На правах рукописи

КУПЦОВА ЕКАТЕРИНА ВАЛЕРИЕВНА

МНОГОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ГЕНЕРАТОРЕ НА ДВУХ СВЯЗАННЫХ КОНТУРАХ

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж - 2018

Работа выполнена в Воронежском государственном университете

Научный руководитель:
Задорожний Владимир Григорьевич.
доктор физико–математических наук, профессор

Официальные оппоненты:
Соболев Владимир Андреевич
доктор физико–математических наук, профессор
Самарский национальный исследовательский университет им. С.П. Королева, кафедра дифференциальных уравнений и управления, заведующий

Корнев Сергей Викторович
Доктор физико–математических наук, доцент
Воронежский государственный педагогический университет, кафедра высшей математики, профессор

Ведущая организация:
Национальный исследовательский университет МЭИ, Москва

Защита диссертации состоится «19» июня 2018 года в 15 часов 10 минут на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394018 г. Воронеж, Университетская пл. 1, ауд. 335.
С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте
https://www.science.vsu.ru/dissertations/5065/Диссертация_Купцова_Е.В..pdf

Автореферат разослан «   » апреля 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гликлих Юрий Евгеньевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. С развитием радиотехники в 20 веке исследования нелинейных колебательных систем стало занимать больше места в физике и технике. Изучение таких систем решало большое количество проблем по устойчивости и частоте колебаний. Появились методы анализа нелинейных систем дифференциальных уравнений с малым параметром при нелинейной части. Изучая колебания напряжения в одноконтурном электрическом автогенераторе, Ван-дер-Поль[1] разработал метод приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Многие задачи удается решить, вводя в уравнение малый параметр и находя приближенное решение в виде степенного ряда по степеням малого параметра. Этому методу и его обобщениям посвящено огромное количество научных исследований, укажем, например, авторов Андронов А. А., Арнольд В. И., Бернштейн И. Л., Боголюбов Н. Н., Васильева А. Б., Волосов В. М., Гребенников Е. А., Колмогоров А. Н., Коломиец В. Г., Крылов Н. М., Ланда П. С., Ломов С. А., Малкин И. Г., Мандельштам Л. И., Митропольский Ю. А., Мозер Д., Пуанкаре А., Стокер Смейл, Хейл Дж., и др.

Многочисленные математические модели механических и электрических устройств рассмотрены, например, в работах: Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний - М.: Физматгиз, 1959 , Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в методы в теории нелинейных колебаний - М.: Наука, 1974, Гребенников Е. А., Рябов Ю. А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем - М.: Наука, 1979, Ланда П. С. Автоколебательные системы с конечным числом степеней свободы – М.: Наука, 1980, Малкин И. Г. Некоторые

---

[1] 1 Ван-дер-Поль Б. Нелинейная теория электрических колебаний/Связьиздат. М.: 1935.
2 Ван-дер-Поль (Van der Pol B.) On relaxation oscillations/Philos. Mag. (7) 2, №11 (1926) , 978-992.

задачи теории нелинейных колебаний –М.: Гостехиздат, 1956, Найфэ А. Методы возмущений - М.: Мир, 1976 и др.

В данной работе рассматриваются автоколебания в автогенераторе на двух связанных контурах. Физическая задача предложена Непринцевым В. И., который изучал электрические автогенераторы на связанных контурах. Математическая модель автогенератора на двух связанных контурах представляет собой систему двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Непринцев В. пытался подобрать физические элементы электрических схем, при которых в автогенераторе могут быть устойчивые двухчастотные колебания (с несоизмеримыми частотами). В физических моделях колебания можно проследить с помощью осциллографа. Оказалось, что обычно в автогенераторе устанавливаются одночастотные колебания. Возникла гипотеза, что колебания в автогенераторе синхронизируются. Поскольку параметры автогенератора принимают континуум значений, то численным перебором вариантов исследовать задачу невозможно. Хейл Дж. в работе Integral Manifolds of perturbed differential systems. Ann. Math. 73, 1961, p. 496-531 рассматривал систему двух уравнений Ван- дер - Поля с малым параметром и ставил задачу выяснения всех возможных типов автоколебаний, но, на наш взгляд, в общем виде задача является слишком сложной. Поэтому актуальной задачей является аналитическое исследование автогенератора на двух связанных контурах.

Целью диссертационной работы является исследование видов возможных ограниченных автоколебаний (одночастотных, двухчастотных или многочастотных) в автогенераторе на двух связанных контурах Ван-дер-Поля, вопросы устойчивости колебаний, приближенное нахождение колебаний. Нахождение условий на параметры системы, обеспечивающих существование таких колебаний.

