На правах рукописи

Ковалевский Ростислав Александрович

ВЕСОВЫЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ И ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико – математических наук

Воронеж – 2018 год

Работа выполнена в Воронежском государственном университете

Научный руководитель: Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: Левенштам Валерий Борисович, доктор физико – математических наук, доцент, Южный федеральный университет, кафедра алгебры и дискретной математики, профессор

Раецкая Елена Владимировна кандидат физико – математических наук, доцент, Воронежский лесотехнический университет, кафедра высшей математики, доцент

Ведущая организация: Саратовский Национальный исследовательский университет им.Н.Г. Чернышевского.

Защита состоится 19 июня 2018 г. в 16 час. 30 мин. на заседании совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл. 1, ауд. 227.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте
http://www.science.vsu.ru/dissertations/5822/Диссертация_Ковалевский_Р.А..pdf

Автореферат разослан «   » апреля 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.038.22
доктор физико – математических наук,
профессор Ю.Е. Гликлих

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Вырождающиеся дифференциальные уравнения используются при моделировании различных физических процессов, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнений, так и их порядок. Краевые задачи для вырождающихся уравнений относятся к «неклассическим» задачам математической физики. Основная трудность, возникающая в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Вырождающиеся эллиптические уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник. Обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка впервые были рассмотрены в работах С. Г. Михлина и М. И. Вишика . Метод “эллиптической регуляризации” был применен О. А. Олейник, а затем Дж. Коном и Л. Ниренбергом для изучения эллиптико - параболических уравнений второго порядка. В работах В. П. Глушко была установлена коэрцитивная разрешимость общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева. Задача Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка с согласованным вырождением исходных данных в произвольной выпуклой области была исследована в работах В. А. Рукавишникова, А. Г. Ереклинцева. Задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с неоднородным анизотропным вырождением в области была рассмотрена в работах С. Н. Антонцева, С. И. Шмарева.

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при “степенном” характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка был получен В. П. Глушко, Х. Леопольдом, С. З. Левендорским , С. А. Исхоковым.

Начально - краевая задача для вырождающегося параболического уравнения с постоянными по y коэффициентами была исследована В.П. Богатовой, В.П. Глушко.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию свойств специального класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов; доказательству коэрцитивных априорных оценок и теорем разрешимости краевых задач в полупространстве для специальных классов вырождающихся псевдодифференциальных уравнений, содержащих вырождающийся псевдодифференциальный оператор с переменным символом, зависящим от комплексного параметра, и производную первого порядка по переменной y; доказательству коэрцитивных априорных оценок и теорем разрешимости общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами, зависящих от комплексного параметра; доказательству априорных оценок и теорем разрешимости начально - краевых задач для параболических уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами с вырождением по пространственной переменной.

Цель работы. Исследование нового класса псевдодифференциальных операторов, определяемых с помощью специального интегрального преобразования F_α, с переменным символом, зависящим от комплексного параметра. Получение коэрцитивных априорных оценок и доказательство теорем о существовании решения граничных задач, для вырождающихся псевдодифференциальных уравнений специального вида. Получение коэрцитивных априорных оценок и доказательство теорем о существовании решения общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами, зависящих от комплексного параметра. Доказательство теорем о существовании и получение априорных оценок решений начально - краевых задач для вырождающихся параболических уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами.

Методы исследования. Разработанные в диссертационной работе методы основаны на фундаментальных методах современного анализа и математической физики и теории псевдодифференциальных операторов.

Научная новизна. Результаты диссертационной работы являются новыми. В работе исследованы новые классы весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символов, зависящим от комплексного параметра. Получены коэрцитивные априорные оценки и установлена разрешимость задач Дирихле в полупространстве для псевдодифференциальных уравнений, содержащих весовой псевдодифференциальный оператор с переменным символом, зависящим от комплексного параметра и оператор $\dfrac{\partial}{\partial y}$. Получены коэрцитивные априорные оценки решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами, зависящими от комплексного параметра. Доказаны теоремы о существовании решений начально - краевых задач для вырождающихся параболических уравнений высокого порядка с переменными коэффициентами.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты и разработанные методы могут быть в дальнейшем использованы для исследования новых классов псевдодиффренциальных операторов с вырождением и для анализа более широких классов краевых и начально - краевых задач, для вырождающихся эллиптических и параболических уравнений.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались на научных конференциях и семинарах. Среди них международные научные конференции «Современные методы теории функций и смежные проблемы. «Воронежская зимняя математическая школа»», Воронеж 2009 г., 2015 г., 2017 г., 2018 г; «Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования», Воронеж, 2009 г.; «Современные методы теории краевых задач. «Понтрягинские чтения »», Воронеж, 2009 г., 2013 г., 2015 г., 2016 г., 2017 г.; «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», Воронеж, 2009 г., 2011 г.; «Международная конференция, посвященная 100-летию С.Г. Крейна», Воронеж, 2017 г.; научный семинар академика РАН В. А. Ильина (г. Москва).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1 – 14]. Работы [1 – 5] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных работ [1 – 8] в диссертацию вошли результаты, полученные лично диссертантом.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 176 страниц. Библиография содержит 85 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В первой главе диссертационной работы исследуются свойства весовых псевдодифференциальных операторов с переменным. Рассмотрим функцию $\alpha(y)$, $y \in R^1_+$, для которой выполняются условия: $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(y)>0$ при $y>0$, $\alpha(y)=\mathrm{const}$ для $y \geq d$ при некотором $d>0$. Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(y)](\eta) = \int_0^{+\infty} u(y)\exp(i\eta\int_y^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dy}{\sqrt{\alpha(y)}}, \tag{1}$$

