

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДРАСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНЖЕНЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

на правах рукописи

ЛЕШОНКОВ ОЛЕГ ВЛАДИМИРОВИЧ

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
МЕТОДОМ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ**

05.13.18 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук,
профессор Александр Данилович Чернышов

Воронеж – 2018

Оглавление

Введение.....	4
Глава 1 Основные положения метода быстрых разложений.....	12
1.1. Пример невозможности бесконтрольного почленного дифференцирования ряда Фурье.....	12
1.2. Построение быстрых синус – и косинус – разложений.....	14
1.3. Построение граничных функций различного порядка.....	18
1.4. Оператор быстрых разложений.....	32
1.5. Поточечный метод вычисления коэффициентов ряда Фурье.....	34
1.6. Пример представления функции быстрым разложениям по синусам. Сравнение поточечного метода и метода Фурье.....	35
1.7. Вычисление сложных интегралов и интегралов с переменным верхним пределом.....	42
1.8. Представление неявно заданной функции в явном «аналитическом» виде с помощью быстрых разложений и вычисление определенного интеграла с переменным верхним пределом.....	51
1.9. Пример реализации метода быстрых разложений для решения сложных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений.....	57
Глава 2 Исследование контактного термического сопротивления в конечном цилиндре с внутренним источником методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий.....	66
2.1. Постановка задачи и согласование граничных условий.....	66
2.2. Выбор граничных функций и построение замкнутой системы линейных дифференциальных уравнений для определения коэффициентов быстрого разложения.....	69
2.3. Повторное разложение и решение замкнутой алгебраической системы.....	74
2.4. Построение приближенного аналитического решения.....	77
2.5. Полученные результаты и их обсуждение.....	78

Глава 3 Исследование контактного термосопротивления цилиндра конечных размеров с учетом неосесимметричности теплового потока.....	81
3.1. Постановка задачи и согласование граничных условий.....	81
3.2. Граничные условия для неизвестных функций решения.....	84
3.3. Выбор граничных функций и построение замкнутой системы дифференциальных уравнений для определения коэффициентов быстрого разложения.....	86
3.4. Повторное разложение и решение замкнутой алгебраической системы.	91
3.5. Построение приближенного аналитического решения.....	93
3.5. Полученные результаты и их обсуждение.....	94
Заключение.....	98
Список литературы.....	99
Приложение А.....	110
Приложение Б.....	132
Свидетельство о государственной регистрации программы.....	213

Введение

Актуальность темы. Теория дифференциальных уравнений – один из наиболее важных и активно развивающихся разделов в области современной математики. Дифференциальные уравнения находят свое применение в области построения математических моделей, которыми описываются подавляющее большинство физических явлений и процессов. Решение таких уравнений или систем вместе с граничными, начальными или некоторыми дополнительными условиями, открывает возможности получения количественных и качественных характеристик изучаемого процесса с заданной степенью точности.

Однако со стремительным развитием физики и других наук, модель которых можно построить на основе дифференциальных задач, использование классических методов становится весьма затруднительным. Это связано прежде всего с трудностями вычислительного процесса, а также с появлением новых классов дифференциальных задач к которым такие методы неприменимы. К таким уравнениям можно отнести класс интегро-дифференциальных уравнений, а также целый ряд нелинейных задач, задач с неизвестными или подвижными границами.

В настоящий момент развитие теории дифференциальных уравнений заключается в поиске новых, более экономичных и точных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, а также развивается направление по решению нелинейных интегро-дифференциальных задач.

Сложность решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем зачастую связана с наличием в таких задачах ряда особенностей, в значительной мере влияющих на ход и характер их решения (Афанасьев А.П., Левитин А.В., Волков Е.А., Калиткин Н.Н., Дзюба С.М. Рубанов Н.А., Репина Ю.Е., Джумбаев Д.С., Коробицын В.В., Фролова Ю.В. и многие другие).

Важная часть исследований в теории решения дифференциальных уравнений связана с оценкой скорости вычислений с помощью различных вычислитель-

ных схем и оценкой сложности вычислений по существующим методам (Булатов М.В., Тыглиян А.В., Филиппов С.С., Curtiss С.F., Hirschfelder J.O., Хайпер Э., Ваннер Г., Dormand J.R., Prince P.J., Куликов Г.Ю., Меркулов А.И., Абдуллаев В.М., Колесов Ю.С., Майоров В.В. и многие другие).

В последние годы большое внимание привлекают нелинейные уравнения. Это происходит по причине того, что обычно физические процессы линейны лишь в первом приближении. Учет дополнительных эффектов и условий порождает нелинейные уравнения со своими особенностями, которые трудно поддаются решению. Множество работ посвящено не столько созданию методов решения ряда нелинейных дифференциальных задач, сколько оценке и качественному анализу поведения решения такого уравнения или класса уравнений. Это значит, что разрабатываются методы, которые позволяют сказать без решения уравнений об ограниченности этих решений или об их периодичности, или о характере зависимости решений от коэффициентов (Мухамадиев Э.М., Аширбаева А.Ж., Наимов А.Н., Демина М.В., Кудряшов Н.А., Усов А.Б и многие другие).

Зачастую, при построении математической модели, уравнения или граничные условия, содержат не только производные, но и интегралы от неизвестной функции что еще сильнее усложняет процедуру получения решение таких задач (Абдуллаев В.М., Бандурин Н.Г., Хачатрян А.Х., Абгарян К.А., Федотов А.И.).

Особенно широкий класс многомерных физических явлений определяется системами в частных производных. Подобные математические модели весьма многообразны и их решение представляется особенно сложными методами, как, например, уравнения теплопроводности, наиболее простейшие из класса уравнений в частных производных второго порядка (Кантарович Л.В., Крылов В.И., Вiot М.А., Боли Б., Лыков А.В., Тихонов А.Н.).

Цель работы. Разработка эффективных методик и алгоритмов решения следующих задач с применением численно-аналитического метода быстрых разложений (МБР), разработанного профессором А.Д. Чернышовым:

1. Вычисление интегралов с переменным верхним пределом от сложных функций.

2. Представление неявно заданной функции в приближенном явном виде.
3. Решение нелинейной интегро-дифференциальной задачи с различными граничными условиями.
4. Исследование математической модели контактного термического сопротивления со смешанными граничными условиями.

Реализация цели исследования заключается в решении следующих **теоретических и прикладных задач**:

1. Доказательство единственности и многократной дифференцируемости быстрого разложения наперед заданное число раз.
2. Разработка эффективного численного алгоритма и его реализация в виде комплекса проблемно-ориентированных программ на ЭВМ с проведением численных экспериментов на тестовых задачах для: вычисления интегралов с переменным верхним пределом от сложных функций; представление неявно заданной функции в приближенном явном виде с высокой точностью; решение нелинейных интегро-дифференциальных задач.
3. Решение задачи прикладного характера – определение контактного термического сопротивления цилиндра конечных размеров с кольцевой границей нарушения контакта и в случае неосесимметричного теплового потока, а также разработка комплекса программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов.

Объекты исследования. Алгоритм вычисления интегралов с переменным верхним пределом от сложных функций; способ представления неявно заданной функции в приближенном явном аналитическом виде; методика решения сложных нелинейных интегро-дифференциальных задач; математическая модель контактного термического сопротивления со смешанными граничными условиями.

Методы исследования. В диссертационной работе использовались новые методики на основе метода быстрых разложений для: решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений и систем в частных производных, вычисления интегралов с переменным верхним пределом, представления неявно заданной функции в приближенном явном виде.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие положения:

- Алгоритм, основанный на методе быстрых разложений, позволяет проводить вычисления интегралов с переменным верхним пределом от сложных функций с высокой точностью и минимальными затратами машинных ресурсов.
- Методика, основанная на представлении функции в виде суммы специальной граничной функции и ряда Фурье по синусам, позволяет представить неявно заданную функцию в приближенном аналитическом виде на любом отрезке с высокой точностью.
- Методика с применением быстрых разложений позволяет получать решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с высокой точностью.
- Алгоритмы, основанные на методе быстрых разложений, позволяют находить решения задач о контактной теплопроводности цилиндра конечных размеров со смешанными граничными условиями.

Научная новизна. В диссертационной работе получено:

- Приближенное аналитическое решение сложной нелинейной интегро-дифференциальной задачи с высокой точностью;
- Реализован алгоритм вычисления интегралов с переменным верхним пределом от сложных функций;
- Реализован способ представления неявно заданной функции в приближенном явном виде;
- Получено приближенное аналитическое решение задачи о контактном термическом сопротивлении цилиндров конечного размера с кольцевыми границами нарушения контакта. Обсуждается проблема согласования граничных условий;
- Решена задача о контактном термосопротивлении в случае неосесимметричного теплового потока.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая и практическая значимость результатов и методов диссертационной работы заключается в возможности построения более экономичных и быстрых схем решения различно-

го класса прикладных задач, а также провести решение таких задач, которые не поддаются решению другими методами. Представлены результаты численного решения ряда задач с применением ЭВМ.

Область исследования. Область исследования и содержание диссертации соответствует формуле специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки), область исследования соответствует п. 2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», п.3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», п. 4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента»

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

1. Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Воронеж. 12 – 15 сентября. 2016 г.
2. Анализ современных проблем в науке. Самара. 20 марта. 2017 г.
3. Проблемы теплообмена и гидродинамики в энергомашиностроении. Казань. 13 – 15 сентября. 2016 г.

Публикации. Основные результаты работы опубликованы в 8 работах [47] [68-70], [74], [77], [79], [92]. Работы [77], [92] опубликованы в ведущих научных рецензируемых журналах из списка ВАК. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [81].

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, приложений, содержащих таблицы с результатами вычислений, листинги программ и списка литературных источников.

В первой главе на простом примере показана невозможность бесконтрольного почленного дифференцирования классического ряда Фурье, что ограничивает его прикладное применение. Приведены основные положения метода быстрых разложений, разработанного профессором Чернышовым А.Д. Согласно методу,

раскладываемая функция представляется в виде суммы специальной граничной функции и ряда Фурье. Такая конструкция обладает следующими свойствами: быстрая сходимость и дифференцируемость наперед заданное число раз. Формулируются и приводятся доказательства теорем о единственности и дифференцируемости быстрого разложения. Проводится численный эксперимент, в котором сравниваются погрешности разложений трех различных функций, представленных в виде суммы ряда Фурье по синусам и специальной граничной функции и классического ряда Фурье по синусам. Кроме того, экспериментально показана быстрая сходимость ряда, построенного согласно МБР, при его многократном дифференцировании. Разработана методика приближенного вычисления сложных и неберущихся интегралов с переменным верхним пределом с применением МБР. На вычислительном эксперименте показана высокая эффективность предложенной методики. Реализован алгоритм, благодаря которому возможно представить неявно заданной функции в приближенном явном виде на выбранном отрезке. Разработан комплекс программ и на эксперименте проведена оценка точности полученного представления. Приводится методика получения приближенного аналитического решения одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с различными граничными условиями с применением МБР. На численном эксперименте приводится оценка погрешности полученного решения и рассматривается влияние граничных условий на точность получаемого решения.

Во второй главе строится решение задачи о контактном термическом сопротивлении цилиндра с внутренним источником тепла. Рассмотрена задача в случае, когда множественные границы нарушения контакта имеют форму кольца. Обсуждается проблема согласования граничных условий. Исследовано влияние количества зон нарушения контакта на термосопротивление. Методика решения задачи с применением МБР реализована в виде комплекса объектно-ориентированных программ на ЭВМ.

В третьей главе рассмотрена задача контактного термического сопротивления цилиндра в случае неосесимметричного теплового потока. Рассмотрено влия-

ние различных параметров шероховатости на термосопротивление. Методика решения задачи с применением МБР реализована в виде комплекса объектно-ориентированных программ на ЭВМ.

Глава 1 Основные положения метода быстрых разложений

1.1. Пример невозможности бесконтрольного почленного дифференцирования ряда Фурье

Аналитические методы, основанные на рядах Фурье, ввиду их простоты получили широкое распространение в области механики для решения краевых задач. К более детальному изучению рядов Фурье привели некоторые задачи о колебании струны, теплопроводности и другие, с простейшими граничными условиями. Использование тригонометрических рядов связано в первую очередь с представлением заданной функции $y = f(x)$ в виде суммы простейших гармонических колебаний:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_k (a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x)), \quad x \in [-1, 1], \quad (1.1.1)$$

где a_0, a_k, b_k – коэффициенты ряда Фурье, которые можно определить с помощью интегралов вида:

$$a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx, \quad a_m = \int_{-1}^1 f(x) \cos(m\pi x) dx, \quad b_m = \int_{-1}^1 f(x) \sin(m\pi x) dx \quad (1.1.2)$$

Ряд (1.1.1) коэффициенты которого определяются формулами (1.1.2) называется рядом Фурье.

Благодаря тому, что свойства рядов Фурье хорошо изучены, их часто применяют в решении дифференциальных уравнений для ряда задач математической физики, электротехники, теории упругости, термоупругости и других линейных моделей механики сплошных сред. Решение таких задач получается в аналитическом виде. Но часто в ходе решения задач приходится отвечать на два вопроса: о сходимости и возможности почленного дифференцирования ряда. Обычно классические ряды Фурье сходятся к значениям гладкой функции, однако эта сходимость медленная, исключая возможность почленного дифференцирования. В

зависимости от требуемой точности решения задачи появляется необходимость вычисления нескольких сотен, а иногда и тысяч членов ряда Фурье. Другой недостаток – невозможность бесконтрольного дифференцирования ряда, так как это может привести к расхождению ряда в области или на границе. Под расходимостью ряда Фурье на границе будем понимать ситуацию, когда ряд на границе сходится, но не к значению функции. Приведем подобный пример.

Рассмотрим простейшую непрерывную функцию $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$ и представим её в виде классического ряда Фурье по синусам:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m\pi} \sin(m\pi x), \quad x \in [0, 1] \quad (1.1.3)$$

Для определения производной проведем почленное дифференцирование такого ряда:

$$f'(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} m\pi}{m\pi} \cos(m\pi x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \cos(m\pi x) \neq 1 \quad (1.1.4)$$

Сумма ряда (1.1.4) не только не равна 1, но и сам ряд является расходящимся. Кроме того, при $x = 1$ в правой части (1.1.3) получаем ноль, тогда как значение функции $f(1) = 1$, т.е. в точке $x = 1$ ряд (1.1.3) расходится. Это говорит о том, что в случае ряда по синусам для функции $y = x$ на отрезке $x \in [0, 1]$ операция почленного дифференцирования неправомерна.

Г.П. Толстовым в 1960 году [58] была сформулирована теорема о необходимых условиях дифференцирования ряда Фурье: для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[0, \pi]$ и имеющей на нем абсолютно интегрируемую производную, можно записать ряд Фурье по косинусам или по синусам. Такой ряд всегда можно почленно дифференцировать, причем для ряда по синусам это утверждение справедливо при $f(0) = f(\pi) = 0$.

Однако этой теореме не уделили особого внимания. Лишь только в 2010 году профессор А. Д. Чернышов доработал теорему о дифференцируемости ряда Фурье Г.П. Толстова и создал новый метод – метод быстрых разложений.

1.2. Построение быстрых синус – и косинус – разложений

Все дальнейшие выкладки и рассуждения были проведены и опубликованы в работах [67 – 84].

Рассмотрим функцию $f(x) \in L_2^\alpha(x \in [0, a])$, где L_2^α – класс функций Соболева-Лиувилля. Представим $f(x)$ рядом Фурье по синусам:

$$f(x) \in L_2^\alpha(x \in [0, a]), \quad f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad f_m = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin m\pi \frac{x}{a} dx \quad (1.2.5)$$

Можно утверждать, что ряд (1.2.5) равномерно сходится внутри интервала $(0 < x < a)$. В случае, если $f(0) \neq 0$ и $f(a) \neq 0$, то ряд (1.2.5) расходится на концах отрезка при $x = 0$, $x = a$, если же $f(0) = f(a) = 0$, то ряд (1.2.5) сходится на соответственных концах отрезка $0 \leq x \leq a$, причем в случае классического ряда скорость сходимости в общем случае невысокая.

При $\alpha = 1$ из (1.2.5) можно получить выражение для коэффициентов разложения:

$$f_m = -\frac{2}{a} \frac{a}{m\pi} \int_0^a f(x) d \cos m\pi \frac{x}{a} = \frac{2}{a} \frac{a}{m\pi} \left[f(0) - f(a)(-1)^m \right] + \frac{2}{a} \frac{a}{m\pi} \int_0^a f'(x) \cos m\pi \frac{x}{a} dx, \quad f(x) \in L_2^1(x \in [0, a]) \quad (1.2.6)$$

Пусть $f(x)$ удовлетворяет дополнительным условиям:

$$f(0) = f(a) = 0, \quad f(x) \in L_2^3[0, a] \quad (1.2.7)$$

В этом случае первое слагаемое выражения для коэффициентов Фурье в (1.2.6) обращается в ноль. Уравнение (1.2.6) может быть приведено к виду:

$$\begin{aligned}
f_m &= \frac{2}{a} \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 \int_0^a f'(x) d \sin m\pi \frac{x}{a} = \frac{2}{a} \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 f'(x) \sin m\pi \frac{x}{a} \Big|_0^a - \\
&- \frac{2}{a} \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 \int_0^a f''(x) \sin m\pi \frac{x}{a} dx = \frac{2}{a} \left(\frac{a}{m\pi} \right)^3 \int_0^a f''(x) d \cos m\pi \frac{x}{a} = \\
&= \frac{2}{a} \left(\frac{a}{m\pi} \right)^3 \left[f''(a)(-1)^m - f''(0) \right] - \frac{2}{a} \left(\frac{a}{m\pi} \right)^3 \int_0^a f'''(x) \cos m\pi \frac{x}{a} dx
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Если ряд (1.2.5) удовлетворяет условиям (1.2.7), тогда его можно два раза дифференцировать. Ряды Фурье для $f(x)$ и $f'(x)$ будут равномерно сходиться на замкнутом отрезке $0 \leq x \leq a$. Ряд для $f''(x)$ будет равномерно сходиться внутри отрезка $0 < x < a$ и расходиться на его концах при $x=0$, $x=a$.

Пусть вместо (1.2.7) $f(x)$ удовлетворяет более строгим условиям

$$f(x) \in L_2^5[0, a], \quad f(0) = f(a) = f''(0) = f''(a) = 0 \tag{1.2.9}$$

В этом случае первое слагаемое в выражении для коэффициентов Фурье (1.2.8) обращается в ноль. Проведя двукратное интегрирование (1.2.8) имеем:

$$f_m = \frac{2}{a} \left(\frac{a}{m\pi} \right)^5 \left[f^{(4)}(0) - (-1)^m f^{(4)}(a) \right] + \frac{2}{a} \left(\frac{a}{m\pi} \right)^5 \int_0^a f^{(5)}(x) \cos m\pi \frac{x}{a} dx \tag{1.2.10}$$

В случае, если ряд (1.2.5) удовлетворяет условиям (1.2.9), тогда его можно почленно дифференцировать до четырех раз. Ряды для $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ будут равномерно сходиться внутри и на границах отрезка $0 \leq x \leq a$. Ряд для $f^{(4)}(x)$ будет равномерно сходиться внутри интервала $0 < x < a$ и расходиться на его границах.

Профессором А.Д. Чернышовым было сформулировано общее условие, выполнение которого приводит к рядам, которые допускают дифференцирование заданное наперед число раз. Это условие имеет вид:

$$f(x) \in L_2^{2p+3}(0 \leq x \leq a), \quad f^{(2i)}(0) = f^{(2i)}(a) = 0, \quad i = 0 \div p \tag{1.2.11}$$

Если $f(x)$ на отрезке $[0, a]$ удовлетворяет условиям (1.2.11), тогда её ряд Фурье по синусам допускает дифференцирование $(2p+2)$. Такие ряды имеют

равномерно сходящиеся всюду на отрезке $[0, a]$ производные до $(2p+1)$ порядка включительно. Ряд для производной порядка $(2p+2)$ будет равномерно сходиться внутри отрезка, и расходится на его концах. Обобщая (1.2.8) и (1.2.10) получим формулу для коэффициентов ряда Фурье f_m :

$$f_m = (-1)^p \frac{2}{a} \left(\frac{a}{m\pi} \right)^{2p+3} \left[(-1)^m f^{(2p+2)}(a) - f^{(2p+2)}(0) - \int_0^a f^{(2p+3)}(x) \cos m\pi \frac{x}{a} dx \right] \quad (1.2.12)$$

Из (1.2.12) можно сделать вывод, что коэффициенты f_m быстро убывают с ростом m , благодаря чему в (1.2.5) для получения высокой точности достаточно учитывать небольшое число слагаемых.

Иногда удобно представлять неизвестную функцию $f(x)$ рядом Фурье по косинусам:

$$f(x) = f_0 + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \cos m\pi \frac{x}{a}, \quad f_0 = \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx \quad (1.2.13)$$

$$f_m = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos m\pi \frac{x}{a} dx, \quad (0 \leq x \leq a); \quad m=1, 2, \dots$$

Если $f(x) \in L_2^2(0 \leq x \leq a)$, тогда ряд (1.2.13) равномерно сходится на отрезке $0 \leq x \leq a$. Такой ряд допускает вычисление производной почленным дифференцированием:

$$f'(x) = -\sum_{m=1}^{\infty} f_m \frac{m\pi}{a} \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad f_m = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos m\pi \frac{x}{a} dx, \quad (0 \leq x \leq a) \quad (1.2.14)$$

Ряд (1.2.14) равномерно сходится внутри отрезка, но, как правило, его значения на границах не совпадают со значениями производной $f'(0), f'(a)$. Аналогично с (1.2.7), потребуем выполнение условий:

$$f(x) \in L_2^{(2p+2)}(0 \leq x \leq a), \quad f^{(2i-1)}(0) = f^{(2i-1)}(a) = 0, \quad i=1 \div p, \quad (1.2.15)$$

Ряд (1.2.13) при выполнении условий (1.2.15) допускает почленное дифференцирование $(2p+1)$ раз, причем производные до порядка $2p$ включительно равномерно сходятся как внутри, так и на концах отрезка. Ряд для производной порядка

$(2p+1)$ равномерно сходится всюду внутри отрезка, но расходится на его концах. Если выполняются условия (1.2.15) для коэффициентов Фурье f_m , тогда выражение для них можно привести к виду:

$$f_m = (-1)^p \frac{2}{a} \left(\frac{a}{m\pi} \right)^{2p+2} \left[(-1)^m f^{(2p+1)}(a) - f^{(2p+1)}(0) - \int_0^a f^{(2p+2)}(x) \cos m\pi \frac{x}{a} dx \right] \quad (1.2.16)$$

В (1.2.16) интеграл стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$, следовательно, если m велико, то значение квадратной скобки определяются значениями $f^{(2p+1)}(0)$, $f^{(2p+1)}(a)$. В (1.2.16) коэффициенты f_m быстро убывают с ростом m , следовательно в ряде (1.2.14) достаточно использовать небольшое число слагаемых для достижения высокой точности.

Следует отметить, что с увеличением параметра p в выражениях для коэффициентов Фурье (1.2.12) или (1.2.16) растет скорость сходимости быстрых рядов.

Быстрое убывание коэффициентов Фурье будет продемонстрировано в дальнейшем на примерах.

1.3. Построение граничных функций различного порядка

Медленная сходимость и сложности с дифференцированием рядов Фурье оказались взаимосвязаны. Метод быстрых разложений, разработанный профессором А.Д. Чернышовым [67], [76], [84], позволяет устранить эти недостатки. Этот метод применим к широкому классу нелинейных интегро-дифференциальных задач и систем повышенной сложности.

Представим раскладываемую функцию $f(x)$ в виде суммы специальной граничной функции $M_q(x)$ и некоторой функции $\nu(x)$:

$$f(x) = M_q(x) + \nu(x) \quad (1.3.17)$$

Из класса функций $L_2^{(\alpha)}(0 \leq x \leq a)$ выберем какую-либо функцию в качестве $M_q(x)$ так, чтобы в случае использования ряда Фурье по синусам, граничная функция $M_q(x)$ удовлетворяла следующим граничным условиям:

$$M_{2p}^{(2i)}(0) = f^{(2i)}(0), \quad M_{2p}^{(2i)}(a) = f^{(2i)}(a), \quad i = 0 \div p \quad (1.3.18)$$

В случае рядов по синусам $M_q(x)$ должна удовлетворять условиям:

$$M_{2p-1}^{(2i-1)}(0) = f^{(2i-1)}(0), \quad M_{2p-1}^{(2i-1)}(a) = f^{(2i-1)}(a), \quad i = 1 \div p \quad (1.3.19)$$

Функция $M_q(x)$ из (1.3.17) называется граничной по причине того, что она содержит в себе значения функции и её производных на границах отрезка $[0, a]$. Параметр q выбирается исходя из порядка рассматриваемой дифференциальной задачи или если есть необходимость в дальнейшем дифференцировании исследуемой функции.