Методика исследований. В работе систематически используется метод усреднения Крылова – Боголюбова, который позволяет ответить на вопросы существования ограниченных решений и условиях их устойчивости без нахождения этих ограниченных решений, а также позволяет найти приближенные решения в аналитическом виде. Сначала получается математическая модель автогенератора в виде системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и приводится к безразмерной форме. Малый параметр вводится в виде малого возмущения характеристики нелинейного элемента. Оказалось, что нужно рассматривать два варианта задачи. Первый вариант при малых частотах колебаний в автогенераторе и более громоздкий вариант, когда в автогенераторе высокие частоты колебаний. Далее система сводится к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка – это облегчает переход к полярной системе координат и приведение уравнения к стандартному виду. Находится усредненная система. Оказалось, что удается найти все стационарные точки усредненной системы и провести исследование колебаний на устойчивость.

Научная новизна. Результаты, полученные в диссертации, являются новыми, четко сформулированы и приведены строгие доказательства методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Наиболее существенные научные результаты:

1. Разработана математическая модель автогенератора на двух связанных контурах Ван-дер-Поля в безразмерной форме.
2. Вычислены усредненные системы для колебаний, одна с малым сопротивлением в первом контуре, другая без предположения малости этого сопротивления.
3. Найдены стационарные точки усредненных уравнений.
4. Определен вид ограниченных автоколебаний – одночастотные либо двухчастотные.
5. Получены соотношения для коэффициентов системы, при которых ограниченные автоколебания являются асимптотически устойчивыми.
6. Найдены приближенные представления ограниченных автоколебаний.
7. Представлены графики одночастотных и двухчастотных колебаний в автогенераторе.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер, но решается реальная физическая проблема о виде ограниченных автоколебаний в электрическом автогенераторе. Результаты могут быть использованы для расчетов параметров электрических схем с заранее заданными частотами автоколебаний.

Апробация работы. Результаты докладывались: На Воронежской весенней математической школе, Понтрягинские чтения - XXV «Условия асимптотической устойчивости двухчастотных колебаний в двухконтурном автогенераторе» (Воронеж, 2014); на международной молодежной научной школе «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы» «О задаче Коши для линейной системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка» (Воронеж, 2017); на Международной конференции посвященной 100-летию со дня рождения Селима Григорьевича Крейна «О моментных функциях решения стохастической линейной системы дифференциальных уравнений» (Воронеж, 2017); на международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» «Приведение уравнений электрического автогенератора к стандартному виду метода усреднения» (Воронеж, 2014); на Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа: Понтрягинские чтения - XXVI «Усредненная система для математической модели электрического автогенератора» (Воронеж, 2015). Выступала с докладами на семинаре В. Г. Задорожнего, на кафедре радиофизики ВГУ, на научных сессиях ВГУ.

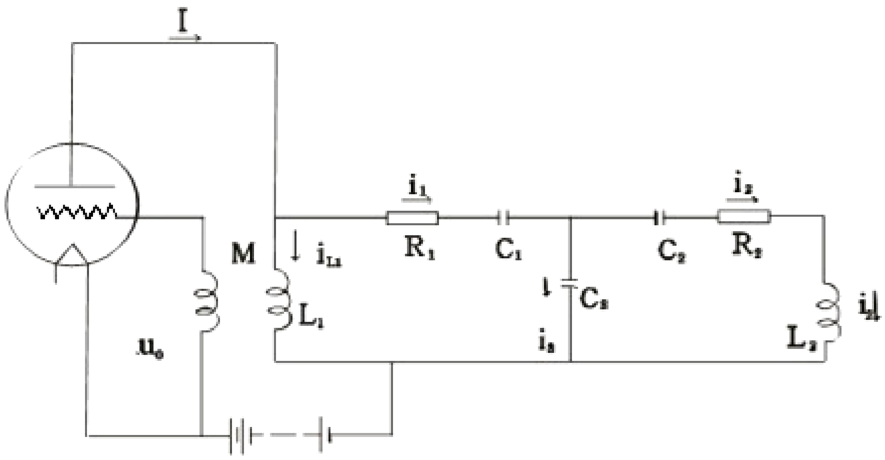
Публикации по теме диссертации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1 – 9]. Работы [1] и [5] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ. Из совместных работ [1 – 4] в диссертацию вошли результаты, полученные лично диссертанткой.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из содержания, введения, трех глав и заключения. Объем диссертации 96 страниц.

Краткое содержание диссертации

В первой главе строится математическая модель электрического автогенератора на двух связанных контурах Ван-дер-Поля



Здесь I - сила тока; $\boldsymbol{u_0}$ – напряжение; R_1, R_2 - сопротивления; C_1, C_2 , C_3 – емкости; L_1, L_2 – индуктивности. Схема предложена доц. Непринцевым В. И.