которое определено первоначально на функциях $u(y) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Здесь $C_0^\infty(R^1_+)$ - пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, носитель которых принадлежит R^1_+. Преобразование (1) и преобразование Фурье $F_{\tau\to\eta}[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau,\ \eta \in R^1$ связаны следующим соотношением

$F_\alpha[u(t)](\eta)=F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)],$ где $u_\alpha(\tau)=\sqrt{\alpha(y)}u(y)\Big|_{y=\varphi^{-1}(\tau)}$, $y=\varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau=\varphi(y)=\int\limits_y^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}.$

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля, что позволяет расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, а также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](y)=\frac{1}{\sqrt{\alpha(y)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(y)}$.

Можно показать, что для функции $u(y)\in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ справедливы равенства $F_\alpha[D^j_{\alpha,y}u](\eta)=\eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j=1,2,...,$ где $D_{\alpha,y}=\frac{1}{i}\sqrt{\alpha(y)}\partial_y\sqrt{\alpha(y)},\ \partial_y=\frac{\partial}{\partial y}.$

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$ (s – действительное число) состоит из всех функций $v(x,y)\in L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v,|p|\|^2_{s,\alpha}=\int\limits_{R^n}(|p|^2+|\xi|^2+\eta^2)^s\left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,y)]\right|^2 d\xi d\eta,$$

зависящая от комплексного параметра $p\in Q=\{p\in\mathbb{C},\ |\arg p|<\frac{\pi}{2},\ |p|>0\}$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ $(s\ge 0,\ q>1)$ состоит из всех функций $v(x,y)\in H_{s,\alpha}(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v,|p|\|_{s,\alpha,q}=\{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]}\left\|F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[(|p|^2+|\xi|^2+\eta^2)^{\frac{s-ql}{2}}F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial^l_y v]]\right\|^2_{L_2(R^n_+)}\}^{\frac{1}{2}},$$

зависящая от комплексного параметра. Здесь $[\frac{s}{q}]$ - целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Условие 1. Существует число $\nu\in(0,1]$ такое, что $|\alpha'(y)\alpha^{-\nu}(y)|\le c<\infty$ при всех $y\in[0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(y)\in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1\ge 2N-|\sigma|$, где $N\ge\max\limits_{0\le p_1\le l}\{2p_1+\frac{l-p_1+\frac{3}{2}}{\nu}+1,\ \sigma+1,\ \sigma+\frac{l}{2}\},\ l=1,\ 2...,\ \sigma$ - некоторое действительное число.

Можно показать, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0)=\alpha'(+0)=0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi}=F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}...F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$K^{(\sigma)}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})v(x,y)=F_\alpha^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}[\lambda(p,y,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,y)]].$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $\lambda(p,y,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})$ принадлежит классу символов $S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, где $\Omega\subset\bar{R}^1_+,\ \sigma\in R^1,\ p\in Q=\{p\in C, |\arg p|<\frac{\pi}{2}, |p|>0\}$, если функция $\lambda(p,y,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $y\in\Omega$ и по переменной $\eta\in R^1$. Причем, при всех $j=0,1,2,...,\ l=0,1,2,...$ справедливы оценки

$|(\alpha(y)\partial_y)^j\partial^l_\eta\lambda(p,y,\xi,\eta)|\le c_{jl}(|p|^2+|\xi|+|\eta|)^{\sigma-l}$ с константами $c_{jl}>0$,

не зависящими от $p\in Q,\ \xi\in R^{n-1},\ \eta\in R^1,\ y\in K$, где $K\subset\Omega$ - произвольный отрезок. Здесь σ - действительное число.

В главе 1 доказаны теорема о композиции весовых псевдодифференциальных операторов с символами из класса $S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, теорема об ограниченности таких операторов в пространствах $H_{s,\alpha}(R^n_+)$.

Доказаны теоремы о коммутации весового псевдодифференциального оператора и оператора дифференцирования, теоремы «о следах», исследована связь между весовым псевдодифференциальным оператором и специальным классом интегральных операторов, иследован сопряженный оператор к весовому псевдодифференциальному оператору и доказан аналог неравенства Гординга для весовых псевдодифферднциальных операторов. Наиболее важными утверждениями главы 1 являются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть символ $\lambda(p,y,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,y,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу

$S^\sigma_{\alpha,p}(\Omega)$, $\Omega\subset\bar{R}^1_+,\ \sigma\in R^1,\ \Omega\subset\bar{R}^1_+,\ \sigma\in R^1,\ p\in Q=\{p\in C, |\arg p|<\frac{\pi}{2}, |p|>0\}$. Пусть $v(x,y)\in H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+),\ \partial^l_y v(x,y)\in H_{s+\sigma,\alpha}(R^n_+),\quad l=1,2,...$. Пусть выполнено условие 1 (с заменой σ на $s+\sigma$). Тогда для оператора

$$M_{l,\sigma}=\partial^l_y K^{(\sigma)}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})-K^{(\sigma)}(p,y,D_x,D_{\alpha,y})\partial^l_y \qquad (2)$$

справедлива оценка $\|M_{l,\sigma}v,|p|\|_{s,\alpha}\le c(\sum_{j=0}^{l}\|\partial^j_y v,|p|\|_{s+\sigma-1,\alpha}+\sum_{j=0}^{l-1}\|\partial^j_y v,|p|\|_{s+\sigma,\alpha})$

с константой $c>0$, не зависящей от $v,\ p$.

