C_1, C_2, C_3 – емкости; L_1, L_2 – индуктивности.

В этой схеме без ограничения общности вместо электронной лампы может стоять транзистор.

Используя физические законы получается математическая модель, описывающая динамику изменения напряжений в контурах. В безразмерной форме система уравнений имеет вид

$$u''_1 + R_1 u'_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + (1+k_3)u_1 + \gamma\frac{k_3}{k_2}u_2 = R_1 I'' + \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+k_3)I',$$

$$u_2'' + R_2\sqrt{\frac{\gamma C_2}{L_2}}u_2' + \gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)u_2 + k_3 u_1 = \sqrt{\frac{L_1 k_3}{C_3}}\ I'.$$

Здесь $\boldsymbol{u_1}$ - напряжение на индуктивности $\boldsymbol{L_1}$, а $\boldsymbol{u_2}$ – напряжение на индуктивности $\boldsymbol{L_2}$, штрихами обозначаются производные по безразмерному времени.

Считаем, что сила тока I связана с напряжением u_1 соотношением (аппроксимация многочленом третьего порядка)

$$I = (s_0+\varepsilon)u_1 + \varepsilon s_1 u_1^2 - \varepsilon s_2 u_1^3,$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ - малый положительный параметр.

При этом система уравнений записывается в виде системы нелинейных уравнений

$$\left(1 - R_1 s_0 - \varepsilon R_1(1+2s_1u_1-3s_2u_1^2)\right)u_1'' +$$

$$+\left(R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} - \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}\ (1+k_3)s_0\right)u_1' + (1+k_3)u_1 + \frac{\gamma k_3}{k_2}u_2 =$$

$$= R_1\varepsilon(2s_1-6s_2u_1)u_1'^2 + \sqrt{\frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{C}_1}}(1+\mathrm{k}_3)(\varepsilon+2\mathrm{s}_1\varepsilon\mathrm{u}_1-3\mathrm{s}_2\varepsilon\mathrm{u}_1^2)\mathrm{u}'_1,$$

$$u_2'' + R_2\sqrt{\frac{\gamma C_2}{L_2}}u_2' - \sqrt{\frac{L_1 k_3}{C_3}}s_0 u_1' + \gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)u_2 + k_3 u_1 =$$

$$= \boldsymbol{\varepsilon}\sqrt{\frac{L_1 k_3}{C_3}}\ (\mathbf{1} + \mathbf{2s_1u_1} - \mathbf{3s_2u_1^2})\boldsymbol{u_1'}.$$

Здесь в первом уравнении при второй производной стоит коэффициент, который играет важную роль. Рассматривается два случая.

1. Коэффициентом $\varepsilon R_1(1 + 2s_1u_1 - 3s_2u_1^2)u_1''$ можно пренебречь по сравнению с остальными. Это будет в случае малости R_1.
2. Данным коэффициентом не пренебрегаем.

В соответствии с этим приходится рассматривать эти случаи отдельно.

Вторая глава посвящена построению усредненной системы уравнений. Согласно методу усреднения систему сначала нужно привести к стандартному виду. Оказывается, что вычисления значительно сокращаются, если систему свести к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$u_1^{(4)} - u_1^{(3)}\left[S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}} + S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0S_4^{-1}\right] +$$

$$+u_1''\left[S_3(1+K_3) + R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + \gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right) - R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0\right] +$$

$$+u_1'\left[R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3(1+K_3) + S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right) + \sqrt{\frac{L_1}{C_3}}K_3S_0S_4^{-1} -\right.$$

$$\left.-\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0\right] +$$

$$+u_1\left[-K_3S_4^{-1} + S_3(1+K_3)\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)\right] = -S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}K_3(2S_1u_1 - 3S_2u_1^2)\varepsilon u_1' + \qquad (1)$$

$$+\left[-18S_2S_3R_1\varepsilon u_1'^2u_1''+2S_3R_1\varepsilon\left\{(2S_1-6S_2u_1)\left(u_1''^2+u_1'u_1^{(3)}\right)-6S_2u_1'^2u_1''\right\}+\right.$$

$$\left.-S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_4^{-1}\varepsilon\left\{-6S_2u_1'^3+3(2S_1-6S_2u_1)u_1'u_1''+(1+2S_1u_1-3S_2u_1^2)u_1^{(3)}\right\}\right]+$$

$$+R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}\varepsilon\left[-6S_2S_3R_1u_1'^3+2S_3R_1(2S_1-6S_2u_1)u_1'u_1''+S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\times\right.$$

$$\times\{(2S_1-6S_2u_1)u_1'^2+(1+2S_1u_1-3S_2u_1^2)u_1''\}]+$$

$$+\gamma\left(1+\tfrac{K_3}{K_2}\right)\varepsilon\left[S_3R_1(2S_1-6S_2u_1)u_1'^2+S_3\sqrt{\tfrac{L_1}{C_1}}(1+K_3)(1+2S_1u_1-3S_2u_1^2)u_1'\right].$$

Уравнение (1) имеет вид

$$u_1^{(4)}+a_1u_1^{(3)}+a_2u_1''+a_3u_1'+a_4u_1=\varepsilon f, \tag{2}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 - заданные числа, ε - малый положительный параметр, $f=f(\tau, u_1, u_1', u_1'', u_1^{(3)})$ – известная функция.

Выпишем характеристический многочлен уравнения (2)

$$L(p)=p^4+a_1p^3+a_2p^2+a_3p+a_4.$$

Лемма. Многочлен $L(p)$ с вещественными коэффициентами имеет корни $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ если и только если

$$a_1=a_3=0, a_2=\omega_1^2+\omega_2^2, a_4=\omega_1^2\omega_2^2. \tag{3}$$

Теорема 1. При выполнении условий (3) замена переменных

$$u_1=\rho_1\cos(\omega_1\tau-\varphi_1)+\rho_2\cos(\omega_2\tau-\varphi_2),$$

$$\tilde{u}_2=-\rho_1\omega_1\sin(\omega_1\tau-\varphi_1)-\rho_2\omega_2\sin(\omega_2\tau-\varphi_2), \tag{4}$$

$$u_3=-\rho_1\omega_1^2\cos(\omega_1\tau-\varphi_1)-\rho_2\omega_2^2\cos(\omega_2\tau-\varphi_2),$$

$$u_4=\rho_1\omega_1^3\sin(\omega_1\tau-\varphi_1)+\rho_2\omega_2^3\sin(\omega_2\tau-\varphi_2),$$

где $\rho_1(\tau)$, $\rho_2(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ - новые неизвестные функции приводит уравнение (2) к стандартному виду метода усреднения

$$\rho_1' = \frac{-\varepsilon f sin(\omega_1\tau - \varphi_1)}{\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)},$$

$$\rho_2' = \frac{\varepsilon f sin(\omega_2 t - \varphi_2)}{\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)},$$

$$\varphi_1' = \frac{\varepsilon f cos(\omega_1 t - \varphi_1)}{\rho_1\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)},$$

$$\varphi_2' = \frac{-\varepsilon f cos(\omega_2 t - \varphi_2)}{\rho_2\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}.$$

Для исследования системы методом усреднения нужно вычислить усредненную систему уравнений. Это наиболее громоздкая и трудоемкая работа.

Теорема 2. Усредненная система уравнений для амплитуд колебаний имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\rho_1} = \dfrac{-\varepsilon\rho_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\left\{-\dfrac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}K_3}\left(\dfrac{1}{2}{\rho_1}^2 + {\rho_2}^2\right) + S_3S_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\times\right. \\ \times\left(\dfrac{3}{8}S_2\rho_1^2\omega_1^2 - \dfrac{1}{2}\omega_1^2 + \dfrac{3}{4}S_2\rho_2^2\omega_1^2\right) + S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\dfrac{C_2}{L_2}}S_2\times \\ \left.\times\left(\dfrac{3}{4}\rho_1^2\omega_1^2 + \dfrac{3}{2}\rho_2^2\omega_2^2\right) + \gamma\left(1+\dfrac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}S_2\left(\dfrac{1}{2}{\rho_1}^2 + {\rho_2}^2\right)\right)\right\}, \\ \dot{\rho_2} = \dfrac{\varepsilon\rho_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\left\{-\dfrac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}K_3}\left(\dfrac{1}{2}{\rho_2}^2 + {\rho_1}^2\right) + S_3S_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\times\right. \\ \times\left(\dfrac{3}{8}S_2\rho_2^2\omega_2^2 - \dfrac{1}{2}\omega_2^2 + \dfrac{3}{4}S_2\rho_1^2\omega_2^2\right) + S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\dfrac{C_2}{L_2}}S_2\times \\ \left.\times\left(\dfrac{3}{4}\rho_2^2\omega_2^2 + \dfrac{3}{2}\rho_1^2\omega_1^2\right) + \gamma\left(1+\dfrac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}S_2\left(\dfrac{1}{2}{\rho_2}^2 + {\rho_1}^2\right)\right)\right\}. \end{cases}$$

Введем обозначения

$$R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}} = A;\ (1+k_3) = B;\ \frac{\gamma k_3}{k_2} = D;\ \sqrt{\frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{C}_1}}(1+\mathrm{k}_3) = \mathrm{E};$$

$$R_2\sqrt{\frac{\gamma C_2}{L_2}} = \mathrm{F};\ \gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right) = \mathrm{G};\ \sqrt{\frac{L_1 k_3}{C_3}} = \mathrm{H}.$$

Теорема 3. Вторая усредненная система уравнений для амплитуд колебаний имеет вид

$$\dot{\rho_1} = \frac{\varepsilon\rho_1}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\Big[[S_3(HD+GE)(1-S_3R_1S_0)+S_3R_1(FB+GA)]\left(-\frac{\omega_1}{2}\right)+$$

$$+[-3S_3S_2(HD-G)+S_3^2S_2R_2(3-2B)-3GS_3^2S_2R_2(S_0E-G)]\times$$

$$\times\left(-\frac{\rho_1^2\omega_1^2}{4}-\frac{\rho_2^2\omega_2^2}{4}\right)+S_3\big[E(1-S_3R_1S_0)+R_1[F(1+S_3)+S_3(A-R_1FS_0)]\big]$$

$$\times\left(\frac{\omega_1^3}{2}\right)-6S_3S_2(E+FR_1)\quad\frac{1}{4}(\rho_1^2\omega_1^3+\rho_2^2\omega_2^2\omega_1)+$$

$$+\Big[\Big[S_3S_2\Big(-3(E+FR_1)+S_3\big(3S_0R_1(E+FR_1)+R_2(3A+2F)\big)\Big)\Big]\times$$

$$\times\frac{1}{4}(\rho_1^2\omega_1^3+\rho_2^2\omega_1^2)\Big],$$

$$\dot{\rho_2} = \frac{\varepsilon\rho_2}{\omega_2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\Big[[S_3(HD+GE)(1-S_3R_1S_0)+S_3R_1(FB+GA)]\left(-\frac{\omega_2}{2}\right)+$$

$$+[-3S_3S_2(HD-G)+S_3^2S_2R_2(3-2B)-3GS_3^2S_2R_2(S_0E-G)]\times$$

$$\times\left(-\frac{\rho_2^2\omega_2^2}{4}-\frac{\rho_1^2\omega_1^2}{4}\right)+S_3\big[E(1-S_3R_1S_0)+R_1[F(1+S_3)+S_3(A-R_1FS_0)]\big]$$

$$\times\left(\frac{\omega_2^3}{2}\right)-6S_3S_2(E+FR_1)\quad\frac{1}{4}(\rho_2^2\omega_2^3+\rho_1^2\omega_1^2\omega_2)+$$

$$+\Big[\Big[S_3S_2\Big(-3(E+FR_1)+S_3\big(3S_0R_1(E+FR_1)+R_2(3A+2F)\big)\Big)\Big]\times$$

$$\times\frac{1}{4}(\rho_2^2\omega_2^3+\rho_1^2\omega_2^2)\Big],$$

Третья глава посвящена нахождению приближенных ограниченных колебаний в автогенераторе и исследованию их на устойчивость.

Усредненные системы уравнений являются автономными системами уравнений в нормальной форме. Точки, в которых правые части уравнений обращаются в нуль, называются особыми точками системы.

Теорема 4. Если выполняются условия

$$S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}+R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}+S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0S_4^{-1}=0, \tag{5}$$

$$R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3(1+K_3)+S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)+\sqrt{\frac{L_1}{C_3}}K_3S_0S_4^{-1}-$$

$$-\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0=0, \tag{6}$$

$$S_3(1+K_3)+R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)-R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0=\omega_1^2+\omega_2^2. \tag{7}$$

$$-K_3S_4^{-1}+S_3(1+K_3)\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)=\omega_1^2\omega_2^2\ , \tag{8}$$

То первая усредненная система имеет четыре особые точки

$$M_0(0{,}0),\quad M_1(0,\rho_2),\qquad M_2(\rho_1,0), M_3(\rho_{11},\rho_{22}),$$

где

$$\rho_1^2=S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\omega_1^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)/$$

$$/\frac{3}{4}S_2\left(S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}K_3+2\omega_1^2S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)+\omega_1^2S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}+\right.$$

$$\left.+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\right),$$

$$\rho_2^2 = S_3 S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\omega_2^2 + \gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)/$$

$$/\frac{3}{4}S_2\left(S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3} + 2\omega_2^2 S_3 S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3) + \omega_2^2 S_3 R_1 R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}} + \right. \tag{9}$$

$$\left. +\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\right).$$

$$\rho_{11}^2 = \frac{c_1 m_2 - c_2 n_1}{m_1 m_2 - n_1 n_2},\ \rho_{22}^2 = \frac{c_2 m_1 - c_1 n_2}{m_1 m_2 - n_1 n_2},$$

$$a = -\frac{3}{4}S_2 S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}, b = S_3 S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3), c = S_3 R_1 R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2,$$

$$d = \gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3),\ m_1 = \frac{a}{2} + \frac{3d}{8}S_2 + \frac{3}{4}\omega_1^2\left(\frac{b}{2}S_2 + c\right), c_1 = \frac{b\omega_1^2 + d}{2},$$

$$n_1 = a + \frac{3b}{4}S_2\omega_1^2 + \frac{3c}{2}\omega_2^2 + \frac{3d}{4}S_2, m_2 = a + \frac{3b}{4}S_2\omega_2^2 + \frac{3c}{2}\omega_1^2 + \frac{3d}{4}S_2,$$

$$n_2 = \frac{a}{2} + \frac{3d}{8}S_2 + \frac{3}{4}\omega_2^2\left(\frac{b}{2}S_2 + c\right), c_2 = \frac{b\omega_2^2 + d}{2}.$$

Аналогично находятся четыре особые точки второй усредненной системы.

Далее проводится исследование на устойчивость ограниченных колебаний.

Оказывается, нулевая точка неустойчива. Для других точек находятся условия устойчивости.

Пусть

$$\rho_2^* = \left(\frac{2\left(A_1\omega_1 - C_1\omega_1^3\right)}{-B_1\omega_2^2 + D_1\omega_2^4\omega_1^2 + F_1\omega_1^3}\right)^{0,5}.$$

Теорема 5. Если выполняются условия (5) - (8),

$$\left[-\frac{A_1\omega_1}{2} - B_1\frac{\rho_2^{*2}\omega_2^2}{4} + C_1\frac{\omega_1^3}{2} + D_1\rho_2^{*2}\omega_2^2\omega_1 + \frac{F_1}{4}\rho_2^{*2}\omega_1^2\right]\times$$

$$\times\left[\frac{A_1}{2}+\frac{3B_1\rho_2^{*2}\omega_2}{4}-\frac{C_1\omega_2^2}{2}-3\left(D_1+\frac{F_1}{4}\right)\rho_2^{*2}\omega_2^2\right]>0,$$

$$\frac{1}{(\omega_2^2-\omega_1^2)}\left(-A_1+B_1\frac{\rho_2^{*2}\omega_2}{4}\left(1-\frac{1}{\omega_1}\right)+\frac{C_1}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)+F_1\frac{\rho_2^{*2}}{4}(\omega_1-\omega_2^2)\right)<0,$$

то при достаточно малых $\varepsilon>0$ автогенератор имеет асимптотически устойчивые колебания напряжения, близкие к одночастотным колебаниям

$$u_1=\left(\frac{2(\mathrm{A}_1\omega_1-\mathrm{C}_1\omega_1^3)}{-\mathrm{B}_1\omega_2^2+\mathrm{D}_1\omega_2^4\omega_1^2+\mathrm{F}_1\omega_1^3}\right)^{0,5}\cos\left(\frac{\omega_2 t}{\sqrt{L_1C_1}}-\varphi_2\right).$$

Теорема 6. Если выполняются условия (5) - (8) ,

$$\left[\frac{1}{(\omega_2^2-\omega_1^2)}\left[-\frac{A_1}{2}+\frac{F_1\omega_1(\rho_1^{**2}\omega_1+\rho_2^{**2})}{4}\right]+\frac{\rho_1^{**2}\omega_1}{(\omega_2^2-\omega_1^2)}\left[\left(2D_1+\frac{F_1}{2}\right)\omega_1^2-\frac{B_1}{2}\right]\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\omega_2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\left[C_1\frac{\omega_2^3}{2}-\frac{A_1\omega_2}{2}+\left(D_1\omega_2-\frac{B_1}{4}\right)(\rho_2^{**2}\omega_2^2+\rho_1^{**2}\omega_1^2)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{F_1\omega_2^2}{4}(\rho_2^{**2}\omega_2+\rho_1^{**2})\right]+\frac{\rho_2^{**2}\omega_2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)}\left[\left(2D_1+\frac{1}{2}F_1\right)\omega_2-\frac{1}{2}B_1\right]\right]+$$

$$+\frac{\rho_1^{**2}\rho_2^{**2}\omega_2\omega_1}{(\omega_2^2-\omega_1^2)^2}\left[-\frac{B_1}{2}+2D_1\omega_1+\frac{F_1\omega_2}{2}\right]\left[-\frac{B_1}{2}+2D_1\omega_2+\frac{F_1\omega_1}{2}\right]>0,$$

$$\left(\frac{1}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\left[-\frac{A_1\omega_1}{2}+\left(D_1\omega_1^2-\frac{B_1}{4}\right)(\rho_1^{**2}\omega_1^2+\rho_2^{**2}\omega_2^2)+\right.\right.$$

$$\left.+C_1\frac{\omega_1^3}{2}+\frac{F_1}{4}(\rho_1^{**2}\omega_1^3+\rho_2^{**2}\omega_1^2)\right]+\frac{\rho_1^{**2}\omega_1}{(\omega_2^2-\omega_1^2)}\left[\left(2D_1+\frac{1}{2}F_1\right)\omega_1^2-\frac{1}{2}B_1\right]+$$

$$+\frac{1}{\omega_2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\left[-\frac{A_1\omega_2}{2}+C_1\left(\frac{\omega_2^3}{2}\right)+\left(D_1\omega_2-\frac{B_1}{4}\right)(\rho_2^{**2}\omega_2^2+\rho_1^{**2}\omega_1^2)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{F_1}{4}(\rho_2^{**2}\omega_2^3+\rho_1^{**2}\omega_2^2)\right]+\frac{\rho_2^{**2}\omega_2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)}\left[-\frac{1}{2}B_1+\left(2D_1+\frac{1}{2}F_1\right)\omega_2^2\right]\right)<0.$$

то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ автогенератор имеет асимптотически устойчивые колебания напряжения, при несоизмеримых числах ω_1, ω_2, близкие к двухчастотным колебаниям

$$u_1 = \rho_1^{**} \cos\left(\frac{\omega_1 t}{\sqrt{L_1 C_1}} - \varphi_1\right) + \rho_2^{**} \cos\left(\frac{\omega_2 t}{\sqrt{L_1 C_1}} - \varphi_2\right).$$

Глава 1. Математическая модель автогенератора Ван-дер-Поля на двух связанных контурах

1.1. Построение математической модели

Рассмотрим электрическую схему автогенератора на двух связанных контурах Ван-дер-Поля.

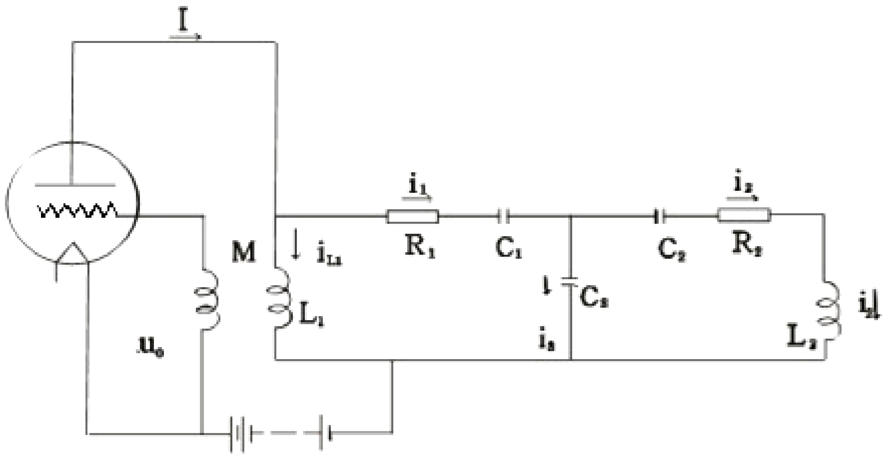


Рис. 1

где I - сила тока; u_0 – напряжение; R_1, R_2 - сопротивления; C_1, C_2 , C_3 – емкости; L_1, L_2 – индуктивности.

В этой схеме без ограничения общности вместо лампы может стоять транзистор.

Рассматривается следующая задача. Требуется определить такие значения параметров автогенератора, при которых в автогенераторе устанавливаются устойчивые колебания напряжения с заданными (несоизмеримыми) частотами $\omega_1 > \omega_2$.

Выпишем законы Кирхгофа для напряжений в контурах

$$\begin{cases} -u_{L_1} + u_{R_1} + u_{C_1} + u_{C_3} = 0, \\ -u_{C_3} + u_{C_2} + u_{R_2} + u_{L_2} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

и для токов в двух узлах

$$I - i_1 - i_{L_1} = 0,$$

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0,$$

где $u_{L_1} = L_1 \frac{di_{L_1}}{dt}$, $u_{C_1} = \frac{1}{C_1}\int i_1 dt$, $u_{C_3} = \frac{1}{C_3}\int i_3 dt = \frac{1}{C_3}\int (I - \mathrm{i}_{L_1} - i_2)dt$, $u_{R_1} = R_1 i_1$, $u_{C_2} = \frac{1}{C_2}\int i_2 dt$,

$u_{R_2} = R_2 i_{L_2}$, $u_{L_2} = L_2 \frac{di_{L_2}}{dt}$.

Первое из уравнений (1.1) запишем в виде

$$-L_1 \frac{di_{L_1}}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1}\int i_1 dt + \frac{1}{C_3}\int (I - i_{L_1} - i_2) dt = 0.$$

Пусть $u_1 = L_1 \frac{di_{L_1}}{dt}$, тогда уравнение принимает вид

$$-u_1 + R_1(I - i_{L_1}) + \frac{1}{C_1}\int (I - i_{L_1}) dt + \frac{1}{C_3}\int (I - i_{L_1} - i_2)\, dt = 0.$$

Продифференцировав это уравнение по переменной t, получим

$$-\frac{du_1}{dt} - \frac{R_1}{L_1} u_1 - \frac{i_{L_1}}{C_1} - \frac{i_{L_1}}{C_3} - \frac{i_{C_2}}{C_3} = -R_1 \frac{dI}{dt} - \frac{I}{C_1} - \frac{I}{C_3}.$$

Продифференцировав это равенство, получим

$$\frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{R_1}{L_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{C_1 L_1} + \frac{u_1}{C_3 L_1} + \frac{1}{C_3}\frac{di_{C_2}}{dt} = R_1 \frac{d^2 I}{dt^2} + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right)\frac{dI}{dt}.$$

Введем безразмерное время $\tau = \frac{t}{\sqrt{L_1 C_1}}$.

Тогда $\frac{du_1}{dt} = {u'}_1 \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$, $\frac{d^2 u_1}{dt^2} = {u''}_1 \frac{1}{L_1 C_1}$, где штрихи обозначают производные по переменной τ.