В этой схеме, без ограничения общности, вместо электронной лампы может стоять транзистор.

Используя физические законы Кирхгофа, получается математическая модель, описывающая динамику изменения напряжений в контурах. В безразмерной форме система уравнений имеет вид

$$\boldsymbol{u''_1 + R_1 u'_1 \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}} + (1 + \mathbf{k}_3)\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{\gamma \frac{k_3}{k_2} u_2 = R_1 I'' + \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1 + k_3) I'},$$

$$\boldsymbol{u_2'' + R_2 \sqrt{\frac{\gamma C_2}{L_2}} u_2' + \gamma \left(1 + \frac{k_3}{k_2}\right) u_2 + k_3 u_1 = \sqrt{\frac{L_1 k_3}{C_3}}\, I'}.$$

Здесь $\boldsymbol{u_1}$ - напряжение на индуктивности $\boldsymbol{L_1}$, а $\boldsymbol{u_2}$ – напряжение на индуктивности $\boldsymbol{L_2}$, штрихами обозначаются производные по безразмерному времени.

Считаем, что сила тока $\boldsymbol{I}$ связана с напряжением $\boldsymbol{u_1}$ соотношением (аппроксимация многочленом третьего порядка)

$$\boldsymbol{I = (s_0 + \varepsilon) u_1 + \varepsilon s_1 u_1^2 - \varepsilon s_2 u_1^3},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ - малый положительный параметр.

При этом система уравнений записывается в виде системы нелинейных уравнений

$$\boldsymbol{\left(1 - R_1 s_0 - \varepsilon R_1 \left(1 + 2 s_1 u_1 - 3 s_2 u_1^2\right)\right) u_1'' +}$$

$$+\left(R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}-\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}\ (1+k_3)s_0\right)u_1'+(1+k_3)u_1+\frac{\gamma k_3}{k_2}u_2=$$

$$=R_1\varepsilon(2s_1-6s_2u_1)u_1'^2+\sqrt{\frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{C}_1}}(1+\mathrm{k}_3)\left(\varepsilon+2\mathrm{s}_1\varepsilon\mathrm{u}_1-3\mathrm{s}_2\varepsilon\mathrm{u}_1^2\right)\mathrm{u}'_1,$$

$$u_2''+R_2\sqrt{\frac{\gamma C_2}{L_2}}u_2'-\sqrt{\frac{L_1k_3}{C_3}}s_0u_1'+\gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)u_2+k_3u_1=$$

$$=\varepsilon\sqrt{\frac{L_1k_3}{C_3}}\ (1+2\mathrm{s}_1\mathrm{u}_1-3\mathrm{s}_2\mathrm{u}_1^2)u_1'.$$

Здесь в первом уравнении при второй производной стоит коэффициент, который играет важную роль. Рассматривается два случая.

1. Коэффициентом $\varepsilon R_1\left(1+2s_1u_1-3s_2u_1^2\right)u_1''$ можно пренебречь по сравнению с остальными. Это будет в случае малости R_1.
2. Данным коэффициентом не пренебрегаем.

В соответствии с этим приходится рассматривать эти случаи отдельно.

Вторая глава посвящена построению усредненной системы уравнений. Согласно методу усреднения систему сначала нужно привести к стандартному виду. Оказывается, что вычисления значительно сокращаются, если систему свести к одному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$u_1^{(4)}-u_1^{(3)}\left[S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}+R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}+S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0S_4^{-1}\right]+$$

$$+u_1''\left[S_3(1+K_3)+R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)-R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0\right]+$$

$$+u_1'\left[R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3(1+K_3)+S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)+\sqrt{\frac{L_1}{C_3}}K_3S_0S_4^{-1}-\right.$$

$$\left.-\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0\right]+$$

$$+u_1\left[-K_3S_4^{-1}+S_3(1+K_3)\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)\right]=-S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}K_3\left(2S_1u_1-3S_2u_1^2\right)\varepsilon u_1'+$$

(1)

$$+\left[-18S_2S_3R_1\varepsilon u_1'^2u_1''+2S_3R_1\varepsilon\left\{(2S_1-6S_2u_1)\left(u_1''^2+u_1'u_1^{(3)}\right)-6S_2u_1'^2u_1''\right\}+\right.$$

$$-S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_4^{-1}\varepsilon\left\{-6S_2u_1'^3+3(2S_1-6S_2u_1)u_1'u_1''+\left(1+2S_1u_1-3S_2u_1^2\right)u_1^{(3)}\right\}\Bigg]+$$

$$+R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}\varepsilon\left[-6S_2S_3R_1u_1'^3+2S_3R_1(2S_1-6S_2u_1)u_1'u_1''+S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\times\right.$$

$$\left.\times\left\{(2S_1-6S_2u_1)u_1'^2+\left(1+2S_1u_1-3S_2u_1^2\right)u_1''\right\}\right]+$$

$$+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)\varepsilon\left[S_3R_1(2S_1-6S_2u_1)u_1'^2+S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(1+2S_1u_1-3S_2u_1^2\right)u_1'\right].$$