Теорема 2. Пусть $q>1$, $s\geq 0$ – действительные числа, $v(x,\mathrm{y})\in H_{s+(l+1)q,\alpha,q}(R_{+}^{n})$. Пусть символ $\lambda(\mathrm{y},\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\mathrm{q})}(\mathrm{y},D_{x},D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S_{\alpha,\mathrm{p}}^{q}(\Omega)$, $\Omega\subset\overline{R}_{+}^{1}$. Пусть выполнено условие 1 при $\sigma=s+q$. Тогда для оператора $M_{l,q}$, определенного в (2) при $\sigma=q$, справедлива оценка $\left\|M_{l,q}v,|p|\right\|_{s,\alpha,q}\leq c\left\|v,|p|\right\|_{s+lq+q-1,\alpha,q}$ с постоянной $c>0$, не зависящей от $v,\ p$.

Теорема 3. Пусть $K(p,\mathrm{y},D_{x},D_{\alpha,\mathrm{y}})$ – весовой псевдодифференциальный оператор с символом $\lambda(p,\mathrm{y},\xi,\eta)\in S_{\alpha,p}^{m}(\Omega)$, $\Omega\subset\overline{R}_{+}^{1},\ m\in R^{1}$, $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\dfrac{\pi}{2},\ |p|>0\}$. Пусть $\operatorname{Re}\lambda(p,\mathrm{y},\xi,\eta)\geq c(|p|+|\xi|+|\eta|)^{m}$ для всех $\xi\in R^{n-1},\ \eta\in\mathrm{R}^{1},\ \mathrm{y}\in\mathrm{K}\subset\Omega$, где $\mathrm{K}\subset\overline{R}_{+}^{1}$ – произвольное компактное множество. Тогда для любого $s\in R^{1}$ и любой функции $u(x,\mathrm{y})\in C_{0}^{\infty}(R^{n-1}\times K)$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(K(p,\mathrm{y},D_{x},D_{\alpha,\mathrm{y}})u(x,\mathrm{y}),u(x,\mathrm{y}))\geq c_{0}\left\|u,|p|\right\|_{\frac{m}{2},\alpha}^{2}-c_{1}\left\|u,|p|\right\|_{s,\alpha}^{2}$$

с некоторыми константами $c_{0}>0$ и $\mathrm{c}_{1}>0$, не зависящими от $v,\ p$.

Во второй главе работы устанавливаются коэрцитивные априорные оценки решений краевых задач в R_{+}^{n} для вырождающихся псевдодифференциальных уравнений специального вида, содержащих весовой псевдодифференциальный оператор с переменным символом, зависящим от комплексного параметра, из класса $S_{\alpha,p}^{q}(\Omega)$ и производную ∂_{y}. Рассмотрим в R_{+}^{n} следующие задачи:

$$\begin{cases}K_{-}^{(q)}(p,y,D_{x},D_{\alpha,\mathrm{y}})v(x,\mathrm{y})-\partial_{y}v(x,\mathrm{y})=F(\mathrm{p},x,\mathrm{y})\\ v(x,\mathrm{y})\big|_{y=0}=G(x),\end{cases}\tag{3}$$

$$K_{+}^{(q)}(p,\mathrm{y},D_{x},D_{\alpha,\mathrm{y}})v(x,\mathrm{y})-\partial_{y}v(x,\mathrm{y})=F(\mathrm{p},x,\mathrm{y}).\tag{4}$$

Здесь $K_{\pm}^{(q)}(p,\mathrm{y},D_{x},D_{\alpha,\mathrm{y}})$ - весовые псевдодифференциальные операторы с символами $\lambda_{\pm}(p,\mathrm{y},\xi,\eta)$.

Условие 2. Функции $\lambda_{\pm}(p,\mathrm{y},\xi,\eta)$ принадлежат классу $S_{\alpha,p}^{q}(\Omega),\ q>1$ - действительное число, $\Omega\subset\overline{R}_{+}^{1}$, $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\dfrac{\pi}{2},\ |p|>0\}$. Причём с некоторой константой $c>0$, не зависящей от $p\in Q,\ y\in\Omega,\ \xi\in R^{n-1},\ \eta\in R^{1}$

справедливы оценки $\pm\operatorname{Re}\lambda_{\pm}(\mathrm{p},\mathrm{y},\xi,\eta)\geq c(|p|+|\xi|+|\eta|)^{q}$ при всех $p\in Q$, $y\in\Omega$, $\xi\in R^{n-1}$, $\eta\in R^{1}$.

Условие $1'$**.** Выполнено условие 1 при $\sigma=s+q$, $l=1,2,...,[\dfrac{s}{q}]$, где $q>1,\ s\geq 0$ - действительные числа.