Если выполняются условия (1.3.18), тогда функция $\nu(x)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\nu^{(2i)}(0) = \nu^{(2i)}(a) = 0, \quad i = 0 \div p$$

и её ряд Фурье по синусам

$$v(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a$$

можно почленно дифференцировать $2p+1$ раз на всем отрезке $[0, a]$, в том числе и на его границах. Производная $2p+2$ порядка $v^{(2p+2)}(x)$ в общем случае сходится на интервале $(0, a)$ и может расходиться на концах отрезка $[0, a]$.

В случае, когда выполняются условия (1.3.19), функция $v(x)$ будет удовлетворять граничным условиям

$$v^{(2i-1)}(0) = v^{(2i-1)}(a) = 0, \quad i = 1 \div p$$

и её ряд Фурье по косинусам

$$v(x) = f_0 + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \cos m\pi \frac{x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a$$

можно дифференцировать $2p$ раз всюду внутри и на границах отрезка $[0, a]$. Ряд для производной $2p+1$ порядка $v^{(2p+1)}(x)$ будет сходиться внутри отрезка $[0, a]$ и, в общем случае, расходиться на его концах.

Быстрым разложением $f(x)$ на отрезке $[0, a]$ называется сумма специальной граничной $M_q(x)$, которая удовлетворяет условиям (1.3.18) или (1.3.19), и ряда Фурье по синусам или косинусам для разности $f(x) - M_q(x)$, $(f(x), M_q(x)) \in L_2^{(q+2)}, \forall x \in [0, a]$ соответственно.

Таким образом синус-разложение имеет вид:

$$f(x) = M_{2p}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin m\pi \frac{x}{a} \quad (1.3.20)$$

Коэффициенты Фурье для разложения (1.3.20) определяются следующим образом:

$$f_m = \frac{2}{a} \int_0^a [f(x) - M_{2p}(x)] \sin m\pi \frac{x}{a} dx, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.3.21)$$

Косинус-разложение имеет следующий вид:

$$f(x) = M_{2p-1}(x) + f_0 + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \cos m\pi \frac{x}{a} \quad (1.3.22)$$

Коэффициенты Фурье разложения (1.3.22) находятся следующим образом:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{a} \int_0^a [f(x) - M_{2p-1}(x)] dx; \\ f_m &= \frac{2}{a} \int_0^a [f(x) - M_{2p-1}(x)] \cos m\pi \frac{x}{a} dx, \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

Рассмотрим случай, когда $M_q(x) = M_0(x)$, т.е. $q = 0$. Граничная функция $M_0(x)$ – нулевого порядка, следовательно она должна удовлетворять следующим граничным условиям

$$M_0(0) = f(0), \quad M_0(a) = f(a) \quad (1.3.24)$$

Значения функции на границах рассматриваемой области $f(0)$, $f(a)$, которые будут использоваться для построения $M_0(x)$, могут быть определены из граничных условий задачи, если такие имеются, либо их следует считать неизвестными константами. Для простоты воспользуемся линейным многочленом, удовлетворяющим граничным условиям (1.3.24):

$$M_0(x) = f(0) + \frac{x}{a} [f(a) - f(0)] \quad (1.3.25)$$

Также можно представить $M_0(x)$, удовлетворяющую граничным условиям (1.3.24) суммой двух слагаемых:

$$M_0(x) = \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x), \quad (g_1(x), g_2(x)) \in L_2^{(2)}(0 \leq x \leq a) \quad (1.3.26)$$

где $g_1(x), g_2(x)$ – линейно независимые между собой функции на отрезке $[0, a]$.

Постоянные α_1, α_2 находятся из условий (1.3.18):

$$\alpha_1 g_1(0) + \alpha_2 g_2(0) = f(0), \quad \alpha_1 g_1(a) + \alpha_2 g_2(a) = f(a) \quad (1.3.27)$$

Потребуем, чтобы определитель системы (1.3.27) был не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} g_1(0) & g_2(0) \\ g_1(a) & g_2(a) \end{vmatrix} \neq 0$$

Учитывая (1.3.24), $v(x)$ из (1.3.17) должна удовлетворять граничным условиям

$$v(0) = v(a) = 0 \quad (1.3.28)$$

Таким образом ряд Фурье для функции $v(x)$ допускает вычисление производных второго порядка. В результате неизвестную $f(x)$ в выражении (1.3.17) можно записать в виде быстрого разложения с граничной функцией нулевого порядка:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{a} [f(a) - f(0)] + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a \quad (1.3.29)$$

Коэффициенты Фурье определяются как:

$$f_m = \frac{2}{a} \int_0^a [f(x) - M_0(x)] \sin m\pi \frac{x}{a} dx, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.3.30)$$

Неизвестная функция $f(x)$ определяется через следующие неизвестные коэффициенты, которые называются коэффициентами быстрого синус разложения:

$$f(0), f(a), f_m; \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.3.31)$$

Их определяют в ходе решения дифференциальной задачи. Ряд (1.3.29) допускает двукратное почленное дифференцирование. Если в дифференциальном уравнении задачи производные не выше второго порядка, тогда неизвестные из (1.3.31) определяются после подстановки разложения (1.3.29) в дифференциальное уравнение и граничные условия решаемой задачи.

Рассмотрим построение граничной функции $M_q(x)$ по четырем граничным условиям (1.2.9). Назовем её граничной функцией второго порядка $M_2(x)$ и выразим через сумму четырех слагаемых

$$M_2(x) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i g_i(x), \quad g_i(x) \in C^{(\infty)}(0 \leq x \leq a), \quad i = 1 \div 4 \quad (1.3.32)$$

где $g_i(x)$ – некоторые линейно независимые между собой функции на отрезке $[0, a]$. Константы α_i определяются с помощью условий (1.2.9) из линейной алгебраической системы

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 \alpha_i g_i(0) &= f(0) , \quad \sum_{i=1}^4 \alpha_i g_i(a) = f(a) , \\
\sum_{i=1}^4 \alpha_i g_i''(0) &= f''(0) , \quad \sum_{i=1}^4 \alpha_i g_i''(a) = f''(a) , \\
|g_i^{(2j)}(0), g_i^{(2j)}(a)| &\neq 0 , \quad i = 1 \div 4 , \quad j = 0, 1
\end{aligned} \tag{1.3.33}$$

Если использовать полиномы наименьшей (в данном случае третьей) степени, выражение для $M_2(x)$ и быстрое синус разложение принимают вид:

$$\begin{aligned}
M_2(x) &= f(0) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + f(a) \frac{x}{a} + f''(0) \left[\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{a \cdot 3!} - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) ax \right] + \\
&\quad + f''(a) \left(\frac{x^3}{a \cdot 3!} - \frac{ax}{3!} \right) , \\
f(x) &= f(0) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + f(a) \frac{x}{a} + f''(0) \left[\frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{a \cdot 3!} - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) ax \right] + \\
&\quad + f''(a) \left(\frac{x^3}{a \cdot 3!} - \frac{ax}{3!} \right) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin m\pi \frac{x}{a} , \quad 0 \leq x \leq a .
\end{aligned} \tag{1.3.34}$$

Неизвестными в (1.3.34) являются постоянные

$$f(0) , f(a) , f''(0) , f''(a) , f_m , m = 1, 2, \dots \tag{1.3.35}$$

Общий вид разложения функции $f(x)$ по синусам четного $2p$ -го порядка имеет вид:

$$\begin{aligned}
f(x) &= M_{2p}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin m\pi \frac{x}{a} , \quad 0 \leq x \leq a \\
M_{2p}(x) &= \sum_{i=1}^{2p+2} \alpha_i g_i(x) \\
g_i(x) &\in L_2^{(2p+2)}(0 \leq x \leq a) , \quad i = 1 \div 2p + 2
\end{aligned} \tag{1.3.36}$$

где коэффициенты α_i вычисляются из линейной системы для четных производных на границах отрезка $[0, a]$

$$\sum_{i=1}^{2p+2} \alpha_i g_i^{(2j)}(0) = f^{(2j)}(0) , \quad \sum_{i=1}^{2p+2} \alpha_i g_i^{(2j)}(a) = f^{(2j)}(a) , \quad j = 0 \div p \tag{1.3.37}$$

Под производной нулевого порядка понимается сама функция. Кроме линейной независимости функций $g_i(x)$ следует наложить следующее условие: определитель системы (1.3.37) должен быть не равен нулю:

$$\left| g_i^{(2j)}(0), g_i^{(2j)}(a) \right| \neq 0, \quad i = 1 \div 2p + 2, \quad j = 0 \div p \quad (1.3.38)$$

Для полиномов степени $(2p + 1)$ в качестве $g_i(x)$ в (1.3.36)

$$g_1(x) = 1, \quad g_2(x) = \frac{x}{a}, \dots, \quad g_{2p+2}(x) = \left(\frac{x}{a} \right)^{2p+1}$$

Рекуррентная формула для $M_{2p}(x)$ записывается как:

$$\begin{aligned} M_{2p}(x) &= f(0) \left(1 - \frac{x}{a} \right) + f(a) \frac{x}{a} + \sum_{i=1}^p f^{(2i)}(0) A_{2i}(x) + \sum_{i=1}^p f^{(2i)}(a) B_{2i}(x) \\ A_{2i}(x) &= \Phi_{2i}(x) - \frac{x}{a} \Phi_{2i}(a), \quad \Phi_{2i}(x) = \int_0^x \left[\int_0^x A_{2i-2}(x) dx \right] dx, \quad A_0(x) = 1 - \frac{x}{a} \\ B_{2i}(x) &= F_{2i}(x) - \frac{x}{a} F_{2i}(a), \quad F_{2i}(x) = \int_0^x \left[\int_0^x B_{2i-2}(x) dx \right] dx, \quad B_0(x) = \frac{x}{a} \\ A_{2i}''(x) &= A_{2i-2}(x), \quad B_{2i}''(x) = B_{2i-2}(x), \quad i = 1 \div p, \quad p \geq 2 \end{aligned} \quad (1.3.39)$$

(1.3.39) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{2p}(x) &= M_{2p-2}(x) + f^{(2p)}(0) A_{2p}(x) + f^{(2p)}(a) B_{2p}(x), \quad p \geq 2 \\ A_{2p}(x) &= \Phi_{2p}(x) - \frac{x}{a} \Phi_{2p}(a), \quad \Phi_{2p}(x) = \int_0^x \left[\int_0^x A_{2p-2}(x) dx \right] dx, \quad A_0(x) = 1 - \frac{x}{a} \\ B_{2p}(x) &= F_{2p}(x) - \frac{x}{a} F_{2p}(a), \quad F_{2p}(x) = \int_0^x \left[\int_0^x B_{2p-2}(x) dx \right] dx, \quad B_0(x) = \frac{x}{a} \end{aligned} \quad (1.3.40)$$

Если функция $f(x)$ неизвестна, то для разложения (1.3.36) определяются коэффициенты

$$f^{(2j)}(0), \quad f^{(2j)}(a), \quad f_m, \quad j = 0 \div p, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.3.41)$$

Ряд Фурье из (1.3.36) можно почленно дифференцировать до $2p + 2$ раз. Производные до порядка $2p + 1$ включительно равномерно сходятся как внутри, так и на границах отрезке $[0, a]$, а производная порядка $2p + 2$ равномерно сходится

внутри отрезка, но может расходиться на его концах и не совпадать со значениями производных $f^{(2p+2)}(0)$, $f^{(2p+2)}(a)$.

В случае применения быстрых косинус-разложений

$$f(x) = M_{2p-1}(x) + f_0 + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \cos m\pi \frac{x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a \quad (1.3.42)$$

границную функцию $M_{2p-1}(x)$ (нечетного порядка) следует строить с помощью граничных условий (1.2.15) для нечетных производных. Аналогично (1.3.36) для $M_{2p-1}(x)$ имеем выражение:

$$M_{2p-1}(x) = \sum_{i=1}^{2p} \beta_i h_i(x), \quad h_i(x) \in L_2^{(2p+1)}(0 \leq x \leq a), \quad i = 1 \div 2p \quad (1.3.43)$$

где $h_i(x)$ – линейно независимые функции на отрезке $[0, a]$. Постоянные β_i определяются из граничных условий (1.2.15)

$$\sum_{i=1}^{2p} \beta_i h_i^{(2j-1)}(0) = f^{(2j-1)}(0), \quad \sum_{i=1}^{2p} \beta_i h_i^{(2j-1)}(a) = f^{(2j-1)}(a), \quad j = 1 \div p \quad (1.3.44)$$

Кроме линейной независимости $h_i^{(2j-1)}(x)$ потребуем выполнение следующего дополнительного условия: определитель системы (1.3.44) должен быть не равен нулю

$$\left| h_i^{(2j-1)}(0), h_i^{(2j-1)}(a) \right| \neq 0, \quad i = 1 \div 2p, \quad j = 1 \div p \quad (1.3.45)$$

Если $f(x)$ – неизвестная функция, то для разложения (1.3.42) необходимо определить следующие константы

$$f^{(2j-1)}(0), \quad f^{(2j-1)}(a), \quad f_0, \quad f_m, \quad j = 1 \div p, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1.3.46)$$

Эти постоянные находятся из граничных условий и дифференциального уравнения рассматриваемой задачи.

Использование полиномов наименьшей степени в качестве $h_i(x)$

$$h_1(x) = \frac{x}{a}, \dots, h_i(x) = \left(\frac{x}{a} \right)^i, \quad i = 1 \div 2p$$

приводит к следующим рекуррентным соотношениям для определения граничной функции нечетного порядка $M_{2p+1}(x)$

$$\begin{aligned}
 M_{2p+1}(x) &= f'(0) \left(x - \frac{x^2}{2a} \right) + f'(a) \frac{x^2}{2a} + \\
 &+ \sum_{i=1}^p f^{(2i+1)}(0) A_{2i+1}(x) + \sum_{i=1}^p f^{(2i+1)}(a) B_{2i+1}(x), \quad (1.3.47) \\
 A_{2i+1}(x) &= \int_0^x A_{2i}(x) dx, \quad B_{2i+1}(x) = \int_0^x B_{2i}(x) dx, \quad i = 1 \div p \geq 1.
 \end{aligned}$$

Выражение (1.3.47) для $M_{2p+1}(x)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
 M_{2p+1}(x) &= M_{2p-1}(x) + f^{(2p+1)}(0) A_{2p+1}(x) + f^{(2p+1)}(a) B_{2p+1}(x) \\
 A_{2p+1}(x) &= \int_0^x A_{2p}(x) dx, \quad B_{2p+1}(x) = \int_0^x B_{2p}(x) dx, \quad p \geq 2 \quad (1.3.48) \\
 M_1(x) &= f'(0) \left(x - \frac{x^2}{2a} \right) + f'(a) \frac{x^2}{2a}
 \end{aligned}$$

Быстрым синус- или косинус- разложением функции $f(x)$ будем называть ряд вида (1.3.20) или (1.3.42). Для разложения (1.3.20) все четные производные до порядка $2p$ включительно, а так же для разложения (1.3.42) все нечетные производные до $2p-1$ порядка включительно при $x=0$ и $x=a$ принимают точные значения. В дальнейшем это свойство используется для нахождения констант, указанных в (1.3.41) или (1.3.46).

Покажем единственность быстрого разложения, сформулировав и доказав следующую теорему:

Теорема 1. *О единственности быстрого разложения.*

Пусть две функции $U(x)$ и $V(x)$ принадлежат классу непрерывных функций $C^{(2)}$ на отрезке $x \in [0..a]$, которые представлены быстрым разложением по синусам:

$$U(x) = Ch_{2x}(U(x)) = M_2(U(x)) + \sum_{m=1}^{\infty} U_{m+4} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right),$$

$$M_2(U(x)) = U_1 \left(1 - \frac{x}{a}\right) + U_2 \frac{x}{a} + U_3 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{a6} - \frac{ax}{3}\right) + U_4 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right) \quad (1.3.49)$$

$$V(x) = Ch_{2x}(V(x)) = M_2(V(x)) + \sum_{m=1}^{\infty} V_{m+4} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right),$$

$$M_2(V(x)) = V_1 \left(1 - \frac{x}{a}\right) + V_2 \frac{x}{a} + V_3 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{a6} - \frac{ax}{3}\right) + V_4 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right) \quad (1.3.50)$$

Здесь U_1, \dots, U_{m+4} и V_1, \dots, V_{m+4} , $m=1 \div \infty$ – коэффициенты быстрого разложения (1.3.49) и (1.3.50) соответственно.

Если коэффициенты быстрого разложения из (1.3.49) равны коэффициентам быстрого разложения (1.3.50), т.е. выполняется равенство:

$$U_1 = V_1, \dots, U_{m+4} = V_{m+4}, m=1 \div \infty \quad (1.3.51)$$

то на отрезке $x \in [0..a]$ функции $U(x)$ и $V(x)$ совпадают, т.е.

$$U(x) = V(x) \quad (1.3.52)$$

Доказательство.

Перепишем разложения (1.3.49) и (1.3.50) в следующем виде:

$$U(x) - M_2(U(x)) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{m+4} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right),$$

$$M_2(U(x)) = U_1 \left(1 - \frac{x}{a}\right) + U_2 \frac{x}{a} + U_3 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{a6} - \frac{ax}{3}\right) + U_4 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right) \quad (1.3.53)$$

$$V(x) - M_2(V(x)) = \sum_{m=1}^{\infty} V_{m+4} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right),$$

$$M_2(V(x)) = V_1 \left(1 - \frac{x}{a}\right) + V_2 \frac{x}{a} + V_3 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{a6} - \frac{ax}{3}\right) + V_4 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right) \quad (1.3.54)$$

т.е. в ряд Фурье по синусам разлагаются разности $U(x) - M_2(U(x))$ и $V(x) - M_2(V(x))$ соответственно. Полиномы при U_1, \dots, U_4 и V_1, \dots, V_4 используемые в граничной функции M_2 определены единственным образом для любой

функции. Согласно условию теоремы (1.3.51), коэффициенты граничной функции одинаковы, а значит

$$M_2(U(x)) = M_2(V(x))$$

С другой стороны из (1.3.51) следует, что коэффициенты ряда Фурье для функций $U(x)$ и $V(x)$ также равны. Из классической литературы [59] известно, что коэффициенты в ряде Фурье для функции определяются единственным образом (т.е. представление функции рядом Фурье единственно для всякой абсолютно интегрируемой функции). Таким образом можно сделать вывод, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} U_{m+4} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} V_{m+4} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right)$$

Это означает, что функции $U(x)$ и $V(x)$ на рассматриваемом отрезке совпадают, т.е. $U(x) = V(x)$. Теорема доказана.

Формулы (1.3.20) и (1.3.42) надо понимать как замену исходной функции $f(x)$ на разность $\nu(x) = f(x) - M_q(x)$, $q = 2p$, или $q = 2p - 1$. Для такой разности ряд Фурье приобретает свойство быстрой сходимости и многократной дифференцируемости наперед заданное число раз. Докажем, что при использовании граничной функции M_2 быстрое разложение можно почленно дифференцировать до двух раз, причем полученный ряд будет сходиться к значениям производной раскладываемой функции всюду на области, включая границы.

Теорема 2. *О дифференцируемости быстрого разложения.*

Пусть $U(x) \in C^{(2)}$ на отрезке $x \in [0, a]$ представлена быстрым разложением

$$U(x) = M_2(x) + \sum_{m=1}^{\infty} U_{2,m+4} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right),$$

$$M_2(x) = U_{2,1} \left(1 - \frac{x}{a}\right) + U_{2,2} \frac{x}{a} + U_{2,3} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{ax}{3}\right) + U_{2,4} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right) \quad (1.3.55)$$

$U_{2,1}, \dots, U_{2,m+4}$, $m = 1 \div \infty$ — коэффициенты быстрого разложения (1.3.55).

Разложение (1.3.55) можно почленно дифференцировать до двух раз, причем полученный ряд будет сходиться к значениям производных раскладываемой функции до второго порядка на всем отрезке $x \in [0..a]$.

Доказательство

Продифференцируем почленно по x один раз разложение (1.3.55):

$$\frac{U_{2,2} - U_{2,1}}{a} + U_{2,3} \left(x - \frac{x^2}{2a} - \frac{a}{3} \right) + U_{2,4} \left(\frac{x^2}{2a} - \frac{a}{6} \right) + \frac{\pi}{a} \sum_{m=1}^{\infty} U_{2,m+4} m \cos \left(m\pi \frac{x}{a} \right) \quad (1.3.56)$$

где $U_{2,1} = U(0)$, $U_{2,2} = U(a)$, $U_{2,3} = U''(0)$, $U_{2,4} = U''(a)$. Покажем, что разложение (1.3.56) идентично представлению $U'(x)$ в виде суммы специальной граничной функции первого порядка $M_1(x)$ и ряда Фурье по косинусам, т.е.

$$U'(x) = M_1(x) + U_{1,0} + \sum_{m=1}^{\infty} U_{1,m+2} \cos \left(m\pi \frac{x}{a} \right), \quad M_1(x) = U_{1,1} \left(x - \frac{x^2}{2a} - \frac{a}{3} \right) + U_{1,2} \left(\frac{x^2}{2a} - \frac{a}{6} \right)$$

$U_{1,1} = f'(0)$, $U_{1,2} = f'(a)$. Так как $f(x) = U'(x)$, то $U_{1,1} = U''(0)$, $U_{1,2} = U''(a)$.

Этим мы докажем, что при однократном дифференцировании ряда (1.3.55), разложение (1.3.56) будет сходиться всюду к значениям $U'(x)$ на отрезке $x \in [0..a]$.

Покажем, что

$$U_{1,0} = \frac{U_{2,2} - U_{2,1}}{a} = \frac{U(a) - U(0)}{a} \quad (1.3.57)$$

Действительно $U_{1,0}$ – коэффициент ряда Фурье, который определяется с помощью интеграла:

$$U_{1,0} = \frac{1}{a} \int_0^a (U'(x) - M_1(x)) dx = \frac{1}{a} \left(\int_0^a U'(x) dx - \int_0^a M_1(x) dx \right)$$

Не трудно видеть, что $\int_0^a M_1(x) dx = 0$, таким образом

$$U_{1,0} = \frac{1}{a} \int_0^a (U'(x) - M_1(x)) dx = \frac{U(a) - U(0)}{a}$$

Т.е. доказано утверждение (1.3.57). Не трудно заметить, что $M_2'(x) = M_1(x)$. Таким образом необходимо показать, что

$$\frac{\pi}{a} \sum_{m=1}^{\infty} U_{2,m+4} m \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{1,m+2} \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \quad (1.3.58)$$

а именно:

$$\frac{m\pi}{a} \int_0^a (U(x) - M_2(x)) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \int_0^a (U'(x) - M_1(x)) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \quad (1.3.59)$$

Для этого проинтегрируем левую часть (1.3.59) по частям:

$$\begin{aligned} \frac{m\pi}{a} \int_0^a (U(x) - M_2(x)) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx &= \left[-(U(x) - M_2(x)) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right]_0^a + \\ &+ \int_0^a (U'(x) - M_1(x)) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \end{aligned} \quad (1.3.60)$$

Можно заметить, что $M_2(0) = U(0)$, $M_2(a) = U(a)$, значит в выражении (1.3.60) слагаемое

$$\left[-(U(x) - M_2(x)) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right]_0^a = 0$$

Значит

$$\frac{m\pi}{a} \int_0^a (U(x) - M_2(x)) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \int_0^a (U'(x) - M_1(x)) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx$$

Утверждение (1.3.58) доказано, а значит

$$\begin{aligned} U'(x) &= M_1(x) + U_{1,0} + \sum_{m=1}^{\infty} U_{1,m+2} \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) = \frac{U(a) - U(0)}{a} + U''(0) \left(x - \frac{x^2}{2a} - \frac{a}{3} \right) + \\ &+ U''(a) \left(\frac{x^2}{2a} - \frac{a}{6} \right) + \frac{\pi}{a} \sum_{m=1}^{\infty} U_{2,m+4} m \cos\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

Т.е. доказано, что при однократном дифференцировании (1.3.55) полученное разложение сходится всюду к значениям $U'(x)$ на отрезке $x \in [0..a]$.