Уравнение принимает вид

$$u''_1 \frac{1}{L_1C_1} + \frac{R_1}{L_1\sqrt{L_1C_1}} u'_1 + \left(\frac{1}{L_1C_1} + \frac{1}{L_1C_3}\right) u_1 + \frac{1}{C_3} i'_{L_2} \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} =$$

$$= \frac{R_1}{L_1C_1} I'' + (\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}) \frac{I'}{\sqrt{L_1C_1}}$$

или

$$u''_1 + R_1 u'_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + \left(1 + \frac{C_1}{C_3}\right) u_1 + \frac{\sqrt{L_1C_1}}{C_3} i'_{L_2} = R_1 I'' + \sqrt{L_1C_1}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right) I'.$$

Пусть $k_2 = \frac{C_1}{C_2}$, $k_3 = \frac{C_1}{C_3}$, $\gamma = \frac{L_1C_1}{L_2C_2}$, $u_2 = i'_{L_2} \frac{L_2}{\sqrt{L_1C_1}}$, тогда уравнение запишем в виде

$$u''_1 + R_1 u'_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + (1 + \mathrm{k}_3) u_1 + \gamma \frac{k_3}{k_2} u_2 = R_1 I'' + \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1 + k_3) I' . \qquad (1.2)$$

Рассмотрим второе уравнение системы (1.1)

$$u_2 + R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2\, dt = \frac{1}{C_3} \int (I - i_{L_1} - i_2)\, dt.$$

Дифференцируя это уравнение дважды, получаем

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{R_2}{L_2}\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{L_2C_2} u_2 + \frac{1}{L_1C_3} u_1 + \frac{1}{L_2C_3} u_2 = \frac{1}{C_3}\frac{dI}{dt}.$$

Перейдем к безразмерному времени τ, получим

$$u''_2 + \frac{R_2\sqrt{L_1C_1}}{L_2} u'_2 + \frac{L_1C_1}{L_2C_2} u_2 + \frac{L_1C_1}{L_1C_3} u_1 + \frac{L_1C_1}{L_2C_3} u_2 = \frac{\sqrt{L_1C_1}}{C_3} I'.$$

Поскольку

$$\frac{R_2\sqrt{L_1C_1}}{L_2} = R_2 \sqrt{\frac{\gamma C_2}{L_2}},\ \frac{L_1C_1}{L_2C_2} + \frac{L_1C_1}{L_1C_3} = \gamma\left(1 + \frac{k_3}{k_2}\right),\ \frac{\sqrt{L_1C_1}}{C_3} = \sqrt{\frac{L_1k_3}{C_3}},$$

то уравнение принимает вид

$$u_2'' + R_2\sqrt{\frac{\gamma C_2}{L_2}}u_2' + \gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)u_2 + k_3u_1 = \sqrt{\frac{L_1k_3}{C_3}}\ I'. \qquad (1.3)$$

1.2 Метод усреднения

Одним из мощных методов исследования нелинейных систем является метод усреднения Крылова – Боголюбова.

Пусть $t\epsilon R$, $X: R\times R^n \to R^n$, $\varepsilon > 0$ – малый вещественный параметр. Проведем формулировку теоремы метода усреднения на всей числовой оси.

Теорема. Пусть функция *X (t, x)*, входящая в уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t,x), \qquad (1.4)$$

удовлетворяет следующим условиям:

а) Уравнение первого приближения

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi), \qquad (1.5)$$

в котором

$$X_0(\xi) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T X(t,x)dt, \qquad (1.6)$$

имеет квазистатическое решение $\xi = \xi_0$.

б) Вещественные части всех n-корней характеристического уравнения

$$Det|pI - X_0'(\xi_0)| = 0 \qquad (1.7)$$

составленного для уравнений в вариациях

$$\frac{d(\delta\xi)}{dt} = \varepsilon X'_{0x}(\xi_0)\delta\xi \tag{1.8}$$

соответствующих квазистатическому решению $\xi = \xi_0$, отличны от нуля.

в) Можно указать такую ρ-окрестность D_ρ точки ξ_0, в которой

X (t, x) — почти-периодические функции t, равномерно по отношению $x \in D_\rho$

г) Функция X(t, x) и ее частные производные первого порядка по x ограничены и равномерно непрерывны по отношению к t,x в области $-\infty < t < \infty, x \in D_\rho$.

Тогда можно указать такие положительные постоянные ε', σ_0, σ_1 , где $\sigma_0 < \sigma_1 < \varepsilon$, что для всякого положительного $\varepsilon < \varepsilon'$ справедливы следующие утверждения:

1. Уравнение (1.4) имеет единственное решение *x*= *x*(t),* определенное на всем интервале $(-\infty, +\infty)$, для которого

$$|x^*(t) - \xi_0| < \sigma_0, -\infty < t < \infty, \tag{1.9}$$

2. Это решение $x^*(t)$ является почти периодическим с частотным базисом функции *X(t, x)*.

3. Можно найти такую функцию $\delta(\varepsilon)$, стремящуюся к нулю вместе с ε, что будет иметь место

$$|x^*(t) - \xi_0| < \delta(\varepsilon), -\infty < t < \infty. \tag{1.10}$$

Пусть *x(t)* является любым решением уравнения (1.4), отличным от *x*(t),* удовлетворяющим при некотором $t = t_0$ неравенству вида

$$|x(t_0) - \xi_0| < \sigma_0. \tag{1.11}$$

Тогда, если вещественные части всех корней характеристического уравнения (1.7) отрицательны, расстояние $|x(t)-x^*(t)|$ стремится к нулю для $t \to \infty$, причем

$$|x(t)-x^*(t)| \le Ce^{-\gamma\varepsilon(t-t_0)}, \tag{1.12}$$

где C и γ — положительные постоянные.

Если вещественные части всех корней характеристического уравнения (1.7) положительны, то можно найти такое $t_1 > t_0$, что

$$|x(t_1)-\xi_0| > \sigma_1. \tag{1.13}$$

Если s вещественных частей рассматриваемых корней отрицательны, а остальные n — s положительны, тогда в ε_0-окрестности точки ξ_0 существует s -мерное точечное многообразие Mt_0 такое, что из соотношения $x(t_0) \in Mt_0$ вытекает экспоненциальное стремление к нулю (при $t \to \infty$) разности $|x(t)-\xi_0|$, а из соотношения $x(t_0) \notin Mt_0$ следует справедливость неравенства (1.13).

Уравнение (1,4) называется уравнением в стандартном виде для метода усреднения. Уравнение (1,5) называется усредненным уравнением.

1.3 Переход к системе с малым параметром

Считаем, что сила тока I связана с напряжением u_1 соотношением (аппроксимация многочленом третьего порядка)

$$I = (s_0+\varepsilon)u_1 + \varepsilon s_1 u_1^2 - \varepsilon s_2 u_1^3,$$

где ε − малый положительный параметр. При этом

$$I' = (s_0+\varepsilon+2s_1\varepsilon u_1 - 3s_2\varepsilon u_1^2)u_1',$$

$$I'' = \left(2s_1\varepsilon - 6s_2\varepsilon u_1\right)u_1'^2 + (s_0+\varepsilon+2s_1\varepsilon u_1 - 3s_2\varepsilon u_1^2)u_1''.$$

Подставим эти выражения в уравнение (1.2), получим

$$\left(1 - R_1 s_0 - \varepsilon R_1(1+2s_1u_1-3s_2u_1^2)\right)u_1'' +$$

$$+\left(R_1\sqrt{\tfrac{C_1}{L_1}} - \sqrt{\tfrac{L_1}{C_1}}\ (1+k_3)s_0\right)u_1' + (1+k_3)u_1 + \tfrac{\gamma k_3}{k_2}u_2 = \qquad (1.14)$$

$$= R_1\varepsilon(2s_1 - 6s_2u_1)u_1'^2 + \sqrt{\frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{C}_1}}(1+\mathrm{k}_3)(\varepsilon + 2\mathrm{s}_1\varepsilon\mathrm{u}_1 - 3\mathrm{s}_2\varepsilon\mathrm{u}_1^2)\mathrm{u'}_1.$$

Уравнение (1.3) записывается в виде

$$u_2'' + R_2\sqrt{\frac{\gamma C_2}{L_2}}u_2' - \sqrt{\frac{L_1k_3}{C_3}}s_0u_1' + \gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)u_2 + k_3u_1 =$$

$$= \varepsilon\sqrt{\tfrac{L_1k_3}{C_3}}\ (1+2\mathrm{s}_1\mathrm{u}_1 - 3\mathrm{s}_2\mathrm{u}_1^2)u_1'\ . \qquad (1.15)$$

Мы получили систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром (1.14), (1.15).

Неприятная особенность системы (1.14), (1.15) состоит в том, что коэффициент при u_1'' отличен от единицы. Система не в нормальной форме. Далее мы рассмотрим два случая. В первом случае считается, что величиной $\varepsilon R_1(1+2s_1u_1-3s_2u_1^2)$ можно пренебречь. Во втором (более сложном случае) мы этой величиной не пренебрегаем.

Глава 2. Усредненная система уравнений

2.1 Первый стандартный вид системы уравнений

Считаем, что величиной $(\varepsilon + 2S_1\varepsilon u_1 - 3S_2\varepsilon u_1^2)u_1''$ можно пренебречь. Это возможно при малых частотах ω_1, ω_2, так как $\frac{d^2}{dt^2}cos\omega t = -\omega^2 cos\omega t$ и при малых ω эта величина мала. При больших частотах эта величина не является малой. Введем обозначение

$$\frac{1}{1-R_1S_0} = S_3.$$

Получаем

$$\begin{cases} u_1'' + S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}u_1' + S_3(1+K_3)u_1 + S_3\gamma\frac{K_3}{K_2}u_2 = S_3R_1\varepsilon(2S_1 - 6S_2u_1){u_1'}^2 + \\ \quad + S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)(S_0 + \varepsilon + 2S_1\varepsilon u_1 - 3S_2\varepsilon u_1^2)u_1', \\ u_2'' + R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}u_2' - \sqrt{\frac{L_1}{C_3}K_3}S_0u_1' + \gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)u_2 + K_3u_1 = \\ \quad = \sqrt{\frac{L_1}{C_3}}K_3(\varepsilon + 2S_1\varepsilon u_1 - 3S_2\varepsilon u_1^2)u_1'. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Обозначим $S_3\gamma\frac{K_3}{K_2} = S_4^{-1}$. Из первого уравнения системы (1.3) находим u_2.

$$u_2 = -S_4u_1'' - S_4S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}u_1' - S_4S_3(1+K_3)u_1 + S_4\Big[S_3R_1\varepsilon(2S_1 - 6S_2u_1){u_1'}^2 +$$

$$+S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)(S_0 + \varepsilon + 2S_1\varepsilon u_1 - 3S_2\varepsilon u_1^2)u_1'\Big].$$

Найдем первую и вторую производную u_2 и подставим во второе уравнение системы (2.1).

$$u_2' = -S_4 u_1^{(3)} - S_4 S_3 R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} u_1'' - S_4 S_3 (1 + K_3) u_1' +$$

$$+S_4\Big(S_3 R_1 (-6\varepsilon S_2) {u_1'}^3 + 2 S_3 R_1 \varepsilon (2S_1 - 6S_2 u_1) u_1' u_1'' +$$

$$+S_3 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1 + K_3) \left\{ (2S_1 - 6S_2 u_1) \varepsilon {u_1'}^2 + (S_0 + \varepsilon + 2S_1 \varepsilon u_1 - 3S_2 \varepsilon u_1^2) u_1'' \right\} \Bigg).$$

Вычислим вторую производную функции u_2

$$u_2'' = -S_4 u_1^{(4)} - S_4 S_3 R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} u_1^{(3)} - S_4 S_3 (1 + K_3) u_1'' +$$

$$+S_4\big[S_3 R_1 (-18\varepsilon S_2) {u_1'}^2 u_1'' + 2 S_3 R_1 \times$$

$$\times \varepsilon \left\{ \Big(2S_1 u_1'' - 6S_2\big({u_1'}^2 + u_1 u_1''\big)\Big) u_1'' + (2S_1 - 6S_2 u_1) u_1' u_1^{(3)} \right\} +$$

$$+S_3 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1 + K_3) \big(-6S_2 \varepsilon {u_1'}^3 + (2\varepsilon S_1 - 6S_2 \varepsilon u_1) 2 u_1' u_1'' + (2S_1 \varepsilon u_1' - 6S_2 \varepsilon u_1 u_1') u_1'' +$$

$$+(S_0 + \varepsilon + 2S_1 \varepsilon u_1 - 3S_2 \varepsilon u_1^2) u_1^{(3)}\Big) =$$

$$= -S_4 u_1^{(4)} - S_4 S_3 R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} u_1^{(3)} - S_4 S_3 (1 + K_3) u_1'' +$$

$$+S_4 \left[S_3 R_1 (-18\varepsilon S_2) {u_1'}^2 u_1'' + 2 S_3 R_1 \left\{ (2\varepsilon S_1 - 6S_2 \varepsilon u_1)\Big({u_1''}^2 + u_1' u_1^{(3)}\Big) - 6S_2 \varepsilon {u_1'}^2 u_1'' \right\} + \right.$$

$$+S_3 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1 + K_3) \big[-6\varepsilon S_2 {u_1'}^3 + (2S_1 - 6S_2 u_1) 2\varepsilon u_1' u_1'' + (2S_1 - 6S_2 u_1) \varepsilon u_1' u_1'' +$$

$$\left. +(S_0 + \varepsilon + 2S_1 \varepsilon u_1 - 3S_2 \varepsilon u_1^2) u_1^{(3)} \right].$$

Подставим эти выражения во второе уравнение системы (2.1), получим

$$-S_4 u_1^{(4)} - u_1^{(3)} \left[S_4 S_3 R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} + R_2 \sqrt{\gamma \frac{C_2}{L_2}} S_4 \right] -$$

$$-u_1''\left[S_4S_3(1+K_3)+R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_4S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_4\right]+$$

$$+u_1'\left[-R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_4S_3(1+K_3)-S_4S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)-\sqrt{\frac{L_1}{C_3}}K_3S_0\right]+$$

$$+u_1\left[K_3-S_4S_3(1+K_3)\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)\right]=\sqrt{\frac{L_1}{C_3}}K_3(2S_1\varepsilon u_1-3S_2\varepsilon u_1^2)u_1'-$$

$$-S_4\left[-18S_2S_3R_1u_1'^2u_1''+2S_3R_1\left\{\varepsilon(2S_1-6S_2u_1)\left(u_1''^2+u_1'u_1^{(3)}\right)-6S_2\varepsilon u_1'^2u_1''\right\}-\right.$$

$$+S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left\{-6S_2\varepsilon u_1'^3+3\varepsilon(2S_1-6S_2u_1)u_1'u_1''+\right.$$

$$\left.\left.+(S_0+\varepsilon+2S_1\varepsilon u_1-3S_2\varepsilon u_1^2)u_1^{(3)}\right\}\right]-$$

$$-R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_4\left[-6S_2\varepsilon S_3R_1u_1'^3+2S_3R_1\varepsilon(2S_1-6S_2u_1)u_1'u_1''+\right.$$

$$\left.+S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\{(2S_1-6S_2u_1)\varepsilon u_1'^2+(S_0+\varepsilon+2S_1\varepsilon u_1-3S_2\varepsilon u_1^2)u_1''\}\right]-$$

$$-\gamma\left(1+\tfrac{K_3}{K_2}\right)S_4\left[S_3u_1'\left(R_1(2S_1-6S_2u_1)\varepsilon u_1'+\sqrt{\tfrac{L_1}{C_1}}(1+K_3)(S_0+\varepsilon+2S_1\varepsilon u_1-3S_2\varepsilon u_1^2)\right)\right].$$

Разделим на $(-S_4)$, получим

$$u_1^{(4)}-u_1^{(3)}\left[S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}+R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}\right]-u_1''\left[S_3(1+K_3)+R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)\right]+$$

$$+u_1'\left[-R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3(1+K_3)-S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)-\sqrt{\frac{L_1}{C_3}}K_3S_0S_4{}^{-1}\right]+$$

$$+u_1\left[-K_3S_4{}^{-1}+S_3(1+K_3)\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)\right]=-S_4{}^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_3}}K_3(2S_1u_1-3S_2u_1^2)\varepsilon u_1'+$$

$$+\left[-18S_2S_3R_1\varepsilon u_1'^2u_1''+2S_3R_1\left\{\varepsilon(2S_1-6S_2u_1)\left(u_1''^2+u_1'u_1^{(3)}\right)-6S_2\varepsilon u_1'^2u_1''\right\}+\right.$$

$$-S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3){S_4}^{-1}\left\{-6S_2\varepsilon {u_1'}^3+3(2S_1-6S_2u_1)\varepsilon u_1'u_1''+(S_0+\varepsilon+2S_1\varepsilon u_1-3S_2\varepsilon u_1^2)u_1^{(3)}\right\}\Bigg]-$$

$$-R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}\left[-6S_2S_3R_1\varepsilon {u_1'}^3+2S_3R_1\varepsilon(2S_1-6S_2u_1)u_1'u_1''+\right.$$

$$\left.+S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\{(2S_1-6S_2u_1)\varepsilon u_1'^2+(S_0+\varepsilon+2S_1\varepsilon u_1-3S_2\varepsilon u_1^2)u_1''\}\right]+$$

$$+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)\left[S_3R_1(2S_1-6S_2u_1)\varepsilon u_1'^2+S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)(S_0+\varepsilon+2S_1\varepsilon u_1-3S_2\varepsilon u_1^2)u_1'\right].$$

Линейные по u слагаемые перенесём влево, получаем:

$$u_1^{(4)}-u_1^{(3)}\left[S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}+R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}+S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0S_4^{-1}\right]+$$

$$+u_1''\left[S_3(1+K_3)+R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)-R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0\right]+$$

$$+u_1'\left[R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3(1+K_3)+S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)+\sqrt{\frac{L_1}{C_3}}K_3S_0S_4^{-1}-\right.$$

$$\left.-\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0\right]+$$

$$+u_1\left[-K_3S_4^{-1}+S_3(1+K_3)\gamma\left(1+\tfrac{K_3}{K_2}\right)\right]=-S_4^{-1}\sqrt{\tfrac{L_1}{C_1}}K_3(2S_1u_1-3S_2u_1^2)\varepsilon u_1'+ \qquad (2.2)$$

$$+\left[-18S_2S_3R_1\varepsilon u_1'^2u_1''+2S_3R_1\varepsilon\left\{(2S_1-6S_2u_1)\left(u_1''^2+u_1'u_1^{(3)}\right)-6S_2u_1'^2u_1''\right\}+\right.$$

$$\left.-S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_4^{-1}\varepsilon\left\{-6S_2u_1'^3+3(2S_1-6S_2u_1)u_1'u_1''+(1+2S_1u_1-3S_2u_1^2)u_1^{(3)}\right\}\right]+$$

$$+R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}\varepsilon\left[-6S_2S_3R_1u_1'^3+2S_3R_1(2S_1-6S_2u_1)u_1'u_1''+S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\times\right.$$

$$\left.\times\{(2S_1-6S_2u_1)u_1'^2+(1+2S_1u_1-3S_2u_1^2)u_1''\}\right]+$$

$$+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)\varepsilon\left[S_3R_1(2S_1-6S_2u_1)u_1'^2+S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)(1+2S_1u_1-3S_2u_1^2)u_1'\right].$$

Уравнение (2.2) имеет вид

$$u_1^{(4)}+a_1u_1^{(3)}+a_2u_1''+a_3u_1'+a_4u_1=\varepsilon f, \tag{2.3}$$

где $a_1=S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}+R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}+S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0S_4^{-1}$,

$$a_2=S_3(1+K_3)+R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)-R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0,$$

$$a_3=R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3(1+K_3)+S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)+\sqrt{\frac{L_1}{C_3}K_3S_0S_4^{-1}}-$$

$$-\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0,$$

$$a_4=-K_3S_4^{-1}+S_3(1+K_3)\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right),$$

ε - малый положительный параметр, $f=f(\tau,u_1,u_1',u_1'',u_1^{(3)})$ – известная функция.

Выпишем характеристический многочлен уравнения (2.3)

$$L(p)=p^4+a_1p^3+a_2p^2+a_3p+a_4.$$

Лемма. Многочлен $L(p)$ с вещественными коэффициентами имеет корни $\pm i\omega_1,\pm i\omega_2$ если и только если

$$a_1=a_3=0, a_2=\omega_1^2+\omega_2^2, a_4=\omega_1^2\omega_2^2. \tag{2.4}$$

Доказательство. Действительно,

$$L(p)=(p-i\omega_1)(p+i\omega_1)(p-i\omega_2)(p+i\omega_2)=$$

$$=p^4+(\omega_1^2+\omega_2^2)p^2+\omega_1^2\omega_2^2.$$

Отсюда и следует утверждение.

Уравнение (2.3) запишем в виде системы уравнений

$$u_1' = \tilde{u}_2,$$

$$\tilde{u}'_2 = u_3, \qquad (2.5)$$

$$u'_3 = u_4,$$

$$u'_4 = -a_4 u_1 - a_3 \tilde{u}_2 - a_2 u_3 - a_1 u_4 + \varepsilon f.$$

Теорема. При выполнении условий (2.4) замена переменных

$$u_1 = \rho_1 \cos(\omega_1 \tau - \varphi_1) + \rho_2 \cos(\omega_2 \tau - \varphi_2),$$

$$\tilde{u}_2 = -\rho_1 \omega_1 \sin(\omega_1 \tau - \varphi_1) - \rho_2 \omega_2 \sin(\omega_2 \tau - \varphi_2), \qquad (2.6)$$

$$u_3 = -\rho_1 \omega_1^2 \cos(\omega_1 \tau - \varphi_1) - \rho_2 \omega_2^2 \cos(\omega_2 \tau - \varphi_2),$$

$$u_4 = \rho_1 \omega_1^3 \sin(\omega_1 \tau - \varphi_1) + \rho_2 \omega_2^3 \sin(\omega_2 \tau - \varphi_2),$$

где $\rho_1(\tau)$, $\rho_2(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ - новые неизвестные функции приводит систему (2.4) к стандартному виду метода усреднения

$$\rho_1' = \frac{-\varepsilon f sin(\omega_1 \tau - \varphi_1)}{\omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)},$$

$$\rho_2' = \frac{\varepsilon f sin(\omega_2 t - \varphi_2)}{\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)},$$

$$\varphi_1' = \frac{\varepsilon f cos(\omega_1 t - \varphi_1)}{\rho_1 \omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)},$$

$$\varphi_2' = \frac{-\varepsilon f cos(\omega_2 t - \varphi_2)}{\rho_2 \omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}.$$

Доказательство. Сделав замену переменных (2.6) в системе (2.5), приходим к системе уравнений

$$\rho_1' \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + \rho_2' \cos(\omega_2 t - \varphi_2) + \varphi_1' \rho_1 sin(\omega_1 t - \varphi_1) +$$

$$+\varphi_2' \rho_2 sin(\omega_2 t - \varphi_2) = 0,$$

$$-\rho_1'\omega_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1)-\rho_2'\omega_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2)+\varphi_1'\rho_1\omega_1 cos(\omega_1 t-\varphi_1)+$$

$$+\varphi_2'\rho_2\omega_2 cos(\omega_2 t-\varphi_2)=0,$$

$$\rho_1'\omega_1^2 cos(\omega_1 t-\varphi_1)+\rho_2'\omega_2^2 cos(\omega_2 t-\varphi_2)+$$

$$+\rho_1\omega_1^2 sin(\omega_1 t-\varphi_1)\varphi_1'+\rho_2\omega_2^2 sin(\omega_2 t-\varphi_2)\varphi_2'=0,$$

$$\rho_1'\omega_1^3 sin(\omega_1 t-\varphi_1)+\rho_2'\omega_2^3 sin(\omega_2 t-\varphi_2)-$$

$$-\varphi_1'\rho_1\omega_1^3 cos(\omega_1 t-\varphi_1)-\varphi_2'\rho_2\omega_2^3 cos(\omega_2 t-\varphi_2)=\varepsilon f.$$

Запишем полученный результат в матричном виде

$$A\begin{pmatrix}\dot{\rho_1}\\ \dot{\rho_2}\\ \dot{\varphi_1}\\ \dot{\varphi_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \varepsilon f\end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

где матрица A имеет следующий вид

$$A=\begin{pmatrix} cos(\omega_1 t-\varphi_1) & cos(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2)\\ -\omega_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & -\omega_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1\omega_1 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2\omega_2 cos(\omega_2 t-\varphi_2)\\ \omega_1^2 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & \omega_2^2 cos(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1\omega_1^2 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2\omega_2^2 sin(\omega_2 t-\varphi_2)\\ \omega_1^3 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \omega_2^3 sin(\omega_2 t-\varphi_2) & -\rho_1\omega_1^3 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & -\rho_2\omega_2^3 cos(\omega_2 t-\varphi_2)\end{pmatrix}.$$

Полученную систему будем решать методом Крамера.

$$\rho_1'=\frac{\Delta_1}{\Delta},\rho_2'=\frac{\Delta_2}{\Delta},\varphi_1'=\frac{\Delta_3}{\Delta},\varphi_2'=\frac{\Delta_4}{\Delta},$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix} cos(\omega_1 t-\varphi_1) & cos(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2)\\ -\omega_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & -\omega_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1\omega_1 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2\omega_2 cos(\omega_2 t-\varphi_2)\\ \omega_1^2 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & \omega_2^2 cos(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1\omega_1^2 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2\omega_2^2 sin(\omega_2 t-\varphi_2)\\ \omega_1^3 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \omega_2^3 sin(\omega_2 t-\varphi_2) & -\rho_1\omega_1^3 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & -\rho_2\omega_2^3 cos(\omega_2 t-\varphi_2)\end{vmatrix},$$

Δ_j - это определитель, который получается из определителя Δ заменой j столбца, столбцом из правой части системы уравнений.