Уравнение (1) имеет вид

$$u_1^{(4)}+a_1u_1^{(3)}+a_2u_1''+a_3u_1'+a_4u_1=\varepsilon f, \tag{2}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 - заданные числа, ε - малый положительный параметр, $f = f(\tau, u_1, u_1', u_1'', u_1^{(3)})$ – известная функция.

Выпишем характеристический многочлен уравнения (2)

$$L(p)=p^4+a_1p^3+a_2p^2+a_3p+a_4.$$

Лемма. Многочлен $L(p)$ с вещественными коэффициентами имеет корни $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ если и только если

$$a_1=a_3=0, a_2=\omega_1^2+\omega_2^2, a_4=\omega_1^2\omega_2^2. \tag{3}$$

Теорема 1. При выполнении условий (3) замена переменных

$$u_1=\rho_1\cos(\omega_1\tau-\varphi_1)+\rho_2\cos(\omega_2\tau-\varphi_2),$$

$$\tilde{u}_2=-\rho_1\omega_1\sin(\omega_1\tau-\varphi_1)-\rho_2\omega_2\sin(\omega_2\tau-\varphi_2),$$

(4)

$$u_3=-\rho_1\omega_1^2\cos(\omega_1\tau-\varphi_1)-\rho_2\omega_2^2\cos(\omega_2\tau-\varphi_2),$$

$$u_4=\rho_1\omega_1^3\sin(\omega_1\tau-\varphi_1)+\rho_2\omega_2^3\sin(\omega_2\tau-\varphi_2),$$

где $\rho_1(\tau)$, $\rho_2(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ - новые неизвестные функции приводит уравнение (2) к стандартному виду метода усреднения

$$\rho_1'=\frac{-\varepsilon f\sin(\omega_1\tau-\varphi_1)}{\omega_1(\omega_1^2-\omega_2^2)},\ \rho_2'=\frac{\varepsilon f\sin(\omega_2t-\varphi_2)}{\omega_2(\omega_2^2-\omega_1^2)},\ \varphi_1'=\frac{\varepsilon f\cos(\omega_1t-\varphi_1)}{\rho_1\omega_1(\omega_1^2-\omega_2^2)},\ \varphi_2'=\frac{-\varepsilon f\cos(\omega_2t-\varphi_2)}{\rho_2\omega_2(\omega_2^2-\omega_1^2)}.$$

Для исследования системы методом усреднения нужно вычислить усредненную систему уравнений. Это наиболее громоздкая и трудоемкая работа.

Теорема 2. Усредненная система уравнений для амплитуд колебаний имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\rho_1} = \dfrac{-\varepsilon\rho_1}{\omega_2^2-\omega_1^2}\Bigg\{-\dfrac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}K_3}\left(\dfrac{1}{2}{\rho_1}^2+{\rho_2}^2\right)+S_3S_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\times \\ \times\left(\dfrac{3}{8}S_2\rho_1^2\omega_1^2-\dfrac{1}{2}\omega_1^2+\dfrac{3}{4}S_2\rho_2^2\omega_1^2\right)+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\dfrac{C_2}{L_2}}S_2\times \\ \times\left(\dfrac{3}{4}\rho_1^2\omega_1^2+\dfrac{3}{2}\rho_2^2\omega_2^2\right)+\gamma\left(1+\dfrac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}S_2\left(\dfrac{1}{2}{\rho_1}^2+{\rho_2}^2\right)\right)\Bigg\}, \\ \dot{\rho_2} = \dfrac{\varepsilon\rho_2}{\omega_2^2-\omega_1^2}\Bigg\{-\dfrac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}K_3}\left(\dfrac{1}{2}{\rho_2}^2+{\rho_1}^2\right)+S_3S_4^{-1}\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\times \\ \times\left(\dfrac{3}{8}S_2\rho_2^2\omega_2^2-\dfrac{1}{2}\omega_2^2+\dfrac{3}{4}S_2\rho_1^2\omega_2^2\right)+S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\dfrac{C_2}{L_2}}S_2\times \\ \times\left(\dfrac{3}{4}\rho_2^2\omega_2^2+\dfrac{3}{2}\rho_1^2\omega_1^2\right)+\gamma\left(1+\dfrac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\dfrac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}S_2\left(\dfrac{1}{2}{\rho_2}^2+{\rho_1}^2\right)\right)\Bigg\}. \end{cases}$$