Покажем теперь, что разложение, полученное двукратным дифференцированием (1.3.55) по x сходится всюду к значениям $U''(x)$ на отрезке $x \in [0..a]$. Продифференцируем (1.3.56) по x

$$U''(0)\left(1-\frac{x}{a}\right)+U''(a)\frac{x}{a}-\frac{\pi^2}{a^2}\sum_{m=1}^{\infty}U_{m+4}m^2\sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right) \quad (1.3.61)$$

Покажем, что полученное в результате дифференцирования разложение (1.3.61) идентично представлению $U''(x)$ в виде суммы специальной граничной функции нулевого порядка $M_0(x)$ и ряда Фурье по синусам, т.е.

$$U''(x) = M_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} U_{0,m+2} \sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right), \quad M_0(x) = f(0)\left(1-\frac{x}{a}\right) + f(a)\frac{x}{a}$$

где $f(x) = U''(x)$, а значит $f(0) = U''(0)$, $f(a) = U''(a)$. Этим мы покажем, что при двукратном почленном дифференцировании ряда (1), разложение (1.3.61) будет сходиться всюду к значениям $U''(x)$ на отрезке $x \in [0..a]$. Не трудно заметить, что $M_2''(x) = M_0(x)$. Таким образом необходимо показать, что

$$-\frac{\pi^2}{a^2}\sum_{m=1}^{\infty}U_{2,m+4}m^2\sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}U_{0,m+2}\sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right) \quad (1.3.62)$$

а именно:

$$-\left(\frac{\pi}{am}\right)^2 \int_0^a (U(x) - M_2(x)) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \int_0^a (U''(x) - M_0(x)) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \quad (1.3.63)$$

Согласно (1.3.60), после интегрирования по частям левой части (1.3.63), выражение (1.3.63) можно переписать в следующем виде:

$$-\frac{m\pi}{a} \int_0^a (U'(x) - M_1(x)) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \int_0^a (U''(x) - M_0(x)) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \quad (1.3.64)$$

Проинтегрируем левую часть (1.3.64) по частям:

$$\begin{aligned} & -\frac{m\pi}{a} \int_0^a (U'(x) - M_1(x)) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx = \\ & -\frac{m\pi}{a} \left[(U'(x) - M_1(x)) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right]_0^a + \int_0^a (U''(x) - M_0(x)) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \end{aligned} \quad (1.3.65)$$

Не трудно видеть, что $M_1(0) = U'(0)$, $M_1(a) = U'(a)$, значит в выражении (1.3.65) слагаемое

$$-\frac{m\pi}{a} \left[(U'(x) - M_l(x)) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \right]_0^a = 0$$

Значит равенство (1.3.64) справедливо. Это значит, что

$$U''(x) = M_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} U_m'' \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) = U''(0) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + U''(a) \frac{x}{a} - \frac{\pi^2}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} U_m m^2 \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right)$$

т.е. ряд, полученный двукратным дифференцированием (1.3.55) по x сходится всюду к значениям $U''(x)$ на отрезке $x \in [0..a]$. Теорема доказана.

Выбор разложения по косинусам или по синусам совершается исключительно из соображений удобства применения. Так, например, если в краевой задаче заданы граничные условия Дирихле, то обычно удобнее использовать быстрые синус-разложения, а для граничных условий Неймана часто удобнее применять быстрые косинус-разложения. Для любых других возможных способов задания граничных условий при решении можно применять любой удобный вид быстрых разложений – как по синусам, так и по косинусам.

1.4. Оператор быстрых разложений

Представим некоторую функцию $f(x)$ в виде быстрого синус-разложения:

$$f(x) = M_{2p}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \quad (1.4.66)$$

Считаем, что правая часть синус-разложения (1.4.66) получена действием оператора быстрых синус-разложений $Ch_{2p}(f(x))$ на функцию $f(x)$ на отрезке $[0, a]$

$$Ch_{2p}(f(x)) = \sum_{i=1}^{2p+2} \alpha_i g_i(x) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin m\pi \frac{x}{a} \quad (1.4.57)$$

Для определения коэффициентов α_i составим линейную систему

$$\sum_{i=1}^{2p+2} \alpha_i g_i^{(2j)}(0) = f^{(2j)}(0), \quad \sum_{i=1}^{2p+2} \alpha_i g_i^{(2j)}(a) = f^{(2j)}(a), \quad j = 0 \div p \quad (1.4.58)$$

Решая линейную систему определяются константы функции $M_{2p}(x)$. Коэффициенты Фурье f_m вычисляются с помощью интегралов

$$f_m = \frac{2}{a} \int_0^a [f(x) - M_{2p}] \sin m\pi \frac{x}{a} dx, \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.4.59)$$

Таким образом применение оператора быстрых разложений означает выполнение следующих действий:

1. Для функции $f(x)$ на концах отрезка $[0, a]$ вычислить все четные производные $f^{(2j)}(x)$, $j = 0 \div p$;
2. Решая систему (1.4.58) определить постоянные α_i для граничной функции M_{2p} ;
3. По формулам (1.4.59) вычислить значения коэффициентов ряда Фурье для разности $f(x) - M_{2p}$;

Рассмотрим быстрое косинус-разложение

$$f(x) = M_{2p-1} + f_0 + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \cos m\pi \frac{x}{a} \quad (1.4.60)$$

Считаем, что правая часть получена действием оператора быстрых косинус-разложений $Ch_{2^{p-1}}(f(x))$, т.е.

$$Ch_{2^{p-1}}(f(x)) = \sum_{i=1}^{2^p} \beta_i h_i(x) + f_0 + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \cos m\pi \frac{x}{a} \quad (1.4.61)$$

Таким образом получаем систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^{2^p} \beta_i h_i^{(2j-1)}(0) = f^{(2j-1)}(0) , \quad \sum_{i=1}^{2^p} \beta_i h_i^{(2j-1)}(a) = f^{(2j-1)}(a) , \quad j = 1 \div p \quad (1.4.62)$$

Решая систему (1.4.62) определяются константы граничной функции $M_{2^{p-1}}$. Коэффициенты для ряда Фурье f_0 и f_m определяются с помощью интегралов

$$f_0 = \frac{1}{a} \int_0^a [f(x) - M_{2^{p-1}}] dx , \quad f_m = \frac{2}{a} \int_0^a [f(x) - M_{2^{p-1}}] \cos m\pi \frac{x}{a} dx , \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.4.63)$$

Применение оператора быстрых косинус-разложений выражается в выполнении следующих действий:

1. На границе отрезка $[0, a]$ для функции $f(x)$ вычисляются нечетные производные $f^{(2j-1)}(x)$, $j = 1 \div p$;
2. Из системы (1.4.62) вычислить коэффициенты β_i для граничной функции $M_{2^{p-1}}$;
3. По формулам из (1.4.63) вычислить f_0 и f_m для ряда Фурье.

1.5. Поточечный метод вычисления коэффициентов ряда Фурье

При решении задач или разложения некоторой функции зачастую возникают ситуации, когда необходимо провести вычисление сложных или неберущихся интегралов в исследуемой области для определения коэффициентов ряда Фурье. Быстрые разложения позволяют поточечно вычислять коэффициенты ряда Фурье, что выгодно отличает метод быстрых разложений от классического разложения Фурье.

Пусть функция класса $f(x) \in C^p(0 \leq x \leq a)$ представлена в виде быстрого разложения

$$f(x) = M_{2p}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \quad (1.5.64)$$

Для определения коэффициентов этого разложения применим оператор быстрых синус разложений, который подразумевает выполнение следующих действий:

1. Для функции $f(x)$ на концах отрезка $[0, a]$ вычислить все четные производные $f^{(2j)}(x)$, $j = 0 \div p$;
2. Решая систему вида (1.4.58) определяем постоянные α_i для граничной функции M_{2p} .

Для вычисления коэффициентов f_m воспользуемся поточечным методом. Проведем равномерное разбиение рассматриваемой области $[0, a]$ на равные отрезки в виде

$$x_m = m\Delta, \quad \Delta = \frac{a}{N+1}, \quad m = 1..N.. \quad (1.5.65)$$

Подставляя значения x_m из (1.5.65) в разложение (1.5.64) получается замкнутая система алгебраических уравнений для определения коэффициентов ряда Фурье f_m .

1.6. Пример представления функции быстрым разложением по синусам. Сравнение поточечного метода и метода Фурье

Покажем, что значения коэффициентов Фурье, определенных поточечным методом, практически не отличаются от значений, полученных с помощью интегралов. В качестве примера приведем сравнение невязок разложения трех различных функций:

1. $\sin(5.3\pi x)$ – быстро осциллирующая функция;
2. x^{10} – быстро возрастающая функция;
3. $\sin(1.2\pi x)$ – тестовая функция без особенностей;

в частичный ряд Фурье по синусам

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad \varphi_m = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin m\pi \frac{x}{a} dx \quad (1.6.66)$$

и в быстрый ряд по синусам

$$f(x) = M_{2p}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} f_{2p,m} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right) \quad (1.6.67)$$

с граничными функциями $M_{2p}(x)$, $p = 0 \div 3$ на отрезке $x \in [0, 1]$.

Для проведения сравнения выберем граничные функции следующих порядков:

$$M_0(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$$

$$M_2(x) = f(0)(1-x) + f(1)x + f''(0) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3} \right) + f''(1) \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6} \right)$$

$$M_4(x) = f(0)(1-x) + f(1)x + f''(0) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3} \right) + f''(1) \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6} \right) +$$

$$+ f^{(4)}(0) \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{18} + \frac{x}{45} \right) + f^{(4)}(1) \left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{36} + \frac{7x}{360} \right)$$

$$\begin{aligned}
M_6(x) &= f(0)(1-x) + f(1)x + f''(0)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3}\right) + f''(1)\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right) + \\
&+ f^{(4)}(0)\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{18} + \frac{x}{45}\right) + f^{(4)}(1)\left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{36} + \frac{7x}{360}\right) + \\
&+ f^{(6)}(0)\left(\frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040} - \frac{x^5}{360} + \frac{x^3}{270} - \frac{2x}{945}\right) + f^{(6)}(1)\left(\frac{x^7}{5040} - \frac{x^5}{720} + \frac{7x^3}{2160} - \frac{31x}{15120}\right)
\end{aligned}$$

Коэффициенты Фурье в разложении (1.6.67) вычисляются следующими способами:

1. Интеграл Фурье от разности $f(x) - M_{2p}(x)$:

$$f_{2p,m} = 2 \int_0^1 (f(x) - M_{2p}(x)) \sin(m\pi x) dx, \quad p = 0 \div 3 \quad (1.6.68)$$

2. Поточечный способ [72]:

$$\begin{aligned}
f_{2p,m}^* &= \left(\sum_{k=1}^N (f(x_k) - M_{2p}(x_m)) \sin(m\pi x_k) \right) / \sum_{k=1}^N \sin^2(m\pi x_k) \quad (1.6.69) \\
x_k &= k/(N+1), \quad k = 1 \div N, \quad p = 0 \div 3
\end{aligned}$$

Разложение для функции $\sin(5.3\pi x)$ с граничными функциями $M_0 - M_6$ будут иметь вид:

$$\sin(5.3\pi x) = x \sin(5.3\pi) + \sum_{m=1}^N f_{0,m} \sin(m\pi x), \quad x \in [0,1]$$

$$\sin(5.3\pi x) = x \sin(5.3\pi) - 5.3^2 \pi^2 \sin(5.3\pi) \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6} \right) + \sum_{m=1}^N f_{2,m} \sin(m\pi x), \quad x \in [0,1]$$

$$\begin{aligned}
\sin(5.3\pi x) &= x \sin(5.3\pi) - 5.3^2 \pi^2 \sin(5.3\pi) \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6} \right) + \\
&+ 5.3^4 \pi^4 \sin(5.3\pi) \left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{36} + \frac{7x}{360} \right) + \sum_{m=1}^N f_{4,m} \sin(m\pi x), \quad x \in [0,1]
\end{aligned}$$

$$\sin(5.3\pi x) = x \sin(5.3\pi) - 5.3^2 \pi^2 \sin(5.3\pi) \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6} \right) + 5.3^4 \pi^4 \sin(5.3\pi) \left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{36} + \frac{7x}{360} \right) -$$

$$- 5.3^6 \pi^6 \sin(5.3\pi) \left(\frac{x^7}{5040} - \frac{x^5}{720} + \frac{7x^3}{2160} - \frac{31x}{15120} \right) + \sum_{m=1}^N f_{6,m} \sin(m\pi x), \quad x \in [0,1]$$

Для разностей $\sin(5.3\pi x) - M_{2p}$, $p = 0 \div 3$ определяются коэффициенты Фурье

$$f_{0,m} = \frac{2 \cdot 5.3^2 (-1)^m \sin(5.3\pi)}{m\pi(5.3^2 - m^2)}; \quad f_{2,m} = \frac{2 \cdot 5.3^4 (-1)^m \sin(5.3\pi)}{m^3 \pi(5.3^2 - m^2)};$$

$$f_{4,m} = \frac{2 \cdot 5.3^6 (-1)^m \sin(5.3\pi)}{m^5 \pi(5.3^2 - m^2)}; \quad f_{6,m} = \frac{2 \cdot 5.3^8 (-1)^m \sin(5.3\pi)}{m^7 \pi(5.3^2 - m^2)}$$

Приведем график, иллюстрирующий скорость убывания коэффициентов Фурье вычисленных для классического частичного ряда Фурье по синусам (1.6.66), для быстрого разложения (1.6.67) (граничная функция M_0 – нулевого порядка) с помощью интегралов (1.6.68) и поточечным способом (1.6.69).

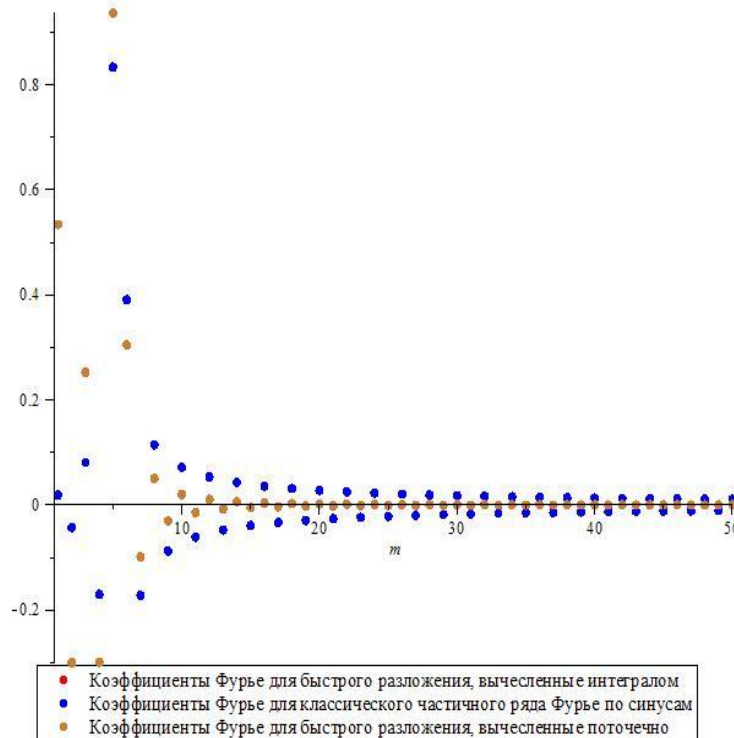


Рис. 1.6.1. График значений коэффициентов Фурье в классическом и быстром разложениях при использовании различных методов вычислений коэффициентов

На Рисунке 1.6.1 показано, что значения коэффициентов Фурье для быстрого разложения практически одинаковы в случае их вычислений с помощью интегралов (1.6.68) и поточечным способом (1.6.69) (отличий на графике не видно, таблица значений коэффициентов приведена в приложении А, Таблица А.11). На рисунке 1.6.2 приведено три графика: график функции, график быстрого разложения этой функции, график частичного ряда Фурье по синусам при учете $N = 7$ членов в ряде Фурье. Коэффициенты ряда находились с помощью интегралов.

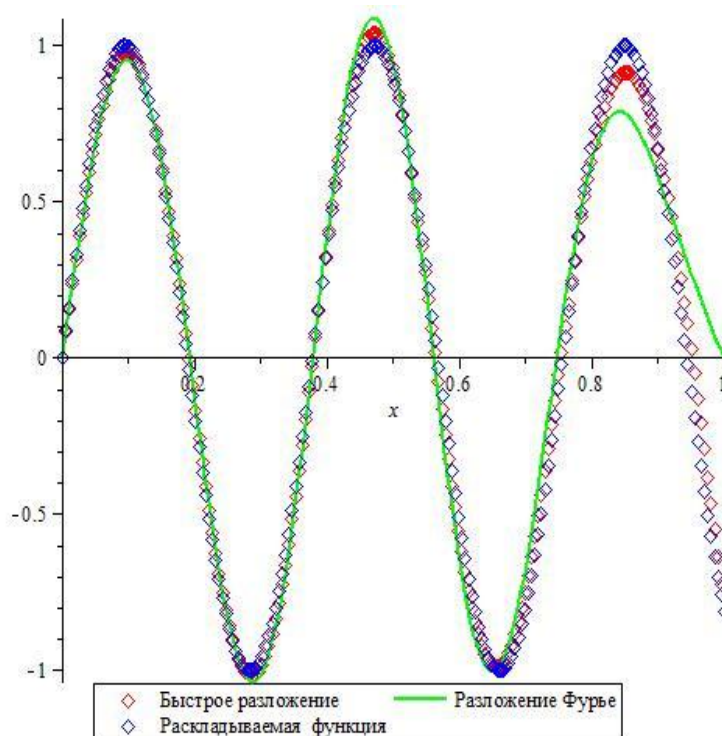


Рис. 1.6.2. Сравнение приближенной функции, полученной с помощью быстрого разложения и графика точной функции

Визуально по рисунку 1.6.2 можно заметить погрешность, заметную в масштабе графика. Построим график разности (абсолютную погрешность) между функцией и её приближенными представлениями на отрезке $x \in [0,1]$ при учете $N = 7$ членов в ряде Фурье.

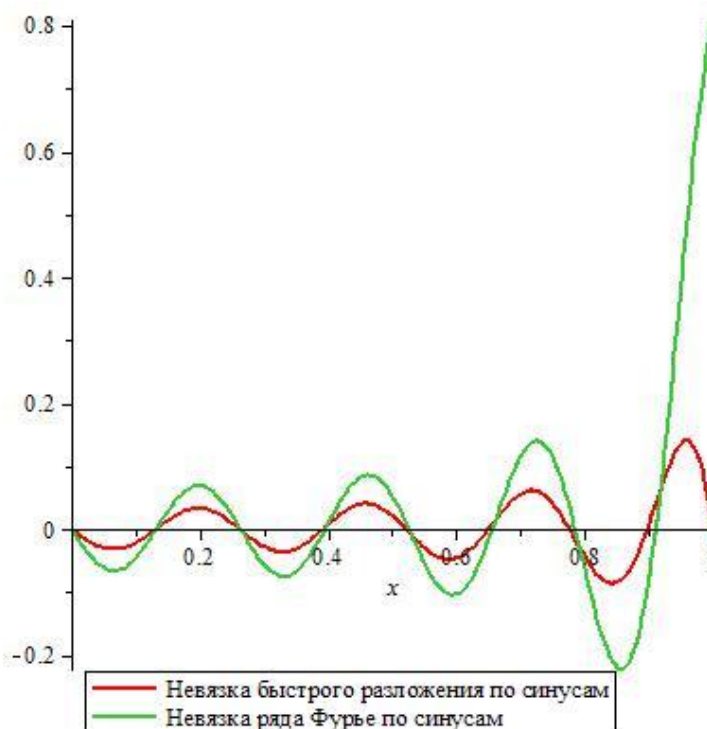


Рис. 1.6.3. График абсолютной погрешности быстрого разложения и ряда Фурье по синусам. Проведем подобные вычисления для каждой из трех выбранных функций.

Разложение для функции $f(x) = x^{10}$ с граничными функциями $M_0 - M_6$ будут иметь вид:

$$x^{10} \approx x + \sum_{m=1}^N f_{0,m} \sin(m\pi x), \quad x \in [0, 1]$$

$$x^{10} = 15x^3 - 10x + \sum_{m=1}^N f_{2,m} \sin(m\pi x), \quad x \in [0, 1]$$

$$x^{10} = 84x + 42x^2 - 125x^3 + \sum_{m=1}^N f_{4,m} \sin(m\pi x), \quad x \in [0, 1]$$

$$x^{10} = 30x^7 - 168x^5 + 365x^3 - 226x + \sum_{m=1}^N f_{6,m} \sin(m\pi x), \quad x \in [0, 1]$$

Для разностей $x^{10} - M_{2p}$, $p = 0 \div 3$ определяются коэффициенты $f_{2p,m}$, $m = 1..N$, $p = 0 \div 3$ Фурье с помощью интеграла:

$$f_{0,m} = \frac{(-1)^m}{m^3 \pi^3} \left(180 - \frac{10080}{m^2 \pi^2} + \frac{302400}{m^4 \pi^4} - \frac{3628800}{m^6 \pi^6} + \frac{7257600}{m^8 \pi^8} \right)$$

$$f_{2,m} = \frac{(-1)^m}{m^5 \pi^5} \left(\frac{302400}{m^2 \pi^2} - \frac{3628800}{m^4 \pi^4} + \frac{7257600}{m^6 \pi^6} - 10080 \right)$$

$$f_{4,m} = \frac{(-1)^m}{m^7 \pi^7} \left(302400 - \frac{3628800}{m^2 \pi^2} + \frac{7257600}{m^4 \pi^4} \right)$$

$$f_{6,m} = \frac{(-1)^m}{m^9 \pi^9} \left(\frac{7257600}{m^2 \pi^2} - 3628800 \right)$$

Разложение для функции $f(x) = \sin(1.2\pi x)$ с граничными функциями $M_0 - M_6$ будут иметь вид:

$$\sin(1.2\pi x) = x \sin(1.2\pi) + \sum_{m=1}^N f_{0,m} \sin(m\pi x), \quad x \in [0,1]$$

$$\sin(1.2\pi x) = x \sin(1.2\pi) - 1.2^2 \pi^2 \sin(1.2\pi) \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6} \right) + \sum_{m=1}^N f_{2,m} \sin(m\pi x), \quad x \in [0,1]$$

$$\begin{aligned} \sin(1.2\pi x) &= x \sin(1.2\pi) - 1.2^2 \pi^2 \sin(1.2\pi) \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6} \right) + \\ &+ 1.2^4 \pi^4 \sin(1.2\pi) \left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{36} + \frac{7x}{360} \right) + \sum_{m=1}^N f_{4,m} \sin(m\pi x), \quad x \in [0,1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(1.2\pi x) &= x \sin(1.2\pi) - 1.2^2 \pi^2 \sin(1.2\pi) \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6} \right) + 1.2^4 \pi^4 \sin(1.2\pi) \left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{36} + \frac{7x}{360} \right) - \\ &- 1.2^6 \pi^6 \sin(1.2\pi) \left(\frac{x^7}{5040} - \frac{x^5}{720} + \frac{7x^3}{2160} - \frac{31x}{15120} \right) + \sum_{m=1}^N f_{6,m} \sin(m\pi x), \quad x \in [0,1] \end{aligned}$$

Для разностей $\sin(1.2\pi x) - M_{2p}$, $p = 0 \div 3$ определяются коэффициенты $f_{2p,m}$, $m = 1..N$, $p = 0 \div 3$ Фурье с помощью интеграла:

$$f_{0,m} = \frac{2 \cdot 1.2^2 (-1)^m \sin(1.2\pi)}{m\pi(1.2^2 - m^2)}; \quad f_{2,m} = \frac{2 \cdot 1.2^4 (-1)^m \sin(1.2\pi)}{m^3 \pi(1.2^2 - m^2)}$$

$$f_{4,m} = \frac{2 \cdot 1.2^6 (-1)^m \sin(1.2\pi)}{m^5 \pi(1.2^2 - m^2)}; \quad f_{6,m} = \frac{2 \cdot 1.2^8 (-1)^m \sin(1.2\pi)}{m^7 \pi(1.2^2 - m^2)}$$

В таблицах А.1 – А.10 (Приложение А) приведены максимальные значения абсолютных погрешностей разложения функций, при применении интегралов Фурье и поточечного метода на отрезке $x \in [0..1]$, для всех исследуемых граничных функций $M_0...M_6$ при $N=1..40$, а также значения производных первого и второго порядка для каждого из методов и граничных функций $M_2...M_6$.

По результатам компьютерного эксперимента (Программа Б.1, Приложение Б) получено, что быстрое разложение имеет высокую скорость сходимости: малое количество учитываемых членов в ряде Фурье позволяет получить большую точность. Для достижения требуемой точности и экономии ресурсов ЭВМ целесообразнее повышать порядок граничной функции, нежели увеличивать число учитываемых членов в ряде Фурье. Сравнение значений невязок, полученных при использовании поточечного метода вычисления коэффициентов ряда Фурье (более экономичного с точки зрения аппаратно-временных затрат на ЭВМ) и интегралов Фурье, показывает, что с увеличением порядка используемой граничной функции разница абсолютных погрешностей, полученных с помощью поточечного метода и интегралов Фурье, становится незначительной, поэтому в случае использования граничных функций высоких порядков целесообразней использовать поточечный метод, как наиболее экономичный.

1.7. Вычисление сложных интегралов и интегралов с переменным верхним пределом

Пусть задана сложная функция одной переменной

$$y = f(x) \in L_2^{(2p+1)}(0 \leq x \leq a) \quad (1.7.70)$$

где p – некоторое заданное целое число. Здесь рассматриваются только непрерывные гладкие функции вместе со своими производными до порядка $(2p+1)$ включительно. Разрывы не допускаются в связи с тем, что в случае разрывных функций ряды Фурье медленно сходятся и не допускают почленное дифференцирование, что затрудняет их применение в исследованиях прикладного характера. Запишем интеграл

$$\int_0^x f(t) dt, \quad x \in [0, a] \quad (1.7.71)$$

Полагаем, что функция $f(x)$ сложная и интеграл (1.7.71) невозможно представить точно в явном конечном виде через элементарные функции. Подобные интегралы называют «неберущимися». Для решения проблемы на отрезке $x \in [0, a]$ представим $f(x)$ быстрым разложением с оператором Ch_{2p} , где для определенности и простоты изложения вначале положим $p=1$:

$$f(x) = M_2(x) + \sum_{m=1}^N f_{2,m} \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad M_2(x) = f(0) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + f(a) \frac{x}{a} + f''(0) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + f''(a) \left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) \quad (1.7.72)$$

где $f_{2,m}$ – коэффициенты Фурье для разности $f(x) - M_2(x)$, N – количество учитываемых членов в ряде Фурье, $M_2(x)$ – граничная функция.