Так как при умножении строк на константу и сложении строк поэлементно определитель не меняется, то Δ можно преобразовать следующим образом: умножаем первую и вторую строку на ω_1^2 и вычитаем первую из третьей, а к четвертой прибавляем вторую. Получаем

$$\Delta=\begin{vmatrix} cos(\omega_1 t-\varphi_1) & cos(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) \\ -\omega_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & -\omega_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1\omega_1 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2\omega_2 cos(\omega_2 t-\varphi_2) \\ 0 & (\omega_2^2-\omega_1^2)cos(\omega_2 t-\varphi_2) & 0 & \rho_2(\omega_2^2-\omega_1^2)sin(\omega_2 t-\varphi_2) \\ 0 & (\omega_2^3-\omega_1^2\omega_2)sin(\omega_2 t-\varphi_2) & 0 & \rho_2\omega_2(-\omega_2^2+\omega_1^2)cos(\omega_2 t-\varphi_2) \end{vmatrix}.$$

Теперь третью строку умножаем на $-\omega_2\frac{sin(\omega_2 t-\varphi_2)}{cos(\omega_2 t-\varphi_2)}$ и складываем с четвертой. Получаем:

первый столбец

$$\begin{pmatrix} cos(\omega_1 t-\varphi_1) \\ -\omega_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

второй столбец

$$\begin{pmatrix} cos(\omega_2 t-\varphi_2) \\ -\omega_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) \\ (\omega_2^2-\omega_1^2)cos(\omega_2 t-\varphi_2) \\ 0 \end{pmatrix},$$

третий столбец

$$\begin{pmatrix} \rho_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) \\ \rho_1\omega_1 cos(\omega_1 t-\varphi_1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

четвертый столбец

$$\begin{pmatrix} \rho_2 sin(\omega_2 t - \varphi_2) \\ \rho_2 \omega_2 cos(\omega_2 t - \varphi_2) \\ \rho_2(\omega_2^2 - \omega_1^2) sin(\omega_2 t - \varphi_2) \\ \rho_2 \omega_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)\left(-cos(\omega_2 t - \varphi_2) + \dfrac{-sin^2(\omega_2 t - \varphi_2)}{cos(\omega_2 t - \varphi_2)}\right) \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\Delta = \rho_2 \omega_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)\left(-cos(\omega_2 t - \varphi_2) + \frac{-sin^2(\omega_2 t - \varphi_2)}{cos(\omega_2 t - \varphi_2)}\right) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} cos(\omega_1 t - \varphi_1) & cos(\omega_2 t - \varphi_2) & \rho_1 sin(\omega_1 t - \varphi_1) \\ -\omega_1 sin(\omega_1 t - \varphi_1) & -\omega_2 sin(\omega_2 t - \varphi_2) & \rho_1 \omega_1 cos(\omega_1 t - \varphi_1) \\ 0 & (\omega_2^2 - \omega_1^2) cos(\omega_2 t - \varphi_2) & 0 \end{vmatrix}.$$

Введем обозначение

$$k_1 = \rho_2 \omega_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)\left(-cos(\omega_2 t - \varphi_2) + \frac{-sin^2(\omega_2 t - \varphi_2)}{cos(\omega_2 t - \varphi_2)}\right),$$

тогда

$$\Delta = k_1 (-1)(\omega_2^2 - \omega_1^2) cos(\omega_2 t - \varphi_2) \times$$

$$\times \begin{vmatrix} cos(\omega_1 t - \varphi_1) & \rho_1 sin(\omega_1 t - \varphi_1) \\ -\omega_1 sin(\omega_1 t - \varphi_1) & \rho_1 \omega_1 cos(\omega_1 t - \varphi_1) \end{vmatrix}.$$

Теперь обозначим

$$k_2 = (-1)(\omega_2^2 - \omega_1^2) cos(\omega_2 t - \varphi_2),$$

тогда

$$\Delta = k_1 k_2 \big(\rho_1 \omega_1 cos^2(\omega_1 t - \varphi_1) - \rho_1 \omega_1 sin^2(\omega_1 t - \varphi_1)\big) = k_1 k_2 \rho_1 \omega_1.$$

В первоначальных обозначениях

$$\Delta = \rho_2 \omega_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)\left(-cos(\omega_2 t - \varphi_2) + \frac{-sin^2(\omega_2 t - \varphi_2)}{cos(\omega_2 t - \varphi_2)}\right) \times$$

$$\times (-1)(\omega_2^2 - \omega_1^2) cos(\omega_2 t - \varphi_2) \rho_1 \omega_1.$$

Таким образом

$$\Delta = \rho_1\omega_1\rho_2\omega_2(\omega_2^2-\omega_1^2)^2. \quad (2.8)$$

Посчитаем Δ_1

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & cos(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) \\ 0 & -\omega_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1\omega_1 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2\omega_2 cos(\omega_2 t-\varphi_2) \\ 0 & \omega_2^2 cos(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1\omega_1^2 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2\omega_2^2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) \\ \varepsilon f & \omega_2^3 sin(\omega_2 t-\varphi_2) & -\rho_1\omega_1^3 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & -\rho_2\omega_2^3 cos(\omega_2 t-\varphi_2) \end{vmatrix}.$$

Раскладываем по первому столбцу, получаем

$$\Delta_1 = -\varepsilon f \begin{vmatrix} cos(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) \\ -\omega_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1\omega_1 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2\omega_2 cos(\omega_2 t-\varphi_2) \\ \omega_2^2 cos(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1\omega_1^2 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2\omega_2^2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) \end{vmatrix}.$$

Первую строку матрицы умножаем на ω_2^2 и вычитаем из третьей, получим

$$\Delta_1 = -\varepsilon f \begin{vmatrix} cos(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) \\ -\omega_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1\omega_1 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2\omega_2 cos(\omega_2 t-\varphi_2) \\ 0 & \rho_1(\omega_1^2-\omega_2^2) sin(\omega_1 t-\varphi_1) & 0 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая и третьей строке, получаем

$$\Delta_1 = \varepsilon f \rho_1(\omega_1^2-\omega_2^2) sin(\omega_1 t-\varphi_1) \begin{vmatrix} cos(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) \\ -\omega_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_2\omega_2 cos(\omega_2 t-\varphi_2) \end{vmatrix}.$$

Упростим выражение

$$\Delta_1 = -\varepsilon f \rho_2\omega_2\rho_1(\omega_1^2-\omega_2^2) sin(\omega_1 t-\varphi_1). \quad (2.9)$$

По формулам Крамера получаем

$$\rho_1' = \frac{-\varepsilon f sin(\omega_1 t-\varphi_1)}{\omega_1(\omega_1^2-\omega_2^2)}. \quad (2.10)$$

Находим $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} cos(\omega_1 t-\varphi_1) & 0 & \rho_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) \\ -\omega_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & 0 & \rho_1\omega_1 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2\omega_2 cos(\omega_2 t-\varphi_2) \\ \omega_1^2 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & 0 & \rho_1\omega_1^2 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2\omega_2^2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) \\ \omega_1^3 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \varepsilon f & -\rho_1\omega_1^3 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & -\rho_2\omega_2^3 cos(\omega_2 t-\varphi_2) \end{vmatrix} =$$

$$= \varepsilon f \rho_1 \rho_2 \begin{vmatrix} cos(\omega_1 t-\varphi_1) & sin(\omega_1 t-\varphi_1) & sin(\omega_2 t-\varphi_2) \\ -\omega_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \omega_1 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & \omega_2 cos(\omega_2 t-\varphi_2) \\ \omega_1^2 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & \omega_1^2 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \omega_2^2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) \end{vmatrix} =$$

$= \varepsilon f \rho_1 \rho_2 [\omega_1 \omega_2 cos(\omega_1 t-\varphi_1)\{\omega_2 cos(\omega_1 t-\varphi_1) sin(\omega_2 t-\varphi_2) -$

$-\omega_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) cos(\omega_2 t-\varphi_2)\} + \omega_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) \times$

$\times \{\omega_2^2 sin(\omega_1 t-\varphi_1) sin(\omega_2 t-\varphi_2) + \omega_1 \omega_2 cos(\omega_1 t-\varphi_1) cos(\omega_2 t-\varphi_2)\} +$

$-\omega_1^3 sin(\omega_2 t-\varphi_2)\{sin^2(\omega_1 t-\varphi_1) + cos^2(\omega_1 t-\varphi_1)\} =$

$= \varepsilon f \rho_2 \rho_1 \omega_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2) sin(\omega_2 t-\varphi_2),$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} cos(\omega_1 t-\varphi_1) & cos(\omega_2 t-\varphi_2) & 0 & \rho_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) \\ -\omega_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & -\omega_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) & 0 & \rho_2 \omega_2 cos(\omega_2 t-\varphi_2) \\ \omega_1^2 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & \omega_2^2 cos(\omega_2 t-\varphi_2) & 0 & \rho_2 \omega_2^2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) \\ \omega_1^3 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \omega_2^3 sin(\omega_2 t-\varphi_2) & \varepsilon f & -\rho_2 \omega_2^3 cos(\omega_2 t-\varphi_2) \end{vmatrix} =$$

$= -\varepsilon f \rho_2 \omega_2 [-\omega_2^2 cos(\omega_1 t-\varphi_1)\{sin^2(\omega_2 t-\varphi_2) + cos^2(\omega_2 t-\varphi_2)\} +$

$+\omega_1\{\omega_2 sin(\omega_1 t-\varphi_1) sin(\omega_2 t-\varphi_2) + \omega_1 cos(\omega_1 t-\varphi_1) cos(\omega_2 t-\varphi_2)\} -$

$-\omega_1 sin(\omega_2 t-\varphi_2)\{\omega_2 sin(\omega_1 t-\varphi_1) cos(\omega_2 t-\varphi_2) - \omega_1 sin(\omega_2 t-\varphi_2) cos(\omega_1 t-\varphi_1)\}] =$

$= \varepsilon f \rho_2 \omega_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2) cos(\omega_1 t-\varphi_1),$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} cos(\omega_1 t-\varphi_1) & cos(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & 0 \\ -\omega_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & -\omega_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1 \omega_1 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & 0 \\ \omega_1^2 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & \omega_2^2 cos(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1 \omega_1^2 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & 0 \\ \omega_1^3 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \omega_2^3 sin(\omega_2 t-\varphi_2) & -\rho_1 \omega_1^3 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & \varepsilon f \end{vmatrix} =$$

$= \varepsilon f \rho_1 [-\omega_1 \omega_2 cos(\omega_1 t-\varphi_1)\{\omega_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) sin(\omega_2 t-\varphi_2) + \omega_2 cos(\omega_1 t-\varphi_1) cos(\omega_2 t-\varphi_2)\} -$

$-\omega_1^3 cos(\omega_2 t-\varphi_2)\{sin^2(\omega_1 t-\varphi_1) - cos^2(\omega_1 t-\varphi_1)\} +$

$-\omega_1 \omega_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2)\{\omega_2 sin(\omega_1 t-\varphi_1) cos(\omega_2 t-\varphi_2) - \omega_1 sin(\omega_2 t-\varphi_2) cos(\omega_1 t-\varphi_1)\}] =$

$= -\varepsilon f (\omega_2^2 - \omega_1^2) cos(\omega_2 t-\varphi_2) \rho_1 \omega_1.$

Таким образом, получаем:

$$\Delta_1 = -\varepsilon f \rho_2 \omega_2 \rho_1 (\omega_1^2 - \omega_2^2) sin(\omega_1 t-\varphi_1),$$

$$\Delta_2 = \varepsilon f \rho_2 \rho_1 \omega_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2) sin(\omega_2 t-\varphi_2),$$

$$\Delta_3 = \varepsilon f \rho_2 \omega_2 (\omega_1^2 - \omega_2^2) cos(\omega_1 t-\varphi_1), \qquad (2.11)$$

$$\Delta_4 = -\varepsilon f (\omega_2^2 - \omega_1^2) cos(\omega_2 t-\varphi_2) \rho_1 \omega_1,$$

Найдем по методу Крамера $\dot{\rho_2}$, $\dot{\varphi_1}$, $\dot{\varphi_2}$

$$\rho_2' = \frac{\varepsilon f sin(\omega_2 t - \varphi_2)}{\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \tag{2.12}$$

$$\varphi_1' = \frac{\varepsilon f cos(\omega_1 t - \varphi_1)}{\rho_1 \omega_1(\omega_1^2 - \omega_2^2)}, \tag{2.13}$$

$$\varphi_2' = \frac{-\varepsilon f cos(\omega_2 t - \varphi_2)}{\rho_2 \omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \tag{2.14}$$

Теорема доказана.

2.2. Второй стандартный вид системы уравнений

Мы намерены исследовать систему уравнений (1.14), (1.15) методом усреднения. Тогда эту систему сначала нужно привести к стандартному виду, а затем строить усредненную систему уравнений. Это можно сделать, приведя систему уравнений второго порядка (1.14), (1.15) к системе уравнений первого порядка, однако количество аналитических преобразований уменьшается, если перейти к дифференциальному уравнению четвертого порядка.

Для определенности будем считать, что $\omega_1 > \omega_2$ и эти числа не соизмеримы. Обратимся к уравнению (1.14). Рассмотрим коэффициент при u_1''. Его запишем в виде

$$1 - R_1 S_0 - \varepsilon R_1(1 + 2S_1 u_1 - 3S_2 u_1^2) = \alpha + \varepsilon\beta.$$

Если величиной $\varepsilon R_1(1 + 2S_1 u_1 - 3S_2 u_1^2)$ пренебречь нельзя, тго выделим линейную часть относительно ε выражения $(\alpha + \varepsilon\beta)^{-1}$.

$$(\alpha + \varepsilon\beta)^{-1} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha^2}\varepsilon + o(\varepsilon),$$

Где $o(\varepsilon)$- бесконечно малая высшего порядка относительно ε.

Тогда

$$1 - R_1 S_0 - \varepsilon R_1 (1 + 2S_1 u_1 - 3S_2 u_1^2)^{-1} = (1 - R_1 S_0)^{-1} -$$

$$-\varepsilon R_1 (1 + 2S_1 u_1 - 3S_2 u_1^2)(1 - R_1 S_0)^{-2} + o(\varepsilon).$$

Отметим, что этот случай сложнее, чем первый случай, но многие расчеты, проведенные для первого случая используются и в этом более сложном случае. Умножим уравнение (1.14) на

$$(1 - R_1 S_0)^{-1} - \varepsilon R_1 (1 + 2S_1 u_1 - 3S_2 u_1^2)(1 - R_1 S_0)^{-2}$$

и введем обозначения

$$R_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} = A;\ (1 + k_3) = B;\ \frac{\gamma k_3}{k_2} = D;\ \sqrt{\frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{C}_1}}(1 + \mathrm{k}_3) = \mathrm{E};$$

$$R_2 \sqrt{\frac{\gamma C_2}{L_2}} = \mathrm{F};\ \gamma\left(1 + \frac{k_3}{k_2}\right) = \mathrm{G};\ \sqrt{\frac{L_1 k_3}{C_3}} = \mathrm{H}.$$

В этом случае система уравнений (1.14) и (1.15) примет вид:

$$\begin{cases} u_1'' + Au_1' + \mathrm{B}u_1 + \mathrm{D}u_2 = R_1[\varepsilon(2s_1 - 6s_2 u_1)u_1'^2 + (s_0 + \varepsilon + 2s_1 \varepsilon u_1 - 3s_2 \varepsilon u_1^2)u_1''] + \\ \qquad +\mathrm{E}[(s_0 + \varepsilon + 2s_1 \varepsilon u_1 - 3s_2 \varepsilon u_1^2)u_1'] \\ u_2'' + \mathrm{F}u_2' + \mathrm{G}u_2 + k_3 u_1 = \mathrm{H}[(s_0 + \varepsilon + 2s_1 \varepsilon u_1 - 3s_2 \varepsilon u_1^2)u_1']. \end{cases} \tag{2.16}$$

Найдем u_2 из первого уравнения системы:

$$u_2 = \frac{1}{D}[R_1[\varepsilon(2s_1 - 6s_2 u_1)u_1'^2 + (s_0 + \varepsilon + 2s_1 \varepsilon u_1 - 3s_2 \varepsilon u_1^2)u_1''] +$$

$$+\mathrm{E}[(s_0 + \varepsilon + 2s_1 \varepsilon u_1 - 3s_2 \varepsilon u_1^2)u_1'] - u_1'' - Au_1' - \mathrm{B}u_1]. \tag{2.17}$$

Найдем первую и вторую производные выражения (2.17):

$$u_2' = \frac{1}{D}[R_1[4s_1 \varepsilon u_1' u_1'' - 6s_2 \varepsilon(u_1'^3 + 2u_1 u_1' u_1'') + (s_0 + \varepsilon)u_1''' +$$

$+2s_1\varepsilon(u_1'u_1''+u_1u_1''')-3s_2\varepsilon(2u_1u_1'u_1''+u_1^2u_1''')]+E[(s_0+\varepsilon)u_1''+$

$+2s_1\varepsilon(u_1'^2+u_1u_1'')-3s_2\varepsilon u_1(2u_1'^2+u_1u_1'')]-u_1'''-Au_1''-\text{B}u_1'];$

$$u_2''=\frac{1}{D}[R_1[4s_1\varepsilon(u_1''^2+u_1'u_1''')-6s_2\varepsilon(5u_1'^2u_1''+u_1u_1''^2+u_1u_1'u_1''')+$$

$+(s_0+\varepsilon)u_1^{\text{IV}}+2s_1\varepsilon\big(u_1''^2+2u_1'u_1'''+u_1u_1^{\text{IV}}\big)-$

$-3s_2\varepsilon\big(2u_1'^2u_1''+u_1u_1''^2+3u_1u_1'u_1'''+u_1^2u_1^{\text{IV}}\big)\big]+$

$+\text{E}[(s_0+\varepsilon)u_1'''+2s_1\varepsilon(3u_1'u_1''+u_1u_1''')-3s_2\varepsilon(2u_1'^3+5u_1u_1'u_1''+u_1^2u_1''')]-$

$-u_1^{\text{IV}}-Au_1'''-\text{B}u_1''\big].$

Подставим полученные выражения в систему (2.16) и получим дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\frac{1}{D}\big[R_1\big[4s_1\varepsilon(u_1''^2+u_1'u_1''')-6s_2\varepsilon(5u_1'^2u_1''+u_1u_1''^2+u_1u_1'u_1''')+(s_0+\varepsilon)u_1^{\text{IV}}+$$

$+2s_1\varepsilon\big(u_1''^2+2u_1'u_1'''+u_1u_1^{\text{IV}}\big)-3s_2\varepsilon\big(2u_1'^2u_1''+u_1(u_1''^2+3u_1'u_1''')+u_1^2u_1^{\text{IV}}\big)\big]+$

$+\text{E}[(s_0+\varepsilon)u_1'''+2s_1\varepsilon(3u_1'u_1''+u_1u_1''')-$

$-3s_2\varepsilon(2u_1'^3+5u_1u_1'u_1''+u_1^2u_1''')-u_1^{\text{IV}}-Au_1'''-\text{B}u_1'']+$

$$+F\left[\frac{1}{D}[R_1[4s_1\varepsilon u_1'u_1''-6s_2\varepsilon(u_1'^3+2u_1u_1'u_1'')+(s_0+\varepsilon)u_1'''+\right.$$

$+2s_1\varepsilon(u_1'u_1''+u_1u_1''')-3s_2\varepsilon(2u_1u_1'u_1''+u_1^2u_1''')]+$

$+\text{E}[(s_0+\varepsilon)u_1''+2s_1\varepsilon(u_1'^2+u_1u_1'')-3s_2\varepsilon(2u_1u_1'^2+u_1^2u_1'')]-$

$-u_1'''-Au_1''-\text{B}u_1']+$

$$+\text{G}\left[\frac{1}{D}[R_1[\varepsilon(2s_1-6s_2u_1)u_1'^2+(s_0+\varepsilon+2s_1\varepsilon u_1-3s_2\varepsilon u_1^2)u_1'']+\right.$$

$\left.+\text{E}[(s_0+\varepsilon+2s_1\varepsilon u_1-3s_2\varepsilon u_1^2)u_1']-u_1''-Au_1'-\text{B}u_1]]\right]+k_3u_1=$

$=\text{H}[(s_0+\varepsilon+2s_1\varepsilon u_1-3s_2\varepsilon u_1^2)u_1'].$

Введем обозначение $s_3 = (R_1 s_0 - 1)^{-1}$. После преобразований, получаем

$u_1^{\mathrm{IV}} + u_1'''(-Es_3s_0 + \mathrm{A}s_3 - \mathrm{F}s_3R_1s_0 + \mathrm{F}s_3) + u_1''(\mathrm{B}s_3 - \mathrm{F}s_3\mathrm{E}s_0 + \mathrm{F}s_3\mathrm{A} -$

$-\mathrm{G}s_3R_1s_0 + \mathrm{G}s_3) + u_1's_3(-\mathrm{HD}s_0 + \mathrm{FB} + \mathrm{GE}s_0 + \mathrm{GA}) + u_1(\mathrm{G}s_3\mathrm{B} + k_3s_3) =$

$= [s_3 - \varepsilon \mathrm{S}_3^2(R_1 + 2s_1u_1 - 3s_2u_1^2)] \Big\{\Big[R_1\big[4s_1\varepsilon(u_1''^2 + u_1'u_1''') - 6s_2\varepsilon(5u_1'^2u_1'' + u_1u_1''^2 + u_1u_1'u_1''') +$

$2s_1\varepsilon\big(u_1''^2 + 2u_1'u_1''' + u_1u_1^{\mathrm{IV}}\big) - 3s_2\varepsilon\big(2u_1'^2u_1'' + u_1u_1''^2 + 3u_1u_1'u_1''' + u_1^2u_1^{\mathrm{IV}}\big)\big] + \mathrm{E}[2s_1\varepsilon(3u_1'u_1'' +$

$+u_1u_1''') - 3s_2\varepsilon(2u_1'^3 + 5u_1u_1'u_1'' + u_1^2u_1''')]\Big] + F\Big[\frac{1}{D}\big[R_1[4s_1\varepsilon u_1'u_1'' - 6s_2\varepsilon(u_1'^3 + 2u_1u_1'u_1'') +$

$+2s_1\varepsilon(u_1'u_1'' + u_1u_1''') - 3s_2\varepsilon(2u_1u_1'u_1'' + u_1^2u_1''')] + \mathrm{E}[2s_1\varepsilon(u_1'^2 + u_1u_1'') - 3s_2\varepsilon(2u_1u_1'^2 +$

$+u_1^2u_1'')]\big] + \mathrm{G}\Big[\frac{1}{D}[R_1[\varepsilon(2s_1 - 6s_2u_1)u_1'^2 + (2s_1\varepsilon u_1 - 3s_2\varepsilon u_1^2)u_1''] +$

$+\mathrm{E}[(2s_1\varepsilon u_1 - 3s_2\varepsilon u_1^2)u_1']]\Big]\Big] - HD[(2s_1\varepsilon u_1 - 3s_2\varepsilon u_1^2)u_1']\}.$ (2.18)

Уравнение (2.18) имеет вид

$$u_1^{(4)} + \widehat{a_1}u_1^{(3)} + \widehat{a_2}u_1'' + \widehat{a_3}u_1' + \widehat{a_4}u_1 = \varepsilon f_1, \tag{2.19}$$

Где $\widehat{a_1} = -Es_3s_0 + \mathrm{A}s_3 - \mathrm{F}s_3R_1s_0 + \mathrm{F}s_3$,

$\widehat{a_2} = \mathrm{B}s_3 - \mathrm{F}s_3\mathrm{E}s_0 + \mathrm{F}s_3\mathrm{A} - \mathrm{G}s_3R_1s_0 + \mathrm{G}s_3$,

$\widehat{a_3} = s_3(-\mathrm{HD}s_0 + \mathrm{FB} + \mathrm{GE}s_0 + \mathrm{GA})$,

$a_4 = \mathrm{G}\widehat{s_3\mathrm{B}} + k_3s_3$, ε - малый положительный параметр, $f_1 = f_1(\tau, u_1, u_1', u_1'', u_1^{(3)})$ – известная функция.