Введем обозначения

$$R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}=A;\ (1+k_3)=B;\ \frac{\gamma k_3}{k_2}=D;\ \sqrt{\frac{\mathrm{L}_1}{\mathrm{C}_1}}(1+\mathrm{k}_3)=\mathrm{E};$$

$$R_2\sqrt{\frac{\gamma C_2}{L_2}}=\mathrm{F};\ \gamma\left(1+\frac{k_3}{k_2}\right)=\mathrm{G};\ \sqrt{\frac{L_1k_3}{C_3}}=\mathrm{H}.$$

Теорема 3. Вторая усредненная система уравнений для амплитуд колебаний имеет вид

$$\dot{\rho_1}=\frac{\varepsilon\rho_1}{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}\left[[S_3(HD+GE)(1-S_3R_1S_0)+S_3R_1(FB+GA)]\left(-\frac{\omega_1}{2}\right)+\right.$$
$$+\left[-3S_3S_2(HD-G)+S_3^2S_2R_2(3-2B)-3GS_3^2S_2R_2(S_0E-G)\right]\times$$
$$\times\left(-\frac{\rho_1^2\omega_1^2}{4}-\frac{\rho_2^2\omega_2^2}{4}\right)+S_3\big[E(1-S_3R_1S_0)+R_1[F(1+S_3)+S_3(A-R_1FS_0)]\big]$$
$$\times\left(\frac{\omega_1^3}{2}\right)-6S_3S_2(E+FR_1)\ \ \frac{1}{4}\left(\rho_1^2\omega_1^3+\rho_2^2\omega_2^2\omega_1\right)+$$

$$+\left[\left[S_3S_2\left(-3(E+FR_1)+S_3\big(3S_0R_1(E+FR_1)+R_2(3A+2F)\big)\right)\right]\frac{1}{4}\left(\rho_1^2\omega_1^3+\rho_2^2\omega_1^2\right)\right].$$

$$\dot{\rho_2}=\frac{\varepsilon\rho_2}{\omega_2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\Big[[S_3(HD+GE)(1-S_3R_1S_0)+S_3R_1(FB+GA)]\left(-\frac{\omega_2}{2}\right)+$$

$$+\left[-3S_3S_2(HD-G)+S_3^2S_2R_2(3-2B)-3GS_3^2S_2R_2(S_0E-G)\right]\times$$

$$\times\left(-\frac{\rho_2^2\omega_2^2}{4}-\frac{\rho_1^2\omega_1^2}{4}\right)+S_3\big[E(1-S_3R_1S_0)+R_1[F(1+S_3)+S_3(A-R_1FS_0)]\big]$$

$$\times\left(\frac{\omega_2^3}{2}\right)-6S_3S_2(E+FR_1)\quad\frac{1}{4}\left(\rho_2^2\omega_2^3+\rho_1^2\omega_1^2\omega_2\right)+$$

$$+\left[\left[S_3S_2\left(-3(E+FR_1)+S_3\big(3S_0R_1(E+FR_1)+R_2(3A+2F)\big)\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{4}\left(\rho_2^2\omega_2^3+\rho_1^2\omega_2^2\right)\right],$$

Третья глава посвящена нахождению приближенных ограниченных колебаний в автогенераторе и исследованию их на устойчивость.

Усредненные системы уравнений являются автономными системами уравнений в нормальной форме. Точки, в которых правые части уравнений обращаются в нуль, называются особыми точками системы.

Теорема 4. Если выполняются условия

$$S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}+R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}+S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0S_4^{-1}=0,$$

(5)

$$R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3(1+K_3)+S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)+\sqrt{\frac{L_1}{C_3}K_3S_0S_4^{-1}}-$$

$$-\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0=0, \qquad (6)$$

$$S_3(1+K_3)+R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3R_1\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)-R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)S_0=\omega_1^2+\omega_2^2, \quad (7)$$

$$-K_3S_4^{-1}+S_3(1+K_3)\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)=\omega_1^2\omega_2^2\,, \qquad (8)$$

то первая усредненная система имеет четыре особые точки

$$M_0(0,0),\quad M_1(0,\rho_2),\qquad M_2(\rho_1,0),\quad M_3(\rho_{11},\rho_{22}),$$