Так как $f(x)$ сложная функция, то непосредственно применить МБСР не удастся из-за невозможности вычисления коэффициентов $f_{2,m}$ их интегральными

выражениями Фурье. Для вычисления $f_{2,m}$ используем поточечный метод. Для этого на отрезок $[0, a]$ нанесем равномерную сетку с N внутренними точками и быстрое разложение функции $f(x)$ из (1.7.72) заменим на другое

$$f(x) = M_2(x) + \sum_{m=1}^N f_{2,m}^* \sin m\pi \frac{x}{a} \quad (1.7.73)$$

где выражение $M_2(x)$ остается неизменным, но коэффициенты $f_{2,m}^*$ вычисляются иным способом – поточечным из алгебраической системы, когда равенство (1.7.73) записывается в узлах равномерной сетки $\{x_k\}$:

$$\sum_{m=1}^N f_{2,m}^* \sin m\pi \frac{x_k}{a} = \varphi_2(x_k), \quad \varphi_2(x_k) = f(x_k) - M_2(x_k), \quad x_k = \frac{ka}{N+1}, \quad k = 1 \div N \quad (1.7.74)$$

Её решение удастся представить в явном конечном виде. Для этого левую и правую части равенства (1.7.74) умножим на $\sin n\pi x_k/a$ и просуммируем по k

$$\sum_{k=1}^N (f(x_k) - M_2(x_k)) \sin n\pi \frac{x_k}{a} = \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N f_{2,m}^* \sin m\pi \frac{x_k}{a} \sin n\pi \frac{x_k}{a} \quad (1.7.75)$$

В [34] доказано, что множество $\{\sin n\pi x_k/a\}$, $(n, k) = 1 \div N$ сохраняет свойство ортогональности на бесконечном отрезке, имеющее вид

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \sin m\pi \frac{x_k}{a} \sin n\pi \frac{x_k}{a} &= 0 \quad \text{при } m \neq n, \quad (m, n) = 1 \div N \\ \sum_{k=1}^N \sin m\pi \frac{x_k}{a} \sin n\pi \frac{x_k}{a} &= \sum_{k=1}^N \sin^2 n\pi \frac{x_k}{a} \quad \text{при } m = n \end{aligned} \quad (1.7.76)$$

Можно показать, что свойство (1.7.76) остается верным и для конечного отрезка $x \in [0, a]$. Сформулируем теорему о связи коэффициентов Фурье f_m с поточечными коэффициентами f_m^* тригонометрической интерполяции.

Теорема 3: пусть функция $f(x)$ на отрезке $x \in [0, a]$ представлена в виде ряда Фурье

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} f_m \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a \\ f(0) &= f(a) = 0, \quad f(x) \in C^{(0)}, \quad 0 \leq x \leq a \end{aligned} \quad (1.7.77)$$

и тригонометрической суммой

$$f(x) \approx \sum_{m=1}^N f_m^* \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad f(0) = f(a) = 0, \quad 0 \leq x \leq a \quad (1.7.78)$$

на равномерной сетке

$$\Delta x = x_n - x_{n-1} = a/(N+1), \quad n = 0 \div N, \quad x_0 = 0, \quad x_{N+1} = a, \quad x_n = n\Delta x.$$

Тогда поточечные коэффициенты f_m^* и коэффициенты Фурье f_m связаны предельным равенством:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_m^* = f_m, \quad m = 1 \div N \rightarrow \infty$$

Доказательство. Левую и правую части равенства (1.7.78) умножим на $\sin(p\pi x_n/a) \Delta x$ и просуммируем по индексу n :

$$\sum_{n=1}^N f(x_n) \sin\left(p\pi \frac{x_n}{a}\right) \Delta x = \sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=1}^N f_m^* \sin m\pi \frac{x_n}{a} \right) \sin\left(p\pi \frac{x_n}{a}\right) \Delta x, \quad p = 1 \div N \quad (1.7.79)$$

В правой части (1.7.79) поменяем местами знаки суммирования и в обеих частях равенства перейдем к пределу

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{n=1}^N f(x_n) \sin\left(p\pi \frac{x_n}{a}\right) \Delta x = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{m=1}^N f_m^* \left(\sum_{n=1}^N \sin m\pi \frac{x_n}{a} \sin\left(p\pi \frac{x_n}{a}\right) \right) \Delta x \quad (1.7.80)$$

Система функций $\{\sin m\pi x_n/a\}$ на равномерной сетке отрезка $[0, a]$ является ортогональной, т.е.

$$\sum_{n=1}^N \sin m\pi \frac{x_n}{a} \sin\left(p\pi \frac{x_n}{a}\right) = 0 \quad \text{при } m \neq p$$

С учетом данного свойства равенство (1.7.80) упрощается

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{n=1}^N f(x_n) \sin\left(p\pi \frac{x_n}{a}\right) \Delta x = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \left(f_m^* \sum_{n=1}^N \sin^2 p\pi \frac{x_n}{a} \Delta x \right) \quad (1.7.81)$$

Пределы интегральных сумм в (1.7.81) заменим на определенные интегралы

$$\int_0^a f(x) \sin\left(p\pi \frac{x}{a}\right) dx = \left(\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} f_m^* \right) \int_0^a \sin^2 p\pi \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2} a \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} f_m^*$$

Отсюда получаем

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} f_m^* = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(p\pi \frac{x}{a}\right) dx = f_m$$

Теорема доказана.

Таким образом справедливо следующее равенство:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_{2,m} = \lim_{N \rightarrow \infty} f_{2,m}^*, \quad \forall m = 1 \div N \quad (1.7.82)$$

Теперь из (1.7.75) при помощи свойства (1.7.76) найдем коэффициенты

$$f_{2,m}^* = \sum_{k=1}^N (f(x_k) - M_2(x_k)) \sin m\pi \frac{x_k}{a} / \sum_{k=1}^N \sin^2 m\pi \frac{x_k}{a}, \quad m = 1 \div N \quad (1.7.83)$$

Свойство (1.7.82) позволяет предположить: если для рассматриваемых гладких функций разложение (1.7.72) с рядом Фурье в его правой части быстро сходится, то и разложение (1.7.73), где $f_{2,m}^*$ определяются из поточечной системы (1.7.83), тоже быстро сходится. Это предположение подтверждается многочисленными численными экспериментами, которые приводятся ниже.

Представляя $f(x)$ поточечным равенством (1.7.73), где $f_{2,m}^*$ находятся по формуле (1.7.83), с высокой точностью получим искомое выражение для определенного интеграла (1.7.71) с переменным верхним пределом:

$$J_2(x) = \int_0^x f(t) dt = f(0) \left(x - \frac{x^2}{2a} \right) + f(a) \frac{x^2}{2a} + f''(0) \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24a} - \frac{ax^2}{6} \right) + f''(a) \left(\frac{x^4}{24a} - \frac{ax^2}{12} \right) + \sum_{m=1}^N \frac{a}{m\pi} f_{2,m}^* \left(1 - \cos m\pi \frac{x}{a} \right) \quad (1.7.84)$$

Функция $J_2(x)$ в (1.7.84) допускает возможность дифференцирования до третьего порядка включительно. Относительные погрешности для функции $f(x) = (1+x)^{10}$ и её производных при $N=10$ приведены в Таблице 1.7.1:

Табл. 1.7.1. Относительные погрешности для функции $f(x) = (1+x)^{10}$ и её производных при $N=10$

$\Delta J_2(x)$	$\Delta J_2'(x)$	$\Delta J_2''(x)$	$\Delta J_2'''(x)$
2.38×10^{-3}	7×10^{-5}	4.98×10^{-4}	3.9×10^{-3}
$x = 1$	$x = 0.96$	$x = 1$	$x = 0.96$

Точность вычисления интеграла (1.7.84) значительно повышается при использовании в быстром разложении (1.7.72) вместо $M_2(x)$ граничной функции $M_4(x)$ более высокого (четвертого) порядка

$$\begin{aligned}
f(x) &= M_4(x) + \sum_{m=1}^N f_{4,m}^* \sin m\pi \frac{x}{a}, \quad M_4(x) = f(0) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + f(a) \frac{x}{a} + \\
&+ f''(0) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + f''(a) \left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) + \\
&+ f^{(4)}(0) \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120a} - \frac{ax^3}{18} + \frac{a^3x}{45}\right) + f^{(4)}(a) \left(\frac{x^5}{120a} - \frac{ax^3}{36} + \frac{7a^3x}{360}\right)
\end{aligned} \tag{1.7.85}$$

Введем обозначения

$$\varphi_4(x_k) = f(x_k) - M_4(x_k), \quad \varphi_4(x_k) = \sum_{m=1}^N f_{4,m}^* \sin m\pi \frac{x_k}{a}, \quad x_k = \frac{ka}{N+1}, \quad k = 1 \div N \tag{1.7.86}$$

Используя обозначение $\varphi_4(x_k)$, данное в первом равенстве (1.7.86), коэффициенты $f_{4,m}^*$, подобно (1.7.83), можно записать в виде

$$f_{4,m}^* = \sum_{k=1}^N \varphi_4(x_k) \sin m\pi \frac{x_k}{a} / \sum_{k=1}^N \sin^2 m\pi \frac{x_k}{a}, \quad m = 1 \div N \tag{1.7.87}$$

Подставляя $f(x)$ и $M_4(x)$ из (1.7.85) в (1.7.71), после интегрирования будем иметь формулу для вычисления определенного интеграла с переменным верхним пределом, когда используется БСР с оператором Ch_4 :

$$\begin{aligned}
J_4(x) &= \int_0^x f(t) dt = f(0) \left(x - \frac{x^2}{2a}\right) + f(a) \frac{x^2}{2a} + f''(0) \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24a} - \frac{ax^2}{6}\right) + \\
&+ f''(a) \left(\frac{x^4}{24a} - \frac{ax^2}{12}\right) + f^{(4)}(0) \left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{720a} - \frac{ax^4}{72} + \frac{a^3x^2}{90}\right) + \\
&+ f^{(4)}(a) \left(\frac{x^6}{720a} - \frac{ax^4}{144} + \frac{7a^3x^2}{720}\right) + \sum_{m=1}^N \frac{a}{m\pi} f_{4,m}^* \left(1 - \cos m\pi \frac{x}{a}\right)
\end{aligned} \tag{1.7.88}$$

Функция $J_4(x)$ в (1.7.88) допускает возможность дифференцирования до пятого порядка включительно. Относительные погрешности (Программа Б.3, Приложение Б) для функции $f(x) = (1+x)^{10}$ и её производных при $N=10$ приведены в Таблице 1.7.2:

Табл. 1.7.2. Относительные погрешности для функции $f(x) = (1+x)^{10}$ и её производных при $N = 10$

$\Delta J_4(x)$	$\Delta J_4'(x)$	$\Delta J_4''(x)$	$\Delta J_4'''(x)$	$\Delta J_4^{(4)}(x)$	$\Delta J_4^{(5)}(x)$
1.1×10^{-5}	3.38×10^{-7}	2.1×10^{-6}	1.85×10^{-5}	1.8×10^{-4}	1.83×10^{-3}
$x = 1$	$x = 0.96$	$x = 1$	$x = 0.96$	$x = 1$	$x = 0.96$

Скорость сходимости ряда для квадратуры еще более повышается при использовании в (1.7.85) вместо $M_4(x)$ граничной функции $M_6(x)$, т.е.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= M_6(x) + \sum_{m=1}^N f_{6,m} \sin m\pi \frac{x}{a}, \\
 M_6(x) &= f(0) \left(1 - \frac{x}{a}\right) + f(a) \frac{x}{a} + f''(0) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{3}\right) + \\
 &+ f''(a) \left(\frac{x^3}{6a} - \frac{ax}{6}\right) + f^{(4)}(0) \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120a} - \frac{ax^3}{18} + \frac{a^3x}{45}\right) + \\
 &+ f^{(4)}(a) \left(\frac{x^5}{120a} - \frac{ax^3}{36} + \frac{7a^3x}{360}\right) + f^{(6)}(a) \left(\frac{x^7}{7!a} - \frac{ax^5}{6!} + \frac{7a^3x^3}{36 \cdot 60} - \frac{31a^5x}{7! \cdot 3}\right) + \\
 &+ f^{(6)}(0) \left(\frac{x^6}{6!} - \frac{x^7}{7!a} - \frac{ax^5}{4 \cdot 90} + \frac{a^3x^3}{3 \cdot 90} - \frac{4a^5x}{6! \cdot 3}\right) + \\
 &+
 \end{aligned} \tag{1.7.89}$$

Вспомогательную функцию $\varphi_6(x_k)$, подобно (1.7.86), определим равенством

$$\varphi_6(x_k) = f(x_k) - M_6(x_k), \quad \varphi_6(x_k) = \sum_{m=1}^N f_{6,m}^* \sin m\pi \frac{x_k}{a}, \quad x_k = \frac{ka}{N+1}, \quad k = 1 \div N \tag{1.7.90}$$

Коэффициенты $f_{6,m}^*$, по аналогии с (1.7.87), найдем из выражения

$$f_{6,m}^* = \sum_{k=1}^N \varphi_6(x_k) \sin m\pi \frac{x_k}{a} / \sum_{k=1}^N \sin^2 m\pi \frac{x_k}{a}, \quad m = 1 \div N \tag{1.7.91}$$

При использовании разложения (1.7.89) интеграл (1.7.71) с переменным верхним пределом представляется формулой

$$\begin{aligned}
J_6(x) = & \int_0^x f(t) dt = f(0) \left(x - \frac{x^2}{2a} \right) + f(a) \frac{x^2}{2a} + f''(0) \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24a} - \frac{ax^2}{6} \right) + \\
& + f''(a) \left(\frac{x^4}{24a} - \frac{ax^2}{12} \right) + f^{(4)}(0) \left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^6}{720a} - \frac{ax^4}{72} + \frac{a^3x^2}{90} \right) + \\
& + f^{(6)}(0) \left(\frac{x^7}{7 \cdot 6!} - \frac{x^8}{8 \cdot 7!a} - \frac{ax^6}{24 \cdot 90} + \frac{a^3x^4}{12 \cdot 90} - \frac{4a^5x^2}{6 \cdot 6!} \right) + \\
& + f^{(6)}(a) \left(\frac{x^8}{8 \cdot 7!a} - \frac{ax^6}{6 \cdot 6!} + \frac{7a^3x^4}{36 \cdot 240} - \frac{31a^5x^2}{6 \cdot 7!} \right) + \\
& + f^{(4)}(a) \left(\frac{x^6}{720a} - \frac{ax^4}{144} + \frac{7a^3x^2}{720} \right) + \sum_{m=1}^N \frac{a}{m\pi} f_{6,m}^* \left(1 - \cos m\pi \frac{x}{a} \right)
\end{aligned} \tag{1.7.92}$$

Функция $J_6(x)$ в (1.7.92) допускает возможность дифференцирования седьмого порядка включительно. Относительные погрешности для функции $f(x) = (1+x)^{10}$ и её производных при $N=10$ приведены в Таблице 1.7.3:

Табл. 1.7.3. Относительные погрешности для функции $f(x) = (1+x)^{10}$ и её производных при $N=10$

$\Delta J_6(x)$	$\Delta J_6''(x)$	$\Delta J_6'''(x)$	$\Delta J_6^{(4)}(x)$	$\Delta J_6^{(5)}(x)$	$\Delta J_6^{(6)}(x)$	$\Delta J_6^{(7)}(x)$
2.55×10^{-8} $x=1$	3.12×10^{-7} $x=1$	3.71×10^{-8} $x=0.96$	3.12×10^{-7} $x=1$	3.55×10^{-6} $x=0.96$	4.93×10^{-5} $x=1$	6.8×10^{-4} $x=0.96$

При одинаковом значении N квадратура (1.7.88) более точная по сравнению с (1.7.84), а квадратура (1.7.92) еще точнее по сравнению с (1.7.88). Т.е. с ростом порядка $2p$ оператора Ch_{2p} , как и с увеличением N – числа учитываемых членов в рядах Фурье, погрешность быстро уменьшается. По этой причине предложенный здесь МБСР целесообразно применять для проведения высокоточных расчетов.

Сравнить полученные результаты для интегралов с переменным верхним пределом от сложных функций с результатами других авторов не представляется возможным, так как нам неизвестны другие методы для применения в подобных случаях.

Ниже в таблицах приведено сравнение данного в работе метода МБСР с методом Симпсона, когда для рассматриваемой подынтегральной функции $f(x)$ существует первообразная и оба предела постоянные $[0,1]$. Это дает возможность сравнить данные два метода с точным значением интеграла. В первом примере выбрана гладкая функция $\sin(1.2\pi x)$, во втором примере быстро осциллирующая $\sin(5.3\pi x)$, в третьем функция, имеющая участок резкого возрастания $(1+x)^{10}$. Сравнения сделаны для случаев, когда в быстрых разложениях используются три граничные функции четных порядков M_2, M_4, M_6 . При этом количество внутренних точек бралось одинаковым и равным $N=10$. Для метода Симпсона величина N подбиралась так, чтобы погрешность Δ была одинаковой с методом МБСР. Результаты приведены в следующей Таблице 1.7.4:

Табл. 1.7.4. Сравнение интегрирования с помощью МБР и метода Симпсона

Функция	Метод		Метод		Метод	
	Симпсон	МБСР Ch_2	Симпсон	МБСР Ch_4	Симпсон	МБСР Ch_6
$\sin(0.3\pi x)$	$\Delta = 4.66 \times 10^{-9}$		$\Delta = 2.44 \times 10^{-12}$		$\Delta = 1.42 \times 10^{-15}$	
N	28	10	170	10	194	10
$\sin(5.3\pi x)$	$\Delta = 5.45 \times 10^{-4}$		$\Delta = 9.1 \times 10^{-5}$		$\Delta = 1.677 \times 10^{-5}$	
N	20	10	30	10	42	10
$(1+x)^{10}$	$\Delta = 2.381 \times 10^{-3}$		$\Delta = 1.1 \times 10^{-5}$		$\Delta = 2.548 \times 10^{-8}$	
N	24	10	86	10	378	10

Отсюда можно сделать выводы:

- 1) Погрешность при использовании МБСР с оператором Ch_6 на несколько порядков меньше по сравнению с методом Симпсона (более 100 раз).

- 2) С ростом порядка оператора Ch_{2p} при неизменном N погрешность быстро уменьшается.
- 3) С увеличением N погрешность быстро уменьшается.

1.8. Представление неявно заданной функции в явном «аналитическом» виде с помощью быстрых разложений и вычисление определенного интеграла с переменным верхним пределом

Решение поставленной здесь проблемы представляет определенный интерес при рассмотрении различных прикладных вопросов, а также при необходимости вычисления определенных интегралов с переменным верхним пределом или при проведении других исследований. На первый взгляд постановка самой задачи о вычислении подобного интеграла от неявно заданной функции является противоречивой. Ведь функция в явной форме отсутствует и потому как же можно вычислить подобный определенный интеграл, да еще и с переменным верхним пределом. В классической литературе и научных статьях данная проблема вообще не обсуждается. Вполне возможно, что здесь она рассматривается впервые. В этой связи вначале решим вспомогательную задачу о приближенном представлении неявно заданной функции в явном «аналитическом» виде при помощи метода быстрых разложений. Это позволит вычислять $f(x)$ и её производные до $(2p+1)$ -го порядка включительно в любой внутренней точке и на концах отрезка $[0, a]$.

Обычно под аналитической функцией понимают функцию, которая непрерывна вместе со всеми своими производными любого конечного порядка в области определения. Ниже мы будем называть функцию аналитической, если она непрерывна вместе со всеми своими производными до некоторого заданного конечного m -го порядка включительно на данном отрезке $[0, a]$ и её можно вычислить не только в узловых точках, но и при любом $\forall x \in [0, a]$. Подобное определение необходимо в связи с применением теории быстрых разложений, так как здесь используются ряды Фурье, допускающие почленное дифференцирование некото-

рое ограниченное заданное число раз. Поэтому над словом «аналитическая» в дальнейшем кавычки будем опускать.

Пусть некоторая функция

$$y = f(x) \in (L_2, C^{(2p+1)})(\forall x \in [0, a]) , S^*(f) \quad (1.8.93)$$

задана на отрезке $x \in [0, a]$ неявной формой

$$F(x, y) = 0 , F(x, y) \in C^{(2p+1)}(\Omega_{\square}) , (x, y) \in \Omega_{\square} (0 \leq x \leq a , 0 \leq y \leq b) \quad (1.8.94)$$

Здесь $2p+1$ – целое число. Под $S^*(f)$ в (1.8.93) будем понимать некоторое дополнительное условие, позволяющее выделить единственное из множества возможных решений уравнения (если они есть) $F(x_k, y_k) = 0$ относительно y_k при любом $0 \leq x_k \leq a$. Предположим, что неявная функция (1.8.93), определенная зависимостью (1.8.94), существует, единственна и удовлетворяет требованиям, указанным в (1.8.93). Размеры прямоугольника $\Omega_{\square} = a \times b$ в (1.8.94) считаем конечными и известными. Полагая в (1.8.94) $x=0$ и затем $x=a$, определим значения функции на концах отрезка $[0, a]$

$$y_0 = f(0) \text{ и } y_a = f(a) \quad (1.8.95)$$

Для существования зависимости (1.8.93) в приближенном явном виде при использовании метода МБСР необходимо наложить условия на частные производные

$$F_y(x, y) \neq 0 , \left| F_{x \dots x, y \dots y, (x, y)} \right| < \infty , \forall (i+j) = 0 \div 2p+1 , (x, y) \in \Omega_{\square} \quad (1.8.96)$$

Здесь $(i+j)$ – суммарный порядок частной производной. Для возможности представления $f(x)$ быстрым разложением вычислим производную от равенства (1.8.94) как от сложной функции по переменной x , учитывая возможную зависимость $y = f(x)$, записанную в (1.8.93):

$$F_x(x, y) + F_y(x, y)y' = 0 \quad (1.8.97)$$

Из (1.8.97) получаем известное выражение для первой производной, что позволяет вычислить её значения на концах отрезка, необходимые для применения метода МБСР

$$\begin{aligned} y'(x) &= -F_x(x, y)/F_y(x, y), \\ y'(0) &= -F_x(0, y_0)/F_y(0, y_0), \quad y'(a) = -F_x(a, y_a)/F_y(a, y_a) \end{aligned} \quad (1.8.98)$$

После повторного дифференцирования (1.8.97), как сложную функцию по x , найдем $y''(x)$, необходимую для построения граничной функции $M_{2p}(x)$.

$$F_{xx}(x, y) + 2F_{xy}(x, y)y' + F_{yy}(x, y)y'^2 + F_y(x, y)y'' = 0 \quad (1.8.99)$$

Из (1.8.99) вычислим значения второй производной на концах отрезка

$$\begin{aligned} y''(x) &= -(F_{xx}(x, y) + 2F_{xy}(x, y)y' + F_{yy}(x, y)y'^2)/F_y(x, y) \\ y''(0) &= -(F_{xx}(0, y) + 2F_{xy}(0, y)y' + F_{yy}(0, y)y'^2)/F_y(0, y_0) \\ y''(a) &= -(F_{xx}(a, y) + 2F_{xy}(a, y)y' + F_{yy}(a, y)y'^2)/F_y(a, y) \end{aligned} \quad (1.8.100)$$

Подобным образом находятся все четные производные $y^{(2p)}(0)$, $y^{(2p)}(a)$, используемые в конструкции граничной функции $M_{2p}(x)$.