Теорема 4. Пусть $s\geq 0,\ q>1$ - действительные числа, выполнено условие $1'$. Пусть функции $\lambda_{\pm}(p,\mathrm{y},\xi,\eta)$ удовлетворяет условию 2. Тогда для любого решения $v(x,\mathrm{y})\in H_{s+q,\alpha,q}(R_{+}^{n})$ задачи (3) справедлива априорная оценка

$$\|v,|p|\|_{s+q,\alpha,q}\leq c_{1}(\|F,|p|\|_{s,\alpha,q}+\|G,|p|\|_{s+\frac{1}{2}q}+\|v\|_{L_{2}(R_{+}^{n})})\ ,$$

а для любого решения $v(x,\mathrm{y})\in H_{s+q,\alpha,q}(R_{+}^{n})$ задачи (4) справедлива априорная оценка $\|v,|p|\|_{s+q,\alpha,q}\leq c_{2}(\|F,|p|\|_{s,\alpha,q}+\|v\|_{L_{2}(R_{+}^{n})})$ с постоянными $c_{1}>0$, $c_{2}>0$ не зависящими от p,v,F,G.

Теорема 6. Пусть $s\geq 0,\ q>1$ - действительные числа, выполнено условие $1'$. Пусть функции $\lambda_{\pm}(p,\mathrm{y},\xi,\eta)$ удовлетворяет условию 2. Пусть $p\in Q_{p_{0}}=\{p\in C,\ |\arg p|<\dfrac{\pi}{2},\ |p|>p_{0}>0\}$. Тогда существует такое число $p_{0}>0$, что для любого решения $v(x,\mathrm{y})\in H_{s+q,\alpha,q}(R_{+}^{n})$ задачи (3) справедлива априорная оценка $\|v,|p|\|_{s+q,\alpha,q}\leq c_{5}(\|F,|p|\|_{s,\alpha,q}+\|G,|p|\|_{s+\frac{1}{2}q})$, а для любого решения $v(x,\mathrm{y})\in H_{s+q,\alpha,q}(R_{+}^{n})$ задачи (4) справедлива априорная оценка $\|v,|p|\|_{s+q,\alpha,q}\leq c_{6}\|F,|p|\|_{s,\alpha,q}$ с постоянными $c_{5}>0$, $c_{6}>0$ не зависящей от p,v,F,G.

В третьей главе диссертационной работы исследуется разрешимость краевых задач (3), (4). Для задач (3), (4) доказано существование регуляризатора, а при достаточно большом значении $|p|$ доказаны теоремы о существовании и единственности решений.

Теорема 7. При выполнении условий теоремы 6 существует правый регуляризатор задачи (3), то есть такой оператор $\hat{R}_{1}:H_{s,\alpha,q}(R_{+}^{n})\times H_{s+\frac{1}{2}q}(R^{n-1})\rightarrow H_{s+q,\alpha,q}(R_{+}^{n})$, что $\hat{A}_{1}\hat{R}_{1}(F,G)=(F,G)+T_{1}(F,G)$, где $\hat{A}_{1}$ - оператор, порождённый задачей (3) (то есть $\hat{A}_{1}v=(F,G)$), а T_{1} - ограниченный оператор из $H_{s,\alpha,q}(R_{+}^{n})\times H_{s+\frac{1}{2}q}(R^{n-1})$ в $H_{s+1,\alpha,q}(R_{+}^{n})\times H_{s+\frac{1}{2}q+1}(R^{n-1})$.

Для задачи (4) существует правый регуляризатор задачи (4), то есть такой оператор

$\hat{R}_2 : H_{s,\alpha,q}(R^n_+) \to H_{s+q,\alpha,q}(R^n_+)$, что $\hat{A}_2 \hat{R}_2 F = F + T_2 F$, где $\hat{A}_2$ - оператор, порожденный задачей (4), а T_2 - ограниченный оператор из $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ в $H_{s+1,\alpha,q}(R^n_+)$. Правые регуляризаторы являются одновременно и левыми регуляризаторами.

Теорема 9. Пусть выполнены условия теоремы 6. Пусть $F(\mathrm{p},x,\mathrm{y}) \in H_{s,\alpha,q}(R^n_+), G(x) \in H_{s+\frac{1}{2}q}(R^{n-1})$. Тогда существует такое число $p_0 > 0$, что для всех $p \in Q_{p_0}$ существует единственное решение задачи (3). Если $F(\mathrm{p},x,\mathrm{y}) \in H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$, то существует такое число $p_0 > 0$, что для всех $p \in Q_{p_0}$ существует единственное решение задачи (4).

В четвертой главе диссертации устанавливаются коэрцитивные априорные оценки решений общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка, коэффициенты которых зависят от переменной y и от комплексного параметра p.

А именно, в R^n_+ рассматривается линейное дифференциальное уравнение вида

$$A(p,\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y)v(x,\mathrm{y}) = F(p,x,\mathrm{y}), \qquad (5)$$

где $A(\mathrm{p},\mathrm{y},D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y)v = \sum\limits_{|\tau|+j_1+qj_2+rj_3 \le 2m} a_{\tau j_1 j_2 j_3}(\mathrm{y}) p^{j_3} D_x^{\tau} D_{\alpha,\mathrm{y}}^{j_1} \partial_y^{j_2} v$.

Здесь m,k,l натуральные числа $q = \dfrac{2m}{k} > 1,\ r = \dfrac{2m}{l} > 1,\ a_{\tau j_1 j_2 j_3}(\mathrm{y})$ - некоторые ограниченные на $\bar{R}^1_+$ функции, $a_{00k0}(\mathrm{y}) \ne 0$ при всех $y \in \bar{R}^1_+$. Без ограничения общности будем считать, что $a_{00k0}(\mathrm{y}) = 1$ при всех $y \in \bar{R}^1_+$.