где

$$\rho_1^2=S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\omega_1^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)/$$

$$/\frac{3}{4}S_2\left(S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}+2\omega_1^2S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)+\omega_1^2S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}+\right.$$

$$\left.+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\right),$$

$$\rho_2^2=S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\omega_2^2+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)/$$

$$/\frac{3}{4}S_2\left(S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}+2\omega_2^2S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)+\omega_2^2S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}+\right. \qquad (9)$$

$$\left.+\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)\right).$$

$$\rho_{11}^2=\frac{c_1m_2-c_2n_1}{m_1m_2-n_1n_2},\ \rho_{22}^2=\frac{c_2m_1-c_1n_2}{m_1m_2-n_1n_2},$$

где

$a=-\frac{3}{4}S_2S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}K_3}$, $b=S_3S_4^{-1}\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)$, $c=S_3R_1R_2\sqrt{\gamma\frac{C_2}{L_2}}S_2$,

$d=\gamma\left(1+\frac{K_3}{K_2}\right)S_3\sqrt{\frac{L_1}{C_1}}(1+K_3)$, $m_1=\frac{a}{2}+\frac{3d}{8}S_2+\frac{3}{4}\omega_1^2\left(\frac{b}{2}S_2+c\right)$, $c_1=\frac{b\omega_1^2+d}{2}$,

$n_1=a+\frac{3b}{4}S_2\omega_1^2+\frac{3c}{2}\omega_2^2+\frac{3d}{4}S_2$, $m_2=a+\frac{3b}{4}S_2\omega_2^2+\frac{3c}{2}\omega_1^2+\frac{3d}{4}S_2$,

$n_2=\frac{a}{2}+\frac{3d}{8}S_2+\frac{3}{4}\omega_2^2\left(\frac{b}{2}S_2+c\right)$, $c_2=\frac{b\omega_2^2+d}{2}$.

Аналогично находятся четыре особые точки второй усредненной системы.

Далее проводится исследование на устойчивость ограниченных колебаний.

Оказывается, нулевая точка неустойчива. Для других точек находятся условия устойчивости.

Пусть

$$\rho_2^*=\left(\frac{2(A_1\omega_1-C_1\omega_1^3)}{-B_1\omega_2^2+D_1\omega_2^4\omega_1^2+F_1\omega_1^3}\right)^{0,5}.$$

Теорема 5. Если выполняются условия (5)-(8) ,

$$\left[-\frac{A_1\omega_1}{2}-B_1\frac{\rho_2^{*2}\omega_2^2}{4}+C_1\frac{\omega_1^3}{2}+D_1\rho_2^{*2}\omega_2^2\omega_1+\frac{F_1}{4}\rho_2^{*2}\omega_1^2\right]\times$$
$$\times\left[\frac{A_1}{2}+\frac{3B_1\rho_2^{*2}\omega_2}{4}-\frac{C_1\omega_2^2}{2}-3\left(D_1+\frac{F_1}{4}\right)\rho_2^{*2}\omega_2^2\right]>0,$$
$$\frac{1}{(\omega_2^2-\omega_1^2)}\left(-A_1+B_1\frac{\rho_2^{*2}\omega_2}{4}\left(1-\frac{1}{\omega_1}\right)+\frac{C_1}{2}(\omega_1^2+\omega_2^2)+F_1\frac{\rho_2^{*2}}{4}(\omega_1-\omega_2^2)\right)<0,$$
то при достаточно малых $\varepsilon>0$ автогенератор имеет асимптотически устойчивые колебания напряжения, близкие к одночастотным колебаниям