Для построения $M_{2p}(x)$ произвольного четного порядка приведем достаточно удобную рекуррентную формулу. Для этого запишем $M_{2p}(x)$ суммой

$$M_{2p}(x) = \sum_{m=0}^p (f^{(2m)}(0)P_{2m}(x) + f^{(2m)}(a)Q_{2m}(x)), \quad x \in [0, a] \quad (1.8.101)$$

Здесь $f^{(2m)}(0)$, $f^{(2m)}(a)$ – значения четных производных $2m$ -го порядка раскладываемой функции $f(x)$ на концах отрезка $[0, a]$, $P_{2m}(x)$, $Q_{2m}(x)$ – полиномы, которые определяются следующим образом. Вначале запишем граничную функцию $M_0(x)$ нулевого порядка

$$M_0(x) = f(0)\left(1 - \frac{x}{a}\right) + f(a)\frac{x}{a}, \quad P_0(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right), \quad Q_0(x) = \frac{x}{a} \quad (1.8.102)$$

В (1.8.102) даны полиномы $P_0(x)$ и $Q_0(x)$ нулевого порядка. Рекуррентные формулы для $P_{2m}(x)$, $Q_{2m}(x)$ при $m=1 \div p$ записываются следующими интегральными

выражениями: если известны полиномы $P_{2m-2}(x)$, $Q_{2m-2}(x)$, то полиномы порядка $P_{2m}(x)$, $Q_{2m}(x)$ вычислим через ниже приведенные неопределенные интегралы с учетом их значений на концах отрезка $[0, a]$:

$$\begin{aligned} P_{2m}(x) &= \int \left(\int P_{2m-2}(x) dx \right) dx, \quad P_{2m}(0) = P_{2m}(a) = 0, \\ Q_{2m}(x) &= \int \left(\int Q_{2m-2}(x) dx \right) dx, \quad Q_{2m}(0) = Q_{2m}(a) = 0, \quad m = 1 \div p \end{aligned} \quad (1.8.103)$$

Теперь можно представить неявно заданную функцию $f(x)$ с оператором Ch_{2p} порядка $2p$ быстрым разложением:

$$f(x) = M_{2p}(x) + \sum_{m=1}^N f_{2p,m} \sin m\pi \frac{x}{a} \quad (1.8.104)$$

где $f_{2p,m}$ – коэффициенты ряда Фурье для разности $f(x) - M_{2p}(x)$, N – число учитываемых членов ряда, $M_{2p}(x)$ – граничная функция. Её конкретный вид приводится в (1.7.72) при $p=1$, в (1.7.85) при $p=2$, в (1.7.89) при $p=3$.

Разложение (1.8.104) обеспечивает быструю сходимость ряда Фурье. Хотя $f(x)$ и задана неявно, но значения всех четных производных $f^{(2m)}(0), f^{(2m)}(a)$, $m = 0 \div p$ для определения $M_{2p}(x)$ можно считать найдены. При $p=1$ данные производные представлены формулами (1.8.100). Для завершения построения $M_2(x)$ остается найти коэффициенты Фурье $f_{2,m}$, но их интегральные выражения неизвестны, так как зависимость $f(x)$ явно неизвестна. Поэтому в дальнейшем используем поточечный способ.

Для решения задачи на отрезок $[0, a]$ равномерно нанесем N внутренних точек x_k :

$$x_k = ak / (N + 1), \quad k = 1 \div N \quad (1.8.105)$$

Будем полагать, что функция $F(x, y)$ такова, что при выполнении условий $S^*(f)$ в (1.8.93) неизвестные y_k найдем из алгебраических уравнений

$$F(x_k, y_k) = 0, \quad x_k = ak/(N+1), \quad k = 1 \div N \quad (1.8.106)$$

Используя формулы тригонометрической интерполяции [34], выражение (1.8.104) заменим на следующее

$$f(x) = M_2(x) + \sum_{m=1}^N f_{2,m}^* \sin m\pi \frac{x}{a} \quad (1.8.107)$$

где коэффициенты $f_{2,m}^*$ определяются из линейной системы, полученной из (1.8.107) при $x = x_k$:

$$f(x_k) = y_k = M_2(x_k) + \sum_{m=1}^N f_{2,m}^* \sin m\pi \frac{x_k}{a}, \quad k = 1 \div N \quad (1.8.108)$$

Здесь величины y_k считаем уже найденными из уравнений (1.107). Подобным же образом можно построить $M_{2p}(x_k)$ и вычислить коэффициенты $f_{2p,m}^*$. Затем по формуле, аналогичной формулам (1.7.84), (1.7.88), (1.7.92), в зависимости от величины порядка $2p$, вычисляется интеграл с переменным верхним пределом от неявно заданной функции.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу: найти определенный интеграл (1.7.71) с переменным верхним пределом от неявно заданной функции

$$x^2 + y^2 = 2\sin(xy + 0.9) + 4, \quad x \in [0, 1], \quad y \geq 0 \quad (1.8.109)$$

Полагая в (1.8.109) $x = x_k = k/11$, $k = 0 \div 11$, вычислим $\{y_k\}$.

Возьмем $2p = 6$, так как оператор Ch_6 шестого порядка дает очень высокую точность. Тогда, подобно (1.8.100), надо вычислить все производные $y^{(n)}(0), y^{(n)}(1)$ $n = 1 \div 6$

Вычислим значения $M_6(x_k)$ и затем по формуле $\varphi_6(x_k) = f(x_k) - M_6(x_k)$ найдем $\varphi_6(x_k)$. Из (1.7.91) найдем коэффициенты $f_{6,m}^*$. После подстановки производных $y^{(2n)}(0), y^{(2n)}(1)$, $n = 0, 1, 2, 3$ и коэффициентов $f_{6,m}^*$ из (1.7.91) будем иметь в (1.8.104)

неявно заданную функцию приближенно в явном виде (Программа Б.2, Приложение Б). Оценка погрешности Δ вычислялась по формуле

$$\Delta = \sup \left| y(x) - M_6(x) - \sum_{m=1}^N f_{6,m}^* \sin m\pi x \right| \quad (1.8.110)$$

где значения $y(x)$ вычислялись из выражения (1.8.104).

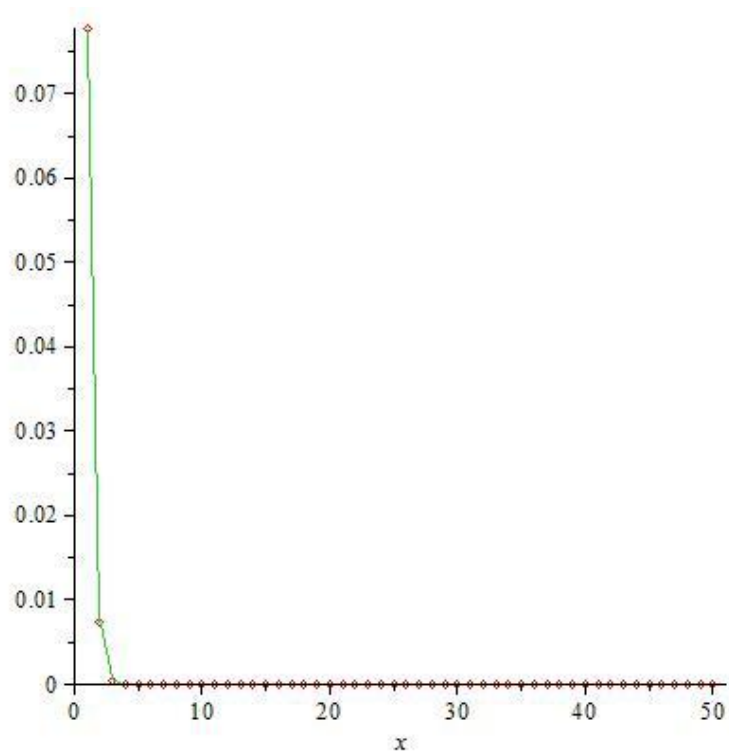


Рисунок 1.8.4. График погрешности представления неявной функции.

На рисунке 1.8.4. представлен график погрешности представления неявной функции приближенном явном виде, зависящий от N . Точные значения погрешности приведены в таблице А.12, приложение А.

Из (1.7.92) получаем искомую зависимость интеграла от переменной $x \in [0,1]$ сразу на всем отрезке в явном виде с высокой точностью.

Приведенные численные примеры показывают очень высокую точность и быструю сходимость метода. Кроме предложенного здесь метода МБСР точно также может быть развит метод быстрых косинус-разложений (МБКР). Оба метода можно применять для решения сложных систем интегро – дифференциальных уравнений.

1.9. Пример реализации метода быстрых разложений для решения сложных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

Решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений представляют большой интерес для таких областей науки и техники, как теплофизика, акустика, механика, космонавтика. Однако построение решения для подобных задач сопряжено с рядом трудностей из-за нелинейных выражений и интегралов от неизвестных функций. Это создает большие трудности при применении современных численных методов. Возможность применения известных нелинейных аналитических методов весьма проблематична.

В качестве примера рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + y' \int_0^1 xy dx - y^3 = \frac{\pi^2}{9} \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \frac{3\sqrt{3} - \pi}{2\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) - \sin^3\left(\frac{\pi x}{3}\right) \quad (1.9.111)$$

с условиями Коши вида

$$y(0) = 0 \quad (1.9.112)$$

$$y'(0) = \pi/3 \quad (1.9.113)$$

Особенность задачи (1.9.111) – (1.9.113) заключается в том, что в левой части уравнения кроме нелинейного слагаемого y^3 присутствует произведение производной y' и определенного интеграла от неизвестной функции.

Правая часть уравнения (1.9.111) и граничные условия (1.9.112), (1.9.113) подобраны таким образом, чтобы было известно одно точное решение задачи Коши (1.111) – (1.113), которое имеет вид $y(x) = \sin(\pi x/3)$. Это позволяет точно вычислить погрешность, сопоставляя приближенное решение с точным.

Согласно методу быстрых разложений, неизвестную функцию $y(x)$ представим в виде суммы специальной граничной функции M_2 – второго порядка и ряда Фурье

$$y(x) = M_2(x) + \sum_{m=1}^N a_m \sin(m\pi x) \quad (1.9.114)$$

$$M_2(x) = y(0)(1-x) + y(1)x + y''(0)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3}\right) + y''(1)\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right) \quad (1.9.115)$$

В (1.9.115) $y(0)$ известно из граничного условия (1.9.112).

$$y(1), y''(0), y''(1), a_m, m = 1 \div N \quad (1.9.116)$$

В (1.9.116) $y(1), y''(0), y''(1)$ – три неизвестных коэффициента специальной граничной функции, a_m – неизвестные коэффициенты ряда Фурье для разности $y(x) - M_2(x)$, N – количество учитываемых членов в ряде. Величины (1.9.116) (всего $3 + N$ неизвестных) находятся в процессе решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения (1.9.111) и из граничного условия (1.9.113). В разложении (1.9.114) используется специальная граничная функция M_2 – второго порядка, так как, согласно методу быстрых разложений, порядок граничной функции должен быть не меньше порядка рассматриваемого дифференциального уравнения. Для нахождения констант из (1.9.116) подставим разложение (1.9.114) в уравнение (1.9.111)

$$\begin{aligned} & y''(0)(1-x) + y''(1)x - \pi^2 \sum_{m=1}^N a_m m^2 \sin(n\pi x) + \\ & + \left(y(1) + y''(0) \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} \right) + y''(1) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6} \right) + \pi \sum_{m=1}^N a_m m \cos(n\pi x) \right) \\ & \left(\frac{y(1)}{3} - \frac{7y''(0)}{360} - \frac{y''(1)}{45} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^N \frac{(-1)^m}{n} a_m \right) - \\ & - \left(y(1)x + y''(0) \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3} \right) + y''(1) \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6} \right) + \sum_{m=1}^N a_m \sin(m\pi x) \right)^3 = \\ & = -\frac{1}{9} \pi^2 \sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right) + \frac{-\pi + 3\sqrt{3}}{2\pi} \cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right) - \sin^3\left(\frac{1}{3}\pi x\right) \end{aligned} \quad (1.9.117)$$

Левую и правую части уравнения (1.9.117) будем рассматривать как функции от независимой переменной x , к которым следует применить быстрое разложение.

Разность порядков выбранной нами специальной граничной функции M_2 и интегро-дифференциального уравнения (1.9.111) $2-2=0$ – равна нулю, поэтому, согласно методу быстрых разложений, к левой и правой частям уравнения (1.9.117) следует применить оператор быстрых разложений Ch_0 – нулевого порядка. Это означает, что для получения замкнутой нелинейной алгебраической системы относительно неизвестных, указанных в (1.9.117), по определению оператора Ch_0 необходимо вычислить значение обеих частей уравнения (1.9.117) в крайних точках границы $x=0$ и $x=1$. Затем обе части уравнения (1.9.117) умножим на $\sin(p\pi x)$, $p=1 \div N$ и проинтегрируем в пределах $x \in [0,1]$. Таким образом получается незамкнутая система из $2+N$ нелинейных алгебраических уравнений относительно $3+N$ неизвестных. Для замыкания этой системы необходимо подставить быстрое разложение (1.9.114) в граничное условие (1.9.113) (последнее третье уравнение). В результате получаем замкнутую систему нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных из (1.9.116).

Решение такой системы выполнено на ЭВМ (Программа Б.4, Приложение Б). В Таблице 1.9.1 приведены значения постоянных специальной граничной функции и коэффициенты ряда Фурье при $N=5$.

Табл. 1.9.1. Значения коэффициентов приближенного аналитического решения задачи (1.9.111) – (1.9.113) при $N=5$

Значения коэффициентов приближенного аналитического решения задачи (1.9.111) – (1.9.113)							
$y(1)$	$y''(0)$	$y''(1)$	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
8.66×10^{-1}	3.24×10^{-6}	-9.5×10^{-1}	7.65×10^{-3}	-2.18×10^{-4}	2.83×10^{-5}	-6.68×10^{-6}	2.16×10^{-6}

Зная точное решение можно определить величину погрешности $\delta(N)$ при учете $N=1\div 11$ членов ряда Фурье, которая приведена в Таблице 1.9.2.

Табл. 1.9.2. Значения погрешности приближенного аналитического решения задачи (1.9.111) – (1.9.113) при $N=1\div 11$

Значения погрешности приближенного решения задачи (1.9.111) – (1.9.113)					
N	1	2	3	4	5
$\delta(N)$	1.03×10^{-3}	1.76×10^{-4}	5.5×10^{-5}	1.98×10^{-5}	1.007×10^{-5}
6	7	8	9	10	11
4.78×10^{-6}	3.05×10^{-6}	1.67×10^{-6}	1.21×10^{-6}	7.24×10^{-7}	5.73×10^{-7}

Из численного эксперимента (Таблица 1.9.2) получено, что при $N=1\div 11$ точность решения быстро растет с ростом N . В Таблице 1.9.3 приведены значения невязки нелинейной интегро-дифференциальной задачи (1.9.111) – (1.9.113). Анализ этих результатов показывает, что при решении задач такого класса методом быстрых разложений в ряде Фурье достаточно использовать порядка нескольких десятков членов для получения приближенного аналитического решения с высокой точностью.

Табл. 1.9.3. Значения невязки решения задачи (1.9.111) – (1.9.113) при $N=1\div 11$

Значения величины невязки задачи (1.9.111) – (1.9.113)					
N	1	2	3	4	5
$\delta(N)$	1.12×10^{-2}	4.12×10^{-3}	2.1×10^{-3}	1.27×10^{-3}	8.53×10^{-4}
6	7	8	9	10	11
6.11×10^{-4}	4.59×10^{-4}	3.57×10^{-4}	2.86×10^{-4}	2.34×10^{-4}	1.95×10^{-4}

Для определения влияния каждого члена уравнения (1.9.111) на сходимость ряда при малом количестве учитываемых членов ряда Фурье N поочередно будем исключать эти члены, меняя соответствующим образом правую часть так, чтобы

одно точное решение $y(x) = \sin(\pi x/3)$ не изменялось. Исследуем следующие два случая

$$y'' - y^3 = -\frac{\pi^2}{9} \sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right) - \sin^3\left(\frac{1}{3}\pi x\right), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{\pi}{3} \quad (1.9.118)$$

$$y'' + y' \int_0^1 xy dx = -\frac{\pi^2}{9} \sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right) - \frac{-\pi + 3\sqrt{3}}{2\pi} \cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{\pi}{3} \quad (1.9.119)$$

В случае (1.9.118) был исключен интегро-дифференциальный член уравнения, а в задаче (1.9.119) отброшено только нелинейное слагаемое y^3 . Каждую из задач (1.9.118), (1.9.119), решаем методом быстрых разложений.

Уравнения в задачах (1.9.118) и (1.9.119) – второго порядка, поэтому последовательность действий при получении решений этих задач аналогичны действиям, выполненным в решении задачи (1.9.111) – (1.9.113) (Программы Б.5, Б.6. Приложение Б).

Табл. 1.9.4.. Значения погрешности приближенного решения задачи (1.9.118).

Значения погрешности приближенного решения задачи (1.9.118) при $N = 1 \div 11$					
N	1	2	3	4	5
$\delta(N)$	1.36×10^{-3}	2.39×10^{-4}	7.17×10^{-5}	2.7×10^{-5}	1.31×10^{-5}
6	7	8	9	10	11
6.5×10^{-6}	3.97×10^{-6}	2.27×10^{-6}	1.58×10^{-6}	9.85×10^{-7}	7.47×10^{-7}

Табл. 1.9.5. Значения величины невязки задачи (1.9.118).

Значения величины невязки задачи (1.9.118) при $N = 1 \div 11$					
N	1	2	3	4	5
$\delta(N)$	1.11×10^{-2}	4.11×10^{-3}	2.1×10^{-3}	1.27×10^{-3}	8.52×10^{-4}
6	7	8	9	10	11
6.1×10^{-4}	4.58×10^{-4}	3.57×10^{-4}	2.86×10^{-4}	2.34×10^{-4}	1.95×10^{-4}

Из сравнения погрешности при рассмотрении задачи (1.9.111) – (1.9.113) и (1.9.118) можно сделать вывод, что интегро-дифференциальный член уравнения незначительно влияет на точность получаемого решения.

Табл. 1.9.6. Значения погрешности приближенного решения задачи (1.119).

Значения погрешности приближенного решения задачи (1.119) при $N = 1 \div 11$					
N	1	2	3	4	5
$\delta(N)$	9.56×10^{-4}	1.53×10^{-4}	5.06×10^{-5}	1.73×10^{-5}	9.2×10^{-6}
6	7	8	9	10	11
4.5×10^{-6}	2.77×10^{-6}	1.51×10^{-6}	1.1×10^{-6}	6.68×10^{-7}	5.19×10^{-7}

Табл. 1.9.7. Зависимость величины невязки уравнения (1.119) от N

Значения величины невязки задачи (1.119) при $N = 1 \div 11$					
N	1	2	3	4	5
$\delta(N)$	1.09×10^{-2}	4.05×10^{-3}	2.1×10^{-3}	1.27×10^{-3}	8.5×10^{-4}
6	7	8	9	10	11
6.1×10^{-4}	4.58×10^{-4}	3.57×10^{-4}	2.86×10^{-4}	2.33×10^{-4}	1.95×10^{-4}

В результате численного эксперимента (Таблицы 1.9.6, 1.9.7) можно сделать вывод, что при применении метода быстрых разложений к решению линейной задачи (1.9.119) характер погрешности существенно не изменяется, как и в случае с задачей (1.9.118).

Рассмотрим задачу с нелинейным интегро-дифференциальным уравнением первого порядка

$$y' \int_0^1 xy dx - y^3 = \frac{-\pi + 3\sqrt{3}}{2\pi} \cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right) - \sin^3\left(\frac{1}{3}\pi x\right), \quad y(0) = 0 \quad (1.9.120)$$

Для решения воспользуемся специальной граничной функцией второго порядка (1.9.115). Так как уравнение задачи (1.9.120) первого порядка, а порядок используемой граничной функции второй, то разница порядков равна 1. Это значит,

что для того, чтобы получить систему алгебраических уравнений чтобы определить неизвестные (1.9.116) быстрого разложения (1.9.115) следует воспользоваться оператором быстрых разложений первого порядка для определения коэффициентов быстрого разложения. Для этого быстрое разложение (1.9.115) с граничной функцией (1.9.116) следует подставить в уравнение задачи (1.9.120) и проинтегрировать результат в пределах $x \in [0..1]$, а затем продифференцировать уравнение по x и получить еще два уравнения, полагая $x = 0$ и $x = 1$.

Уравнения для определения коэффициентов Фурье быстрого разложения строятся аналогичным образом, как и в предыдущих задачах.

Табл. 1.9.8. Значения погрешности приближенного решения задачи (1.9.120)

Значения погрешности приближенного решения задачи (1.9.120) при $N = 1 \div 11$					
N	1	2	3	4	5
$\delta(N)$	9.39×10^{-4}	9.35×10^{-5}	7.72×10^{-4}	1.1×10^{-5}	1.2×10^{-4}
6	7	8	9	10	11
2.7×10^{-6}	3.2×10^{-5}	9.65×10^{-7}	1.25×10^{-5}	4.26×10^{-7}	6.12×10^{-6}

Табл. 1.9.9. Зависимость величины невязки уравнения (1.9.120) от N

Значения величины невязки задачи (1.9.120) при $N = 1 \div 11$					
N	1	2	3	4	5
$\delta(N)$	7.27×10^{-4}	2.36×10^{-4}	1.68×10^{-3}	3.98×10^{-5}	3.51×10^{-4}
6	7	8	9	10	11
1.28×10^{-5}	1.16×10^{-4}	5.63×10^{-6}	5.45×10^{-5}	2.96×10^{-6}	3.09×10^{-5}

Результаты, приведенные в Таблицах 1.9.8, 1.9.9 имеют характерную особенность. Она заключается в том, что для задачи вида (1.9.120) на порядок погрешности решения влияет четность или нечетность выбора N . Несмотря на то, что как в случае четности, так и в случае нечетности N погрешность быстро па-

дает, в случае, когда количество учитываемых членов в ряде Фурье четное, погрешность на порядок меньше, чем для нечетного N .

Рассмотрим случай, когда для уравнения (1.9.111) вместо граничных условий Коши заданы краевые условия

$$y(0) = 0 \quad (1.9.121)$$

$$y(1) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1.9.122)$$

Ход решения краевой задачи (1.9.111), (1.9.121), (1.9.122) аналогичен решению задачи Коши (1.9.111) – (1.9.113) и результаты приведены в Таблицах 1.9.10, 1.9.11 (Программа Б.7. Приложение Б).

Табл. 1.9.10. Значения погрешности приближенного решения задачи (1.9.111), (1.9.121), (1.9.122).

Значения погрешности приближенного решения задачи (1.9.111), (1.9.121), (1.9.122) при $N = 1 \div 11$					
N	1	2	3	4	5
$\delta(N)$	2.45×10^{-4}	3.64×10^{-5}	9.94×10^{-6}	3.7×10^{-6}	1.67×10^{-6}
6	7	8	9	10	11
8.62×10^{-7}	4.88×10^{-7}	2.95×10^{-7}	1.9×10^{-7}	1.28×10^{-7}	8.86×10^{-8}

Табл. 1.9.11. Зависимость величины невязки уравнения (1.9.111) от N

Значения величины невязки задачи (1.9.111) при $N = 1 \div 11$					
N	1	2	3	4	5
$\delta(N)$	1.11×10^{-2}	4.11×10^{-3}	2.1×10^{-3}	1.27×10^{-3}	8.53×10^{-4}
6	7	8	9	10	11
6.11×10^{-4}	4.59×10^{-4}	3.57×10^{-4}	2.86×10^{-4}	2.34×10^{-4}	1.95×10^{-4}

В случае, когда для уравнения (1.9.111) заданы краевые граничные условия, ряды Фурье быстро сходятся.

Для решения нелинейных интегро-дифференциальных задач метод быстрых разложений демонстрирует свою высокую эффективность. Но следует принимать во внимание, что при рассмотрении нелинейных интегро-дифференциальных уравнений на получение приближенного решения методом быстрых разложений существенно влияет форма задания граничных условий. Из численных экспериментов получено, что в случае граничных условия Коши возможна неустойчивость по отношению к выбору четного или нечетного малого количества учитываемых членов в ряде Фурье. Если характер предполагаемого решения неизвестен, то из анализа невязки при малом четном и нечетном N следует выбрать то решение, для которого невязка дифференциального уравнения достаточно мала.

Глава 2. Исследование контактного термического сопротивления в конечном цилиндре с внутренним источником методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий

2.1. Постановка задачи и согласование граничных условий

Будем рассматривать более близкий к реальному случаю цилиндр конечной высоты h , с внутренним отверстием радиуса r_0 и внешним радиусом R , т.е. $\Omega = (r_0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq h)$. В частности, величину внутреннего радиуса r_0 можно принимать малой величиной и тогда форма цилиндра будет приближаться к сплошной. Температуру стержня U полагаем гладкой функцией из класса $U \in \{C^{(5)}(0 \leq z \leq h) \times C^{(7)}(r_0 \leq r \leq R)\}$.

Пусть на боковой поверхности цилиндрический стержень внутри и снаружи термоизолирован

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (2.1.1)$$

На верхнем торце при $z = h$ считаем температуру постоянной, на нижнем при $z = 0$ задан непрерывный неравномерный тепловой поток, обусловленный макронеровностями

$$U|_{z=h} = U_0 \quad (2.1.2)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0} = b\psi(r), \quad b \geq 0, \quad \psi(r) \geq 0, \quad r_0 \leq r \leq R \quad (2.1.3)$$

Коэффициент b находится экспериментально. Конкретную зависимость $\psi(r)$ подберем так, чтобы частная производная от температуры на торце при $z = 0$ была всюду положительной кроме зон, где нарушен тепловой контакт из-за предполагаемых макронеровностей и потому тепловой поток равен нулю. Наличие зон нарушения теплового контакта на торце $z = 0$ вносит дополнительные ограничения на выбор зависимости $\psi(r)$. Для простоты будем считать, что вследствие

макронеровностей нарушение теплового контакта будет происходить на некоторых окружностях $r = r_i = r_0 + \frac{i}{j+1}(R - r_0)$, $i = 1 \div j$, $z = 0$ где j – заранее заданное количество таких кольцевых зон, т. е.

$$\psi(r) \geq 0, \quad \psi(r_i) = 0 \quad (2.1.4)$$

Первое неравенство в (2.1.4) объясняется тем, что здесь рассматривается случай, когда тепло передается от более нагретого рассматриваемого цилиндра другому телу.