На границе $y = 0$ полупространства R^n_+ задаются граничные условия вида

$$B_j(p,D_x,\partial_y)v\big|_{y=0} = \sum_{|\tau|+rj_3+qj_2 \le m_j} b_{\tau j_2 j_3} p^{j_3} D_x^{\tau} \partial_y^{l} v\big|_{y=0} = G_j(p,x),\ j = 1,2,\dots,\mu. \qquad (6)$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 3. Уравнение

$$\sum_{|\tau|+j_1+qj_2+rj_3=2m} a_{\tau j_1 j_2 j_3}(\mathrm{y}) \xi^{\tau} \eta^{j_1} z^{j_2} p^{j_3} = 0. \qquad (7)$$

не имеет z – корней, лежащих на мнимой оси при всех $y \ge 0$ $(\xi,\eta) \in R^n$, $p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \dfrac{\pi}{2}, |p| > 0\}$, $|p| + |\eta| + |\xi| > 0$.

Пусть $z_1(p,\mathrm{y},\xi,\eta),\dots,z_{r_1}(p,\mathrm{y},\xi,\eta)$ $(1 \le r_1 \le k)$ - корни, лежащие в левой полуплоскости, а $z_{r_1+1}(p,\mathrm{y},\xi,\eta),\dots,z_k(p,\mathrm{y},\xi,\eta)$ лежат в правой полуплоскости.

Условие 4. Функции $z_j(\mathrm{p},\mathrm{y},\xi,\eta)$, $j = 1,2,\dots,k,$ при всех $\xi \in R^{n-1}$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями по переменным $y \in \Omega \subset \bar{R}^1_+$ и

$\eta \in R^1$. Причем, при всех $p \in Q = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| > 0\}$, $j_1 = 0, 1, 2, ..., l = 0, 1, 2, ..., \xi \in R^{n-1}$, $y \in \Omega \subset \bar{R}_+^1$, $\eta \in R^1$ справедливы оценки $\left|(\alpha(y)\partial_y)^{j_1} \partial_\eta^{j_2} z_j(y, \xi, \eta)\right| \le c_{j_1,l}(|p| + |\xi| + |\eta|)^{q-j_2}, \quad |p| + |\xi| + |\eta| > 0,$
с константами $c_{j_1,l} > 0$, не зависящими от p, y, ξ, η.

Условие 5. Число граничных условий (6) равно числу z - корней уравнения (7), лежащих в левой полуплоскости, и при всех $\xi \in R^{n-1}$, $|\xi| > 0$ многочлены $B_j^0(\xi, z) = \sum\limits_{|\tau|+qj_2+rj_3=m_j} b_{\tau j_2 j_3} p^{j_3} \xi^\tau z^{j_2}$ линейно независимы по модулю многочлена $P(\xi, z) = \prod\limits_{j_1=1}^{r_1} (z - z_{j_1}(0, \xi, 0))$.

Теорема 10. Пусть $s \ge \max\{2m, \max\limits_{1 \le j \le r_1} m_j + q\}$ - действительное число и выполнены условия $1'$, 3 - 5. Тогда для любого решения $v(x,t) \in H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ задачи (5), (6) справедлива априорная оценка

$$\left\|v, |p|\right\|_{s,\alpha,q} \le c(\left\|F, |p|\right\|_{s-2m,\alpha,q} + \left\|v, |p|\right\|_{s-1,\alpha,q} + \sum_{j=1}^{r_1} \left\|G_j, |p|\right\|_{s-m_j-\frac{1}{2}q})$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от $p, v, F, G_j, \quad j = 1, 2, ..., r_1$.

Теорема 11. Пусть $s \ge \max\{2m, \max\limits_{1 \le j \le r} m_j + q\}$, выполнены условия $1'$, 3 - 5 при $p \in Q_{p_0} = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| \ge p_0 > 0\}$. Тогда существует такое число $p_0 > 0$, что при всех $p \in Q_{p_0}$ для любого решения $v(x,t) \in H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ задачи (5), (6) справедлива априорная оценка $\left\|v, |p|\right\|_{s,\alpha,q} \le c(\left\|F, |p|\right\|_{s-2m,\alpha,q} + \sum\limits_{j=1}^{r_1} \left\|G_j, |p|\right\|_{s-m_j-\frac{1}{2}q})$
с постоянной $c > 0$, не зависящей от $p, v, F, G_j, \quad j = 1, 2, ..., r_1$.

В главе 5 построен регуляризатор и доказаны теоремы о существовании и единственности решений общей граничной задачи в полупространстве для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка, коэффициенты которого зависят от переменной y и от комплексного параметра p.