Уравнение (2.19) запишем в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} &u_1' = \tilde{u}_2,\\ &\tilde{u}'_2 = u_3,\\ &u'_3 = u_4,\\ &u'_4 = -a_4u_1 - a_3\tilde{u}_2 - a_2u_3 - a_1u_4 + \varepsilon f_1. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Теорема. При выполнении условий (2.18) замена переменных

$$u_1 = \rho_1 \cos(\omega_1\tau - \varphi_1) + \rho_2 \cos(\omega_2\tau - \varphi_2),$$

$$\tilde{u}_2 = -\rho_1\omega_1 \sin(\omega_1\tau - \varphi_1) - \rho_2\omega_2 \sin(\omega_2\tau - \varphi_2), \qquad (2.21)$$

$$u_3 = -\rho_1\omega_1^2 \cos(\omega_1\tau - \varphi_1) - \rho_2\omega_2^2 \cos(\omega_2\tau - \varphi_2),$$

$$u_4 = \rho_1\omega_1^3 \sin(\omega_1\tau - \varphi_1) + \rho_2\omega_2^3 \sin(\omega_2\tau - \varphi_2),$$

где $\rho_1(\tau)$, $\rho_2(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ - новые неизвестные функции приводит уравнение (2.19) к стандартному виду метода усреднения

$$\rho_1' = \frac{-\varepsilon f_1 sin(\omega_1\tau - \varphi_1)}{\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)},$$

$$\rho_2' = -\frac{\varepsilon f_1 sin(\omega_2\tau - \varphi_2)}{\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}, \qquad (2.22)$$

$$\varphi_1' = -\frac{\varepsilon f_1 cos(\omega_1\tau - \varphi_1)}{\rho_1\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)},$$

$$\varphi_2' = \frac{-\varepsilon f_1 cos(\omega_2\tau - \varphi_2)}{\rho_2\omega_2(\omega_2^2 - \omega_1^2)}.$$

Доказательство. Сделав замену переменных (2.21) в системе (2.20), приходим к системе уравнений

$$\rho_1' \cos(\omega_1\tau - \varphi_1) + \rho_2' \cos(\omega_2\tau - \varphi_2) + \varphi_1'\rho_1 sin(\omega_1\tau - \varphi_1) +$$

$$+\varphi_2'\rho_2 sin(\omega_2\tau - \varphi_2) = 0,$$

$$-\rho_1'\omega_1 sin(\omega_1\tau - \varphi_1) - \rho_2'\omega_2 sin(\omega_2\tau - \varphi_2) + \varphi_1'\rho_1\omega_1 cos(\omega_1\tau - \varphi_1) +$$

$$\varphi_2'\rho_2\omega_2 cos(\omega_2\tau - \varphi_2) = 0, \qquad (2.23)$$

$$\rho_1'\omega_1^2 cos(\omega_1\tau - \varphi_1) + \rho_2'\omega_2^2 cos(\omega_2\tau - \varphi_2) +$$

$$+\varphi_1'\rho_1\omega_1^2 sin(\omega_1\tau - \varphi_1) + \varphi_2'\rho_2\omega_2^2 sin(\omega_2\tau - \varphi_2) = 0,$$

$$\rho_1'\omega_1^3 sin(\omega_1\tau - \varphi_1) + \rho_2'\omega_2^3 sin(\omega_2\tau - \varphi_2) -$$

$$-\varphi_1'\rho_1\omega_1^3cos(\omega_1\tau-\varphi_1)-\varphi_2'\rho_2\omega_2^3cos(\omega_2\tau-\varphi_2)=\varepsilon f.$$

Полученную систему решаем методом Крамера. Основной определитель системы имеет вид

$$\Delta=\begin{vmatrix} cos(\omega_1\tau-\varphi_1) & cos(\omega_2\tau-\varphi_2) & \rho_1 sin(\omega_1\tau-\varphi_1) & \rho_2 sin(\omega_2\tau-\varphi_2) \\ -\omega_1 sin(\omega_1\tau-\varphi_1) & -\omega_2 sin(\omega_2\tau-\varphi_2) & \rho_1\omega_1 cos(\omega_1\tau-\varphi_1) & \rho_2\omega_2 cos(\omega_2\tau-\varphi_2) \\ \omega_1^2 cos(\omega_1\tau-\varphi_1) & \omega_2^2 cos(\omega_2\tau-\varphi_2) & \rho_1\omega_1^2 sin(\omega_1\tau-\varphi_1) & \rho_2\omega_2^2 sin(\omega_2\tau-\varphi_2) \\ \omega_1^3 sin(\omega_1\tau-\varphi_1) & \omega_2^3 sin(\omega_2\tau-\varphi_2) & -\rho_1\omega_1^3 cos(\omega_1\tau-\varphi_1) & -\rho_2\omega_2^3 cos(\omega_2\tau-\varphi_2) \end{vmatrix}.$$

Умножим первую строку определителя на $-\omega_1^2$ и прибавим к третьей строке, затем умножим вторую строку на ω_1^2 и прибавим к четвертой, получим

$$\Delta=\begin{vmatrix} cos(\omega_1 t-\varphi_1) & cos(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) \\ -\omega_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & -\omega_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1\omega_1 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2\omega_2 cos(\omega_2 t-\varphi_2) \\ 0 & (\omega_2^2-\omega_1^2)cos(\omega_2 t-\varphi_2) & 0 & \rho_2(\omega_2^2-\omega_1^2)sin(\omega_2 t-\varphi_2) \\ 0 & (\omega_2^3-\omega_1^2\omega_2)sin(\omega_2 t-\varphi_2) & 0 & \rho_2\omega_2(-\omega_2^2+\omega_1^2)cos(\omega_2 t-\varphi_2) \end{vmatrix}=$$

$$=\rho_1\omega_1\rho_2\omega_2(\omega_2^2-\omega_1^2)^2 \ .$$

Посчитаем Δ_1

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & cos(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) \\ 0 & -\omega_2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1\omega_1 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2\omega_2 cos(\omega_2 t-\varphi_2) \\ 0 & \omega_2^2 cos(\omega_2 t-\varphi_2) & \rho_1\omega_1^2 sin(\omega_1 t-\varphi_1) & \rho_2\omega_2^2 sin(\omega_2 t-\varphi_2) \\ \varepsilon f & \omega_2^3 sin(\omega_2 t-\varphi_2) & -\rho_1\omega_1^3 cos(\omega_1 t-\varphi_1) & -\rho_2\omega_2^3 cos(\omega_2 t-\varphi_2) \end{vmatrix}=$$

$$=\varepsilon f\rho_2\omega_2\rho_1(\omega_1^2-\omega_2^2)sin(\omega_1 t-\varphi_1).$$

Тогда

$$\rho_1'=\frac{-\varepsilon f sin(\omega_1\tau-\varphi_1)}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}.$$

Аналогично находим остальные уравнения системы (2.23), где

$$\Delta_2=\varepsilon f\rho_2\rho_1\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)sin(\omega_2 t-\varphi_2),$$

$$\Delta_3=\varepsilon f\rho_2\omega_2(\omega_1^2-\omega_2^2)cos(\omega_1 t-\varphi_1),$$

$$\Delta_4=-\varepsilon f(\omega_2^2-\omega_1^2)cos(\omega_2 t-\varphi_2)\rho_1\omega_1.$$

Теорема доказана.

2.3 Среднее значение почти периодической функции.

Для исследования нашей задачи методом усреднения нужно найти усредненную систему для уравнений (2.10) и (2.12). Напомним, что средним значением почти периодической функции $f: R \to R^n$ называется

$$M\{f\} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt. \quad (2.24)$$

Отметим важные свойства среднего значения:

1. Если $f(t)=c=const$, то $M(c)=c$,
2. $M\{f(t+a)\} = M\{f(t)\}$, где $a\epsilon R$,
3. $M\{f(at+b)\} = M\{f(t)\}$, для любых чисел $0 \neq a\epsilon R$, $b\epsilon R$,
4. $M\{\alpha f(t)\} = \alpha M\{f(t)\}$, для любого $\alpha\epsilon R$,
5. $M\{f_1(t)+f_2(t)\} = M\{f_1(t)\} + M\{f_2(t)\}$, для почти периодических функций f_1, f_2.
6. Если последовательность почти периодических функций $\{f_k(t)\}$ равномерно на R сходится к функции $g(t)$, то

$$\lim_{k\to+\infty} M\{f_k(t)\} = M\{g(t)\},$$

в частности, для равномерно сходящегося на R ряда $\sum_k f_k(t)$ имеем

$$M\{\sum_k f_k(t)\} = \sum_k M\{f_k(t)\}.$$

С помощью среднего значения во множестве скалярных почти периодических функций вводится скалярное произведение

$$\big(f_1(t), f_2(t)\big) = M\{f_1(t)f_2(t)\}.$$

$$M\{sin(\omega_1 t-\varphi_1)\}=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T sin(\omega_1 t-\varphi_1)dt=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\left(\frac{1-cos(\omega_1 T-\varphi_1)}{\omega_1}\right)=0,$$

$$M\{cos(\omega_1 t-\varphi_1)\}=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T cos(\omega_1 t-\varphi_1)dt=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\left(\frac{sin(\omega_1 T-\varphi_1)}{\omega_1}\right)=0,$$

$$M\{sin^2(\omega_1 t-\varphi_1)\}=M\left\{\tfrac{1}{2}\left(1-cos2(\omega_1 t-\varphi_1)\right)\right\}=\tfrac{1}{2},$$

$$M\{cos^2(\omega_1 t-\varphi_1)\}=M\left\{\tfrac{1}{2}\left(1+cos2(\omega_1 t-\varphi_1)\right)\right\}=\tfrac{1}{2},$$

$$M\{sin(\omega_1 t-\varphi_1)cos(\omega_2 t-\varphi_2)\}=M\left\{\frac{1}{2}\left(sin\left((\omega_1-\omega_2)t-(\varphi_1-\varphi_2)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+sin\left((\omega_1+\omega_2)t-(\varphi_1+\varphi_2)\right)\right)\right\}=0,$$

$$M\{sin(\omega_1 t-\varphi_1)sin(\omega_2 t-\varphi_2)\}=M\left\{\frac{1}{2}\left(cos\left((\omega_1-\omega_2)t-(\varphi_1-\varphi_2)\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-cos\left((\omega_1+\omega_2)t-(\varphi_1+\varphi_2)\right)\right)\right\}=0,$$

$$M\{cos(\omega_1 t-\varphi_1)cos(\omega_2 t-\varphi_2)\}=M\left\{\frac{1}{2}\left(cos\left((\omega_1-\omega_2)t-(\varphi_1-\varphi_2)\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+cos\left((\omega_1+\omega_2)t-(\varphi_1+\varphi_2)\right)\right)\right\}=0,$$

Эти свойства во многом облегчает нахождение усредненной системы дифференциальных уравнений.

2.4. Первая усредненная система

Из представления решений (2.22) следует, что ρ_1, ρ_2 определяют амплитуды колебаний, а φ_1, φ_2 определяют сдвиги по фазе. Найдем усредненные уравнения для амплитуд.

Теорема 2.1. Усредненная система для амплитуд колебаний, соответствующая системе (2.2) имеет вид:

$$
\begin{cases}
\dot{\rho}_1 = \frac{-\varepsilon\rho_1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\Big\{-\frac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}\left(\frac{1}{2}{\rho_1}^2+{\rho_2}^2\right)+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\times \\
\quad\times\left(\frac{3}{8}S_2\rho_1^2\omega_1^2-\frac{1}{2}\omega_1^2+\frac{3}{4}S_2\rho_2^2\omega_1^2\right)+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\times \\
\times\left(\frac{3}{4}\rho_1^2\omega_1^2+\frac{3}{2}\rho_2^2\omega_2^2\right)+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}S_2\left(\frac{1}{2}{\rho_1}^2+{\rho_2}^2\right)\right)\Big\}, \\
\dot{\rho}_2 = \frac{\varepsilon\rho_2}{\omega_2^2-\omega_1^2}\Big\{-\frac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}\left(\frac{1}{2}{\rho_2}^2+{\rho_1}^2\right)+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\times \\
\quad\times\left(\frac{3}{8}S_2\rho_2^2\omega_2^2-\frac{1}{2}\omega_2^2+\frac{3}{4}S_2\rho_1^2\omega_2^2\right)+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\times \\
\times\left(\frac{3}{4}\rho_2^2\omega_2^2+\frac{3}{2}\rho_1^2\omega_1^2\right)+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}S_2\left(\frac{1}{2}{\rho_2}^2+{\rho_1}^2\right)\right)\Big\}.
\end{cases}
\tag{2.25}
$$

2.5 Вторая усредненная система

Уравнение (2.18) имеет более громоздкий вид по сравнению с уравнением (2.2). Однако построение усредненной системы оказывается не безнадежным.

Теорема 2.2. Усредненная система для амплитуд колебаний, соответствующая уравнению (2.18), имеет вид

$$
\dot{\rho}_1 = \frac{\varepsilon\rho_1}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\big[[S_3(HD+GE)(1-S_3R_1S_0)+S_3R_1(FB+GA)]\left(-\frac{\omega_1}{2}\right)+
$$

$$
+[-3S_3S_2(HD-G)+S_3^2S_2R_2(3-2B)-3GS_3^2S_2R_2(S_0E-G)]\times
$$

$$
\times\left(-\frac{\rho_1^2\omega_1^2}{4}-\frac{\rho_2^2\omega_2^2}{4}\right)+S_3\big[E(1-S_3R_1S_0)+R_1[F(1+S_3)+S_3(A-R_1FS_0)]\big]\times
$$

$$
\times\left(\frac{\omega_1^3}{2}\right)-6S_3S_2(E+FR_1)\quad\frac{1}{4}(\rho_1^2\omega_1^3+\rho_2^2\omega_2^2\omega_1)+
$$

$$
+\Big[\Big[S_3S_2\left(-3(E+FR_1)+S_3\big(3S_0R_1(E+FR_1)+R_2(3A+2F)\big)\right)\Big]\times
$$

$$\times \frac{1}{4}(\rho_1^2\omega_1^3 + \rho_2^2\omega_1^2)\Big], \tag{2.26}$$

$$\dot{\rho_2} = \frac{\varepsilon\rho_2}{\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\big[[S_3(HD + GE)(1 - S_3R_1S_0) + S_3R_1(FB + GA)]\left(-\frac{\omega_2}{2}\right) +$$

$$+ [-3S_3S_2(HD - G) + S_3^2S_2R_2(3 - 2B) - 3GS_3^2S_2R_2(S_0E - G)] \times$$

$$\times \frac{-1}{4}(\rho_2^2\omega_2^2 + \rho_1^2\omega_1^2) + S_3\big[E(1 - S_3R_1S_0) + R_1[F + FS_3 + S_3(A - R_1FS_0)]\big] \times$$

$$\times \left(\frac{\omega_2^3}{2}\right) - 6S_3S_2(E + FR_1) \quad \frac{1}{4}(\rho_2^2\omega_2^3 + \rho_1^2\omega_1^2\omega_2) +$$

$$+ \Big[\Big[S_3S_2\left(-3(E + FR_1) + S_3\big(3S_0R_1(E + FR_1) + R_2(3A + 2F)\big)\right)\Big] \times$$

$$\times \frac{1}{4}(\rho_2^2\omega_2^3 + \rho_1^2\omega_2^2)\Big].$$

Доказательство. Для нахождения средних значении вычислим интегралы, которые встречаются в процессе средних значений.

1) $\int sin^2(\omega_1 t - \varphi_1)dt = \frac{1}{2}\int[1 - cos2(\omega_1 t - \varphi_1)]dt = \frac{1}{2}\left[t - \frac{sin2(\omega_1 t - \varphi_1)}{2\omega_1}\right]$,

2) $\int cos^2(\omega_1 t - \varphi_1)dt = \frac{1}{2}\int[1 + cos2(\omega_1 t - \varphi_1)]dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{sin2(\omega_1 t - \varphi_1)}{2\omega_1}\right]$,

3) $\int cos(\omega_1 t - \varphi_1)sin(\omega_2 t - \varphi_2)dt = \frac{1}{2}\int(sin[t(\omega_2 + \omega_1) - (\varphi_2 + \varphi_1)] + sin[t(\omega_2 - \omega_1) -$

$-(\varphi_2 - \varphi_1)])dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos\big(t(\omega_2+\omega_1)-(\varphi_2+\varphi_1)\big)}{\omega_2+\omega_1} - \frac{\cos\big(t(\omega_2-\omega_1)-(\varphi_2-\varphi_1)\big)}{\omega_2-\omega_1}\right]$,

4) $\int sin(\omega_1 t - \varphi_1)sin(\omega_2 t - \varphi_2)dt = \frac{1}{2}\int(cos[t(\omega_2 + \omega_1) - (\varphi_2 + \varphi_1)] - cos[t(\omega_1 - \omega_2) -$

$-(\varphi_1 - \varphi_2)])dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin\big(t(\omega_2+\omega_1)-(\varphi_2+\varphi_1)\big)}{\omega_2+\omega_1} - \frac{\sin\big(t(\omega_1-\omega_2)-(\varphi_1-\varphi_2)\big)}{\omega_1-\omega_2}\right]$,

5) $\int sin(\omega_1 t - \varphi_1)sin(\omega_2 t - \varphi_2)cos(\omega_1 t - \varphi_1)dt = \frac{1}{2}\int sin2(\omega_1 t - \varphi_1)sin(\omega_2 t - \varphi_2)\,dt =$

$= \frac{1}{4}\left[-\frac{\sin\big(t(\omega_2+2\omega_1)-(\varphi_2+2\varphi_1)\big)}{\omega_2+2\omega_1} - \frac{\sin\big(t(2\omega_1-\omega_2)-(2\varphi_1-\varphi_2)\big)}{2\omega_1-\omega_2}\right]$,

6) $\int sin(\omega_1 t - \varphi_1)cos(\omega_2 t - \varphi_2)cos(\omega_1 t - \varphi_1)dt = \frac{1}{2}\int(sin[t(\omega_2 + 2\omega_1) - (\varphi_2 + 2\varphi_1)] +$

$+sin[t(\omega_2 - 2\omega_1) - (\varphi_2 - 2\varphi_1)])dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(t(\omega_2+2\omega_1)-(\varphi_2+2\varphi_1))}{\omega_2+2\omega_1} + \frac{\cos(t(\omega_2-2\omega_1)-(\varphi_2-2\varphi_1))}{\omega_2-2\omega_1}\right],$

7) $\int sin^3(\omega_1 t - \varphi_1)dt = \int sin(\omega_1 t - \varphi_1)sin^2(\omega_1 t - \varphi_1)dt = -\frac{1}{\omega_1}\int\Big(1 - cos^2(\omega_1 t -$

$-\varphi_1)d\big(cos(\omega_1 t - \varphi_1)\big)\Big) = -\frac{1}{\omega_1}\left[cos(\omega_1 t - \varphi_1) - \frac{1}{3}cos^3(\omega_1 t - \varphi_1)\right],$

8) $\int cos^3(\omega_1 t - \varphi_1)dt = \frac{1}{\omega_1}\int cos^2(\omega_1 t - \varphi_1)d\big(sin(\omega_1 t - \varphi_1)\big) = \frac{1}{\omega_1}\Big[sin(\omega_1 t - \varphi_1) -$

$-\frac{1}{3}sin^3(\omega_1 t - \varphi_1)\Big],$

9) $\int cos^2(\omega_1 t - \varphi_1)sin(\omega_2 t - \varphi_2)dt = \frac{1}{2}\int[1 + cos2(\omega_1 t - \varphi_1)]sin(\omega_2 t - \varphi_2)dt =$

$=\frac{1}{2}\int[sin(\omega_2 t - \varphi_2) + sin(\omega_2 t - \varphi_2)cos2(\omega_1 t - \varphi_1)]dt =$

$$= -\frac{1}{2\omega_2}cos(\omega_2 t - \varphi_2) + \frac{1}{4}\int(sin[t(\omega_2 + 2\omega_1) - (\varphi_2 + 2\varphi_1)] + sin[t(\omega_2 - 2\omega_1) - (\varphi_2 - 2\varphi_1)])dt =$$

$$= -\frac{1}{2\omega_2}cos(\omega_2 t - \varphi_2) - \frac{1}{4}\left[\frac{\cos\big(t(\omega_2 + 2\omega_1) - (\varphi_2 + 2\varphi_1)\big)}{\omega_2 + 2\omega_1} + \frac{\cos\big(t(\omega_2 - 2\omega_1) - (\varphi_2 - 2\varphi_1)\big)}{\omega_2 - 2\omega_1}\right],$$

10) $\int sin^2(\omega_1 t - \varphi_1)cos(\omega_2 t - \varphi_2)dt = \frac{1}{2}\int[1 - cos2(\omega_1 t - \varphi_1)]cos(\omega_2 t - \varphi_2)dt =$

$=\frac{1}{2\omega_2}sin(\omega_2 t - \varphi_2) - \frac{1}{4}\left[\cos\big(t(\omega_2 + 2\omega_1) - (\varphi_2 + 2\varphi_1)\big) + \cos\big(t(\omega_2 - 2\omega_1) - (\varphi_2 - 2\varphi_1)\big)\right],$

11) $\int cos^4(\omega_1 t - \varphi_1)dt = \frac{1}{4}\int\big(1 + cos^2(\omega_1 t - \varphi_1)\big)^2 dt = \frac{1}{4}\int\big(1 + 2cos2(\omega_1 t - \varphi_1) +$

$+cos^2 2(\omega_1 t - \varphi_1)\big)\, dt =$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1 + 2cos2(\omega_1 t - \varphi_1) + \frac{1 + cos4(\omega_1 t - \varphi_1)}{2}\right)dt = \frac{1}{8}\left[3t + \frac{2sin2(\omega_1 t - \varphi_1)}{\omega_1} + \frac{sin4(\omega_1 t - \varphi_1)}{4\omega_1}\right],$$

12) $\int sin^4(\omega_1 t - \varphi_1)dt = \frac{1}{4}\int\big(1 - cos^2(\omega_1 t - \varphi_1)\big)^2 dt = \frac{1}{8}\left[3t - \frac{2sin2(\omega_1 t - \varphi_1)}{\omega_1} + \frac{sin4(\omega_1 t - \varphi_1)}{4\omega_1}\right],$

13) $\int sin^2(\omega_1 t - \varphi_1)cos^2(\omega_2 t - \varphi_2)dt = \frac{1}{4}\int\big(1 - cos(\omega_1 t - \varphi_1)\big)\big(1 + cos(\omega_2 t - \varphi_2)\big)\, dt =$

$$= \frac{1}{4}\int\big(1 + cos2(\omega_2 t - \varphi_2) - cos2(\omega_1 t - \varphi_1) - cos2(\omega_1 t - \varphi_1)cos2(\omega_2 t - \varphi_2)\big)dt =$$

$= \frac{1}{4}\left[t + \frac{1}{2\omega_2}sin2(\omega_2 t - \varphi_2) - \frac{1}{2\omega_1}sin2(\omega_1 t - \varphi_1) - \frac{1}{2}\frac{sin\big(t(\omega_2+\omega_1)-(\varphi_2+\varphi_1)\big)}{2(\omega_2+\omega_1)} - \frac{1}{2}\frac{sin\big(2t(\omega_1-\omega_2)-(\varphi_1+\varphi_2)\big)}{2(\omega_1+\omega_2)}\right],$

14) $\int sin^2(\omega_1 t - \varphi_1)cos^2(\omega_1 t - \varphi_1)dt = \frac{1}{4}\int sin^2 2(\omega_1 t - \varphi_1)\, dt = \frac{1}{8}\int 1 - cos4(\omega_1 t - \varphi_1)dt =$

$=\frac{1}{8}\left[t-\frac{sin4(\omega_1 t-\varphi_1)}{4\omega_1}\right],$

15) $\int sin(\omega_1 t-\varphi_1)sin(\omega_2 t-\varphi_2)cos(\omega_2 t-\varphi_2)cos(\omega_1 t-\varphi_1)dt=\frac{1}{4}\int sin2(\omega_1 t-$

$-\varphi_1)sin2(\omega_2 t-\varphi_2)\,dt=\frac{1}{4}\left[\frac{sin\left(2t(\omega_1-\omega_2)+(\varphi_1-\varphi_2)\right)}{2(\omega_1-\omega_2)}-\frac{sin\left(2t(\omega_1+\omega_2)-2(\varphi_1+\varphi_2)\right)}{2(\omega_1+\omega_2)}\right],$

16) $\int cos^3(\omega_1 t-\varphi_1)sin(\omega_2 t-\varphi_2)dt=-\frac{1}{4}\left[\frac{COS\left(t(\omega_1+\omega_2)-(\varphi_1+\varphi_2)\right)}{(\omega_1+\omega_2)}+\right.$

$$+\frac{COS\left(t(\omega_2-\omega_1)+(\varphi_2-\varphi_1)\right)}{(\omega_2-\omega_1)}+\frac{1}{2}\left(\frac{COS\left(t(3\omega_1+\omega_2)-(3\varphi_1+\varphi_2)\right)}{(3\omega_1+\omega_2)}+\right.$$

$\left.\left.+\frac{COS\left(t(\omega_2-\omega_1)+(\varphi_1-\varphi_2)\right)}{(\omega_2-\omega_1)}+\frac{COS\left(t(\omega_1+\omega_2)-(\varphi_1+\varphi_2)\right)}{(\omega_1+\omega_2)}+\frac{COS\left(t(\omega_2-3\omega_1)+(-\varphi_2+3\varphi_1)\right)}{(\omega_2-3\omega_1)}\right)\right],$

17) $\int sin^3(\omega_1 t-\varphi_1)sin(\omega_2 t-\varphi_2)dt=-\frac{1}{4}\left[\frac{COS\left(t(\omega_1+\omega_2)-(\varphi_1+\varphi_2)\right)}{(\omega_1+\omega_2)}+\right.$

$$+\frac{COS\left(t(\omega_1-\omega_2)+(\varphi_1-\varphi_2)\right)}{(\omega_1-\omega_2)}-\frac{1}{2}\left(\frac{COS\left(t(3\omega_1+\omega_2)-(3\varphi_1+\varphi_2)\right)}{(3\omega_1+\omega_2)}+\right.$$

$\left.\left.+\frac{COS\left(t(\omega_2-\omega_1)-(\varphi_2-\varphi_1)\right)}{(\omega_2-\omega_1)}+\frac{COS\left(t(3\omega_1-\omega_2)-(3\varphi_1-\varphi_2)\right)}{(3\omega_1-\omega_2)}+\frac{COS\left(t(\omega_2+\omega_1)+(\varphi_2+\varphi_1)\right)}{(\omega_2+\omega_1)}\right)\right],$

Таким образом, если u заменить по формуле (2.25), то получим:

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1)u_1''^2}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=0,$$

Аналогичсным образом вычисляется следующие средние значения

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1)u_1'u_1'''}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=0,$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1)u_1'^2u_1''}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=0,$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1)u_1u_1''^2}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=0,$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1)u_1u_1'u_1'''}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=0,$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1)u_1u_1'^{V}}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=0,$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1){u_1}^2u_1'^{V}}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=0,$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1)u_1'u_1''}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=0,$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1){u_1}^2u_1'''}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=0,$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1)u_1'^3}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=-\left(\frac{3}{8}\rho_1^3\omega_1^3+\frac{3}{4}\rho_1\omega_1\rho_2^2\omega_2^2\right),$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1)u_1u_1'u_1''}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=\frac{1}{4}\rho_1^3\omega_1^3+\frac{1}{4}\rho_1\omega_1\rho_2^2\omega_2^2,$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1){u_1}^2u_1'''}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=\frac{1}{4}\rho_1^3\omega_1^3+\frac{1}{4}\rho_1\omega_1^3\rho_2^2,$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1)u_1'^2}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=0,$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1)u_1u_1''}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=0,$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1)u_1u_1'^2}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=0,$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1){u_1}^2u_1''}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=0,$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1)u_1u_1'}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=0,$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1)u_1'}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=-\frac{1}{2}\rho_1\omega_{1,}$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1){u_1}^2}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=0,$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1){u_1}^3}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=0,$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1){u_1}^2u_1'}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=-\left(\frac{1}{4}\rho_1^3\omega_1^2+\frac{1}{4}\rho_1\rho_2^2\omega_2^2\right),$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1)u_1''}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=0,$$

$$M\left\{\frac{-\varepsilon sin(\omega_1\tau-\varphi_1)u_1'''}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\right\}=\frac{1}{2}\rho_1{\omega_1}^3.$$

Глава 3. Особые точки усредненной системы

3.1 Особые точки первой усредненной системы

Усредненная система уравнений (2.25) является автономной системой дифференциальных уравнений в нормальной форме. Точки, в которых правые части уравнений равны нулю, называются особыми точками. Приравнивая правые части системы уравнений (2.25) нулю, получаем систему алгебраических уравнений для особых точек:

$$
\begin{cases}
\dfrac{-\rho_1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\Bigg\{-\dfrac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}K_3}\left(\dfrac{1}{2}{\rho_1}^2+{\rho_2}^2\right)+S_3S_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\times \\
\times\left(\dfrac{3}{8}S_2\rho_1^2\omega_1^2-\dfrac{1}{2}\omega_1^2+\dfrac{3}{4}S_2\rho_2^2\omega_1^2\right)+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\dfrac{C_2}{L_2}}S_2\times \\
\times\left(\dfrac{3}{4}\rho_1^2\omega_1^2+\dfrac{3}{2}\rho_2^2\omega_2^2\right)+\gamma\left(1+\dfrac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}S_2\left(\dfrac{1}{2}{\rho_1}^2+{\rho_2}^2\right)\right)\Bigg\}=0, \\
\dfrac{\rho_2}{\omega_2^2-\omega_1^2}\Bigg\{-\dfrac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}K_3}\left(\dfrac{1}{2}{\rho_2}^2+{\rho_1}^2\right)+S_3S_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\times \\
\times\left(\dfrac{3}{8}S_2\rho_2^2\omega_2^2-\dfrac{1}{2}\omega_2^2+\dfrac{3}{4}S_2\rho_1^2\omega_2^2\right)+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\dfrac{C_2}{L_2}}S_2\times \\
\times\left(\dfrac{3}{4}\rho_2^2\omega_2^2+\dfrac{3}{2}\rho_1^2\omega_1^2\right)+\gamma\left(1+\dfrac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}S_2\left(\dfrac{1}{2}{\rho_2}^2+{\rho_1}^2\right)\right)\Bigg\}=0.
\end{cases}
$$

Найдем особые точки для нашей системы. Обозначим первую точку M_0 *(0,0)*, вторую - $M_1(0,\rho_{2_1})$, третью - $M_2\ (\rho_{1_1},0)$, четвертую - $M_3(\rho_{1_2},\rho_{2_2})$. Найдем $\rho_{1_1},\rho_{2_1},\rho_{1_2},\rho_{2_2}$.