Ниже будет построено приближенное аналитическое решение задачи, справедливое во всех точках цилиндра, включая его границы и угловые точки. Для этого, из соображений непрерывности решения задачи в углах области Ω , потребуем, чтобы граничные условия были согласованы между собой. Так, если в (2.1.1) положить $z = h$, а левую и правую части (2.1.2) продифференцировать по r и положить в них $r = r_0$, а затем $r = R$, то получим тождества, т.е. в двух точках $(r = r_0, z = h)$, $(r = R, z = h)$ согласованность выполняется. Если (2.1.1) и (2.1.2) продифференцировать по z и положить $z = 0$, затем тепловой поток из (2.1.3) продифференцировать по r и положить $r = r_0$ и $r = R$, то получим, что из условия непрерывности частной производной $\partial^2 U / \partial r \partial z$ функция $\psi(r)$ должна удовлетворять дополнительным равенствам

$$\psi'(r_0) = \psi'(R) = 0 \quad (2.1.5)$$

При выполнении (2.1.5) граничные условия (2.1.1) и (2.1.3) будут согласованы между собой в точках $(r = r_0, z = 0)$, $(r = R, z = 0)$. Невыполнение условий согласований (2.1.5) приводит к разрывам в углах области цилиндра, так как иначе значение $\partial^2 U / \partial r \partial z$ будет зависеть от направления подхода к угловым точкам $(r = r_0, z = 0)$, $(r = R, z = 0)$.

Запишем дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + Q_0 = 0 \quad (2.1.6)$$

Здесь Q_0 – постоянный внутренний источник тепловой энергии, обусловленный, например, термоядерной реакцией внутри стержня, или другими причинами. Кроме (2.1.5) в угловых точках цилиндра существуют еще дополнительные условия согласования граничных условий. Для их записи в явном виде из (2.1.1) – (2.1.3) в точке $(r = R, z = 0)$ получим вспомогательные выражения

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial^4 U}{\partial r \partial z^3} \Big|_{r=R} = 0 ; \quad \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = b\psi(r) \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial z} \Big|_{r=R, z=0} = b\psi'(R) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} = b\psi(r) &\Rightarrow \frac{\partial^3 U}{\partial r^2 \partial z} \Big|_{r=R, z=0} = b\psi''(R) , \quad \frac{\partial^4 U}{\partial r^3 \partial z} \Big|_{r=R, z=0} = b\psi'''(R) \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Для получения условий согласования к левой и правой частям уравнения (2.1.6) применим дифференциальный оператор $\partial^2 / \partial r \partial z$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 U}{\partial z \partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial r} + \frac{\partial^4 U}{\partial r \partial z^3} = 0 \quad (2.1.8)$$

Полагая в (2.1.8) координаты точки $(r = R, z = 0)$ при помощи выражений (2.1.7) и (2.1.5) для данной точки найдем искомые условия согласования

$$R\psi'''(R) + \psi''(R) = 0 \quad (2.1.9)$$

Аналогично для точки $(r = r_0, z = 0)$ будем иметь условия согласования

$$r_0\psi'''(r_0) + \psi''(r_0) = 0 \quad (2.1.10)$$

Предложим одну из простейших зависимостей $\psi(r)$, удовлетворяющей условиям (2.1.4), (2.1.5), (2.1.9), (2.1.10):

$$\psi(r) = (r - R)^4 (1 - \cos 2\pi(j+1)t)(r - r_0)^4 , \quad t = \frac{r - r_0}{R - r_0} \in [0, 1] \quad (2.1.11)$$

Если уравнение (2.1.6) продифференцировать по переменной r , то с помощью (2.1.1) и (2.1.2) найдем, что граничные условия (2.1.1), (2.1.2) в точках (r_0, h) и (R, h) уже записаны в согласованном виде. Выполнение полученных условий

согласования позволяет строить решение задачи в пространстве гладких функций, справедливое во всех точках цилиндра вплоть до границы.

2.2 Выбор граничных функций и построение замкнутой системы дифференциальных уравнений для определения коэффициентов быстрых разложений

Представим температуру быстрым синус-разложением в виде суммы граничной функции четвертого порядка $M_4(r, z)$ и ряда Фурье:

$$\begin{aligned}
 U = M_4(r, z) + \sum_{m=1}^N u_m(r) \sin m\pi \frac{z}{h}, \quad M_4(r, z) = A_1(r) \left(1 - \frac{z}{h}\right) + \\
 + A_2(r) \frac{z}{h} + A_3(r) \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6h} - \frac{hz}{3}\right) + A_4(r) \left(\frac{z^3}{6h} - \frac{hz}{6}\right) + \\
 + A_5(r) \left(\frac{z^4}{24} - \frac{z^5}{120h} - \frac{hz^3}{18} + \frac{h^3 z}{45}\right) + A_6(r) \left(\frac{z^5}{120h} - \frac{hz^3}{36} + \frac{7h^3 z}{360}\right)
 \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

где N – число учитываемых членов в ряде Фурье (2.2.12), $A_1(r), A_2(r), A_3(r), A_4(r), A_5(r), A_6(r)$ – коэффициенты быстрого разложения. Выражение для $M_4(r, z)$ сконструировано так, чтобы обеспечить быструю сходимость ряда Фурье в (2.2.12) и существенно уменьшить невязку уравнения теплопроводности, т.е. повысить точность. При этом используется небольшое число слагаемых N . Кроме того, разложение (2.2.12) позволяет четыре раза дифференцировать почленно по z данный ряд, сходимость при этом сохраняется. В (2.2.12) выбран высокий порядок граничной функции M_4 (четвертый порядок), что позволит получить решение с высокой точностью. Итак, задача сведена к нахождению $N + 6$ коэффициентов, зависящих только от одной переменной r :

$$A_1(r) \div A_6(r), u_m(r), m = 1, 2, \dots, N \quad (2.2.13)$$

Для нахождения функций, указанных в (2.2.13), подставим выражение U из (2.2.12) в граничное условие (2.1.2):

$$A_2 = U_0 \quad (2.2.14)$$

Подставим U из (2.2.12) в уравнение теплопроводности (2.1.6) с учетом (2.2.14):

$$\begin{aligned}
& \left(A_1'' + \frac{1}{r} A_1' + A_3 \right) \left(1 - \frac{z}{h} \right) + A_4 \frac{z}{h} + \left(A_3'' + \frac{1}{r} A_3' + A_5 \right) \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6h} - \frac{hz}{3} \right) + \\
& + \left(A_4'' + \frac{1}{r} A_4' + A_6 \right) \left(\frac{z^3}{6h} - \frac{hz}{6} \right) + \left(A_6'' + \frac{1}{r} A_6' \right) \left(\frac{z^5}{120h} - \frac{hz^3}{36} + \frac{7h^3z}{360} \right) + \\
& + \left(A_5'' + \frac{1}{r} A_5' \right) \left(\frac{z^4}{24} - \frac{z^5}{120h} - \frac{hz^3}{18} + \frac{h^3z}{45} \right) + \\
& + \sum_{m=1}^N \left(u_m'' + \frac{1}{r} u_m' - m^2 \frac{\pi^2}{h^2} u_m \right) \sin m\pi \frac{z}{h} + Q_0 = 0
\end{aligned} \tag{2.2.15}$$

В разложении (2.2.12) использована граничная функция M_4 – четвертого порядка, а при подстановке в (2.1.6) от разложения вычисляется производная по z второго порядка. Разность порядков $4 - 2 = 2$, поэтому, согласно методу быстрых разложений, к уравнению (2.2.15) следует применить оператор быстрых синус-разложений второго порядка Ch_2 . Это означает, что в (2.2.15) сначала следует положить $z = 0$, затем $z = h$, после чего от обеих частей равенства (2.2.15) взять вторую производную по переменной z и вновь положить $z = 0$, $z = h$. В результате будем иметь четыре уравнения:

$$A_1'' + \frac{1}{r} A_1' + A_3 + Q_0 = 0, \quad A_3'' + \frac{1}{r} A_3' + A_5 = 0, \quad A_4 + Q_0 = 0, \quad A_6 = 0 \tag{2.2.16}$$

Из (2.2.16) и (2.2.14) найдем

$$\begin{aligned}
A_2 &= U_0, \quad A_4 = -Q_0, \quad A_6 = 0, \quad A_3 = -A_1'' - \frac{1}{r} A_1' - Q_0, \\
A_3' &= -A_1''' - \frac{1}{r} A_1'' + \frac{1}{r^2} A_1', \quad A_3'' = -A_1^{(4)} - \frac{1}{r} A_1''' + \frac{2}{r^2} A_1'' - \frac{2}{r^3} A_1', \\
A_5 &= -A_3'' - \frac{1}{r} A_3' = A_1^{(4)} + \frac{2}{r} A_1''' - \frac{1}{r^2} A_1'' + \frac{1}{r^3} A_1' \\
A_5' &= A_1^{(5)} + \frac{2}{r} A_1^{(4)} - \frac{3}{r^2} A_1''' + \frac{3}{r^3} A_1'' - \frac{3}{r^4} A_1' \\
A_5'' &= A_1^{(6)} + \frac{2}{r} A_1^{(5)} - \frac{5}{r^2} A_1^{(4)} + \frac{9}{r^3} A_1''' - \frac{12}{r^4} A_1'' + \frac{12}{r^5} A_1' \\
A_5'' + \frac{1}{r} A_5' &= A_1^{(6)} + \frac{3}{r} A_1^{(5)} - \frac{3}{r^2} A_1^{(4)} + \frac{6}{r^3} A_1''' - \frac{9}{r^4} A_1'' + \frac{9}{r^5} A_1'
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

При помощи первых трех равенств из (2.2.17) выражение для температуры U в (2.2.12) упрощается

$$U = A_1(r) \left(1 - \frac{z}{h}\right) + U_0 \frac{z}{h} + A_3(r) \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6h} - \frac{hz}{3}\right) - Q_0 \left(\frac{z^3}{6h} - \frac{hz}{6}\right) + \\ + A_5(r) \left(\frac{z^4}{24} - \frac{z^5}{120h} - \frac{hz^3}{18} + \frac{h^3 z}{45}\right) + \sum_{m=1}^N u_m(r) \sin m\pi \frac{z}{h} \quad (2.2.18)$$

Уравнение теплопроводности в виде (2.2.15) также становится более простым

$$\left(A_5'' + \frac{1}{r} A_5'\right) \left(\frac{z^4}{24} - \frac{z^5}{120h} - \frac{hz^3}{18} + \frac{h^3 z}{45}\right) + \\ + \sum_{m=1}^N \left(u_m'' + \frac{1}{r} u_m' - m^2 \frac{\pi^2}{h^2} u_m\right) \sin m\pi \frac{z}{h} = 0 \quad (2.2.19)$$

Теперь обе части равенства (2.2.19) умножим на $\sin m\pi z/h$, $m = 1 \div N$ и проинтегрируем по $z \in [0, h]$, что соответствует нахождению коэффициентов Фурье для левой части (2.2.19):

$$\left(A_5'' + \frac{1}{r} A_5'\right) \frac{2h^4}{m^5 \pi^5} + u_m'' + \frac{1}{r} u_m' - m^2 \frac{\pi^2}{h^2} u_m = 0, \quad m = 1 \div N \quad (2.2.20)$$

Отсюда исключим A_5 с помощью выражения для $A_5'' + A_5'/r$ через A_1 из последнего равенства в (2.2.17)

$$\left(A_1^{(6)} + \frac{3}{r} A_1^{(5)} - \frac{3}{r^2} A_1^{(4)} + \frac{6}{r^3} A_1''' - \frac{9}{r^4} A_1'' + \frac{9}{r^5} A_1'\right) \frac{2h^4}{m^5 \pi^5} + \\ + u_m'' + \frac{1}{r} u_m' - m^2 \frac{\pi^2}{h^2} u_m = 0, \quad m = 1 \div N \quad (2.2.21)$$

После подстановки U из (2.2.18) в граничные условия (2.1.1) получим:

$$\begin{aligned}
& A_1'(r_0) \left(1 - \frac{z}{h}\right) + A_3'(r_0) \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6h} - \frac{hz}{3}\right) + \\
& + A_5'(r_0) \left(\frac{z^4}{24} - \frac{z^5}{120h} - \frac{hz^3}{18} + \frac{h^3z}{45}\right) + \sum_{m=1}^N u_m'(r_0) \sin m\pi \frac{z}{h} = 0,
\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

$$\begin{aligned}
& A_1'(R) \left(1 - \frac{z}{h}\right) + A_3'(R) \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6h} - \frac{hz}{3}\right) + \\
& + A_5'(R) \left(\frac{z^4}{24} - \frac{z^5}{120h} - \frac{hz^3}{18} + \frac{h^3z}{45}\right) + \sum_{m=1}^N u_m'(R) \sin m\pi \frac{z}{h} = 0
\end{aligned}$$

Из (2.2.22) имеем граничные условия для функций, указанных в (2.2.13), при $r = r_0$ и $r = R$:

$$\begin{aligned}
& A_1'(r_0) = A_3'(r_0) = A_5'(r_0) = u_m'(r_0) = 0, \\
& A_1'(R) = A_3'(R) = A_5'(R) = u_m'(R) = 0, \quad m = 1 \div N
\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

После подстановки выражения температуры U из (2.2.18) в граничное условие (2.1.3) с учетом выражений (2.2.17) будем иметь

$$\frac{U_0 - A_1}{h} - \frac{h}{3} A_3 + \frac{h^3}{45} A_5 + \frac{hQ_0}{6} + \frac{\pi}{h} \sum_{m=1}^N m u_m = b\psi(r) \tag{2.2.24}$$

Подставляя в (2.2.24) выражения A_3 и A_5 через A_1 из (2.2.17), приходим к дифференциальному уравнению относительно A_1 и u_m :

$$\begin{aligned}
& \frac{h^3}{45} \left(A_1^{(4)} + \frac{2}{r} A_1''' \right) + \frac{h}{3} \left(1 - \frac{h^2}{15r^2} \right) A_1'' + \frac{h}{3r} \left(1 + \frac{h^2}{15r^2} \right) A_1' - \frac{1}{h} A_1 + \\
& + \frac{\pi}{h} \sum_{m=1}^N m u_m = b\psi(r) - \frac{U_0}{h} - \frac{hQ_0}{2}
\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

Равенства (2.2.21) и (2.2.25) представляют замкнутую линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений общего порядка $2N + 4$ относительно $N + 1$ неизвестных $A_1, u_m, m = 1 \div N$.

Рассмотрим граничные условия (2.2.23). Для этого продифференцируем равенство (2.2.24) по переменной r :

$$-\frac{A_1'}{h} - \frac{h}{3} A_3' + \frac{h^3}{45} A_5' + \frac{\pi}{h} \sum_{m=1}^N m u_m' = b\psi'(r) \tag{2.2.26}$$

Из полученных ранее условий согласования (2.1.5), а также из (2.2.23) и (2.2.26) следует, что при выполнении условий для $A_1, A_3, u_m, m = 1 \div N$, т.е.

$$A_1'(r_0) = A_3'(r_0) = u_m'(r_0) = 0, A_1'(R) = A_3'(R) = u_m'(R) = 0, m = 1 \div N \quad (2.2.27)$$

граничные условия $A_5'(r_0) = A_5'(R) = 0$ автоматически выполняются. Поэтому решение дифференциальной системы (2.2.21), (2.2.25) должно удовлетворять только условиям (2.2.27). При помощи выражения A_3' через A_1 из второй строчки в (2.2.17) имеем четыре граничных условия для A_1 и ещё $2N$ для u_m :

$$\begin{aligned} A_1'(r_0) = A_1'(R) = r_0 A_1'''(r_0) + A_1''(r_0) = R A_1'''(R) + A_1''(R) = 0, \\ u_m'(r_0) = u_m'(R) = 0, m = 1 \div N \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

Получили следующую задачу: найти решение системы дифференциальных уравнений (2.2.21), (2.2.25) относительно A_1, u_m , удовлетворяющее $2N + 4$ граничным условиям (2.2.28).

2.3. Повторное разложение и решение замкнутой алгебраической системы

Для решения системы (2.2.21), (2.2.25) с переменными коэффициентами повторно применим метод быстрых разложений по переменной r . Старшие производные в условиях (2.2.28) нечетные, поэтому A_1, u_m удобнее представлять быстрыми косинус-разложениями. Поскольку в (2.2.21), (2.2.25) присутствуют старшие производные шестого порядка $A_1^{(6)}$ и второго порядка u_m'' , то быстрые косинус-разложения для A_1 должны иметь нечетный порядок $2p+1 > 6$ и для u_m порядок $2p+1 > 2$. Разности порядков производных $A_1^{(6)}$ и u_m'' в (2.2.21) равна $6 - 2 = 4$, разности порядков производных $A_1^{(4)}$ и u_m в (2.2.25) также равна 4. Поэтому функции A_1 и u_m следует представить быстрыми разложениями с граничными функциями, разности порядков которых также равна 4. Например, в виде

$$\begin{aligned}
A_1 &= M_7(t) + a_0 + \sum_{m=1}^N a_{m+8} \cos m\pi t, \quad t = \frac{r-r_0}{R-r_0} \in [0, 1], \\
M_7(t) &= a_1 \left(t - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{3} \right) + a_2 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{6} \right) + a_3 \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{24} - \frac{t^2}{6} + \frac{1}{45} \right) + \\
&+ a_4 \left(\frac{t^4}{24} - \frac{t^2}{12} + \frac{7}{360} \right) + a_5 \left(\frac{t^5}{120} - \frac{t^6}{720} - \frac{t^4}{72} + \frac{t^2}{90} - \frac{2}{945} \right) + \\
&+ a_6 \left(\frac{t^6}{720} - \frac{t^4}{144} + \frac{7t^2}{720} - \frac{31}{15120} \right) + a_7 \left(\frac{t^7}{5040} - \frac{t^8}{40320} - \frac{t^6}{2160} + \frac{t^4}{1080} - \right. \\
&\left. - \frac{t^2}{945} + \frac{1}{4725} \right) + a_8 \left(\frac{t^8}{40320} - \frac{t^6}{4320} + \frac{7t^4}{8640} - \frac{31t^2}{30240} + \frac{127}{604800} \right) \\
u_m &= M_{3,m}(t) + U_{0,m} + \sum_{n=1}^N U_{n,m} \cos n\pi t, \\
M_{3,m}(t) &= u_{1,m} \left(t - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{3} \right) + u_{2,m} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{6} \right) + u_{3,m} \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{24} - \frac{t^2}{6} + \frac{1}{45} \right) + \\
&+ u_{4,m} \left(\frac{t^4}{24} - \frac{t^2}{12} + \frac{7}{360} \right), \tag{2.3.29}
\end{aligned}$$

Здесь граничные функции $M_7(t)$ и $M_3(t)$ устроены так, чтобы соответственные им ряды Фурье в (2.3.29) быстро сходились и обеспечивали минимальную невязку уравнений (2.2.21), (2.2.25).

Функции A_1 и u_m , представленные разложениями (2.3.29), содержат $9 + 6N + N^2$ неизвестных констант

$$a_0 \div a_8, a_{m+8}, U_{n,m}, U_{0,m}, u_{1,m} \div u_{4,m}, m=1 \dots N, n=1 \dots N. \tag{2.3.30}$$

Неизвестные (2.3.30) найдем из системы линейных алгебраических уравнений, которая получается из дифференциальных уравнений (2.2.21), (2.2.25) и граничных условий (2.2.28).

Для этого сначала подставим выражения A_1 и u_m из (2.3.29) в (2.2.21) и (2.2.25). Дифференциальное уравнение (2.2.21) шестого порядка, а функция A_1 выражена через оператор Ch_7 – седьмого порядка. Разность порядков $7-6=1$ равна единице. Это уравнение содержит также производную второго порядка u_m'' .

Функция u_m в (2.3.29) представлена через Ch_3 , т.е. разность порядков $3-2=1$ тоже равна единице. Поэтому к уравнению, полученному после подстановки разложений для A_1 и u_m из (2.3.29) в (2.2.21), следует применить оператор Ch_1 первого порядка. Аналогичными рассуждениями можно прийти к выводу, что к уравнению, полученному из (2.2.25) после подстановки A_1 и u_m из (2.3.29), следует применить оператор Ch_3 - третьего порядка. В результате будем иметь $5+4N+N^2$ линейных алгебраических уравнений. Из граничных условий (2.2.28) дополнительно получим еще $4+2N$ уравнений. Всего будем иметь $9+6N+N^2$ линейных алгебраических уравнений относительно такого же количества неизвестных перечисленных в (2.3.30). Таким образом, исходная краевая задача (2.1.1) – (2.1.3), (2.1.6) свелась к решению замкнутой системы $9+6N+N^2$ линейных алгебраических уравнений. Данная система решена на ЭВМ.

2.4. Построение приближенного аналитического решения

1. Задаем численные значения величины: $N, b, h, r_0, j, R, U_0, Q_0$.
2. Вычисляем константы (2.3.30) и подставляем их в (2.3.29), тем самым определяя $A_1(r), u_m(r)$.
3. Полученные $A_1(r), u_m(r)$, подставим в (2.2.17) и найдем $A_3(r)$ и $A_5(r)$.
4. После подстановки $A_1(r), A_3(r), A_5(r), u_m(r)$ в (2.2.18) будем иметь аналитическую зависимость для температуры $U(r, z)$ в любой точке данного цилиндрического стержня, в том числе и на его границе.

2.5. Полученные результаты и их обсуждение

Численные расчеты проводились при

$$\begin{aligned} N = 3, b = 10^{12}, h = 3.5 \text{ м}, r_0 = 10^{-5} \text{ м}, j = 1 \div 20, \\ R = 5.85 \cdot 10^{-3} \text{ м}, U_0 = 350 \text{ }^\circ\text{C}, Q_0 = 138.7 \text{ }^\circ\text{C} / \text{ м}^2. \end{aligned} \quad (2.5.31)$$

Зависимость $U(r, z)$ точно удовлетворяют граничным условиям (2.1.1), (2.1.2) и приближенно граничному условию (2.1.3) и дифференциальному уравнению (2.1.6). Максимальная невязка условия (2.1.3) и уравнения (2.1.6) при подстановке в них полученного решения (2.2.18), учитывающего три члена ряда Фурье ($N = 3$), соответственно составляет $8,7 \cdot 10^{-6}$ и $3 \cdot 10^{-2}$ для любых значений координат $r_0 \leq r \leq R$, $0 \leq z \leq h$ (рисунок 2.5.1а, 2.5.1б). Данная точность вычислений приемлема для большинства технических расчетов. С увеличением N невязка быстро уменьшается.

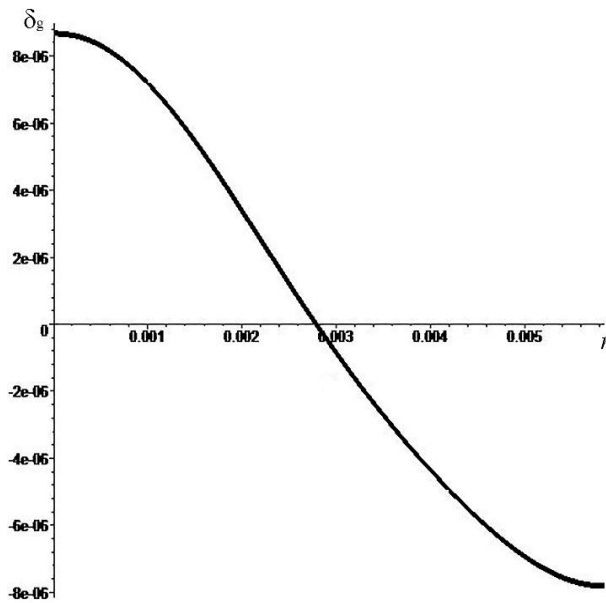


Рисунок 2.5.1а. Невязка при $N = 3$ граничного условия (2.1.3)

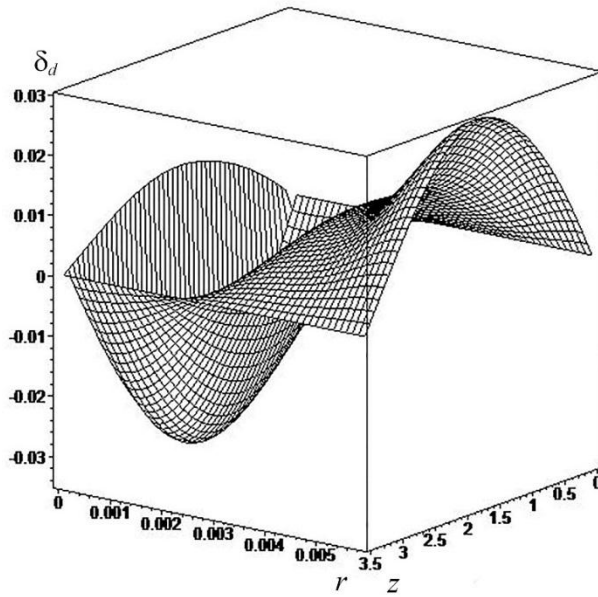


Рисунок 2.5.16. Невязка при $N = 3$ дифференциального уравнения (2.1.6)

Распределение температуры в цилиндре приведено на рисунке 2.5.2, из которого видно, что температура имеет максимальное значение на торце цилиндра при $z = 0$. По данным (2.5.31) она равна $1200\text{ }^{\circ}\text{C}$. Также, из рисунка 2.5.2 можно сделать вывод, что температура сильно изменяется по длине цилиндра (по координате z).