Теорема 12. Пусть $s \ge \max\{2m, \max\limits_{1 \le j \le r} m_j + q\}$ - действительное число и выполнены условия $1'$, 3 - 5. Тогда существует правый регуляризатор задачи (5), (6), то есть такой оператор $R: H_{s-2m,\alpha,q}(R_+^n) \times \prod\limits_{j=1}^{r} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1}) \to H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$, что

$\tilde{A}R(F,\bar{G}) = (F,\bar{G}) + \tilde{T}(F,\bar{G})$, где $\tilde{A}$ - оператор, порожденный задачей (5),(6), $\tilde{A}: H_{s,\alpha,q}(R_+^n) \to H_{s-2m,\alpha,q}(R_+^n) \times \prod_{j=1}^{r} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1})$, а оператор $\tilde{T}$ является ограниченным оператором из $H_{s-2m,\alpha,q}(R_+^n) \times \prod_{j=1}^{r} H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1})$ в $H_{s-2m+1,\alpha,q}(R_+^n) \times \prod_{j=1}^{r} H_{s-\frac{1}{2}q+1-m_j}(R^{n-1})$, $\bar{G} = (G_1, G_2, ...G_r)$.

Правый регуляризатор задачи является одновременно и левым регуляризатором.

Теорема 13. Пусть $s \ge \max\{2m, \max_{1\le j\le r} m_j + q\}$, выполнены условия $1'$, 3 - 5 при $p \in Q_{p_0} = \{p \in C, |\arg p| < \frac{\pi}{2}, |p| \ge p_0 > 0\}$. Пусть $F(\mathrm{p},x,\mathrm{y}) \in H_{s-2m,\alpha,q}(R_+^n)$, $G_j(\mathrm{p},x) \in H_{s-\frac{1}{2}q-m_j}(R^{n-1})$, $\mathrm{j} = 1,2,...\mathrm{r}_1$. Тогда существует такое число $p_0 > 0$, что при всех $p \in Q_{p_0}$ существует единственное решение $v(x,t) \in H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ задачи (5), (6).

В шестой главе диссертации исследуется начально – краевая задача для параболического уравнения высокого порядка с переменными коэффициентами с вырождением по пространственной переменной.

А именно, в $R_{++}^{n+1} = \{(x,t,y) : x \in R^{n-1}, 0 < t < +\infty, 0 < y < +\infty\}$ рассматривается линейное дифференциальное уравнение вида

$$A(\mathrm{y},\partial_t,D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y)v(\mathrm{t},x,y) = F(\mathrm{t},x,y), \qquad (7)$$

где $A(\mathrm{y},\partial_t,D_x,D_{\alpha,\mathrm{y}},\partial_y)v = \sum_{|\tau|+j_1+qj_2+rj_3\le 2m} a_{\tau j_1 j_2 j_3}(\mathrm{y}) D_x^{\tau} D_{\alpha,\mathrm{y}}^{j_1} \partial_y^{j_2} \partial_t^{j_3} v$.

Здесь m,k,l натуральные числа $q = \frac{2m}{k} > 1$, $r = \frac{2m}{l} > 1$, $a_{\tau j_1 j_2 j_3}(\mathrm{y})$ - некоторые ограниченные на $\bar{R}_+^1$ функции, $a_{00k0}(\mathrm{y}) \ne 0$, $a_{000l}(\mathrm{y}) \ne 0$ при всех $y \in \bar{R}_+^1$. Без ограничения общности будем считать, что $a_{00k0}(\mathrm{y}) = 1$ при всех $t \in \bar{R}_+^1$.

На границе $y = 0$ множества R_{++}^{n+1} задаются граничные условия вида

$$B_j(\partial_t,D_x,\partial_y)v\big|_{y=0} = \sum_{|\tau|+rj_3+qj_2\le m_j} b_{\tau j_2 j_3} \partial_t^{j_3} D_x^{\tau} \partial_y^{j_2} v\big|_{y=0} = G_j(\mathrm{t},x),\ j = 1,2,...,\mu. \qquad (8)$$

На границе $t = 0$ множества R_{++}^{n+1} задаются начальные условия вида

$$\partial_t^j v\big|_{t=0} = \Phi_j(\mathrm{x},\mathrm{y}),\ j = 1,2,...,l-1. \qquad (9)$$

Основой использованного в главе 6 метода служит известная схема, связывающая параболические задачи с эллиптическими задачами, содержащими комплексный параметр p. Вначале из результатов главы 5 выводится однозначная разрешимость задачи (5), (6) в пространстве аналитических функций. Отсюда, в силу изоморфизма, устанавливаемого преобразованием Лапласа, доказывается разрешимость однородной параболической задачи в изоморфном пространстве $W^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_2)$. Наконец, при выполнении условий согласования начальных и граничных условий, выводится теорема о разрешимости задачи (7) - (9) в пространствах $\hat{W}_{2,\gamma}(Y_1,Y_2)$.

Рассмотрим абстрактную функцию $u(\mathrm{t})$ со значениями в гильбертовом пространстве Y_1, такую, что $u(\mathrm{t})=0$ при $t<0$. Предположим, что существует преобразование Фурье функции $e^{-\gamma t}u(\mathrm{t})$ ($\gamma \ge 0$), принадлежащее гильбертову пространству $Y_0 \supset Y_1$. Будем говорить, что функция $V(p)$ принадлежит пространству $W^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0),\ a\ge 0,\ \gamma \ge 0$ если конечна норма $\|u\|_{W^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)} = \{\int\limits_{R^1} \|e^{-\gamma t}u(\mathrm{t})\|^2_{Y_1}\,dy + \int\limits_{R^1} |\gamma + i\tau|^{2a}\,\|F_{y\to\tau}[e^{-\gamma t}u(\mathrm{t})]\|^2_{Y_0}\,d\tau\}^{\frac{1}{2}}$.