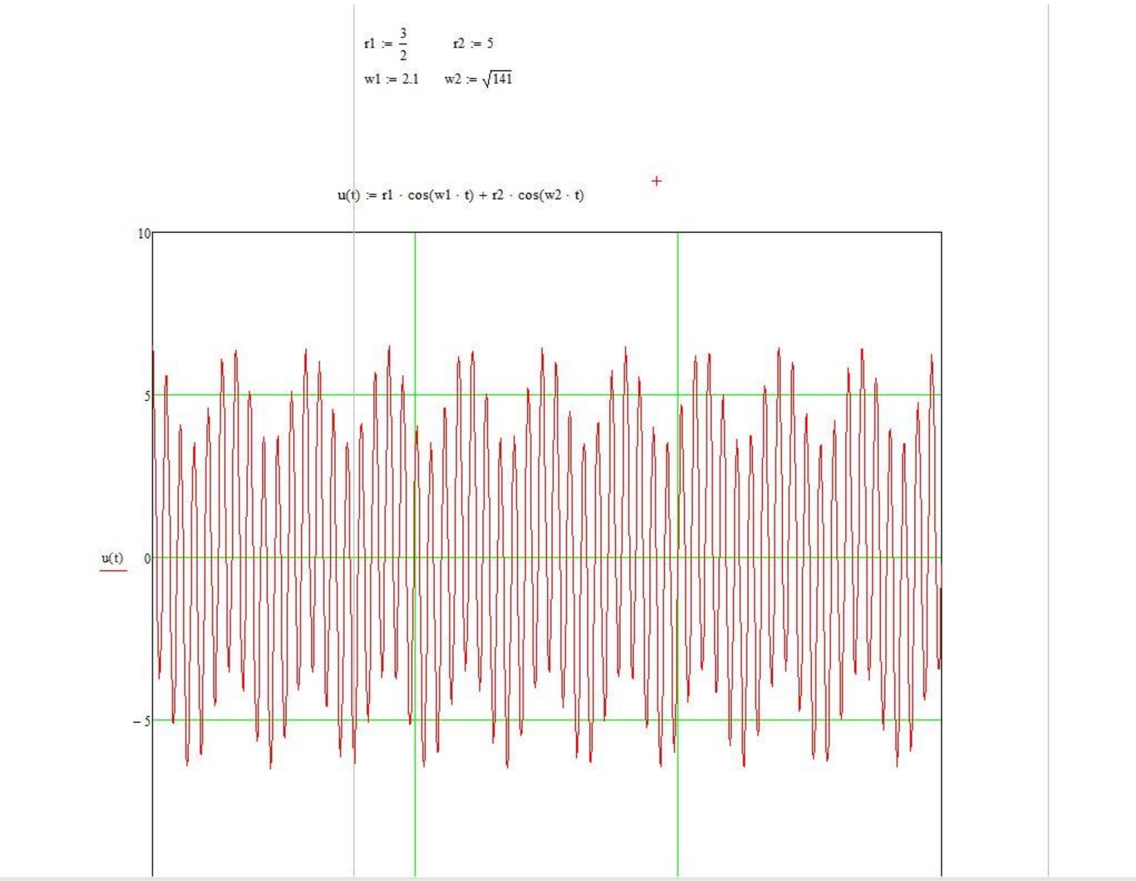
$$\boldsymbol{u_1}=\ (\frac{2(\mathbf{A_1\omega_1-C_1\omega_1^3})}{\mathbf{-B_1\omega_2^2+D_1\omega_2^4\omega_1^2+F_1\omega_1^3}})^{\mathbf{0{,}5}}\,\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\omega_2}\mathbf{t}}{\sqrt{\mathbf{L_1}\boldsymbol{C_1}}}-\boldsymbol{\varphi_2}\right).$$

Теорема 6. Если выполняются условия (5)-(8) ,

$$\left[\frac{\mathbf{1}}{(\boldsymbol{\omega_2^2-\omega_1^2})}\left[-\frac{\boldsymbol{A_1}}{\mathbf{2}}+\frac{\boldsymbol{F_1\omega_1(\rho_1^{**2}\omega_1+\rho_2^{**2})}}{\mathbf{4}}\right]+\frac{\boldsymbol{\rho_1^{**2}\omega_1}}{(\boldsymbol{\omega_2^2-\omega_1^2})}\left[\left(\boldsymbol{2D_1}+\frac{\boldsymbol{F_1}}{\mathbf{2}}\right)\boldsymbol{\omega_1^2}-\frac{\boldsymbol{B_1}}{\mathbf{2}}\right]\right]\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\omega_2(\omega_1^2-\omega_2^2)}\left[C_1\frac{\omega_2^3}{2}-\frac{A_1\omega_2}{2}+\left(D_1\omega_2-\frac{B_1}{4}\right)(\rho_2^{**2}\omega_2^2+\rho_1^{**2}\omega_1^2)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{F_1\omega_2^2}{4}(\rho_2^{**2}\omega_2+\rho_1^{**2})\right]+\frac{\rho_2^{**2}\omega_2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)}\left[\left(2D_1+\frac{1}{2}F_1\right)\omega_2-\frac{1}{2}B_1\right]\right]+$$
$$+\frac{\rho_1^{**2}\rho_2^{**2}\omega_2\omega_1}{(\omega_2^2-\omega_1^2)^2}\left[-\frac{B_1}{2}+2D_1\omega_1+\frac{F_1\omega_2}{2}\right]\left[-\frac{B_1}{2}+2D_1\omega_2+\frac{F_1\omega_1}{2}\right]>0,$$
$$\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\omega_1(\omega_2^2-\omega_1^2)}}\left[-\frac{\boldsymbol{A_1\omega_1}}{\mathbf{2}}+\left(\boldsymbol{D_1\omega_1^2}-\frac{\boldsymbol{B_1}}{\mathbf{4}}\right)(\boldsymbol{\rho_1^{**2}\omega_1^2+\rho_2^{**2}\omega_2^2})+\right.\right.$$
$$\left.+\boldsymbol{C_1}\frac{\boldsymbol{\omega_1^3}}{\mathbf{2}}+\frac{\boldsymbol{F_1}}{\mathbf{4}}(\boldsymbol{\rho_1^{**2}\omega_1^3+\rho_2^{**2}\omega_1^2})\right]+\frac{\boldsymbol{\rho_1^{**2}\omega_1}}{(\boldsymbol{\omega_2^2-\omega_1^2})}\left[\left(\boldsymbol{2D_1}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{F_1}\right)\boldsymbol{\omega_1^2}-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{B_1}\right]+$$
$$+\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\omega_2(\omega_1^2-\omega_2^2)}}\left[-\frac{\boldsymbol{A_1\omega_2}}{\mathbf{2}}+\boldsymbol{C_1}\left(\frac{\boldsymbol{\omega_2^3}}{\mathbf{2}}\right)+\left(\boldsymbol{D_1\omega_2}-\frac{\boldsymbol{B_1}}{\mathbf{4}}\right)(\boldsymbol{\rho_2^{**2}\omega_2^2+\rho_1^{**2}\omega_1^2})+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{F_1}{4}(\rho_2^{**2}\omega_2^3+\rho_1^{**2}\omega_2^2)\right]+\frac{\rho_2^{**2}\omega_2}{(\omega_1^2-\omega_2^2)}\left[-\frac{1}{2}B_1+\left(2D_1+\frac{1}{2}F_1\right)\omega_2^2\right]\right)<0$$
то при достаточно малых $\varepsilon>0$ автогенератор имеет асимптотически устойчивые колебания напряжения, при несоизмеримых числах ω_1,ω_2, близкие к двухчастотным колебаниям