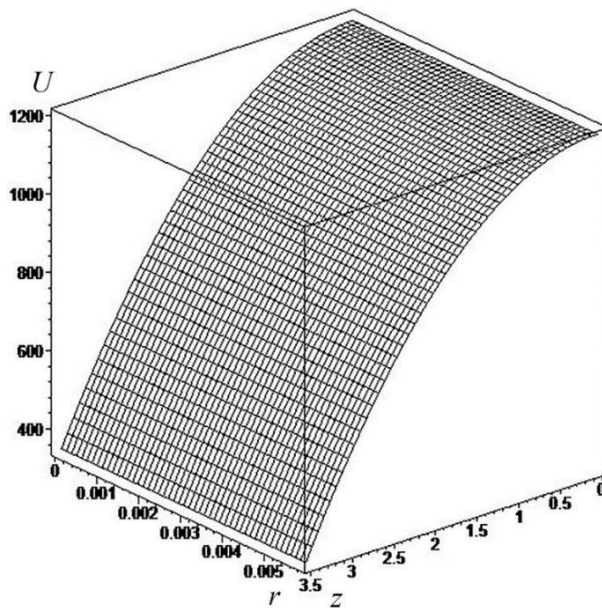


Рисунок 2.5.2. Распределение температуры в конечном цилиндре с внутренним источником.

Термическое сопротивление T_R определим по формуле [77]

$$T_R = \left(\min U|_{z=0} - \max U|_{z=0} \right) / \left(2\pi \int_{r_0}^R \left(\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} \right) r dr \right)$$

На Рисунке 2.5.3 показана зависимость термосопротивления от количества областей нарушения теплового контакта. Из рисунка 2.5.3 видно, что с увеличением j термосопротивление в начале резко возрастает, а начиная с $j=4$ становится постоянным.

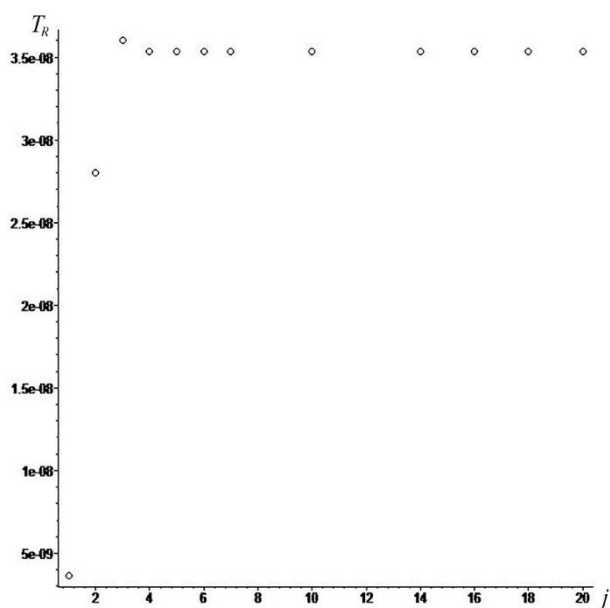


Рисунок 2.5.3 Зависимость термосопротивления от количества кольцевых областей нарушения теплового контакта.

Глава 3. Исследование контактного теплосопrotivления методом быстрых разложений в цилиндре конечных размеров с учетом неосесимметричности температурного поля

3.1. Постановка задачи и согласование граничных условий

Рассмотрим цилиндр конечной высоты h , с отверстием внутри радиуса r_0 и внешним радиусом R , т.е. $\Omega = (r_0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq h)$. Если принимать за r_0 малую величину, то можно считать цилиндр сплошным. Температуру стержня U будем полагать гладкой функцией из класса $U \in \{C^{(4)}(0 \leq z \leq h), C^{(7)}(r_0 \leq r \leq R)\}$, что потребуется при построении решения.

Пусть на боковой поверхности снаружи и внутри цилиндр теплоизолирован

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (3.1.1)$$

На верхнем торце при $z = h$ считаем температуру постоянной и равной U_0 , а на нижнем торце при $z = 0$ задан непрерывный неравномерный тепловой поток, обусловленный неравномерными макронеровностями

$$U|_{z=h} = U_0 \quad (3.1.2)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0} = \psi(r, \theta), \quad \psi(r, \theta) \geq 0, \quad r_0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (3.1.3)$$

Зависимость $\psi(r, \theta)$ подберем так, чтобы частная производная от температуры на торце при $z = 0$ всюду была положительной кроме зон, где возможно нарушение контакта из-за макронеровностей.

Для того, чтобы решение задачи было непрерывно потребуем в углах области Ω выполнение условий согласования граничных условий между собой. Если в (3.1) $z = h$, а левую и правую части (3.1.2) продифференцировать по r и положить $r = r_0$, а затем $r = R$, то в результате получим одинаковые равенства. Это

означает, что в двух точках $(r = r_0, z = h)$, $(r = R, z = h)$ согласованность выполняется. Если же (3.1.1) продифференцировать по z и положить $z = 0$, затем (3.1.3) продифференцировать по r и положить $r = r_0$ и $r = R$, то получим, что из условия непрерывности решения функция $\psi(r, \theta)$ должна удовлетворять дополнительным равенствам

$$\partial\psi(r, \theta) / \partial r |_{r=r_0} = \psi(r, \theta) / \partial r |_{r=R} = 0 \quad (3.1.4)$$

При выполнении (3.1.4) граничные условия (3.1.1) и (3.1.3) будут согласованы между собой в точках $(r = r_0, z = 0)$, $(r = R, z = 0)$. Зоны нарушения теплового контакта на торце $z = 0$ вносят дополнительные ограничения на выбор зависимости $\psi(r, \theta)$. Будем считать, что через торцевую поверхность $z = 0$ цилиндр охлаждается, однако в результате наличия макронеровностей отсутствует тепловой поток в некоторых точках, то есть

$$\psi(r, \theta) \geq 0, \quad r_0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (3.1.5)$$

Представим одну из возможных зависимостей $\psi(r, \theta)$, для рассматриваемого процесса удовлетворяющей условиям (3.1.4), (3.1.5):

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta) &= b + b_1 \left[\sin \left(k_1 \frac{r - r_0}{R - r_0} + k_2 \theta \right) \right] (r - R)^4 (r - r_0)^4 = \\ &= b + b_1 \left[\sin \left(k_1 \frac{r - r_0}{R - r_0} \right) \cos(k_2 \theta) + \right. \\ &\quad \left. + \cos \left(k_1 \frac{r - r_0}{R - r_0} \right) \sin(k_2 \theta) \right] (r - R)^4 (r - r_0)^4, \quad b_1 \leq \frac{2b}{(R - r_0)^8} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Коэффициенты b_1, k_1, k_2 находятся экспериментально. В дальнейшем рассматривается частный случай, когда постоянная b определяется по формуле:

$$b = \frac{U_0}{h} + \frac{1}{2} Q_0 h \quad (3.1.7)$$

Величины b, b_1 характеризуют интенсивность теплового потока через торец $z = 0$, k_1 -характеризует сдвиг фазы, k_2 - частоту неравномерного теплового потока.

Выполнение условий согласования (3.1.4) дает возможность строить решение задачи в пространстве гладких функций $U \in C^{(3)}(\Omega)$.

Запишем уравнение теплопроводности в переменных (r, θ, z) для такого стержня:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + Q_0 = 0 \quad (3.1.8)$$

Q_0 – внутренний источник тепла, нагревающий стержень.

3.2. Выбор граничной функции

Решение задачи для U будем искать в виде:

$$U = bz - \frac{Q_0}{2} z^2 + V(r, z) \cos(k_2 \theta) + W(r, z) \sin(k_2 \theta) \quad (3.2.9)$$

Здесь функции V , W неизвестные, зависящие только от двух переменных (r, z) .

Подставим (3.2.9) в уравнение теплопроводности (3.1.8):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \cos(k_2 \theta) + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) \sin(k_2 \theta) - \\ & - \frac{k_2}{r^2} V \cos(k_2 \theta) - \frac{k_2}{r^2} W \sin(k_2 \theta) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Из уравнения (3.2.10) следует, что:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{k_2}{r^2} V = 0 \quad (3.2.11)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - \frac{k_2}{r^2} W = 0 \quad (3.2.12)$$

Подставим (3.2.9) в граничное условие (3.1.2):

$$U|_{z=h} = U_0 = bh - \frac{Q_0}{2} h^2 + V|_{z=h} \cos(k_2 \theta) + W|_{z=h} \sin(k_2 \theta) \quad (3.2.13)$$

Из (3.2.13) получаем граничные условия для функций $V(r, z)$ и $W(r, z)$ соответственно:

$$V|_{z=h} = 0 \quad (3.2.14)$$

$$W|_{z=h} = 0 \quad (3.2.15)$$

Подставим (3.2.9) в граничные условия (3.1.1):

$$\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \cos(k_2 \theta) + \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \sin(k_2 \theta) = 0 \quad (3.2.16)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\partial V}{\partial r} \Big|_{r=R} \cos(k_2 \theta) + \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r=R} \sin(k_2 \theta) = 0 \quad (3.2.17)$$

Отсюда получаем следующие граничные условия для V и W :

$$\left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (3.2.18)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (3.2.19)$$

И, наконец, подставим (3.2.9) в граничное условие (3.1.3):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0} &= b + \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0} \cos(k_2 \theta) + \left. \frac{\partial W}{\partial z} \right|_{z=0} \sin(k_2 \theta) = b + \\ &+ b_1 \left(\begin{aligned} &\sin \left(k_1 \frac{r-r_0}{R-r_0} \right) \cos(k_2 \theta) + \\ &+ \cos \left(k_1 \frac{r-r_0}{R-r_0} \right) \sin(k_2 \theta) \end{aligned} \right) (r-R)^4 (r-r_0)^4 \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Получаем еще один набор граничных условия для V и W :

$$\left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0} = b_1 \sin \left(k_1 \frac{r-r_0}{R-r_0} \right) (r-R)^4 (r-r_0)^4 \quad (3.2.21)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial z} \right|_{z=0} = b_1 \cos \left(k_1 \frac{r-r_0}{R-r_0} \right) (r-R)^4 (r-r_0)^4 \quad (3.2.22)$$

3.3 Выбор граничной функции и построение замкнутой системы дифференциальных уравнений для определения коэффициентов быстрого разложения

Воспользуемся методом быстрых разложений для нахождения функций V . Представим V быстрым синус-разложением в виде суммы граничной функции четвертого порядка $M_4(r, z)$ и ряда Фурье:

$$V = Ch_{4z}V = M_4(r, z) + \sum_{m=1}^N v_m(r) \sin m\pi \frac{z}{h}, \quad M_4(r, z) = A_1(r)B_1 + (3.3.23) \\ + A_2(r)B_2 + A_3(r)B_3 + A_4(r)B_4 + A_5(r)B_5 + A_6(r)B_6,$$

где N – число членов, используемых в ряде (3.3.23).

Представление функции V в виде (3.3.23) называется оператором быстрых разложений четвертого порядка Ch_{4z} . Выражение для $M_4(r, z)$ сконструировано так, чтобы обеспечить быструю сходимость ряда в (3.3.23) и минимизировать невязку дифференциального уравнения (3.2.11), т.е. повысить точность. При этом используется небольшое число слагаемых N . Использование такого разложения (3.3.23) дает возможность четыре раза почленно дифференцировать по z данный ряд и его сходимость при этом сохранится. Для удобства введем следующие обозначения:

$$B_1 = \left(1 - \frac{z}{h}\right), B_2 = \frac{z}{h}, B_3 = \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6h} - \frac{hz}{3}\right), B_4 = \left(\frac{z^3}{6h} - \frac{hz}{6}\right), (3.3.24) \\ B_5 = \left(\frac{z^4}{24} - \frac{z^5}{120h} - \frac{hz^3}{18} + \frac{h^3z}{45}\right), B_6 = \left(\frac{z^5}{120h} - \frac{hz^3}{36} + \frac{7h^3z}{360}\right)$$

Итак, вся задача сведена к отысканию $N + 6$ коэффициентов, зависящих только от одной переменной r :

$$A_1(r) \div A_6(r), v_m(r), m = 1, 2, \dots, N \quad (3.3.25)$$

Для нахождения функций из (3.3.25), подставим выражение V из (3.3.23) в граничное условие (3.2.14):

$$A_2 = 0 \quad (3.3.26)$$

Подставим V из (3.3.23) в уравнение (3.2.11) с учетом (3.3.26):

$$\begin{aligned} & \left(A_1'' + \frac{1}{r} A_1' + \frac{k_2^2}{r^2} A_1 + A_3 \right) B_1 + A_4 B_2 + \left(A_3'' + \frac{1}{r} A_3' + \right. \\ & \left. + \frac{k_2^2}{r^2} A_3 + A_5 \right) B_3 + \\ & + \left(A_4'' + \frac{1}{r} A_4' + \frac{k_2^2}{r^2} A_4 + A_6 \right) B_4 + \left(A_5'' + \frac{1}{r} A_5' + \frac{k_2^2}{r^2} A_5 \right) B_5 + \quad (3.3.27) \\ & + \left(A_6'' + \frac{1}{r} A_6' + \right. \\ & \left. + \frac{k_2^2}{r^2} A_6 \right) B_6 + \sum_{m=1}^N \left(\left(\frac{k_2^2}{r^2} - \frac{\pi^2 m^2}{h^2} \right) v_m + \right. \\ & \left. + v_m'' + \frac{1}{r} v_m' \right) \sin m\pi \frac{z}{h} = 0 \end{aligned}$$

При подстановке разложения V из (3.3.23) в (3.2.11) от V берется производная по z второго порядка. Разность между порядком граничной функции и порядком дифференциального равна $4 - 2 = 2$. Поэтому, согласно методу быстрых разложений, к уравнению (3.3.27) следует применить оператор быстрых синус-разложений второго порядка Ch_2 . Это означает, что в (3.3.27) сначала следует положить $z = 0$, затем $z = h$, после чего от обеих частей равенства (3.3.27) взять вторую производную по переменной z и опять положить $z = 0$, $z = h$. В результате будем иметь четыре уравнения:

$$-A_1'' + \frac{1}{r} A_1' - \frac{k_2^2}{r^2} A_1 = A_3, \quad -A_3'' - \frac{1}{r} A_3' - \frac{k_2^2}{r^2} A_3 = A_5, \quad A_4 = 0, \quad A_6 = 0 \quad (3.3.28)$$

При помощи (3.3.26) и (3.3.28) выражение для V из (3.3.23) упрощается

$$V = A_1(r) B_1 + A_3(r) B_3 + A_5(r) B_5 + \sum_{m=1}^N v_m(r) \sin m\pi \frac{z}{h} \quad (3.3.29)$$

Подставим (3.29) в уравнение (3.11):

$$\begin{aligned}
& \left(A_1^{(6)} + \frac{3}{r} A_1^{(5)} + \frac{3(k_2^2 - 1)}{r^2} A_1^{(4)} - \frac{6(k_2^2 - 1)}{r^3} A_1''' + \right. \\
& \left. + \frac{3(k_2^4 + 7k_2^2 - 3)}{r^4} A_1'' - \frac{9(k_2^4 + 5k_2^2 - 1)}{r^5} A_1' \right) B_5 - \\
& - \frac{k_2^2}{hr^6} (B_1 hr^4 - B_5 (hk_2^4 + 20hk_2^2 + 64h) - hr^4 + r^4 z) A_1 \\
& + \sum_{m=1}^N \left(\left(\frac{k_2^2}{r^2} - \frac{\pi^2 m^2}{h^2} \right) v_m + v_m'' + \frac{1}{r} v_m' \right) \sin m\pi \frac{z}{h} = 0
\end{aligned} \quad (3.3.30)$$

Теперь умножим левую и правую часть равенства (3.3.30) на $\sin m\pi z/h$, $m = 1 \div N_1$ и проинтегрируем по $z \in [0, h]$ для нахождения коэффициентов Фурье для левой части (3.3.30):

$$\begin{aligned}
& \left(A_1^{(6)} + \frac{3}{r} A_1^{(5)} + \frac{3(k_2^2 - 1)}{r^2} A_1^{(4)} - \frac{6(k_2^2 - 1)}{r^3} A_1''' + \right. \\
& \left. + \frac{3(k_2^4 + 7k_2^2 - 3)}{r^4} A_1'' - \frac{9(k_2^4 + 5k_2^2 - 1)}{r^5} A_1' \right) \frac{h^5}{\pi^5 m^5} - \\
& - \frac{k_2^2}{hr^6} \left(\frac{h}{\pi m} hr^4 - \frac{h^5}{\pi^5 m^5} (hk_2^4 + 20hk_2^2 + 64h) + \right. \\
& \left. \frac{h^2 r^4}{\pi m} (\cos(\pi m) - 1) - \frac{h^2 r^4}{\pi m} \cos(\pi m) \right) A_1 \\
& + \sum_{m=1}^N \left(\left(\frac{k_2^2}{r^2} - \frac{\pi^2 m^2}{h^2} \right) v_m + v_m'' + \frac{1}{r} v_m' \right) \frac{h}{2} = 0
\end{aligned} \quad (3.31)$$

После подстановки V из (3.3.29) в граничные условия (3.2.18) получим:

$$\begin{aligned}
A_1'(r_0) B_1 + A_3'(r_0) B_3 + A_5'(r_0) B_5 + \sum_{m=1}^N v_m'(r_0) \sin m\pi \frac{z}{h} &= 0 \\
A_1'(R) B_1 + A_3'(R) B_3 + A_5'(R) B_5 + \sum_{m=1}^N v_m'(r_0) \sin m\pi \frac{z}{h} &= 0
\end{aligned} \quad (3.3.32)$$

Из (3.3.32) найдем граничные условия для функций из в (3.3.25), при $r = r_0$ и $r = R$:

$$\begin{aligned}
A_1'(r_0) = A_3'(r_0) = A_5'(r_0) = v_m'(r_0) &= 0, \\
A_1'(R) = A_3'(R) = A_5'(R) = v_m'(R) &= 0, \quad m = 1 \div N
\end{aligned} \quad (3.3.33)$$

После подстановки V из (3.3.29) в граничное условие (3.2.21) будем иметь:

$$-\frac{A_1}{h} - \frac{h}{3}A_3 + \frac{h^3}{45}A_5 + \frac{\pi}{h} \sum_{m=1}^N mv_m = b_1 \sin\left(k_1 \frac{r-r_0}{R-r_0}\right) (r-R)^4 (r-r_0)^4 \quad (3.3.34)$$

С учетом (3.3.28) уравнение после исключения A_3 и A_5 уравнение (3.3.34)

будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & \frac{h^3}{45}A_1^{(4)} + \frac{2h^3}{45r}A_1''' + \left(\frac{h}{3} + \frac{(2k_2^2-1)h^3}{45r^2}\right)A_1'' + \left(\frac{h}{3r} - \frac{(2k_2^2-1)h^3}{45r^3}\right)A_1' + \\ & + \left(\frac{k_2^2h}{3r^2} - \frac{1}{h} + \frac{k_2^2(k_2^2-4)h^3}{45r^4}\right)A_1 + \frac{\pi}{h} \sum_{m=1}^N mv_m = b_1 \sin\left(k_1 \frac{r-r_0}{R-r_0}\right) (r-R)^4 (r-r_0)^4 \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

Равенства (3.3.31) и (3.3.35) представляют замкнутую линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений $2N+4$ порядка относительно $N+1$ неизвестных $A_1, v_m, m=1 \div N$.

Рассмотрим граничные условия (3.3.33). Продифференцируем равенство (3.3.34) по переменной r :

$$-\frac{A_1'}{h} - \frac{h}{3}A_3' + \frac{h^3}{45}A_5' + \frac{\pi}{h} \sum_{m=1}^N mv_m' = \frac{\partial}{\partial r} \left(b_1 \sin\left(k_1 \frac{r-r_0}{R-r_0}\right) (r-R)^4 (r-r_0)^4 \right) \quad (3.3.36)$$

В (3.1.4) были получены условия согласования граничных условий для данной задачи, поэтому из (3.3.33) и (3.3.36) следует, что при выполнении условий для $A_1, A_3, u_m, m=1 \div N$, т.е.

$$A_1'(r_0) = A_3'(r_0) = v_m'(r_0) = 0, A_1'(R) = A_3'(R) = v_m'(R) = 0, m=1 \div N \quad (3.3.37)$$

граничные условия $A_3'(r_0) = A_3'(R) = 0$ автоматически выполняются. Значит решение дифференциальной системы (3.3.31), (3.3.35) должно удовлетворять лишь граничным условиям (3.3.37). С помощью выражения A_3 через A_1 получим четыре граничных условия для A_1 и $2N$ для v_m :

$$\begin{aligned}
A_1'(r_0) &= A_1'(R) = -A_1'''(r_0) - \frac{1}{r_0} A_1''(r_0) + \frac{2k_2^2}{r_0^3} A_1(r_0) = \\
&= -A_1'''(R) - \frac{1}{R} A_1''(R) + \frac{2k_2^2}{R^3} A_1(R) = 0, \\
v'_m(r_0) &= v'_m(R) = 0, \quad m = 1 \div N
\end{aligned} \tag{3.3.38}$$

Получаем следующую задачу: найти решение системы (3.3.31), (3.3.35) относительно A_1, v_m , удовлетворяющее $2N + 4$ граничным условиям (3.3.38).

3.4. Повторное разложение и решение замкнутой алгебраической системы

Для решения системы (3.3.31), (3.3.35) с переменными коэффициентами повторно используем метод быстрых разложений по переменной r . В условиях (3.3.38) старшие производные нечетные, поэтому A_1, v_m будет лучше представлять быстрыми косинус-разложениями. Так как в (3.3.31), (3.3.35) есть старшие производные шестого порядка $A_1^{(6)}$ и второго порядка v_m'' , то быстрые косинус-разложения для A_1 должны иметь порядок больше 6 и для v_m порядок больше 2, поэтому $A_1(r)$ и $v_m(r)$ представим равенствами:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= M_7(t) + a_0 + \sum_{m=1}^N a_{m+8} \cos m\pi t, \quad t = \frac{r-r_0}{R-r_0} \in [0, 1], \\
 M_7(t) &= a_1 \left(t - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{3} \right) + a_2 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{6} \right) + a_3 \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{24} - \frac{t^2}{6} + \frac{1}{45} \right) + \\
 &+ a_4 \left(\frac{t^4}{24} - \frac{t^2}{12} + \frac{7}{360} \right) + a_5 \left(\frac{t^5}{120} - \frac{t^6}{720} - \frac{t^4}{72} + \frac{t^2}{90} - \frac{2}{945} \right) + \\
 &+ a_6 \left(\frac{t^6}{720} - \frac{t^4}{144} + \frac{7t^2}{720} - \frac{31}{15120} \right) + a_7 \left(\frac{t^7}{5040} - \frac{t^8}{40320} - \frac{t^6}{2160} + \frac{t^4}{1080} - \right. \\
 &\left. - \frac{t^2}{945} + \frac{1}{4725} \right) + a_8 \left(\frac{t^8}{40320} - \frac{t^6}{4320} + \frac{7t^4}{8640} - \frac{31t^2}{30240} + \frac{127}{604800} \right) \\
 v_m &= M_{3,m}(t) + V_{0,m} + \sum_{n=1}^N V_{n,m} \cos n\pi t, \\
 M_{3,m}(t) &= v_{1,m} \left(t - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{3} \right) + v_{2,m} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{6} \right) + v_{3,m} \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{24} - \frac{t^2}{6} + \frac{1}{45} \right) + \\
 &+ v_{4,m} \left(\frac{t^4}{24} - \frac{t^2}{12} + \frac{7}{360} \right), \quad m = 1 \div N
 \end{aligned} \tag{3.4.39}$$

Граничные функции $M_7(t)$ и $M_3(t)$ сконструированы таким образом, что соответствующие им ряды Фурье из (3.4.39) быстро сходятся.

Функции A_1 и v_m в виде разложений (3.4.39) выражаются через $9+6N+N^2$ неизвестных констант:

$$a_0 \div a_8, a_{m+8}, V_{n,m}, V_{0,m}, v_{1,m} \div v_{4,m}, m=1\dots N, n=1\dots N. \quad (3.4.40)$$

Для неизвестных, указанных в (3.4.40), записывается система линейных алгебраических уравнений, полученных из дифференциальных уравнений (3.3.31), (3.3.35) и соответствующих им граничных условий (3.3.38).