Обозначим через $E^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)$ множество функций $V(p)$, где p - комплексное число, для которого $\operatorname{Re} p > \gamma$, таких что функции $V(p)$ принимают значения в гильбертовом пространстве $Y_1 \subset Y_0$, являются аналитическими функциями в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \gamma$ и для них конечна норма $\|u\|_{E^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)} = \sup\limits_{\rho>\gamma}\{\int\limits_{\operatorname{Re} p=\rho} (\|V(p)\|^2_{Y_1} + |p|^{2a}\|V(p)\|^2_{Y_0})dp\}^{\frac{1}{2}}$.

Преобразование Лапласа устанавливает взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие между пространствами $W^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)$ и $E^a_{2,\gamma}(Y_1,Y_0)$.

Пусть начальные условия (9) однородны, то есть

$$\partial_t^j\, v\big|_{t=0} = 0,\ j = 1,2,...,l-1, \tag{10}$$

Теорема 14. Пусть $s \ge \max\{2m, \max\limits_{1\le j\le r_1} m_j + \frac{1}{2}\max\{q,\mathrm{r}\}$, s - кратно $2m$. Пусть выполнены условия $1'$, 3 – 5. Тогда существует такое число $\gamma_0 > 0$, что при всех $\gamma > \gamma_0$ и любых $F(t,x,y) \in H^{s-2m}_{r,\gamma,\alpha.q}(R^{n+1}_{++}) \equiv W_{2,\gamma}^{\frac{s-2m}{r}}(\mathrm{H}_{s-2m,\alpha,q}(\mathrm{R}^n_+), L_2(\mathrm{R}^n_+))$ и $\mathrm{G}_j(x,y) \in H^{\sigma_j}_{r,\gamma}(R^n_+) \equiv W_{2,\gamma}^{\frac{s-2m}{r}}(\mathrm{H}_{\sigma_j}(\mathrm{R}^{n-1}), L_2(\mathrm{R}^{n-1}),\ \sigma_j = s - m_j - \frac{1}{2}q,\ j = 1,2,...,r_1$

задача (7), (8), (10) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $H^s_{r,\gamma,\alpha.q}$, причем справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{H^s_{r,\gamma,\alpha,q}} \le C(\|F\|_{H^{s-2m}_{r,\gamma,\alpha,q}} + \sum_{j=1}^{r_1} \langle\langle G_j \rangle\rangle_{H^{\sigma_j}_{r,\gamma,}}) \ .$$

Рассмотрим теперь задачу (7) - (9). Введем наряду с пространствами $W_{2,\gamma}^{a}(Y_1,Y_0)$ пространства $\hat{W}_{2,\gamma}^{a}(Y_1,Y_0)$ абстрактных функций $t\to u(t), \mathrm{t}\in \mathrm{R}_{+}^{1}$ со значениями в $Y_1\subset Y_0$ с конечной нормой $\|u\|_{\hat{W}_{2,\gamma}^{a}(Y_1,Y_0)}=\{\int\limits_{R_{+}^{1}}\|e^{-\gamma t}u(\mathrm{t})\|_{Y_1}^{2}\,dy+\sum\limits_{j=0}^{a}\int\limits_{R_{+}^{1}}\|\partial_t^j(e^{-\gamma t}u(\mathrm{t})]\|_{Y_0}^{2}\,dt\}^{\frac{1}{2}}$.

Здесь $a\ge 0$ - целое число.

В дальнейшем используются пространства $\hat{H}_{r,\gamma,\alpha.q}^{s}(R_{++}^{n+1})\equiv \hat{W}_{2,\gamma}^{\frac{s}{r}}(\mathrm{H}_{s,\alpha,q}(\mathrm{R}_{+}^{n}),L_2(\mathrm{R}_{+}^{n}))$, $\hat{H}_{r,\gamma}^{\beta}(R_{+}^{n})\equiv \hat{W}_{2,\gamma}^{\frac{\beta}{r}}(\mathrm{H}_{\sigma_j}(\mathrm{R}^{n-1}),L_2(\mathrm{R}^{n-1}))$.

Задача (7) - (9) сводится к задаче (7), (8), (10), если выполнено следующее условие согласования.

Условие 6. Для набора функций $F(t,x,y)\in \hat{H}_{r,\gamma,\alpha.q}^{s-2m}(R_{++}^{n+1})$, $G_j(x,y)\in \hat{H}_{r,\gamma}^{\sigma_j}(R_{+}^{n}),\ \sigma_j=s-m_j-\dfrac{1}{2}q,\ j=1,2,...,r_1;\ \Phi_\mu(x,t)\in \hat{H}_{\alpha,q}^{\beta_\mu}(R_{+}^{n})$ $\beta_\mu=s-\mu r-\dfrac{1}{2}r,\ \mu=1,2,...,l-1$ существует такая функция $v_0(y,x,t)\in \hat{H}_{r,\gamma,\alpha,q}^{s}(R_{++}^{n+1})$, что: 1) выполняется условие $\partial_t^{\mu}v\big|_{t=0}=\Phi_\mu(\mathrm{x},\mathrm{y}),\ \mu=1,2,...,l-1;$ 2) после продолжения функций $F-Av_0,\ G_j-B_jv_0\,|_{y=0},\ j=1,2,...,r_1$ нулем при $y<0$ справедливы включения $F-Av_0\in \hat{\mathrm{H}}_{r,\gamma,\alpha,q}^{s-2m},\ G_j-B_jv_0\,|_{y=0}\in \hat{\mathrm{H}}_{r,\gamma}^{\sigma_j},\ j=1,2,...,r_1;$ 3)существует постоянная $c>0$, что справедлива оценка $\|v_0\|_{\hat{H}_{r,\gamma,\alpha,\mathrm{q}}^{s}}\le c\sum\limits_{\mu=0}^{l-1}\|\Phi_\mu\|_{\hat{H}_{r,\gamma}^{\beta_\mu}}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 15. Пусть выполнено условие 6 и условия теоремы 14. Тогда существует такое $\gamma_0>0$, что при всех $\gamma>\gamma_0$ и любых $F(t,x,y)\in \hat{H}_{r,\gamma,\alpha.q}^{s-2m}(R_{++}^{n+1})$,