Для M_1 : $\rho_1=0$

$$-\frac{3}{8}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3\rho_2{}^2} + S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{3}{8}S_2\rho_2^2\omega_2^2 - \frac{1}{2}\omega_2^2\right) +$$

$$+\frac{3}{4}\rho_2^2\omega_2^2S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2 + \gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}S_2\rho_2{}^2\right) = 0$$

Найдем, чему равно ρ_2^2

$$\rho_2^2 = S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\omega_2^2 + \gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)/$$

$$/\frac{3}{4}S_2\left(S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3} + 2\omega_2^2S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3) + \omega_2^2S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}} + \right. \tag{3.1}$$

$$\left. +\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\right).$$

Для M_2 : $\rho_2 = 0$

$$-\frac{3}{8}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3\rho_1{}^2} + S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{3}{8}S_2\rho_1^2\omega_1^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2\right) +$$

$$+\frac{3}{4}\rho_1^2\omega_1^2S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2 + \gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}S_2\rho_1{}^2\right) = 0.$$

Найдем, чему равно ρ_1^2

$$\rho_1^2 = S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\omega_1^2 + \gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)/$$

$$/\frac{3}{4}S_2\left(S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3} + 2\omega_1^2S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3) + \omega_1^2S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}} + \right. \tag{3.2}$$

$$+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\right).$$

Для M_3 найдем ${\rho_1}_2, {\rho_2}_2$, для этого понадобится решить следующую систему:

$$\begin{cases} -\dfrac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}K_3}\left(\dfrac{1}{2}{\rho_1}^2+{\rho_2}^2\right)+S_3S_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\times \\ \times\left(\dfrac{3}{8}S_2\rho_1^2\omega_1^2-\dfrac{1}{2}\omega_1^2+\dfrac{3}{4}S_2\rho_2^2\omega_1^2\right)+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\dfrac{C_2}{L_2}}S_2\times \\ \times\left(\dfrac{3}{4}\rho_1^2\omega_1^2+\dfrac{3}{2}\rho_2^2\omega_2^2\right)+\gamma\left(1+\dfrac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}S_2\left(\dfrac{1}{2}{\rho_1}^2+{\rho_2}^2\right)\right)=0, \\ -\dfrac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}K_3}\left(\dfrac{1}{2}{\rho_2}^2+{\rho_1}^2\right)+S_3S_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\times \\ \times\left(\dfrac{3}{8}S_2\rho_2^2\omega_2^2-\dfrac{1}{2}\omega_2^2+\dfrac{3}{4}S_2\rho_1^2\omega_2^2\right)+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\dfrac{C_2}{L_2}}S_2\times \\ \times\left(\dfrac{3}{4}\rho_2^2\omega_2^2+\dfrac{3}{2}\rho_1^2\omega_1^2\right)+\gamma\left(1+\dfrac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}S_2\left(\dfrac{1}{2}{\rho_2}^2+{\rho_1}^2\right)\right)=0. \end{cases}$$

Для удобства введем обозначения:

$$a=-\frac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3},$$

$$b=S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3),$$

$$c=S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2,$$

$$d=\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3),$$

Система принимает вид:

$$\begin{cases} a\left(\frac{1}{2}{\rho_1}^2+{\rho_2}^2\right)+b\left(\frac{3}{8}S_2\rho_1^2\omega_1^2-\frac{1}{2}\omega_1^2+\frac{3}{4}S_2\rho_2^2\omega_1^2\right)+ \\ +c\left(\frac{3}{4}\rho_1^2\omega_1^2+\frac{3}{2}\rho_2^2\omega_2^2\right)+ \\ +d\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}S_2\left(\frac{1}{2}{\rho_1}^2+{\rho_2}^2\right)\right)=0, \\ a\left(\frac{1}{2}{\rho_2}^2+{\rho_1}^2\right)+b\left(\frac{3}{8}S_2\rho_2^2\omega_2^2-\frac{1}{2}\omega_2^2+\frac{3}{4}S_2\rho_1^2\omega_2^2\right)+ \\ +c\left(\frac{3}{4}\rho_2^2\omega_2^2+\frac{3}{2}\rho_1^2\omega_1^2\right)+ \\ +d\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}S_2\left(\frac{1}{2}{\rho_2}^2+{\rho_1}^2\right)\right)=0. \end{cases}$$

Приведем подобные слагаемые в нашей системе. Сгруппируем слагаемые отдельно при ρ_1^2 и при ρ_2^2. Таким образом, получим систему следующего вида:

$$\begin{cases} \rho_1^2\left(\frac{a}{2}+\frac{3d}{8}S_2+\frac{3}{4}\omega_1^2\left(\frac{b}{2}S_2+c\right)\right)+ \\ +\rho_2^2\left(a+\frac{3b}{4}S_2\omega_1^2+\frac{3c}{2}\omega_2^2+\frac{3d}{4}S_2\right)=\frac{b\omega_1^2+d}{2}, \\ \rho_1^2\left(a+\frac{3b}{4}S_2\omega_2^2+\frac{3c}{2}\omega_1^2+\frac{3d}{4}S_2\right)+ \\ +\rho_2^2\left(\frac{a}{2}+\frac{3d}{8}S_2+\frac{3}{4}\omega_2^2\left(\frac{b}{2}S_2+c\right)\right)=\frac{b\omega_2^2+d}{2}. \end{cases}$$

Обозначим

$$m_1=\frac{a}{2}+\frac{3d}{8}S_2+\frac{3}{4}\omega_1^2\left(\frac{b}{2}S_2+c\right),$$

$$n_1=a+\frac{3b}{4}S_2\omega_1^2+\frac{3c}{2}\omega_2^2+\frac{3d}{4}S_2,$$

$$c_1=\frac{b\omega_1^2+d}{2},$$

$$m_2 = a + \frac{3b}{4} S_2 \omega_2^2 + \frac{3c}{2} \omega_1^2 + \frac{3d}{4} S_2,$$

$$n_2 = \frac{a}{2} + \frac{3d}{8} S_2 + \frac{3}{4} \omega_2^2 \left(\frac{b}{2} S_2 + c \right),$$

$$c_2 = \frac{b\omega_2^2 + d}{2}.$$

В новых обозначениях система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \rho_1^2 m_1 + \rho_2^2 n_1 = c_1, \\ \rho_1^2 n_2 + \rho_2^2 m_2 = c_2. \end{cases}$$

Из этой системы легко можно находим

$$\begin{cases} \rho_1^2 = \frac{c_1 m_2 - c_2 n_1}{m_1 m_2 - n_1 n_2}, \\ \rho_2^2 = \frac{c_2 m_1 - c_1 n_2}{m_1 m_2 - n_1 n_2}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Сформулируем полученный результат, в виде теоремы.

Теорема 3.1. Усредненная система (2.25) имеет четыре особые точки:

M_0 *(0,0)*,

$$M_1 \left(0, \frac{S_3 S_4^{-1} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1+K_3) \omega_2^2 + \gamma \left(1+\frac{K_3}{K_2}\right) S_3 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1+K_3)}{\frac{3}{4} S_2 \left(S_4^{-1} \sqrt{\frac{L_1}{C_1} K_3} + 2\omega_2^2 S_3 S_4^{-1} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1+K_3) + \omega_2^2 S_3 R_1 R_2 \sqrt{\gamma \frac{C_2}{L_2}} + \gamma \left(1+\frac{K_3}{K_2}\right) S_3 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1+K_3) \right)} \right),$$

$$M_2 \left(\frac{S_3 S_4^{-1} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1+K_3) \omega_1^2 + \gamma \left(1+\frac{K_3}{K_2}\right) S_3 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1+K_3)}{\frac{3}{4} S_2 \left(S_4^{-1} \sqrt{\frac{L_1}{C_1} K_3} + 2\omega_1^2 S_3 S_4^{-1} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1+K_3) + \omega_1^2 S_3 R_1 R_2 \sqrt{\gamma \frac{C_2}{L_2}} + \gamma \left(1+\frac{K_3}{K_2}\right) S_3 \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} (1+K_3) \right)}, 0 \right),$$

$$M_3 \left(\sqrt{\frac{c_1 m_2 - c_2 n_1}{m_1 m_2 - n_1 n_2}}, \sqrt{\frac{c_2 m_1 - c_1 n_2}{m_1 m_2 - n_1 n_2}} \right),$$

где $m_1, m_2, n_1, n_2, c_1, c_2$ –введенные выше обозначения.

3.2 Особые точки второй усредненной системы

Введем обозначения

$A_1 = S_3(HD + GE)(1 - S_3R_1S_0) + S_3R_1(FB + GA)$;

$B_1 = -3S_3S_2(HD - G) + S_3^2S_2R_2(3 - 2B) - 3GS_3^2S_2R_2(S_0E - G)$,

$C_1 = S_3(1 - S_3R_1S_0) + FS_3R_1(1 + S_3) + S_3^2R_1(A - R_1FS_0)$,

$D_1 = -6S_3S_2(E + FR_1) \quad \frac{1}{4}$,

$F_1 = S_3S_2\left(-3(E + FR_1) + S_3\big(3S_0R_1(E + FR_1) + R_2(3A + 2F)\big)\right)$.

Теорема 3.2: Система уравнений (2.26) имеет следующие особые точки:

M_0 *(0,0)*,

$$M_1\left(0, \frac{S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\omega_2^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)}{\frac{3}{4}S_2\left(S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}+2\omega_2^2S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)+\omega_2^2S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\right)}\right),$$

$$M_2\left(\frac{S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\omega_1^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)}{\frac{3}{4}S_2\left(S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}+2\omega_1^2S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)+\omega_1^2S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\right)}, 0\right),$$

$$M_3\left(\sqrt{\frac{c_1m_2-c_2n_1}{m_1m_2-n_1n_2}}, \sqrt{\frac{c_2m_1-c_1n_2}{m_1m_2-n_1n_2}}\right),$$

1. Очевидно, в точке $M_0(0,0)$ правая часть системы (2.15) обращается в нуль
2. При $\rho_1 = 0$

$$\frac{\rho_2}{\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\big[[S_3(HD + GE)(1 - S_3R_1S_0) + S_3R_1(FB + GA)]\left(-\frac{\omega_2}{2}\right) +$$

$$+ [-3S_3S_2(HD - G) + S_3^2S_2R_2(3 - 2B) - 3GS_3^2S_2R_2(S_0E - G)] \times$$

$$\times\left(-\frac{\rho_2^2\omega_2^2}{4}\right)+S_3\big[E(1-S_3R_1S_0)+R_1[F(1+S_3)+S_3(A-R_1FS_0)]\big]\times$$

$$\times\left(\frac{\omega_2^3}{2}\right)-6S_3S_2(E+FR_1)\quad\frac{1}{4}(\rho_2^2\omega_2^3)+$$

$$+\Big[\Big[S_3S_2\Big(-3(E+FR_1)+S_3\big(3S_0R_1(E+FR_1)+R_2(3A+2F)\big)\Big)\Big]\times$$

$$\times\frac{1}{4}(\rho_2^2\omega_2^3)\Big]=0.$$

Получаем особую точку:

$$\mathrm{M}_1\left(0;\ \frac{2(\mathrm{A}_1\omega_1-\mathrm{C}_1\omega_1^3)}{-\mathrm{B}_1\omega_2^2+\mathrm{D}_1\omega_2^4\omega_1^2+\mathrm{F}_1\omega_1^3}\right).$$

Для данного решения соответствуют одночастотные колебания в автогенераторе.

3. При $\rho_2=0$

$$\frac{\rho_1}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\big[[S_3(HD+GE)(1-S_3R_1S_0)+S_3R_1(FB+GA)]\left(-\frac{\omega_1}{2}\right)+$$

$$+[-3S_3S_2(HD-G)+S_3^2S_2R_2(3-2B)-3GS_3^2S_2R_2(S_0E-G)]\times$$

$$\times\left(-\frac{\rho_1^2\omega_1^2}{4}\right)+S_3\big[E(1-S_3R_1S_0)+R_1[F(1+S_3)+S_3(A-R_1FS_0)]\big]\times$$

$$\times\left(\frac{\omega_1^3}{2}\right)-6S_3S_2(E+FR_1)\quad\frac{1}{4}(\rho_1^2\omega_1^3)+$$

$$+\Big[\Big[S_3S_2\Big(-3(E+FR_1)+S_3\big(3S_0R_1(E+FR_1)+R_2(3A+2F)\big)\Big)\Big]\times$$

$$\times\frac{1}{4}(\rho_1^2\omega_1^3)\Big]=0.$$

Еще одна особая точка:

$$\mathrm{M}_2\left(\frac{2(\mathrm{A}_1\omega_2-\mathrm{C}_1\omega_2^3)}{-\mathrm{B}_1\omega_1^2+\mathrm{D}_1\omega_1^2\omega_2+\mathrm{F}_1\omega_2^3};0\right).$$

Для данного решения соответствуют одночастотные колебания в автогенераторе.

4. При $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$ потребуется решить систему:

$$A_1\left(-\frac{\omega_1}{2}\right) + B_1\left(-\frac{\rho_1^2\omega_1^2}{4} - \frac{\rho_2^2\omega_2^2}{4}\right) + C_1\left(\frac{\omega_1^3}{2}\right) +$$

$$+D_1(\rho_1^2\omega_1^3 + \rho_2^2\omega_2^2\omega_1) + F_1\frac{1}{4}(\rho_1^2\omega_1^3 + \rho_2^2\omega_1^2) = 0;$$

$$A_1\left(-\frac{\omega_2}{2}\right) + B_1\left(-\frac{\rho_2^2\omega_2^2}{4} - \frac{\rho_1^2\omega_1^2}{4}\right) + C_1\left(\frac{\omega_2^3}{2}\right) +$$

$$+D_1(\rho_2^2\omega_2^3 + \rho_1^2\omega_1^2\omega_2) + F_1\frac{1}{4}(\rho_2^2\omega_2^3 + \rho_1^2\omega_2^2) = 0.$$

Легко видеть, что данная система имеет вид:

$$\begin{cases}\rho_1^2 m_1 + \rho_2^2 n_1 = c_1,\\ \rho_1^2 n_2 + \rho_2^2 m_2 = c_2.\end{cases}$$

где m_1, m_2, n_1, n_2 – коэффициенты в результате группировки,

c_1, c_2 – свободные от ρ_1, ρ_2 значения.

Преобразуем ее к данному виду:

$$\rho_1^2\left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^3 + \frac{F_1\omega_1^3}{4}\right) + \rho_2^2\left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^2\omega_1 + \frac{F_1\omega_1^2}{4}\right) =$$

$$= A_1\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - C_1\left(\frac{\omega_1^3}{2}\right);$$

$$\rho_1^2\left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^2\omega_2 + \frac{F_1\omega_2^2}{4}\right) + \rho_2^2\left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^3 + \frac{F_1\omega_2^3}{4}\right) =$$

$$= A_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - C_1\left(\frac{\omega_2^3}{2}\right);$$

Из этой системы находим, что

$$
\begin{cases}
\rho_2^2 = \dfrac{\left[A_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - C_1\left(\frac{\omega_2^3}{2}\right)\right]\left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^3 + \frac{F_1\omega_1^3}{4}\right) - \left[A_1\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - C_1\left(\frac{\omega_1^3}{2}\right)\right]\left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^2\omega_2 + \frac{F_1\omega_2^2}{4}\right)}{\left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^3 + \frac{F_1\omega_1^3}{4}\right)\left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^3 + \frac{F_1\omega_2^3}{4}\right) - \left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^2\omega_1 + \frac{F_1\omega_1^2}{4}\right)\left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^2\omega_2 + \frac{F_1\omega_2^2}{4}\right)}, \\
\rho_1^2 = \dfrac{\left[A_1\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - C_1\left(\frac{\omega_1^3}{2}\right)\right]\left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^3 + \frac{F_1\omega_2^3}{4}\right) - \left[A_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - C_1\left(\frac{\omega_2^3}{2}\right)\right]\left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^2\omega_1 + \frac{F_1\omega_1^2}{4}\right)}{\left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^3 + \frac{F_1\omega_2^3}{4}\right)\left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^3 + \frac{F_1\omega_1^3}{4}\right) - \left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^2\omega_2 + \frac{F_1\omega_2^2}{4}\right)\left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^2\omega_1 + \frac{F_1\omega_1^2}{4}\right)}.
\end{cases}
$$

Таким образом, получена точка M_3

$$
\rho_1 = \sqrt{\dfrac{\left[A_1\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - C_1\left(\frac{\omega_1^3}{2}\right)\right]\left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^3 + \frac{F_1\omega_2^3}{4}\right) - \left[A_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - C_1\left(\frac{\omega_2^3}{2}\right)\right]\left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^2\omega_1 + \frac{F_1\omega_1^2}{4}\right)}{\left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^3 + \frac{F_1\omega_2^3}{4}\right)\left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^3 + \frac{F_1\omega_1^3}{4}\right) - \left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^2\omega_2 + \frac{F_1\omega_2^2}{4}\right)\left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^2\omega_1 + \frac{F_1\omega_1^2}{4}\right)}},
$$

$$
\rho_2 = \sqrt{\dfrac{\left[A_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - C_1\left(\frac{\omega_2^3}{2}\right)\right]\left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^3 + \frac{F_1\omega_1^3}{4}\right) - \left[A_1\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - C_1\left(\frac{\omega_1^3}{2}\right)\right]\left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^2\omega_2 + \frac{F_1\omega_2^2}{4}\right)}{\left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^3 + \frac{F_1\omega_1^3}{4}\right)\left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^3 + \frac{F_1\omega_2^3}{4}\right) - \left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^2\omega_1 + \frac{F_1\omega_1^2}{4}\right)\left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^2\omega_2 + \frac{F_1\omega_2^2}{4}\right)}}.
$$

Теорема доказана.

3.3 Исследование на устойчивость первой усредненной системы

Асимптотическая устойчивость решений определяется спектром матрицы из проводимых левой части системы (2.25), вычисляемой в соответствующей точке, то есть следующей матрицы.

Исследование устойчивости решений можно провести первым методом Ляпунова, для этого нужно найти спектр матрицы первого приближения

Исследование на

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X_{01}(M)}{\partial \rho_1} & \frac{\partial X_{01}(M)}{\partial \rho_2} \\ \frac{\partial X_{02}(M)}{\partial \rho_1} & \frac{\partial X_{02}(M)}{\partial \rho_2} \end{pmatrix},$$

X_{01} – правая часть первого уравнения системы (2.25),

X_{02} – правая часть второго уравнения системы (2.25).

При этом

$$\frac{\partial X_{01}(M)}{\partial \rho_1} = \frac{-1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\left\{-\frac{3}{4}S_2 S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}\left(\frac{1}{2}{\rho_1}^2 + {\rho_2}^2\right) + \right.$$

$$+S_3 S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{3}{8}S_2\rho_1^2\omega_1^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2 + \frac{3}{4}S_2\rho_2^2\omega_1^2\right) +$$

$$+S_3 R_1 R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\left(\frac{3}{4}\rho_1^2\omega_1^2 + \frac{3}{2}\rho_2^2\omega_2^2\right) +$$

$$\left. +\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}S_2\left(\frac{1}{2}{\rho_1}^2 + {\rho_2}^2\right)\right)\right\} -$$

$$-\frac{\rho_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\left\{-\frac{3}{4}S_2 S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3\rho_1} + S_3 S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{4}S_2\rho_1\omega_1^2 + \right.$$

$$\left. +\frac{3}{2}S_3 R_1 R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\rho_1\omega_1^2 + \gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\rho_1\frac{3}{4}S_2\right\}.$$

Приводим подобные

$$\frac{\partial X_{01}(M)}{\partial \rho_1} = \frac{-1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\left\{-\frac{3}{4}S_2 S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}\left(\frac{3}{2}{\rho_1}^2 + {\rho_2}^2\right) + \right.$$

$$+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{9}{8}S_2\rho_1^2\omega_1^2-\frac{1}{2}\omega_1^2+\frac{3}{4}S_2\rho_2^2\omega_1^2\right)+$$

$$+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\left(\frac{9}{4}\rho_1^2\omega_1^2+\frac{3}{2}\rho_2^2\omega_2^2\right)+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)\times$$

$$\left.\times S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}S_2\left(\frac{3}{2}{\rho_1}^2+{\rho_2}^2\right)\right)\right\}.$$

Найдем значение элемента $\frac{\partial X_{01}(M)}{\partial \rho_2}$

$$\frac{\partial X_{01}(M)}{\partial \rho_2}=-\frac{\rho_1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left\{-\frac{3}{2}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}\rho_2+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{2}S_2\rho_2\omega_1^2+\right.$$

$$\left.+3S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\rho_2\omega_2^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{2}S_2\rho_2\right\}.$$

Найдем значение элемента $\frac{\partial X_{02}(M)}{\partial \rho_1}$

$$\frac{\partial X_{02}(M)}{\partial \rho_1}=\frac{\rho_2}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left\{-\frac{3}{2}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}\rho_1+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{2}S_2\rho_1\omega_2^2+\right.$$

$$\left.+3S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\rho_1\omega_1^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{2}S_2\rho_1\right\}.$$

Найдем значение элемента $\frac{\partial X_{02}(M)}{\partial \rho_2}$

$$\frac{\partial X_{02}(M)}{\partial \rho_2}=\frac{-1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left\{-\frac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}\left(\frac{3}{2}\rho_2^2+\rho_1^2\right)+\right.$$

$$+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{9}{8}S_2\rho_2^2\omega_2^2-\frac{1}{2}\omega_2^2+\frac{3}{4}S_2\rho_1^2\omega_2^2\right)+$$

$$+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\left(\frac{9}{4}\rho_2^2\omega_2^2+\frac{3}{2}\rho_1^2\omega_1^2\right)+$$

$$+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}S_2\left(\frac{3}{2}{\rho_2}^2+{\rho_1}^2\right)\right)\Bigg\}.$$

3.3.1 Исследование устойчивости точки $M_0(0,0)$

Посчитаем определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X_{01}(M)}{\partial\rho_1}-\lambda & \frac{\partial X_{01}(M)}{\partial\rho_2} \\ \frac{\partial X_{02}(M)}{\partial\rho_1} & \frac{\partial X_{02}(M)}{\partial\rho_2}-\lambda \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

в точке M_0 *(0,0)*

$$\frac{\partial X_{01}(M_0)}{\partial\rho_1}=\left(\frac{\partial X_{01}(M_0)}{\partial\rho_1}-\lambda\right)\left(\frac{\partial X_{02}(M_0)}{\partial\rho_2}-\lambda\right)-\frac{\partial X_{01}(M_0)}{\partial\rho_2}\frac{\partial X_{02}(M_0)}{\partial\rho_1},$$

$$\frac{\partial X_{01}(0,0)}{\partial\rho_1}=\left[\frac{-1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left\{S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2}\omega_1^2\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left[-\frac{1}{2}\right]\right\}-\lambda\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left\{S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2}\omega_2^2\right)+\right.\right.$$

$$+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left[-\frac{1}{2}\right]\Bigg\}-\lambda\Bigg]-0.$$

Упростим выражение

$$det\{X(0,0)-\lambda I\}=\lambda^2+\lambda\frac{1}{2}S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)+\frac{1}{(\omega_2^2-\omega_1^2)^2}\times$$

$$\times\left[-\frac{1}{4}\omega_1^2\omega_2^2\left(S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\right)^2-\frac{1}{4}\left(\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\gamma {S_3}^2S_4^{-1}\frac{L_1}{C_1}(1+K_3)^2\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)(\omega_2^2+\omega_1^2)\right].$$

Для устойчивости многочлена второго порядка, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты многочлена были положительны, то есть в нашем случае должны выполняться следующие неравенства:

1) При λ

$$\frac{1}{2}S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)>0. \qquad (3.5)$$

Это условие выполняется автоматически.