$$\boldsymbol{u_1}=\boldsymbol{\rho_1^{**}}\,\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\omega_1}\mathbf{t}}{\sqrt{\mathbf{L_1}\boldsymbol{C_1}}}\quad-\boldsymbol{\varphi_1}\right)+\boldsymbol{\rho_2^{**}}\,\mathbf{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\omega_2}\mathbf{t}}{\sqrt{\mathbf{L_1}\boldsymbol{C_1}}}\quad-\boldsymbol{\varphi_2}\right).$$

Пример двухчастотных колебаний:



Список публикаций по теме диссертации

1. Задорожний В. Г. Математическое моделирование процессов в электрическом автогенераторе / В. Г. Задорожний, В. С. Купцов, Е. В. Купцова // Вестник Воронежского государственного технического университета, т.10, №1,2014. -с. 63-66;
2. Задорожний В. Г. О задаче Коши для линейной системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка/В. Г. Задорожний, Е. В. Купцова// Воронежский Государственный Университет, Воронеж, 2017. -с.88-90;
3. Задорожний В. Г. О моментных функциях решения стохастической линейной системы дифференциальных уравнений/В. Г. Задорожний, Е. В. Купцова// сборник материалов Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Селима Григорьевича Крейна, Воронеж, 2017. – с.223–224;
4. Задорожний В. Г. Колебания в электрическом автогенераторе на двух связанных контурах/В. Г. Задорожний, Е. В. Купцова, В. И. Непринцев

//Физико-математическое моделирование систем: материалы 7-го Международного семинара. – Воронеж, 2011. – Ч.3.- С. 220-224;

5. Купцова Е. В. Первые приближения для колебаний напряжения в системе связанных электрических контурах Ван-дер-Поля/Е. В. Купцова// Вестник Воронежского государственного университета, Серия: Физика, математика, №2, 2017. – С. 113-122;
6. Купцова Е. В. Приведение уравнений электрического автогенератора к стандартному виду метода усреднения/Е. В. Купцова// Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сб. науч. тр. междунар. конф. – С.24-28;
7. Купцова Е. В. Типы Ограниченных колебаний в автогенераторе Ван-Дер-Поля на двух связанных контура /Е. В. Купцова // Современные тенденции развития науки и технологий: периодич. науч. сб. по материалам XIII Международной научно-практической конференции, 30 апр. 2016 г. Белгород, 2016 . № 4-1- С. 27-39;
8. Купцова Е. В. Усредненная система для математической модели электрического автогенератора/Е. В. Купцова // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа Понтрягинские чтения – XXVI. – Воронеж, Издательский дом ВГУ, 2015. - С. 123-124;
9. Kuptsova E. Analysis of vibrations in electrical oscillator on two connected contours/E. Kuptsova //Modern problems of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – Voronezh: Istoki, 2013. – P. 25-29.

Работы [1] и [5] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.