$\mathrm{G}_j(x,y)\in \hat{H}_{r,\gamma}^{\sigma_j}(R_{+}^{n}),\ \sigma_j=s-m_j-\dfrac{1}{2}q,\ j=1,2,...,r_1,$

$\Phi_\mu(x,t)\in \hat{H}_{\alpha,q}^{\beta_\mu}(R_{+}^{n}),\ \beta_\mu=s-\mu r-\dfrac{1}{2}r,\ \mu=0,1,...,l-1$

задача (7) - (9) имеет единственное решение, принадлежащее пространству $\hat{H}_{r,\gamma,\alpha.q}^{s}(R_{++}^{n+1})$, причем справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{\hat{H}_{r,\gamma,\alpha,q}^{s}}\le C(\|F\|_{\hat{H}_{r,\gamma,\alpha,q}^{s-2m}}+\sum_{j=1}^{r_1}\langle\langle G_j\rangle\rangle_{\hat{H}_{r,\gamma}^{\sigma_j}}+\sum_{\mu=0}^{l-1}\|\Phi_\mu\|_{\hat{H}_{\alpha.q}^{\beta_\mu}})\ .$$

Список основных публикаций по теме диссертации

1. Ковалевский Р.А. Об одном классе псевдодифференциальных операторов с вырождением /А.Д. Баев,Р.А. Ковалевский// Доклады академии наук. -2014. - Т. 454 . - № 1. С. 7-10.
2. Ковалевский Р.А. Теоремы об ограниченности и композиции для одного класса весовых псевдодифференциальных операторов /А.Д. Баев, Р.А. Ковалевский// Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. - 2014. - № 1. - С. 39 – 49.
3. Ковалевский Р.А. Краевые задачи для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений /А.Д. Баев А.Д., Р.А. Ковалевский // Доклады Академии наук. – 2015. - Т. 461. - №1. - С. 7 - 9.
4. Ковалевский Р.А. Теоремы о «следах» для одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением /А.Д. Баев, Р.А. Ковалевский, М.Б. Давыдова// Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. - 2015.- № 2. - С. 63– 75.
5. Ковалевский Р.А. О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением /А.Д. Баев А.Д., Р.А. Ковалевский, П.А. Кобылинский //Доклады академии наук. - 2016.-Т. 471. № 4.- С. 387–390.
6. Kovalevskii R.A. A Class of Pseudodifferential Operators with Degeneracy/A.D. Baev, R.A. Kovalevskii //DokladyMathematics. - 2014. -T. 89. - №1. -pp. 7-10.
7. Kovalevskii R.A. Boundary ValueProblems for a Class of Degenerate Pseudodifferetial Equations. Doklady Mathematics. / A.D. Baev, R.A. Kovalevskii// – 2015. -Vol. 91. -No. 2. -pp. 131 – 133.
8. Kovalevskii R.A. On Degenerane Elliptic Equations of High Order and Pseudodifferetial Operators /A.D. Baev, R.A. Kovalevskii P.A. Kobilinskii //Doklady Mathematics. – 2016. - Vol. 94. - No. 3.- pp. 659–662.
9. Ковалевский Р. А. О поведении на бесконечности весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим от комплексного параметра /Р.А. Ковалевский// Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения XXVIII»». – Воронеж. - 2017. - С. 95 – 97.
10. Ковалевский Р. А. О свойствах «следов» одного класса весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящем от комплексного параметра /Р.А. Ковалевский// Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения XXVIII»». – Воронеж. - 2017. - С. 97 – 99.
11. Ковалевский Р. А. О связи одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов и одного класса вырождающихся

интегральных операторов /Р.А. Ковалевский// Современные методы теории краевых задач. Материалы международной конференции «Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения XXVIII»». – Воронеж. - 2017. - С. 99 – 102.

12. Ковалевский Р. А. О свойствах оператора, сопряженного к одному классу весовых псевдодифференциальных операторов /Р.А. Ковалевский// Материалы международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения С.Г. Крейна. – Воронеж. - 2017. - С. 117 – 119.
13. Ковалевский Р. А. Априорные оценки решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка /Р.А. Ковалевский// Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2018». – Воронеж. – 2018. - С. 241 – 245.
14. Ковалевский Р. А. О разрешимости начально – краевой задачи для вырождающегося параболического уравнения высокого порядка /Р.А. Ковалевский// Материалы международной конференции «Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна – 2018». – Воронеж. – 2018. - С. 245 – 250.

Работы [1 – 5] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.