2) Свободный член

$$-\frac{1}{4}\omega_1^2\omega_2^2\left(S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\right)^2-\frac{1}{4}\left(\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\right)^2-$$

$$-\frac{1}{4}\gamma {S_3}^2 S_4^{-1}\frac{L_1}{C_1}(1+K_3)^2\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)(\omega_2^2+\omega_1^2)>0.$$

Разделим на $\frac{1}{4}{S_3}^2\frac{L_1}{C_1}(1+K_3)^2>0$. Знак неравенства не изменится. Получим:

$$-\omega_1^2\omega_2^2(S_4^{-1})^2-\left(\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)\right)^2-\gamma S_4^{-1}\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)(\omega_2^2+\omega_1^2)>0.$$

Так как $S_4^{-1}=S_3\gamma\frac{K_3}{K_2}$, а $S_3=\frac{1}{1-R_1S_0}$, то условие асимптотической устойчивости можно записать следующим образом

$$(\omega_1\omega_2S_4^{-1})^2+\left(\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)\right)^2+\gamma^2\frac{K_3}{K_2}\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)(\omega_2^2+\omega_1^2)\frac{1}{1-R_1S_0}<0. \qquad (3.6)$$

Теорема 3.3. Если выполняются условия:

$$a_1=S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}+R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}+S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0S_4^{-1}=0,$$

$$a_2=S_3(1+K_3)+R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)-R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0=\omega_2^2+\omega_1^2,$$

$$a_3=R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3(1+K_3)+S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)+\sqrt{\frac{L_1}{C_3}}K_3S_0S_4^{-1}-$$

$$-\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0=0,$$

$$a_4=-K_3S_4^{-1}+S_3(1+K_3)\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)=\omega_1^2\omega_2^2,$$

то точка $M_0(0,0)$ неустойчива по Ляпунову.

Доказательство. Неравенство (3.6) может выполняться только при

$$1 - R_1 S_0 < 0.$$

Пусть это условие выполнено. В этом случае $S_3 < 0$ и

$$0 < \omega_1^2 \omega_2^2 = a_4 = -K_3 S_4^{-1} + S_3(1 + K_3)\gamma\left(1 + \frac{K_3}{K_2}\right) =$$

$$= -K_3 S_3 \gamma \frac{K_3}{K_2} + S_3(1 + K_3)\gamma\left(1 + \frac{K_3}{K_2}\right) = S_3\gamma\left(1 + \frac{K_3}{K_2} + K_3\right) < 0.$$

Получено противоречие. Тогда в (3.6) неравенство противоположенного знака и точка $M_0(0,0)$ неустойчива. Теорема доказана.

3.3.2 Исследование устойчивости точки $M_1(0, \rho_{2_1})$

Посчитаем определитель матрицы (3.4) в точке $M_1(0, \rho_{2_1})$.

$$det\left\{\frac{\partial X(M_1)}{\partial \rho} - \lambda I\right\} = \left(\frac{\partial X_{01}(M_1)}{\partial \rho_1} - \lambda\right)\left(\frac{\partial X_{02}(M_1)}{\partial \rho_2} - \lambda\right) - \frac{\partial X_{01}(M_1)}{\partial \rho_2}\frac{\partial X_{02}(M_1)}{\partial \rho_1}.$$

$$det\left\{\frac{\partial X(M_1)}{\partial \rho} - \lambda I\right\} = \lambda^2 - \lambda\left[\frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\left(-\frac{3}{8}S_2 S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}\rho_2^2 + \right.\right.$$

$$+ S_3 S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1 + K_3)\left(\frac{1}{2}\omega_1^2 - \frac{1}{2}\omega_2^2 - \frac{3}{4}S_2\rho_2^2\omega_1^2 + \frac{9}{8}S_2\rho_2^2\omega_2^2\right) +$$

$$\left.\left. + \frac{3}{4}S_3 R_1 R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\rho_2^2\omega_2^2 + \gamma\left(1 + \frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1 + K_3)\frac{3}{8}S_2{\rho_2}^2\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}\left\{\frac{3}{4}S_2 S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3\rho_2^2} + S_3 S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1 + K_3)\left(\frac{1}{2}\omega_1^2 - \frac{3}{4}S_2\rho_2^2\omega_1^2\right) - \right.$$

$$-\frac{3}{2}S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}S_2\rho_2^2\omega_2^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{3}{4}S_2\rho_2^2+\frac{1}{2}\right)}\Bigg\}\times$$

$$\times\Bigg\{-\frac{9}{8}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3\rho_2^2+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{9}{8}S_2\rho_2^2\omega_2^2-\frac{1}{2}\omega_2^2\right)}+$$

$$+\frac{9}{4}S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}S_2\rho_2^2\omega_2^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2}+\frac{9}{8}S_2{\rho_2}^2\right)}\Bigg\}.$$

Тогда условия асимптотической устойчивости будут записаны следующим образом

1) Положительность коэффициента при λ

$$\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\Bigg[\rho_2^2\Bigg(\frac{3}{8}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\times$$

$$\times\left(\frac{3}{4}S_2\omega_1^2-\frac{9}{8}S_2\omega_2^2\right)-\frac{3}{4}S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\omega_2^2-$$

$$-\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{8}S_2\Bigg)+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{1}{2}(\omega_1^2-\omega_2^2)\Bigg]>0.$$

Подставим ρ_2^2 из формулы (3.1), получим

$$\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left(\frac{1}{2}S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\omega_2^2+\frac{1}{2}\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\right)\times$$

$$\times\Bigg(\frac{3}{8}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_2\left(\frac{3}{4}\omega_1^2-\frac{9}{8}\omega_2^2\right)-$$

$$-\frac{3}{4}S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\omega_2^2-\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{8}S_2\Bigg)/$$

$$/\Bigg[-\frac{3}{8}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_2\frac{3}{8}\omega_2^2+\frac{3}{4}S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\omega_2^2+$$

$$+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{8}S_2\Bigg]+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{1}{2}(\omega_1^2-\omega_2^2)>0.$$

Сократим числитель и знаменатель на $\frac{3}{4}S_2$, а также разделим на $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)>0.$

Таким образом, знак не изменится, и мы получим следующее неравенство:

$$S_3\left(\omega_2^2S_4^{-1}+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)\right)\Bigg(\frac{1}{2}S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left[\omega_1^2-\frac{3}{2}\omega_2^2\right]-$$

$$-S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}\omega_2^2-\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{1}{2}\Bigg)/ \tag{3.7}$$

$$/\Bigg[-\frac{1}{2}S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{1}{2}\omega_2^2+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}\omega_2^2+$$

$$+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{1}{2}\Bigg]+S_3S_4^{-1}(\omega_2^2-\omega_1^2)>0.$$

2) Положительность свободного члена

$$\Bigg\{\frac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3\rho_2^2}+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{1}{2}\omega_1^2-\frac{3}{4}S_2\rho_2^2\omega_1^2\right)-$$

$$-\frac{3}{2}S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\rho_2^2\omega_2^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{3}{4}S_2\rho_2^2+\frac{1}{2}\right)\Bigg\}\times \tag{3.8}$$

$$\times\left\{-\frac{9}{8}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3\rho_2^2}+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{9}{8}S_2\rho_2^2\omega_2^2-\frac{1}{2}\omega_2^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{9}{4}S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\rho_2^2\omega_2^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2}+\frac{9}{8}S_2\rho_2^2\right)\right\}>0.$$

Подведем итог:

Теорема 3.4. Если выполнены условия (3.7), (3.8), то особая точка $M_1(0,\rho_{2_1})$ является асимптотически устойчивой по Ляпунову. При этом при малых ε автогенератор имеет устойчивые одночастотные колебания напряжения, которые приближенно описываются функцией

$$u=\sqrt{\frac{2(A_1\omega_1-C_1\omega_1^3)}{-B_1\omega_2^2+D_1\omega_2^4\omega_1^2+F_1\omega_1^3}}cos\left(\frac{\omega_2}{\sqrt{L_1C_1}}t-\varphi_2\right).$$

Если в неравенствах (3.7), (3.8) хотя бы один знак неравенства противоположный, то особая точка $M_1(0,\rho_{2_1})$ неустойчива по Ляпунову.

3.3.3 Исследование устойчивости точки $M_2\ (\rho_{1_1},0)$

Посчитаем определитель матрицы (3.4) в точке $M_2\ (\rho_{1_1},0)$

$$det\left\{\frac{\partial X(M_2)}{\partial\rho}-\lambda I\right\}=\left(\frac{\partial X_{01}(M_2)}{\partial\rho_1}-\lambda\right)\left(\frac{\partial X_{02}(M_2)}{\partial\rho_2}-\lambda\right)-\frac{\partial X_{01}(M_2)}{\partial\rho_2}\frac{\partial X_{02}(M_2)}{\partial\rho_1}$$

$$det\left\{\frac{\partial X(M_2)}{\partial\rho}-\lambda I\right\}=\lambda^2+\ \lambda\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left[-\frac{3}{8}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}K_3\rho_1^2+\right.$$

$$+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{1}{2}(\omega_2^2-\omega_1^2)+\frac{9}{8}S_2\rho_1^2\omega_1^2-\frac{3}{4}S_2\rho_1^2\omega_2^2\right)+$$

$$\left.+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\frac{3}{4}\rho_1^2\omega_1^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{8}S_2\rho_1^2\right]-$$

$$-\frac{1}{(\omega_2^2-\omega_1^2)^2}\left[S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2}\omega_1^2+\frac{9}{8}S_2\rho_1^2\omega_1^2\right)-\frac{9}{8}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3\rho_1^2}+\right.$$

$$\left.+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\frac{9}{4}\rho_1^2\omega_1^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{9}{8}S_2\rho_1^2-\frac{1}{2}\right)\right]\times$$

$$\times\left\{-\frac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3\rho_1^2}+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2}\omega_2^2+\frac{3}{4}S_2\rho_1^2\omega_2^2\right)+\right.$$

$$\left.+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\frac{3}{2}\rho_1^2\omega_1^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{3}{4}S_2\rho_1^2-\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Тогда условия устойчивости будут иметь вид:

1) Положительность коэффициента при λ

$$\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left[\rho_1^2\left(-\frac{3}{8}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}-S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_2\times\right.\right.$$

$$\times\left(\frac{3}{4}\omega_2^2-\frac{9}{8}\omega_1^2\right)-\frac{3}{4}S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\omega_1^2+$$

$$\left.\left.+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{8}S_2\right)+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{1}{2}(\omega_2^2-\omega_1^2)\right]>0.$$

Подставим ρ_2^2 из формулы (3.2), получим

$$\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\left(\frac{1}{2}S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\omega_1^2+\frac{1}{2}\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{3}{8}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}-S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_2\left(\frac{3}{4}\omega_2^2-\frac{9}{8}\omega_1^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{4}S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\omega_1^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{8}S_2\right)/$$

$$/\left(-\frac{3}{8}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_2\frac{3}{8}\omega_1^2+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{4}S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\omega_1^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{8}S_2\right)+$$

$$+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{1}{2}(\omega_2^2-\omega_1^2)>0.$$

Разделим на $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)>0$. Таким образом, знак не изменится, и мы получим следующее неравенство:

$$S_3\left(\omega_1^2S_4^{-1}+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)\right)\left(-\frac{1}{2}S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}-S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left[\omega_2^2-\frac{3}{2}\omega_1^2\right]+\right.$$

$$\left.+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}\omega_1^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{1}{2}\right)/ \qquad (3.9)$$

$$/\left[-\frac{1}{2}S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{1}{2}\omega_1^2+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}\omega_1^2+\right.$$

$$+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{1}{2}\Big]+S_3S_4^{-1}(\omega_2^2-\omega_1^2)>0.$$

2) Положительность свободного члена

$$-\left\{-\frac{9}{8}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}\rho_1^2+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2}\omega_1^2+\frac{3}{4}S_2\rho_1^2\omega_1^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{9}{4}S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\rho_1^2\omega_1^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{9}{8}S_2\rho_1^2-\frac{1}{2}\right)\right\}\times \qquad (3.10)$$

$$\times\left\{-\frac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}\rho_1^2+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{3}{8}S_2\rho_1^2\omega_2^2-\frac{1}{2}\omega_2^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2}S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\rho_1^2\omega_1^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}S_2\rho_1^2\right)\right\}>0.$$

Мы получили следующий результат:

Теорема 3.5. Если выполнены условия (3) , (3.9), (3.10), то особая точка $M_2\ \left(\rho_{1_1},0\right)$ асимптотически устойчива по Ляпунову. В этом случае при малых $\varepsilon>0$ автогенератор имеет устойчивые одночастотные колебания напряжения, которые приближенно описываются функцией:

$$u=\sqrt{\frac{2\left(A_1\omega_2-C_1\omega_2^3\right)}{-B_1\omega_1^2+D_1\omega_1^4\omega_2^2+F_1\omega_2^3}}cos\left(\frac{\omega_1}{\sqrt{L_1C_1}}t-\varphi_1\right).$$

Если хотя бы в одном из условий (3.9), (3.10) знак неравенства противоположного знака, то особая точка $M_2\ \left(\rho_{1_1},0\right)$ неустойчива по Ляпунову.

3.3.4 Исследование устойчивости точки $M_3(\rho_{1_2}, \rho_{2_2})$

Посчитаем определитель матрицы (3.4) в точке $M_3(\rho_{1_2}, \rho_{2_2})$, где ρ_{1_2}, ρ_{2_2} определяется формулами (3.3)

$$\rho_{1_2} = \left(\frac{c_1 m_2 - c_2 n_1}{m_1 m_2 - n_1 n_2}\right)^{1/2},$$

$$\rho_{2_2} = \left(\frac{c_2 m_1 - c_1 n_2}{m_1 m_2 - n_1 n_2}\right)^{1/2}.$$

При этом

$$det\left\{\frac{\partial X(M_3)}{\partial \rho} - \lambda I\right\} = \left(\frac{\partial X_{01}(M_3)}{\partial \rho_1} - \lambda\right)\left(\frac{\partial X_{02}(M_3)}{\partial \rho_2} - \lambda\right) - \frac{\partial X_{01}(M_3)}{\partial \rho_2}\frac{\partial X_{02}(M_3)}{\partial \rho_1}.$$

В нашем случае имеем

$$det\left\{\frac{\partial X(M_3)}{\partial \rho} - \lambda I\right\} = \left[\frac{-1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\left\{-\frac{3}{4}S_2 S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}\left(\frac{3}{2}{\rho_{1_2}}^2 + {\rho_{2_2}}^2\right) + \right.\right.$$

$$+S_3 S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{9}{8}S_2{\rho_{1_2}}^2\omega_1^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2 + \frac{3}{4}S_2{\rho_{2_2}}^2\omega_1^2\right) +$$

$$+S_3 R_1 R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\left(\frac{9}{4}{\rho_{1_2}}^2\omega_1^2 + \frac{3}{2}{\rho_{2_2}}^2\omega_2^2\right) + \gamma\left(1 + \frac{K_3}{K_2}\right)\times$$

$$\left.\left.\times S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}S_2\left(\frac{3}{2}{\rho_{1_2}}^2 + {\rho_{2_2}}^2\right)\right)\right\} - \lambda\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\omega_2^2 - \omega_1^2}\left\{-\frac{3}{4}S_2 S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}\left(\frac{3}{2}{\rho_{2_2}}^2 + {\rho_{1_2}}^2\right) + \right.\right.$$

$$+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{9}{8}S_2{\rho_{2_2}}^2\omega_2^2-\frac{1}{2}\omega_2^2+\frac{3}{4}S_2{\rho_{1_2}}^2\omega_2^2\right)+$$

$$+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\left(\frac{9}{4}{\rho_{2_2}}^2\omega_2^2+\frac{3}{2}{\rho_{1_2}}^2\omega_1^2\right)+$$

$$+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}S_2\left(\frac{3}{2}{\rho_{2_2}}^2+{\rho_{1_2}}^2\right)\right)\Bigg\}-\lambda\Bigg]+$$

$$+\frac{{\rho_{1_2}}^2{\rho_{2_2}}^2}{(\omega_2^2-\omega_1^2)^2}\Bigg\{-\frac{3}{2}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{2}S_2\omega_1^2+$$

$$+3S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\omega_2^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{2}S_2\Bigg\}\times$$

$$\times\Bigg\{-\frac{3}{2}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{2}S_2\omega_2^2+$$

$$+3S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\omega_1^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{2}S_2\Bigg\}.$$

Тогда условия устойчивости можно записать в следующем виде:

1) Положительность коэффициента при λ

$$\Bigg\{-\frac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}\frac{1}{2}\left({\rho_{1_2}}^2-{\rho_{2_2}}^2\right)+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\times$$

$$\times\left(\tfrac{9}{8}S_2\left({\rho_{1_2}}^2\omega_1^2-{\rho_{2_2}}^2\omega_2^2\right)+\tfrac{3}{4}S_2\left({\rho_{1_2}}^2\omega_1^2-{\rho_{2_2}}^2\omega_2^2\right)+\tfrac{1}{2}(\omega_2^2-\omega_1^2)\right)+ \qquad (3.11)$$

$$+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\left(\frac{9}{4}\left({\rho_{1_2}}^2\omega_1^2-{\rho_{2_2}}^2\omega_2^2\right)+\frac{3}{2}\left({\rho_{1_2}}^2\omega_1^2-{\rho_{2_2}}^2\omega_2^2\right)\right)+$$

$$+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{2}S_2\frac{3}{8}\left({\rho_1}_2{}^2-{\rho_2}_2{}^2\right)\Bigg\}>0.$$

2) Положительность свободного члена

$$\frac{-1}{(\omega_2^2-\omega_1^2)^2}\Bigg\{-\frac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}\left(\frac{3}{2}{\rho_1}_2{}^2+{\rho_2}_2{}^2\right)+$$

$$+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{9}{8}S_2{\rho_1}_2{}^2\omega_1^2-\frac{1}{2}\omega_1^2+\frac{3}{4}S_2{\rho_2}_2{}^2\omega_1^2\right)+$$

$$+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\left(\frac{9}{4}{\rho_1}_2{}^2\omega_1^2+\frac{3}{2}{\rho_2}_2{}^2\omega_2^2\right)+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)\times$$

$$\times S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}S_2\left(\frac{3}{2}{\rho_1}_2{}^2+{\rho_2}_2{}^2\right)\right)\Bigg\}\times$$

$$\times\Bigg\{-\frac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}\left(\frac{3}{2}{\rho_2}_2{}^2+{\rho_1}_2{}^2\right)+$$

$$+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(\frac{9}{8}S_2{\rho_2}_2{}^2\omega_2^2-\frac{1}{2}\omega_2^2+\frac{3}{4}S_2{\rho_1}_2{}^2\omega_2^2\right)+\qquad(3.12)$$

$$+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2\left(\frac{9}{4}{\rho_2}_2{}^2\omega_2^2+\frac{3}{2}{\rho_1}_2{}^2\omega_1^2\right)+$$

$$+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}S_2\left(\frac{3}{2}{\rho_2}_2{}^2+{\rho_1}_2{}^2\right)\right)\Bigg\}+$$

$$+\frac{{\rho_1}_2{}^2{\rho_2}_2{}^2}{(\omega_2^2-\omega_1^2)^2}\Bigg\{-\frac{3}{2}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{2}S_2\omega_1^2+$$

$$+3S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}S_2\omega_2^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{2}S_2}\Bigg\}\times$$

$$\times\Bigg\{-\frac{3}{2}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}+S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{2}S_2\omega_2^2+$$

$$+3S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}S_2\omega_1^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\frac{3}{2}S_2}\Bigg\}>0.$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 3.6. Если выполнены условия (3), (3.11), (3.12), то особая точка $M_3\left(\rho_{1_2},\rho_{2_2}\right)$ асимптотически устойчива по Ляпунову. При этом при малых $\varepsilon>0$ автогенератор имеет устойчивые, при несоизмеримых числах ω_1,ω_2, двухчастотные автоколебания напряжения, которые приближенно описываются функцией:

$$u=\left(\frac{c_1m_2-c_2n_1}{m_1m_2-n_1n_2}\right)^{1/2}cos\left(\frac{\omega_1}{\sqrt{L_1C_1}}t-\varphi_1\right)+\frac{c_2m_1-c_1n_2}{m_1m_2-n_1n_2}cos\left(\frac{\omega_2}{\sqrt{L_1C_1}}t-\varphi_2\right).$$

Если в неравенствах (3.11), (3.12) хотя бы один знак неравенства противоположного знака, то особая точка $M_3\left(\rho_{1_2},\rho_{2_2}\right)$ неустойчива по Ляпунову.

3.4 Исследование на устойчивость второй усредненной системы

Асимптотическая устойчивость решений определяется спектром матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X_{01}(M)}{\partial \rho_1} & \frac{\partial X_{01}(M)}{\partial \rho_2} \\ \frac{\partial X_{02}(M)}{\partial \rho_1} & \frac{\partial X_{02}(M)}{\partial \rho_2} \end{pmatrix},$$

X_{01}, X_{02} – соответственно, правые части системы уравнений (2.26)

При этом

$$\frac{\partial X_{01}(M)}{\partial \rho_1} = \frac{1}{\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)}\left[A_1\left(-\frac{\omega_1}{2}\right) + \right.$$

$$+B_1\left(-\frac{\rho_1^2\omega_1^2}{4} - \frac{\rho_2^2\omega_2^2}{4}\right) + C_1\left(\frac{\omega_1^3}{2}\right) + D_1(\rho_1^2\omega_1^3 + \rho_2^2\omega_2^2\omega_1) +$$

$$\left. + F_1\frac{1}{4}(\rho_1^2\omega_1^3 + \rho_2^2\omega_1^2)\right] + \frac{\rho_1}{\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)}\left[-\frac{1}{2}B_1\rho_1\omega_1^2 + 2D_1\rho_1\omega_1^3 + \frac{1}{2}F_1\rho_1\omega_1^3\right].$$

$$\frac{\partial X_{01}(M)}{\partial \rho_2} = \frac{\rho_1}{\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)}\left[-\frac{1}{2}B_1\rho_2\omega_2^2 + 2D_1\rho_2\omega_2^2\omega_1 + \frac{1}{2}F_1\rho_2\omega_2^3\right].$$

$$\frac{\partial X_{02}(M)}{\partial \rho_1} = \frac{\rho_2}{\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\left[-\frac{1}{2}B_1\rho_1\omega_1^2 + 2D_1\rho_1\omega_1^2\omega_2 + \frac{1}{2}F_1\rho_1\omega_1^3\right].$$

$$\frac{\partial X_{02}(M)}{\partial \rho_2} = \frac{1}{\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\left[A_1\left(-\frac{\omega_2}{2}\right) + \right.$$

$$+B_1\left(-\frac{\rho_2^2\omega_2^2}{4} - \frac{\rho_1^2\omega_1^2}{4}\right) + C_1\left(\frac{\omega_2^3}{2}\right) + D_1(\rho_2^2\omega_2^3 + \rho_1^2\omega_1^2\omega_2) +$$

$$\left. + F_1\frac{1}{4}(\rho_2^2\omega_2^3 + \rho_1^2\omega_2^2)\right] + \frac{\rho_2}{\omega_2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}\left[-\frac{1}{2}B_1\rho_2\omega_2^2 + 2D_1\rho_2\omega_2^3 + \frac{1}{2}F_1\rho_2\omega_2^3\right].$$

Посчитаем определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial X_{01}(M)}{\partial \rho_1} - \lambda & \frac{\partial X_{01}(M)}{\partial \rho_2} \\ \frac{\partial X_{02}(M)}{\partial \rho_1} & \frac{\partial X_{02}(M)}{\partial \rho_2} - \lambda \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial X(M)}{\partial \rho} = \left(\frac{\partial X_{01}(M)}{\partial \rho_1} - \lambda\right)\left(\frac{\partial X_{02}(M)}{\partial \rho_2} - \lambda\right) - \frac{\partial X_{01}(M)}{\partial \rho_2}\frac{\partial X_{02}(M)}{\partial \rho_1} =$$

$$= \frac{\partial X_{01}(M)}{\partial \rho_1}\frac{\partial X_{02}(M)}{\partial \rho_2} - \lambda\left(\frac{\partial X_{01}(M)}{\partial \rho_1} + \frac{\partial X_{02}(M)}{\partial \rho_2}\right) + \lambda^2 - \frac{\partial X_{01}(M)}{\partial \rho_2}\frac{\partial X_{02}(M)}{\partial \rho_1}.$$

3.4.1. Исследование устойчивости точки M_0 (0,0)

В точке M_0 *(0,0)*

$$det\left\{\frac{\partial X(0,0)}{\partial \rho} - \lambda I\right\} = -\frac{1}{2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)^2}[A_1 + C_1\omega_1^2][A_1 + C_1\omega_2^2] -$$

$$-\lambda \frac{1}{2\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)}\{-2A_1 + C_1(\omega_1^2 + \omega_2^2)\}+\lambda^2.$$

Согласно методу усреднения, получаем результат

Теорема 3.7. Если выполняются следующие условия (3) и:

$$\frac{\varepsilon}{2\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)}\{-2A_1 + C_1(\omega_1^2 + \omega_2^2)\} < 0, \tag{3.13}$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)^2}[A_1 + C_1\omega_1^2][A_1 + C_1\omega_2^2] < 0. \tag{3.14}$$

Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ M_0 (0,0) асимптотически устойчива по Ляпунову. При этом при малых ε в автогенераторе затухающие колебания напряжения. Если в неравенствах (3.13), (3.14) хотя бы один противоположный знак неравенства, то положение покоя неустойчиво.

3.4.2. Исследование устойчивости точки $\mathbf{M_1(0;\ \rho_2^*)}$

Пусть $\rho_2^* = \sqrt{\frac{2(\mathrm{A}_1\omega_1 - \mathrm{C}_1\omega_1^3)}{-\mathrm{B}_1\omega_2^2 + \mathrm{D}_1\omega_2^4\omega_1^2 + \mathrm{F}_1\omega_1^3}}$. Вычислим определитель в точке $\mathrm{M}_1(0;\ \rho_2^*)$

$$det\left\{\frac{\partial X(M_1)}{\partial\rho} - \lambda I\right\} = \frac{1}{\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}\left[A_1\left(-\frac{\omega_1}{2}\right) +\right.$$

$$\left.+B_1\left(-\frac{\rho_2^{*2}\omega_2^2}{4}\right) + C_1\left(\frac{\omega_1^3}{2}\right) + D_1(\rho_2^{*2}\omega_2^2\omega_1) + F_1\frac{1}{4}(\rho_2^{*2}\omega_1^2)\right] \times$$

$$\times\left[\left[\frac{A_1}{2} + \frac{3B_1\rho_2^{*2}\omega_2}{4} - \frac{C_1\omega_2^2}{2} - 3\left(D_1 + \frac{F_1}{4}\right)\rho_2^{*2}\omega_2^2\right]\right] -$$

$$-\lambda\frac{1}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}\left(-A_1 + B_1\frac{\rho_2^{*2}\omega_2}{4}\left(1 - \frac{1}{\omega_1}\right) + \frac{C_1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) +\right.$$

$$\left.+F_1\frac{\rho_2^{*2}}{4}(\omega_1 - \omega_2^2)\right) + \lambda^2.$$

Теорема 3.8. Если выполняются условия (3) и:

$$\frac{\varepsilon^2}{\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}\left[-\frac{A_1\omega_1}{2} - B_1\frac{\rho_2^2\omega_2^2}{4} + C_1\frac{\omega_1^3}{2} + D_1\rho_2^2\omega_2^2\omega_1 + \frac{F_1}{4}\rho_2^2\omega_1^2\right] \times$$

$$\times\left[\left[\frac{A_1}{2} + \frac{3B_1\rho_2^2\omega_2}{4} - \frac{C_1\omega_2^2}{2} - 3\left(D_1 + \frac{F_1}{4}\right)\rho_2^2\omega_2^2\right]\right] > 0,$$

$$\frac{\varepsilon}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}\left(-A_1 + B_1\frac{\rho_2^2\omega_2}{4}\left(1 - \frac{1}{\omega_1}\right) + \frac{C_1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + F_1\frac{\rho_2^2}{4}(\omega_1 - \omega_2^2)\right) < 0,$$

то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ точка $\mathrm{M}_1(0;\ \rho_2^*)$ асимптотически устойчива по Ляпунову. При этом автогенератор имеет устойчивые колебания напряжения близкие к одночастотным колебаниям

$$u_1 = \sqrt{\frac{2(\mathrm{A}_1\omega_1 - \mathrm{C}_1\omega_1^3)}{-\mathrm{B}_1\omega_2^2 + \mathrm{D}_1\omega_2^4\omega_1^2 + \mathrm{F}_1\omega_1^3}}\cos\left(\frac{\omega_2 t}{\sqrt{L_1C_1}} - \varphi_2\right).$$

3.4.3. Исследование устойчивости точки $\mathbf{M_2(\rho_1^*;\ 0)}$

Пусть $\rho_1^* = \sqrt{\frac{2(\mathrm{A}_1\omega_2 - \mathrm{C}_1\omega_2^3)}{-\mathrm{B}_1\omega_1^2 + \mathrm{D}_1\omega_1^2\omega_2 + \mathrm{F}_1\omega_2^3}}$. Вычислим определитель в точке $\mathrm{M}_2(\rho_1^*;\ 0)$

$$det\left\{\frac{\partial X(M_2)}{\partial\rho} - \lambda I\right\} = \frac{1}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}\left[\left[-\frac{A_1}{2} + \right.\right.$$

$$\left.+B_1\left(-\frac{3\rho_1^2\omega_1}{4}\right) + C_1\left(\frac{\omega_1^2}{2}\right) + \left(3D_1 + F_1\frac{3}{4}\right)(\rho_1^2\omega_1^2)\right]\right] \times$$

$$\times\left[\frac{A_1}{2} + B_1\left(\frac{\rho_1^2\omega_1^2}{4\omega_2}\right) - C_1\left(\frac{\omega_2^2}{2}\right) - D_1(\rho_1^2\omega_1^2) - F_1\frac{1}{4}(\rho_1^2\omega_2)\right] -$$

$$-\lambda\frac{1}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}\left[\frac{B_1}{4}\rho_1^2(-3\omega_1 + \omega_2) + \frac{C_1}{2}(\omega_1^2 - \omega_2^2) + \left(2D_1 + F_1\frac{3}{4}\right)\rho_1^2\omega_1^2 - \right.$$

$$\left. - F_1\frac{1}{4}(\rho_1^2\omega_2)\right] + \lambda^2.$$

Теорема 3.9. Если выполняются условия (3) и:

$$\frac{1}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2}\left[\left[-\frac{A_1}{2} + B_1\left(-\frac{3\rho_1^2\omega_1}{4}\right) + C_1\left(\frac{\omega_1^2}{2}\right) + \left(3D_1 + F_1\frac{3}{4}\right)(\rho_1^2\omega_1^2)\right]\right] \times$$

$$\times\left[\frac{A_1}{2} + B_1\left(\frac{\rho_1^2\omega_1^2}{4\omega_2}\right) - C_1\left(\frac{\omega_2^2}{2}\right) - D_1(\rho_1^2\omega_1^2) - F_1\frac{1}{4}(\rho_1^2\omega_2)\right] > 0, \tag{3.15}$$

$$\frac{1}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}\left[\frac{B_1}{4}\rho_1^2(-3\omega_1 + \omega_2) + \frac{C_1}{2}(\omega_1^2 - \omega_2^2) + \left(2D_1 + F_1\frac{3}{4}\right)\rho_1^2\omega_1^2 - \right.$$

$$-F_1\frac{1}{4}(\rho_1^2\omega_2)\Big] < 0, \qquad (3.16)$$

то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ точка $\mathrm{M}_2(\rho_1^*;\ 0)$ асимптотически устойчива и автогенератор имеет асимптотически устойчивые колебания напряжения близкие к одночастотным колебаниям

$$u_1 = \sqrt{\frac{2(\mathrm{A}_1\omega_2 - \mathrm{C}_1\omega_2^3)}{-\mathrm{B}_1\omega_1^2 + \mathrm{D}_1\omega_1^2\omega_2 + \mathrm{F}_1\omega_2^3}}\cos\left(\frac{\omega_1 t}{\sqrt{L_1C_1}} - \varphi_1\right).$$

Если в неравенствах (3.15), (3.16) хотя бы один знак неравенства имеет противоположный знак, то точка $\mathrm{M}_2(\rho_1^*;\ 0)$ неустойчива.

3.4.4. Исследование устойчивости двухчастотных колебаний.

Пусть

$$\rho_1^{**} = \sqrt{\frac{\left[A_1\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - C_1\left(\frac{\omega_1^3}{2}\right)\right]\left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^3 + \frac{F_1\omega_2^3}{4}\right) - \left[A_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - C_1\left(\frac{\omega_2^3}{2}\right)\right]\left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^2\omega_1 + \frac{F_1\omega_1^2}{4}\right)}{\left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^3 + \frac{F_1\omega_2^3}{4}\right)\left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^3 + \frac{F_1\omega_1^3}{4}\right) - \left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^2\omega_2 + \frac{F_1\omega_2^2}{4}\right)\left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^2\omega_1 + \frac{F_1\omega_1^2}{4}\right)}},$$

$$\rho_2^{**} = \sqrt{\frac{\left[A_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right) - C_1\left(\frac{\omega_2^3}{2}\right)\right]\left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^3 + \frac{F_1\omega_1^3}{4}\right) - \left[A_1\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - C_1\left(\frac{\omega_1^3}{2}\right)\right]\left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^2\omega_2 + \frac{F_1\omega_2^2}{4}\right)}{\left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^3 + \frac{F_1\omega_1^3}{4}\right)\left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^3 + \frac{F_1\omega_2^3}{4}\right) - \left(-\frac{B_1\omega_2^2}{4} + D_1\omega_2^2\omega_1 + \frac{F_1\omega_1^2}{4}\right)\left(-\frac{B_1\omega_1^2}{4} + D_1\omega_1^2\omega_2 + \frac{F_1\omega_2^2}{4}\right)}}.$$

Обратимся к вопросу устойчивости точки $\mathrm{M}_3(\rho_1^{**};\ \rho_2^{**})$. Вычислим определитель

$$det\left\{\frac{\partial X(M_3)}{\partial\rho} - \lambda I\right\} = \left[\frac{1}{\omega_1(\omega_2^2 - \omega_1^2)}\left[-\frac{A_1\omega_1}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{F_1}{4}\omega_1^2(\rho_1^{**2}\omega_1 + \rho_2^{**2})\right] + \frac{\rho_1^{**2}\omega_1}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)}\left[\left(2D_1 + \frac{1}{2}F_1\right)\omega_1^2 - \frac{1}{2}B_1\right]\right] \times$$

$$\times\left[\frac{1}{\omega_2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\left[C_1\frac{\omega_2^3}{2}-\frac{A_1\omega_2}{2}+\left(D_1\omega_2-\frac{B_1}{4}\right)(\rho_2^{**2}\omega_2^2+\rho_1^{**2}\omega_1^2)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{F_1\omega_2^2}{4}(\rho_2^{**2}\omega_2+\rho_1^{**2})\right]+\frac{\rho_2^{**2}\omega_2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)}\left[\left(2D_1+\frac{1}{2}F_1\right)\omega_2-\frac{1}{2}B_1\right]\right]-$$

$$-\lambda\left(\frac{1}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\left[-\frac{A_1\omega_1}{2}+\left(D_1\omega_1^2-\frac{B_1}{4}\right)(\rho_1^{**2}\omega_1^2+\rho_2^{**2}\omega_2^2)+\right.\right.$$

$$\left.+C_1\frac{\omega_1^3}{2}+\frac{F_1}{4}(\rho_1^{**2}\omega_1^3+\rho_2^{**2}\omega_1^2)\right]+\frac{\rho_1^{**2}\omega_1}{(\omega_2^2-\omega_1^2)}\left[\left(2D_1+\frac{1}{2}F_1\right)\omega_1^2-\frac{1}{2}B_1\right]+$$

$$+\frac{1}{\omega_2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\left[-\frac{A_1\omega_2}{2}+C_1\left(\frac{\omega_2^3}{2}\right)+\left(D_1\omega_2-\frac{B_1}{4}\right)(\rho_2^{**2}\omega_2^2+\rho_1^{**2}\omega_1^2)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{F_1}{4}(\rho_2^{**2}\omega_2^3+\rho_1^{**2}\omega_2^2)\right]+\frac{\rho_2^{**2}\omega_2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)}\left[-\frac{1}{2}B_1+\left(2D_1+\frac{1}{2}F_1\right)\omega_2^2\right]\right)+$$

$$+\lambda^2+\frac{\rho_1^{**2}\rho_2^{**2}\omega_2\omega_1}{(\omega_2^2-\omega_1^2)^2}\left[-\frac{B_1}{2}+2D_1\omega_1+\frac{F_1\omega_2}{2}\right]\left[-\frac{B_1}{2}+2D_1\omega_2+\frac{F_1\omega_1}{2}\right].$$

Согласно методу усреднения можно сформулировать следующее утверждение.

Теорема 3.10. Если выполняются условия (3) и:

$$\left[\frac{1}{(\omega_2^2-\omega_1^2)}\left[-\frac{A_1}{2}+\frac{F_1\omega_1(\rho_1^{**2}\omega_1+\rho_2^{**2})}{4}\right]+\frac{\varepsilon\rho_1^{**2}\omega_1}{(\omega_2^2-\omega_1^2)}\left[\left(2D_1+\frac{F_1}{2}\right)\omega_1^2-\frac{B_1}{2}\right]\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\omega_2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\left[C_1\frac{\omega_2^3}{2}-\frac{A_1\omega_2}{2}+\left(D_1\omega_2-\frac{B_1}{4}\right)(\rho_2^{**2}\omega_2^2+\rho_1^{**2}\omega_1^2)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{F_1\omega_2^2}{4}(\rho_2^{**2}\omega_2+\rho_1^{**2})\right]+\frac{\varepsilon\rho_2^{**2}\omega_2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)}\left[\left(2D_1+\frac{1}{2}F_1\right)\omega_2-\frac{1}{2}B_1\right]\right]+$$

$$+\frac{\rho_1^{**2}\rho_2^{**2}\omega_2\omega_1}{\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)^2}\left[-\frac{B_1}{2}+2D_1\omega_1+\frac{F_1\omega_2}{2}\right]\left[-\frac{B_1}{2}+2D_1\omega_2+\frac{F_1\omega_1}{2}\right]>0,$$

$$\left(\frac{1}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\left[-\frac{A_1\omega_1}{2}+\left(D_1\omega_1^2-\frac{B_1}{4}\right)(\rho_1^{**2}\omega_1^2+\rho_2^{**2}\omega_2^2)+\right.\right.$$

$$+C_1\frac{\omega_1^3}{2}+\frac{F_1}{4}(\rho_1^{**2}\omega_1^3+\rho_2^{**2}\omega_1^2)\Big]+\frac{\varepsilon\rho_1^{**2}\omega_1}{(\omega_2^2-\omega_1^2)}\left[\left(2D_1+\frac{1}{2}F_1\right)\omega_1^2-\frac{1}{2}B_1\right]+$$

$$+\frac{1}{\omega_2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\left[-\frac{A_1\omega_2}{2}+C_1\left(\frac{\omega_2^3}{2}\right)+\left(D_1\omega_2-\frac{B_1}{4}\right)(\rho_2^{**2}\omega_2^2+\rho_1^{**2}\omega_1^2)+\right.$$

$$\left.+\frac{F_1}{4}(\rho_2^{**2}\omega_2^3+\rho_1^{**2}\omega_2^2)\right]+\frac{\varepsilon\rho_2^{**2}\omega_2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)}\left[-\frac{1}{2}B_1+\left(2D_1+\frac{1}{2}F_1\right)\omega_2^2\right]\Bigg)<0$$

то при достаточно малых $\varepsilon>0$ точка $M_3(\rho_1^{**};\ \rho_2^{**})$ асимптотически устойчиво по Ляпунову. При этом автогенератор имеет асимптотически устойчивые колебания напряжения, при несоизмеримых числах ω_1, ω_2, близкие к двухчастотным колебаниям

$u_1=\rho_1^{**}\cos(\omega_1\tau-\varphi_1)+\rho_2^{**}\cos(\omega_2\tau-\varphi_2)$.

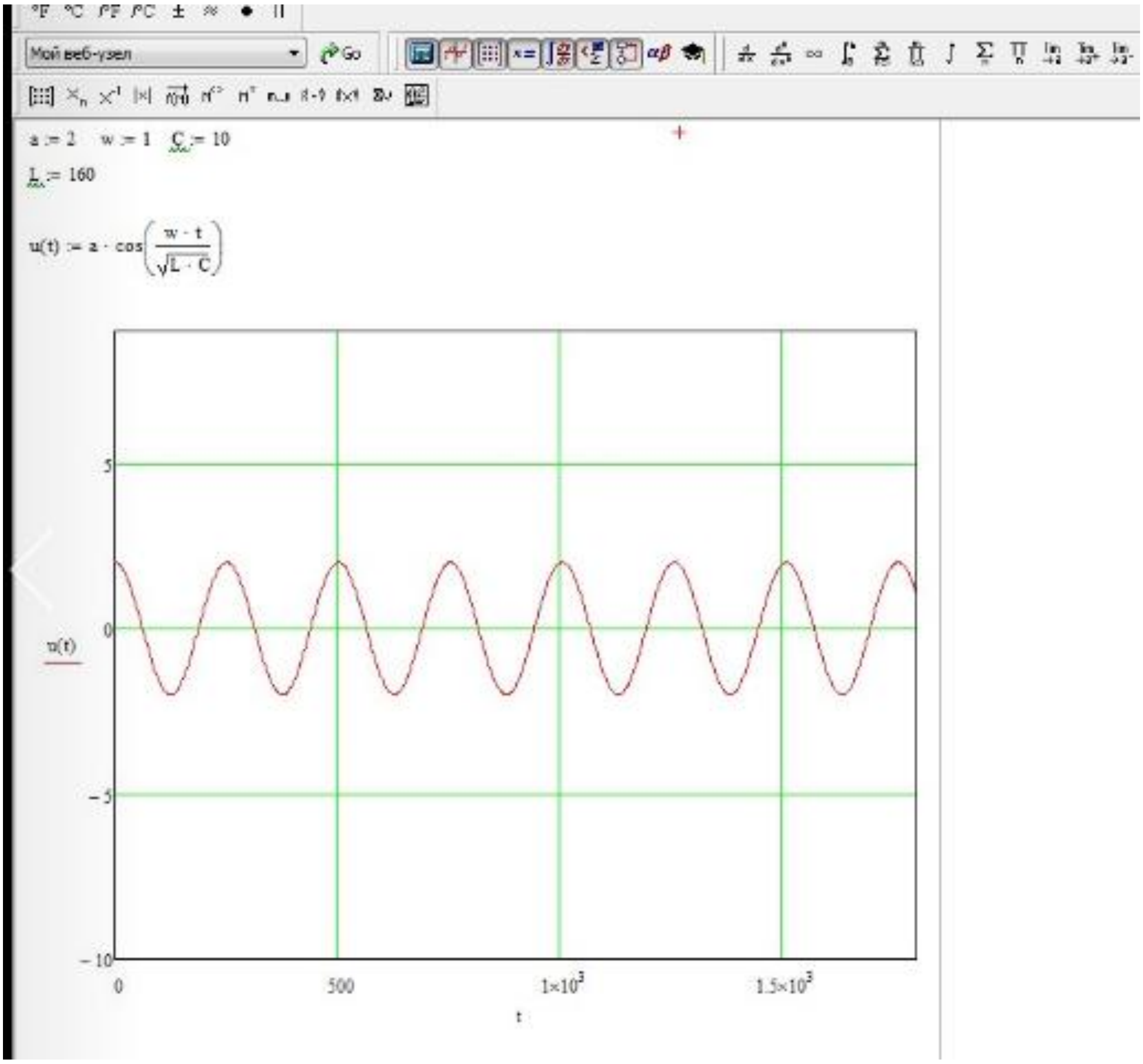
Заключение

В диссертации изучены типы колебаний в электрическом автогенераторе на двух связанных контурах Ван–дер-Поля. Построена математическая модель в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. При исследовании используется метод усреднения Крылова-Боголюбова. Для применения этого метода система должна иметь стандартный вид. С этой целью сначала вводится малый параметр. Далее система приводится к стандартному виду. Прямое применение метода усреднения к полученной системе приводит к задаче вычисления очень большого числа слагаемых, поэтому система сначала приводится к дифференциальному уравнению четвертого порядка и осуществляется переход к полярной системе координат. Благодаря этому количество вычислений сокращается примерно в четыре раза. Наибольшую сложность представляет построение усредненных уравнений. К счастью, оказалось, что усредненные уравнения имеют такой вид, из которого удается найти стационарные решения и даже исследовать их на устойчивость. Таким образом, удалось получить условия, при которых в автогенераторе наблюдаются устойчивые одночастотные колебания и двухчастотные колебания с несоизмеримыми частотами.

Приложение

На следующих трех графиках представлены случаи одночастотных колебаний с различными амплитудами и частотами.

1.На данном графике амплитуда равна 2, частота равна 2.

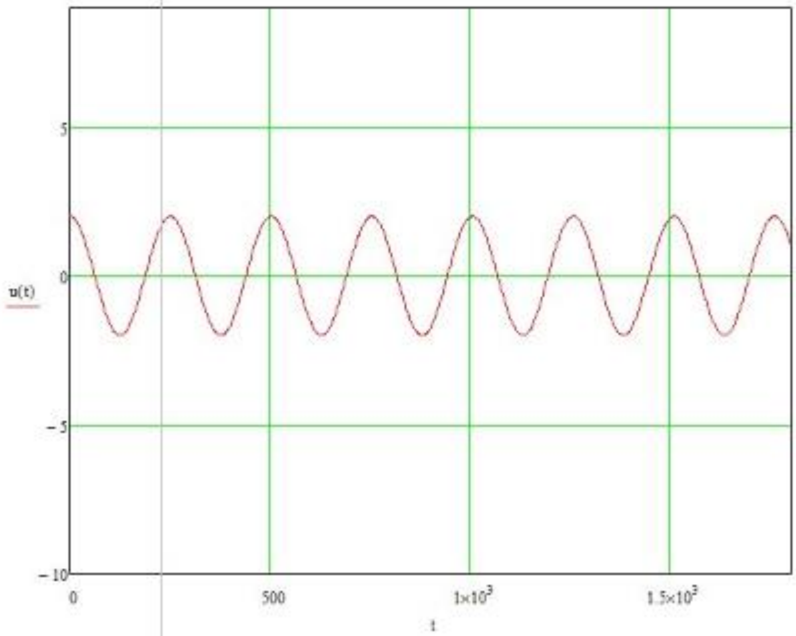


2.На данном графике амплитуда равна 2, частота равна 4.

$a := 2 \qquad w := 1 \qquad C := 100$

$L := 16$

$$u(t) := a \cdot \cos\left(\frac{w \cdot t}{\sqrt{L \cdot C}}\right)$$

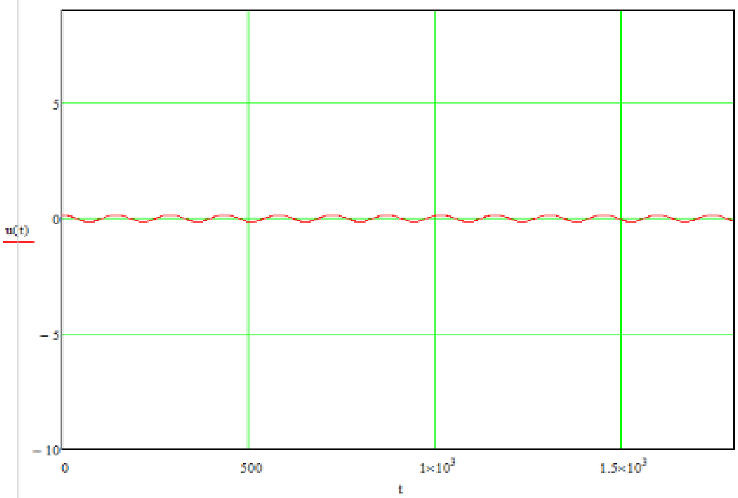


3.На данном графике амплитуда равна 1/7, частота равна 2.

$a := \frac{1}{7} \qquad w := \sqrt{3} \qquad C := 10$

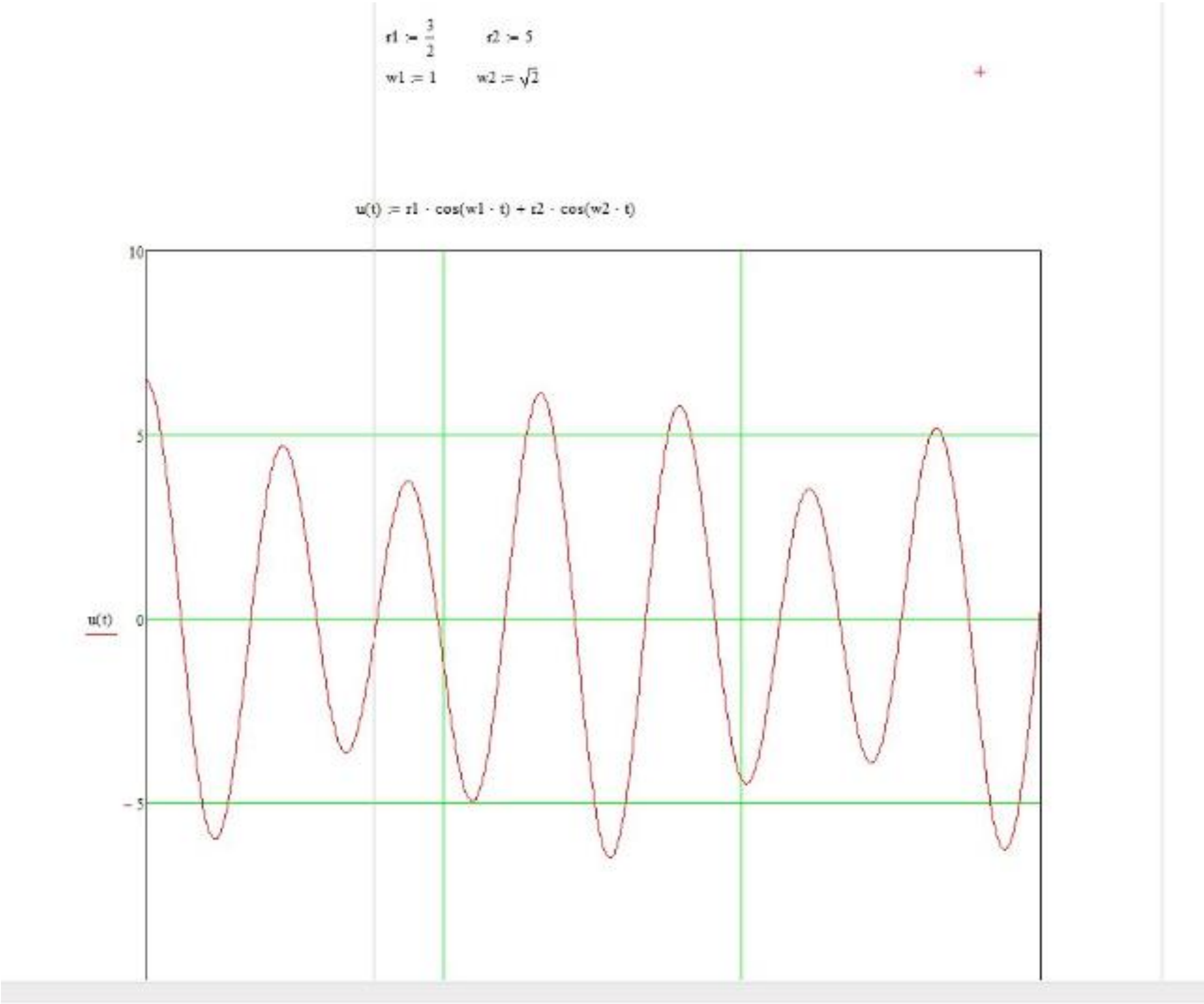
$L := 160$

$$u(t) := a \cdot \cos\left(\frac{w \cdot t}{\sqrt{L \cdot C}}\right)$$

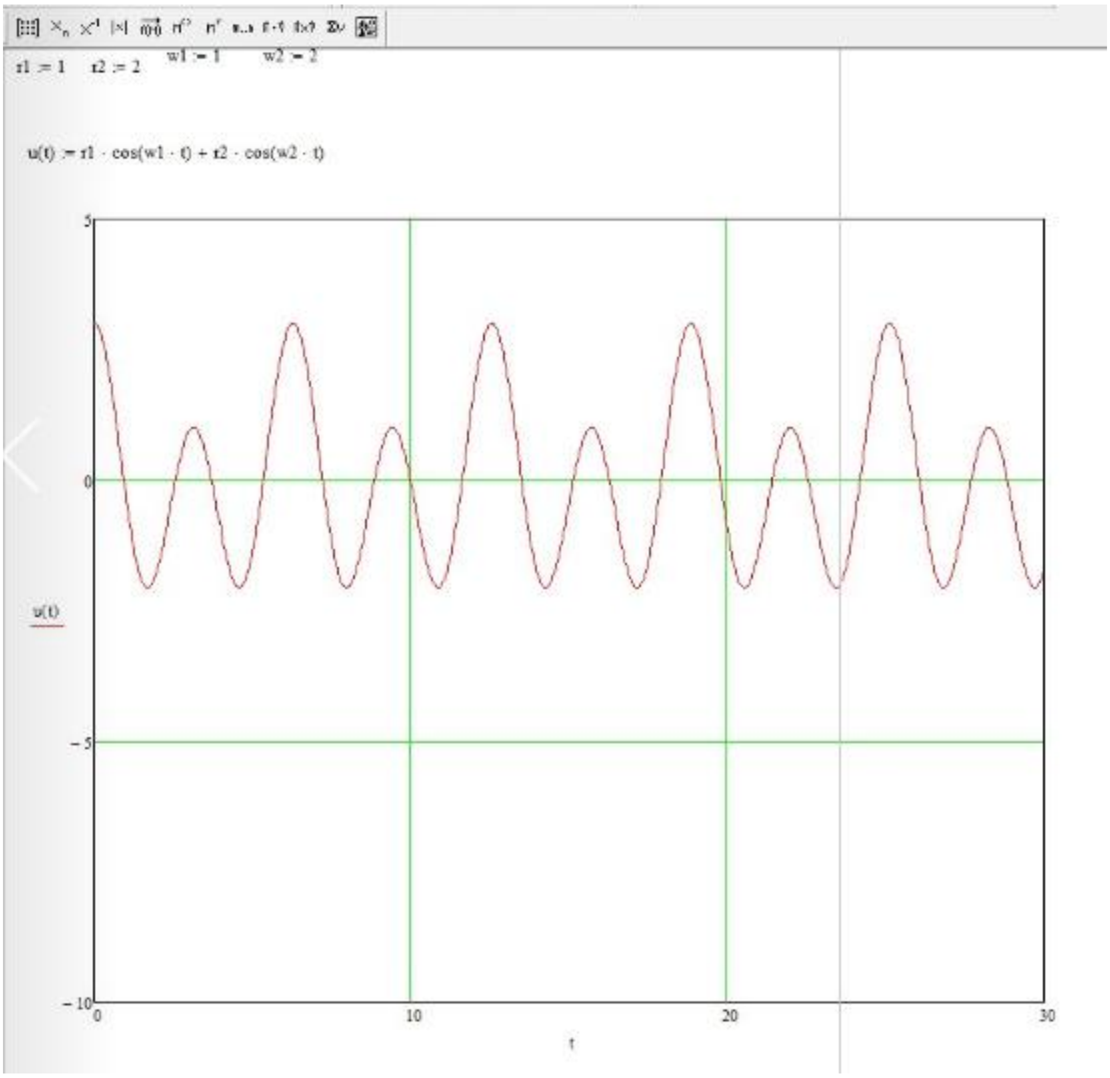


На следующих четырех графиках представлены случаи двухчастотных колебаний с различными амплитудами и частотами.

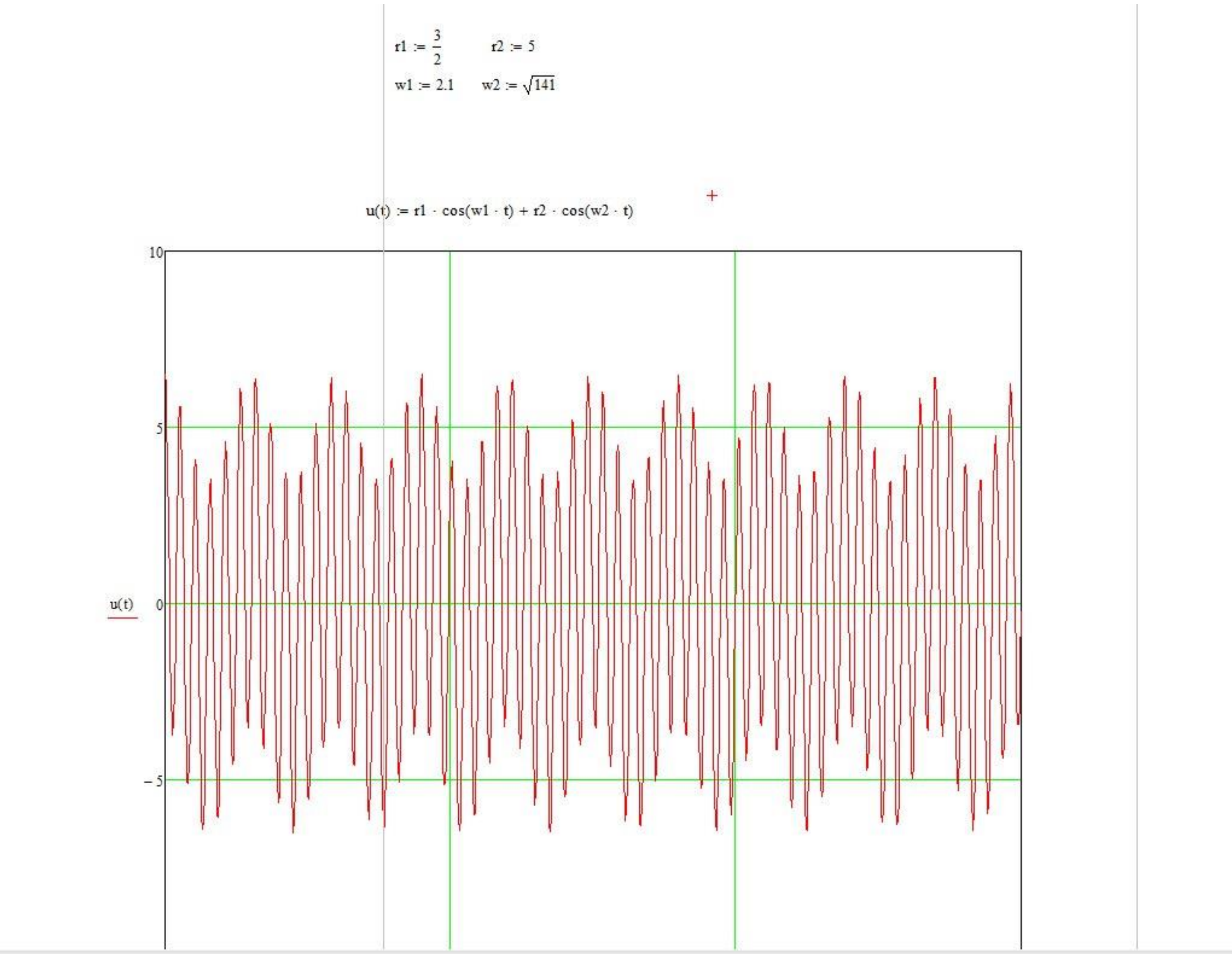
1. На данном графике большая амплитуда равна 6, меньшая амплитуда равна 4, частота равна 2.



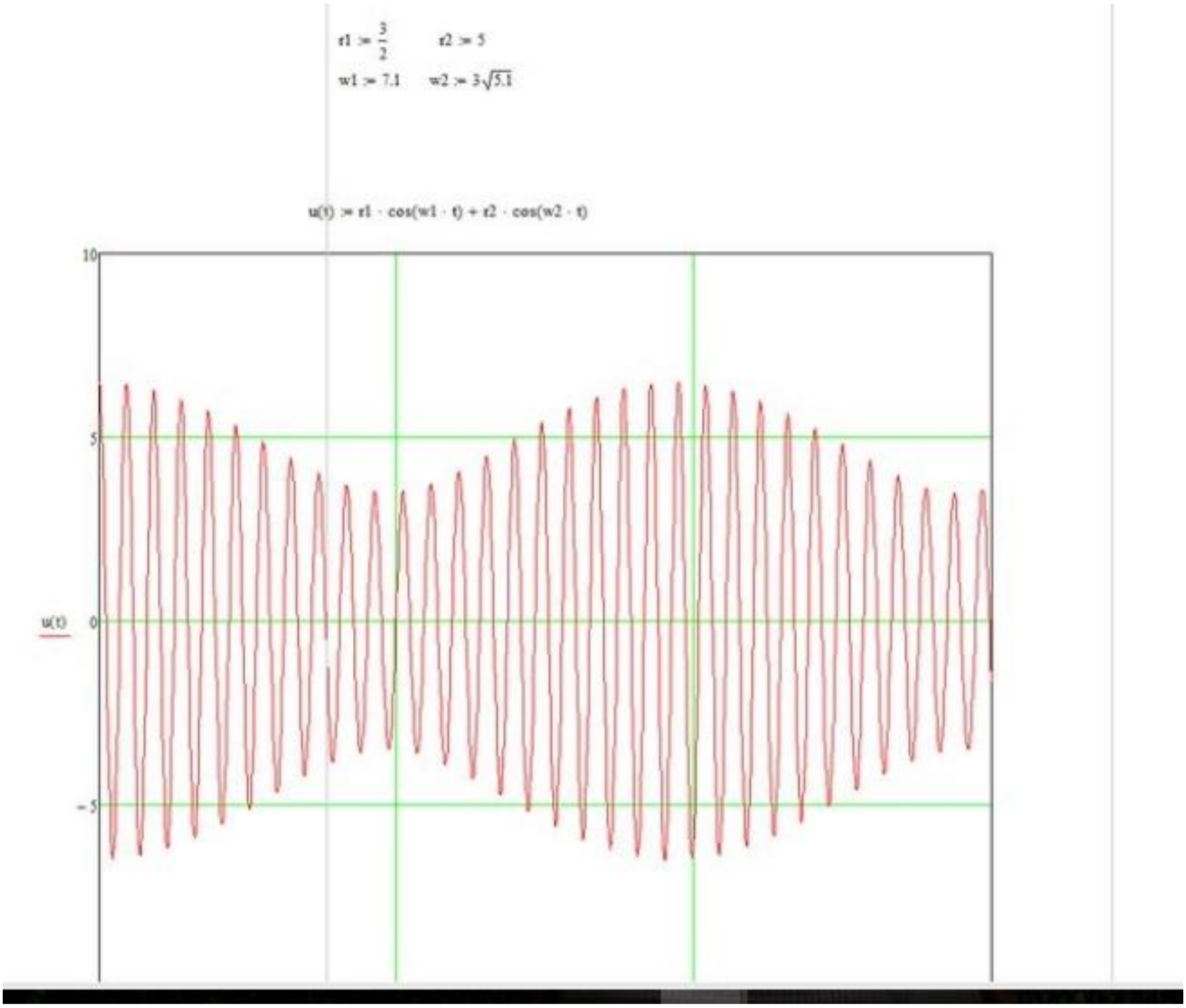
2. На данном графике большая амплитуда равна 3, меньшая амплитуда равна 1, частота равна 3.



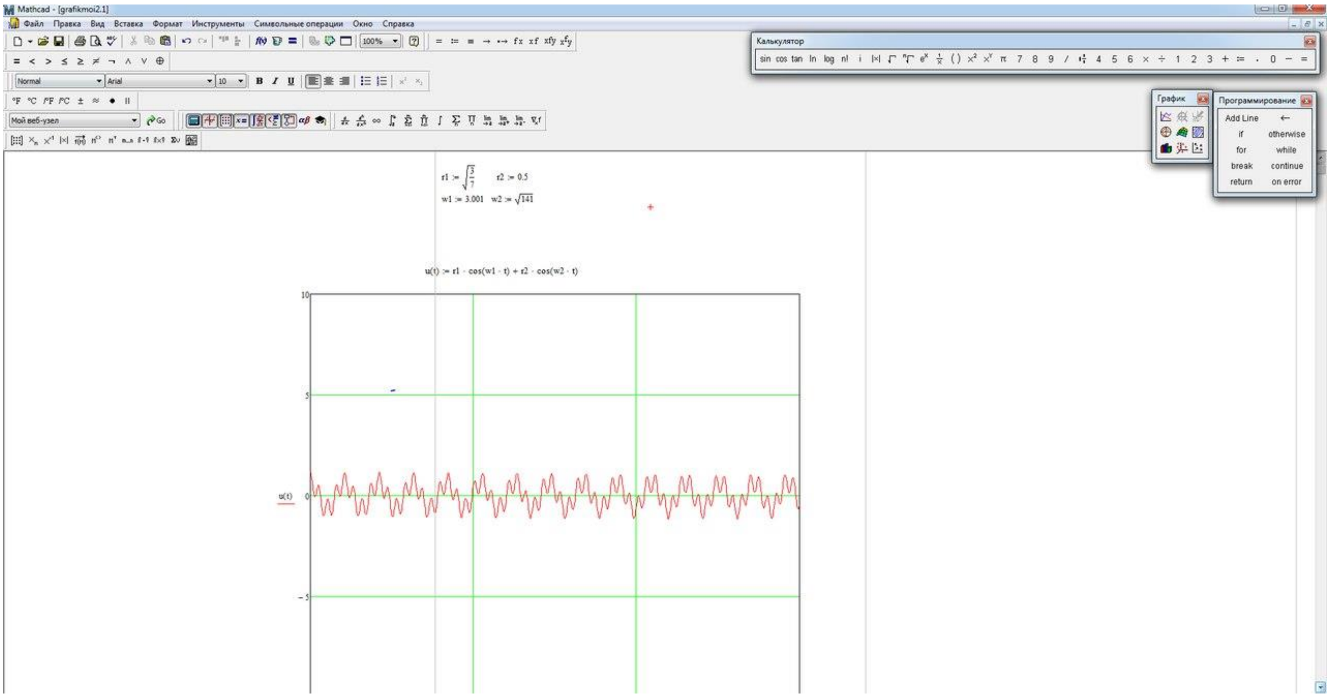
3. На данном графике большая амплитуда равна 6, меньшая амплитуда равна 4, частота равна 19.



4. На данном графике большая амплитуда равна 6, меньшая амплитуда равна 4, частота равна 11.



5. На данном графике большая амплитуда равна 1, меньшая амплитуда равна 0,5, частота равна 14.



Список литературы:

1. Андреев В. С. Теория нелинейных электрических цепей: Учебное пособие для вузов/В. С. Андреев. – М.: Радио и связь, 1982. – 280 с.
2. Андронов А. А. Теория колебаний/ А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. –М.: Физматгиз, 1981.- 568 с.
3. Бибиков Ю. Н. Об устойчивости положения равновесия осциллятора при периодических возмущениях/ Ю. Н. Бибиков. – Матем. заметки, 2014. – с. 947–950
4. Бибиков Ю. Н. Устойчивость и бифуркация при периодических возмущениях положения равновесия осциллятора с бесконечно большой или бесконечно малой частотой колебаний / Ю. Н. Бибиков. – Матем. заметки, 1999. – с. 323–335
5. Бирюк Н. Д. Основы теории параметрических радиоцепей: монография/ Н. Д. Бирюк, В. В. Юргелас. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. – 346 с.
6. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний/ Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. –М.: Наука, 1974. – 410 с.;
7. Бокк О. Ф. Теория колебаний (на примере автогенератора)/ О.Ф. Бокк, С. В. Слипко. – Воронеж: Изд.-во ОАО "Концерн "Созвездие", 2008. – 80 с.
8. Боровских А.В. Исследование релаксационных колебаний с помощью конструктивного нестандартного анализа I/ А. В. Боровских// Дифференциальные уравнения, 2004. – с. 291-298,

9. Боровских А. В. Исследование релаксационных колебаний с помощью конструктивного нестандартного анализа. II/ А. В. Боровских// Дифференциальные уравнения, 2004. – с. 455-464,
10. Боровских А.В. Уравнение Ван-дер-Поля с кусочно-линейной характеристикой нелинейного элемента/А. В. Боровских, А.М. Халилов// Дифференциальные уравнения, 2010. - с. 1668-1669.
11. Горохов С. Ф. Автоколебательные цепи. Лекции по курсу "Теория нелинейных электричеких цепей". /С. Ф. Горохов. – М. 1974. -148 с.
12. Горохов С. Ф. Генерирование колебаний в цепях с нелинейными реактивностями/С. Ф. Горохов. – М. 1968. -65 с.
13. Гребенников Е. А Конструктивные методы анализа нелинейных систем/ Е. А. Гребенников, Ю. А. Рябов. – М.: Наука, 1979.- 432 с.
14. Задорожний В. Г. Асинхронные колебания в двухконтурном автогенераторе/ В. Г. Задорожний, В. И.Непринцев, А. А.Кузнецов//Вестник ВГУ, сер. Системный анализ и информационные технологии, №1, 2007. – с. 133-138.
15. Задорожний В.Г. Математическое моделирование процессов в электрическом автогенераторе/В.Г. Задорожний, В.С. Купцов, Е.В. Купцова//Вестник Воронежского государственного технического университета, т.10, №1,2014. -с. 63-66;
16. Задорожний В.Г. О задаче Коши для линейной системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка/В.Г. Задорожний, Е.В.

Купцова// Воронежский Государственный Университет, Воронеж, 2017. - с.88-90;

17. Задорожний В.Г., О моментальных функциях решения стохастической линейной системы дифференциальных уравнений/В.Г. Задорожний, Е.В. Купцова// сборник материалов Международной конференции посвященной 100-летию со дня рождения Селима Григорьевича Крейна, Воронеж, 2017. – с.223–224;
18. Задорожний В.Г.Усреднение системы дифференциальных уравнений для автогенератора на трех связанных контурах Ван-дер-Поля/ В.Г. Задорожний, А.В. Попов //Дифференциальные уравнения, 1999. - с. 1580.
19. Задорожний В.Г. Колебания в электрическом автогенераторе на двух связанных контурах / В.Г. Задорожний, Е.В. Купцова, В.И. Непринцев //Физико-математическое моделирование систем : материалы 7-го Международного семинара. – Воронеж, 2011. – Ч.3.- С. 220-224;
20. Корнев С.В. Асимптотическое поведение решений дифференциальных включений и метод направляющих функций/ С.В. Корнев, В.В. Обуховский// Дифференциальные уравнения, 2015.- с. 700–705;
21. Корнев С.В. Метод обобщенной интегральной направляющей функции в задаче о существовании периодических решений дифференциальных включений/ С. В. Корнев// Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика, 2015. –с. 16–31;

22. Корнев С.В. О локализации метода направляющих функций в задаче о периодических решениях дифференциальных включений/С.В. Корнев, В.В. Обуховский// Изв. вузов. Матем., № 5,2009. - с. 23–32;
23. Купцова Е.В. Первые приближения для колебаний напряжения в системе связанных электрических контурах Ван-дер-Поля / Е.В. Купцова// Вестник Воронежского государственного университета, 2017. – С. 113-122;
24. Купцова Е.В. Приведение уравнений электрического автогенератора к стандартному виду метода усреднения/ Приведение уравнений электрического автогенератора к стандартному виду метода усреднения/ Е.В. Купцова// Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. науч. тр. междунар. конф.;
25. Купцова Е.В. Типы Ограниченных колебаний в автогенераторе Ван-Дер-Поля на двух связанных контурах / Е.В. Купцова // Современные тенденции развития науки и технологий : периодич. науч. сб. по материалам XIII Международной научно-практической конференции, 30 апр. 2016 г. Белгород, 2016 . № 4-1- С. 27-39;
26. Купцова Е.В. Усредненная система для математической модели электрического автогенератора / Е.В. Купцова // Современные методы теории краевых задач : материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения – XXVI. – Воронеж, Издательский дом ВГУ, 2015. - С. 123-124;

27. Ланда П.С. Автоколебательные системы с конечным числом степеней свободы/ П.С. Ланда. –М.: Наука, 2016. – 360 с.
28. Левитан Б.М. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения./ Б.М. Левитан , В.В. Жиков. – М., Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 205 с.
29. Колесов А.Ю. Релаксационные колебания в математических моделях экономики/А.Ю. Колесов , Ю.С. Колесов. – М. Наука. 1993.
30. Майдановский А.С. Двухчастотный автогенератор/ А.С. Майдоновский. – Томский государственный университет, Томск, 2012. – 35с.
31. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний/ И.Г. Малкин. –М.: Гостехиздат, 2004. – 496 с.
32. Мищенко Е.Ф. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания/Е.Ф. Мищенко. – М., Наука, 1975.- 247с.
33. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы в нелинейной механике / Н.Н. Моисеев. – М.: Наука, 1969. – 382 с.
34. Найфэ А. Методы возмущений/А. Найфэ. – М.: Мир, 1976. – 450 с.
35. Найфэ А. Методы возмущений/А. Найфэ. – М., Мир., 1976.
36. Неймарк Ю.И. Стохастические и хаотические колебания/ Ю.И. Неймарк, П.С. Ланда. – М., Наука, 1987. - 422с.
37. Олейник О.А. Об усреднении краевых задач в перфорированных областях с непериодической структурой/О.А. Олейник , Т.А. Шапошникова// Дифференциальные уравнения, 1998, №5, с.647-661.

38. Попов А. В. Многочастотные колебания в связанных системах нелинейных автогенераторов: Диссертация. канд. физ.-мат. наук: Специальность 01.01.02 - дифференциальные уравнения /А.В. Попов//Воронежский государственный университет, Воронеж, 2003. — 115 с.
39. European Nonlinear Oscillations Conference. Prague, September 9-13, 1996. -p. 157-160.
40. Kuptsova E. Analysis of vibrations in electrical oscillator on two connected contours / E. Kuptsova //Modern problems of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – Voronezh: Istoki, 2013. – C. 25-29;
41. Neprintsev V.I., Zadorozhnij V.G., Lobanov S.N. Realisation of asynchronous two-frequency auto-oscillations in two-countour Van-der-Pol's scheme/ V.I. Neprintsev, V.G. Zadorozhnij, S.N. Lobanov// Euromech - 2 nd.