Для получения алгебраической системы подставим разложения для A_1 и v_m из (3.4.39) в (3.3.31) и (3.3.35). Дифференциальное уравнение (3.3.31) имеет шестой порядок, а разложение A_1 выражено через оператор Ch_7 – седьмого порядка. Разность порядков равна $7-6=1$. Данное уравнение имеет так же производную второго порядка v''_m . Разложение v_m из (3.4.39) представлено через Ch_3 , т.е. разность порядков $3-2=1$ равна 1. Это значит что к уравнению, полученному в результате подстановки разложений A_1 и v_m из (3.4.39) в (3.3.31), необходимо применить оператор Ch_1 первого порядка. По аналогии приходим к выводу, что к уравнению, полученному в результате подстановки разложений A_1 и v_m из (3.4.39) в (3.3.35), (разности порядков $7-4=3$ равна 3) необходимо применить оператор Ch_3 – третьего порядка. Исходя из всего вышесказанного, мы имеем $5+4N+N^2$ линейных алгебраических уравнений. Из граничных условий (3.3.38) получаем еще $4+2N$ уравнений. Всего имеем $9+6N+N^2$ линейных алгебраических уравнений относительно такого же количества неизвестных, перечисленных в (3.4.40), то есть получаем замкнутую систему.

Задача свелась к решению замкнутой системы $9+6N+N^2$ линейных алгебраических уравнений. Эта система решена на ЭВМ.

Аналогичные построения проводятся и для нахождения функции $W(r, z)$.

3.5 Построение приближенного аналитического решения

Задаем численные значения величин: $N, U_0, b_1, h, r_0, k_1, k_2, R, Q_0$.

1. Вычисляем константы (3.3.33) и подставляем их в (3.3.32), тем самым определяя $A_1(r), v_m(r)$.
2. Полученные $A_1(r), v_m(r)$, подставим в (3.3.28) и найдем $A_3(r)$ и $A_5(r)$.
3. После подстановки $A_1(r), A_3(r), A_5(r), v_m(r)$ в (3.2.21) будем иметь аналитическую зависимость для V в любой точке, а так же и на границе.
4. Аналогичным образом получаем решение для функции W .
5. Подставим найденные функции V и W в функцию температуры (3.2.9).

3.6 Полученные результаты и их обсуждение

Численные расчеты проводились при

$$\begin{aligned} N = 5, U_0 = 450, h = 3.5 \text{ м}, r_0 = 10^{-5} \text{ м}, k_1 = \pi, \\ R = 5.85 \cdot 10^{-3} \text{ м}, b_1 = 10^3, Q_0 = 90^0 \text{ C / м}^2, k_2 = 6 \end{aligned} \quad (3.6.41)$$

Функция для температуры $U(r, z)$ точно удовлетворяет граничным условиям (3.1.1), (3.1.2) и приближенно граничному условию (3.1.3) и дифференциальному уравнению (3.1.8). Максимальная невязка (погрешность) условия (3.1.3) и уравнения (3.1.8) при подстановке в них полученного решения, учитывающего всего лишь три члена ряда Фурье ($N = 5$), соответственно составляет $3 \cdot 10^{-18}$ и $4.7 \cdot 10^{-9}$ для любых значений координат $r_0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq h$ (рис. 1а, 1б). Эта точность вполне достаточна для инженерных расчетов. С увеличением N невязка быстро уменьшается.

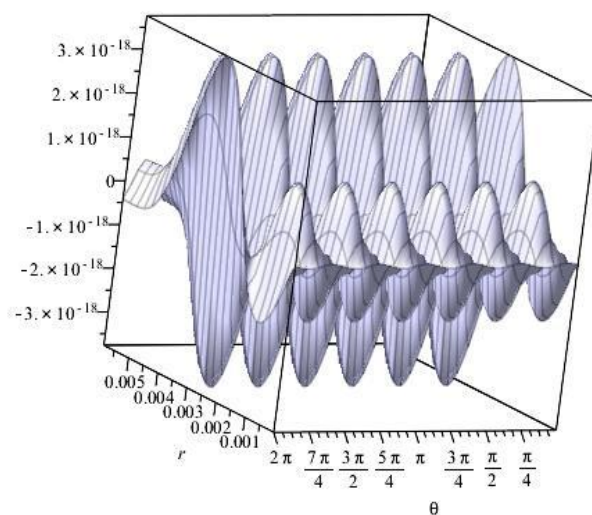


Рисунок 3.1а. Невязка граничного условия (3.1.3) при $N = 5, \theta = \pi/2$.

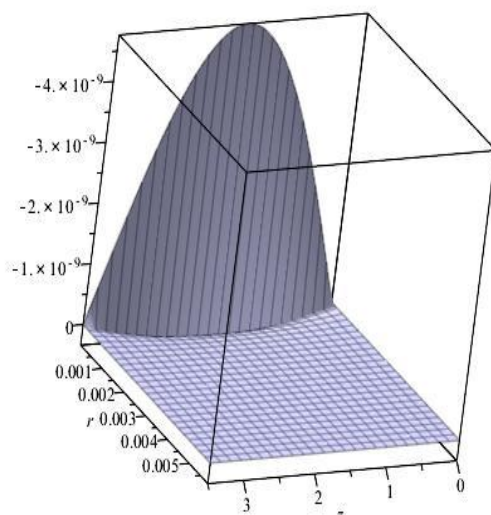


Рисунок 3.1б. Невязка дифференциального уравнения (3.3.6) при $N=5$, $\theta = \pi/2$.

Распределение температуры в цилиндре приведено на рисунке 3.2.

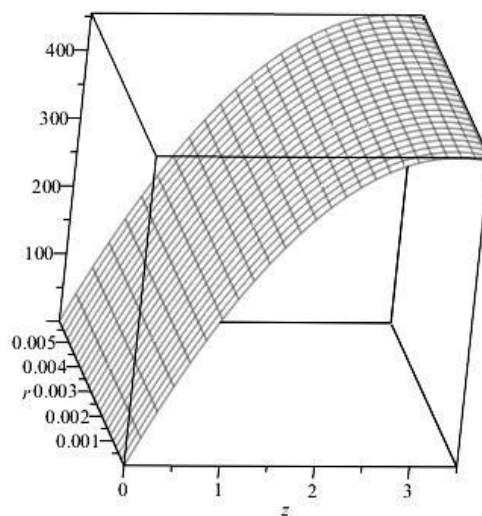


Рисунок 3.2. Распределение температуры в конечном цилиндре с внутренним источником при $\theta = \pi/2$

Из рисунка видно, что температура имеет максимальное значение при $z = h$ и она равна $450\text{ }^{\circ}\text{C}$. Также, из рисунке 3.2 можно заключить, что температура сильно изменяется по длине цилиндра (по координате z).

Термическое сопротивление T_R определялось по формуле [85]

$$T_R = \left(\min U|_{z=0} - \max U|_{z=0} \right) / 2\pi \int_{r_0}^R \left(\frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} \right) r dr \quad (42)$$

На рисунке 3.3 показано влияние угла θ на термосопротивление в зоне нарушения теплового контакта.

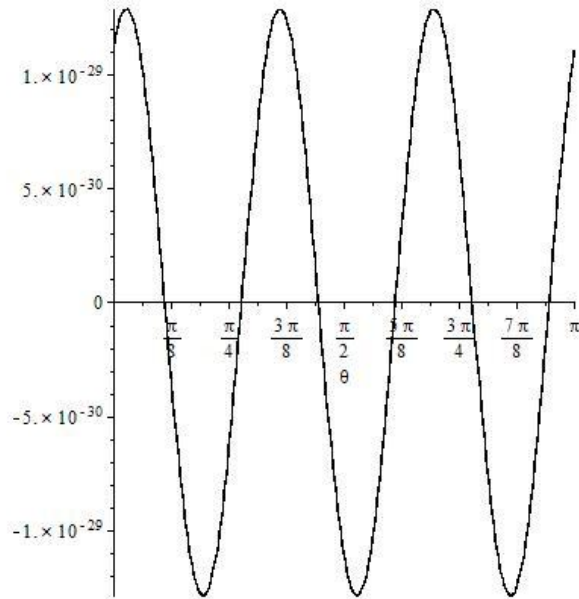


Рисунок 3.3 Зависимость термосопротивления от угла θ в области нарушения теплового контакта.

На Рисунке 3.4 показано влияние величины k_2 , которая определяет количество зон неравномерного нарушения теплового контакта, на термосопротивление.

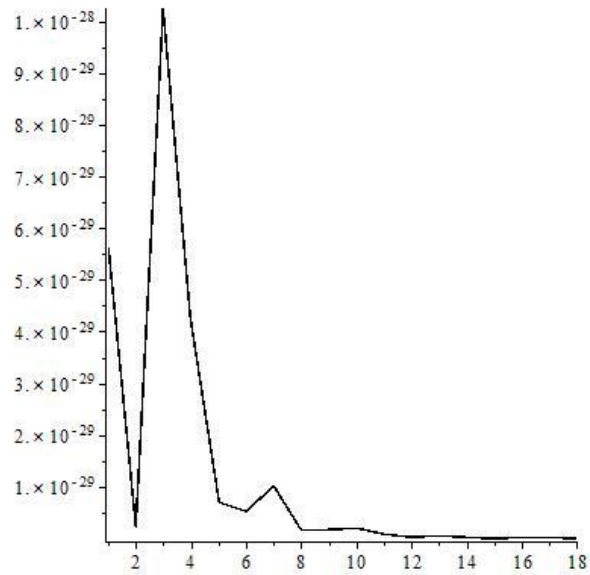


Рисунок 3.4. Влияние количества зон нарушения контакта на термосопротивление.

Из графика видим, что с увеличением k_2 термосопротивление вначале увеличивается и достигает критического значения при $k_2 = 3$, а после начинает уменьшаться.

Заключение

В диссертационной работе получены следующие результаты:

- Доказаны теоремы о единственности и многократной почленной дифференцируемости быстрого разложения наперед заданное число раз.
- На численном эксперименте продемонстрирована высокая скорость сходимости и дифференцируемость суммы специальной граничной функции и ряда Фурье.
- Разработана методика вычисления интегралов с переменным верхним пределом от сложных функций. Алгоритм реализован в виде комплекса проблемно-ориентированных программ. На численном эксперименте показана его эффективность.
- Предложен алгоритм представления неявно заданной функции в явном виде на отрезке. На тестовом примере показана высокая точность предложенного подхода.
- Предложена методика решения сложных нелинейных интегродифференциальных уравнений с использованием метода быстрых разложений.
- Представлен алгоритм решения задач о контактном термическом сопротивлении цилиндра конечных размеров со смешанными граничными условиями.

Литература

1. Абгарян К.А. Метод асимптотического интегрирования линейной системы интегро-дифференциальных уравнений / К.А. Абгарян // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1969. Т. 9. – №. 2. – С. 447–457.
2. Абдуллаев В.М. О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. / В.М. Абдуллаев, К.Р. Айда-заде // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44. – № 9. – С. 1585-1595.
3. Абдуллаев В.М. Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений / В.М. Абдуллаев, К.Р. Айда-заде // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54. – № 7. – С. 1096-1109.
4. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб.пособие для студентов эконом. спец. Вузов / И.Л Акулич – М.: Высш.шк., 1986. – 320 с.
5. Алиханов А.А. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации / А.А. Алиханов, А.М. Березгов, М.Х. Шхануков-Лафишев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48. – № 9. – С. 1619-1628.
6. Амбарцумян, В.А. Научные труды: В 2-х т. / В.А. Амбарцумян; под ред. В.В. Соболева; АН Арм. ССР. – Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1960. – Т. 2. – 361 с.
7. Амосов А.А. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова – М.: Высш. шк. 1994. – 544 с.
8. Аширбаева А.Ж. Исследование решений дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка, где коэффициенты при частных производных первого порядка зависят от неизвестных функции / А.Ж. Ашир-

- баева, Ч.Б. Жолдошова // Известия Ошского технологического университета. – 2016. – № 1. – С. 108-112.
9. Аширбаева А.Ж. Сведение нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка к решению интегрального уравнения // Механика и технологии. – 2013. – № 1. – С. 18-24.
 10. Афанасьев А.П. Метод построения приближенных аналитических решений дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55. – № 10. – С. 1694-1702.
 11. Афанасьев А.П. Схема Горнера для исследования решений дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба, И.И. Емельянова // Журнал Бизнес-информатика. – 2017. – №2 (40). – С.33-39.
 12. Бабенко, К.И. Основы численного анализа / ред.: А.Д. Брюно, К.И. Бабенко. – 2-е изд., испр. и доп. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. – 848 с.
 13. Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена / М. Био – М., Энергия, 1975, 209 с.
 14. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения / А.Б. Бакушинский, А.В. Гончарский – Издательство МГУ, 1989. – 198 с.
 15. Бандурин Н.Г. Новый численный метод порядка N для решения интегро-дифференциального уравнения общего вида // Вычислительные технологии. – 2002. – Т. 7. – № 2. – С. 3-10.
 16. Бандурин Н.Г. Численное решение существенно нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вычислительные технологии – 2010. – Т. 15. – С. 31-38.
 17. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков – Наука, М. 1987.

18. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер – М.: Мир, 1964. 517 с.
19. Булатов М.В. Об одном классе одношаговых одностадийных методов для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений / М.В. Булатов, А.В. Тыглиян, С.С. Филиппов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51. – № 51. – С. 1251-1265.
20. Бурлачко И.В. Алгоритм решения задачи Коши для вырожденных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами / И.В. Бурлачко, Г.А. Свиридчук // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43. – № 11. – С. 1677-1683.
21. Вавилов, С.И. Исаак Ньютон / Акад. С.И. Вавилов; АН СССР. – 2-е изд., просм. и доп. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1945. – 230 с.
22. Васильева А.Б. Система сингулярно возмущенных квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в критических случаях / А.Б. Васильева, О.И. Пантелеева // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т. 46, – № 4, – С. 593-604.
23. Волков Е.А. Численные методы / Е.А. Волков – Учеб. пособие для вузов. - 2-е изд., испр. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 248 с.
24. Волков–Богородский Д.Б. О неявных методах интегрирования начальных задач для параметризованных систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / Д.Б. Волков–Богородский, А.Н. Данилин, Е.Б. Кузнецов, В.И. Шалашилин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43. – № 11. – С. 1684-1696.
25. Гилл,Ф. Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт; Пер. с англ. В. Ю. Лебедева; Под ред. А. А. Петрова. – М.: Мир, 1985. – 509 с.
26. Горбунов В.К. Развитие метода сплайн-коллокации для линейных дифференциальных уравнений / В.К. Горбунов, В.В. Петрищев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т. 43. – № 8. – С. 1150-1159.

27. Демиденко Г.В. О связи между решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и бесконечномерных систем дифференциальных уравнений / Г.В. Демиденко, В.А. Лихошвай, А.В. Мудров // Дифференциальные уравнения. МАИК Наука/Интерпериодика. – 2009. – Т. 45. – № 1. – С. 34-46.
28. Демина М.В. Метод многоугольников для построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений для описания волн на воде / М.В. Демина, Н.А. Кудряшов, Д.И. Синельщиков // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008 – Т. 48. – № 12. – С. 2151-2162.
29. Дн Нгок Тхань. Об одном экономичном методе решения разностных систем для дифференциальных уравнений эллиптического типа / Дн Нгок Тхань, В.Б. Левенштам // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51. – № 6. – С. 1043-1055.
30. Джумабаев Д. С. Об одном методе решения линейной краевой задачи для интегродифференциального уравнения / Д.С. Джумабаев // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2010. – Т. 50. – № 7. – С. 1209–1221.
31. Енгибарян Н. Б. О разрешимости интегро-дифференциального уравнения, возникающего в задаче о нелокальном взаимодействии волн / Н. Б. Енгибарян, А. Х. Хачатрян // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2014. – Т. 54. – № 5. – С. 834–844.
32. Еремин А.С Вложенный метод интегрирования систем структурно разделенных обыкновенных дифференциальных уравнений / А.С. Еремин, И.В. Олемской // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2010. Т. 50. – № 3. – С. 434-448.
33. Калиенко И.В. Численно-аналитический метод моделирования систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами / И.В. Калиенко, Д.А. Безгулов, И.В. Решетникова // Известия высших учебных заведений. – 2006. – № 53. – С. 10-14.
34. Калиткин Н.Н. Численные методы: учебное пособие для вузов / Н.Н. Калиткин; Ред. А.А. Самарский. – 2-е изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2014. – 592 с.

35. Канторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа [Текст] / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – 5-е изд. – Москва; Ленинград: Физматгиз, 1962. – 708 с.
36. Карачик В.В. Метод построения решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52. – № 2. – С. 237-252.
37. Красников С.Д. Параметризация численного решения краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений / С.Д. Красников, Е.Б. Кузнецов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45. – № 12. – С. 2148-2158.
38. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы, формулы: Пер. с англ. / Корн Г., Корн Г.; Под общ. ред. Арамановича И.Г. – М.: Наука, 1970. – 720 с
39. Коршунов Ю.М. Математические основы кибернетики: учеб. пособие для вузов / Ю.М. Коршунов. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 495 с.
40. Кузенков О.А. Решение одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка / О.А. Кузенков, Е.А. Рябова // Вестник нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского – 1999. – № 1. – С. 63-72.
41. Куликов Г.Ю. Об одношаговых коллокационных методах со старшими производными для решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Г.Ю. Куликов, А.И. Меркулов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44. – № 10. – С. 1782-1807.
42. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений / Н.А. Кудряшов – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
43. Колесов Ю. С. Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодиче-

- скими коэффициентами / Ю.С. Колесов, В.В. Майоров // Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т. 10. – № 10. – С. 1778–1788.
44. Коробицын В.В. Метод обратной функции для решения автономного обыкновенного дифференциального уравнения: одномерный случай / В.В. Коробицын, Ю.В. Фролова // Математические структуры и моделирование. – 2009. – Т. 19. – С. 19-27.
45. Латыпов А.Ф. Численные методы решения задачи Коши для жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе многозвенных интерполяционных полиномов Эрмита / А.Ф. Латыпов, Ю.В. Никуличев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47. – № 2. – С. 234-244.
46. Левитин А.В. Алгоритмы: введение в разработку и анализ / А.В. Левитин– М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 576 с.
47. Лешонков О.В. Применение метода быстрых разложений для решения задачи о термическом сопротивлении в твердых телах / О.В. Лешонков // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сборник трудов Международной научно-технической конференции. г. Воронеж 12–15 сентября. 2016. – Воронеж, изд-во Научно-технические публикации, 2016. С. 257-258.
48. Мухамадиев Э.М. Об ограниченных решениях одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. / Э.М. Мухамадиев, А.Н. Наимов // Математический сборник: Математический институт им. Стеклова Российской академии наук – 2011. – Т. 202, № 9. – С. 121-134.
49. Мухамадиев Э.М. Исследование решений одного нелинейного дифференциального уравнения скалярного поля / Э.М. Мухамадиев, А.Н. Наимов // Теоретическая и математическая физика. – 2017. – Т. 193. – № 1. – С. 25-40.
50. Мухамадиев Э.М. Ограниченные решения гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами / Э.М. Мухамадиев, С.Н. Байзаев // Известия академии наук республики Таджикистан. – 2011. – № 1. – С. 20-26.

51. Морозов, А.Д. Введение в теорию фракталов / А.Д. Морозов. – М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с.
52. Максимов, Ю.Я. Алгоритмы решения задач нелинейного программирования: [Учеб. пособие] / Ю.Я. Максимов, Е.А. Филипповская. – М.: МИФИ, 1982. – 52 с.
53. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов – М. Госуд. Изд-во физ.-мат. литературы. 856 с.
54. Рубанов Н.А. Приближенное аналитическое исследование процессов в системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с полиномиальной правой частью наука и бизнес / Рубанов Н.А., Репина Ю.Е // Пути развития фонд развития науки и культуры. – 2013. – Т. 26. – № 8. – С. 60-65.
55. Рекка Р.А. Применение метода осциллирующих функций к решению одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / Р.А. Рекка, Е.А. Морозова // Проблемы механики и управления: нелинейные динамические системы. Пермь. – 2008. – № 40. С. 142-147.
56. Скворцов Л.М. Явный пошаговый метод численного решения жестких дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Том 47, №6, г., с. 959-967.
57. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин – М.: Наука, 1979. – 288 с.
58. Толстов. Г.П. Ряды Фурье / Г.П. Толстов –М.: Наука, 1980. 390 с.
59. Усов. А.Б. Численное решение нелинейного уравнения в частных производных параболического типа // Известия высших учебных заведений – 2007. – № 5. – С. 15-18.
60. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г.М. Фихтенгольц – Том 3. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – С. 662.
61. Федотов А.И. Корректная постановка и сплайн-метод решения одного класса сингулярных интегродифференциальных уравнений / А.И. Федотов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2012. – Т. 52. – №. 5. – С 859–875.

62. Хачатрян А.Х. Об одном интегро-дифференциальном уравнении в задаче распределения дохода / А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян // Экономика и математические методы. – 2009. – Т. 45. – № 4. – С. 84-96.
63. Хотламаджиян Г.Л. Об устойчивости решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми в критическом случае // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47. – № 1. – С. 96-109.
64. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Жесткие и дифференц.-алгебраич. задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер; Пер. со второго англ. изд. Е. Л. Старостина и др.; Под ред. С. С. Филиппова. - М.: Мир, 1999. - 685 с.
65. Хатламаджиян Г. Л. Об устойчивости решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми в критическом случае / Г.Л. Хатламаджиян // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2007. – Т 47. – № 1. – С. 96–109.
66. Цой П.В. Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса / П.В. Цой – М.: Энергия, 1971. 384 с.
67. Чернышов, А.Д. Быстрые ряды Фурье / А.Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов международной конференции. Воронеж, 20-22 сентября 2010. С. 388-393.
68. Чернышов А.Д. Исследование влияния геометрических размеров конечных цилиндров с внутренним источником на контактное термическое сопротивление с помощью быстрых разложений / А.Д. Чернышов, В.М. Попов, В.В. Горяйнов, О.В. Лешонков // Тепловые процессы в технике. – 2016. – № 11. – С. 506-512.
69. Чернышов А.Д. Исследование контактного термического сопротивления конечных цилиндров с внутренним источником методом быстрых разложений / А.Д. Чернышов, В.М. Попов, В.В. Горяйнов, О.В. Лешонков // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сборник трудов международной научно-технической конференции. г. Воронеж 12–15 сентяб-

- ря. 2016. – Воронеж, изд-во Научно-технические публикации, 2016. С. 307-310.
70. Чернышов А.Д. Исследование контактного теплосопротивления методом быстрых разложений в цилиндре конечных размеров с учетом неосесимметричности температурного поля / А.Д. Чернышов, В.М. Попов, О.В. Лешонков // Тепловые процессы в технике. – 2017. – № 1. – С. 27-33.
71. Чернышов, А.Д. Исследование погрешности поточечного метода вычисления коэффициентов быстрых рядов Фурье / А.Д. Чернышов, Н.А. Хозяинова, В.В. Горяйнов // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. Серия: Информационные технологии, моделирование и управление. – №2(48). – С. 64-67.
72. Чернышов, А.Д. О возможности вычисления коэффициентов Фурье поточечным методом / А.Д. Чернышов, В.В. Горяйнов, А.О. Соловьев // Вестник Воронежского государственного технического университета. – Т. 6. - №2. – 2010. – С. 49-53.
73. Чернышов, А.Д. О поточечном методе вычисления коэффициентов Фурье / А.Д. Чернышов, А.О. Соловьев, О.П. Резцов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов международной конференции. Воронеж, 22-24июня 2009. – ч.2 – С. 239-241.
74. Чернышов А.Д. Определение контактного термосопротивления конечных цилиндров с внутренним источником методам быстрых разложений / А.Д. Чернышов, В.М. Попов, В.В. Горяйнов, О.В. Лешонков // Проблемы теплообмена и гидродинамики в энергомашиностроении: Материалы X школы-семинара молодых ученых и специалистов академика РАН В.Е. Алемасова. г. Казань. 13 – 15 сентября. 2016. КазНЦ РАН, 2016. С. 244-247.
75. Чернышов, А.Д. О применении быстрых разложений для решения нелинейных задач механики / А.Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов международной конференции. Воронеж, 26-28 сентября 2011. С. 417-421.

76. Чернышов, А.Д. О сравнении быстрых синус- и косинус-разложений в краевых задачах с условиями Дирихле / А.Д. Чернышов, В.В. Горяйнов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов международной конференции. Воронеж, 26-28 сентября 2011. С. 417-421.
77. Чернышов А.Д. Приближенное решение сложных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с помощью метода быстрых разложений / А.Д. Чернышов, С.Ф. Кузнецов, В.В. Горяйнов, О.В. Лешонков // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2018. – № 3. – С. 200-205.
78. Чернышов, А.Д. Применение быстрых разложений для решения задачи о растяжении упругой пластины конечных размеров с отверстием /А.Д. Чернышов, Н.В. Минаева, Н.А. Хозяинова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2011. - №2(10). – С. 104-110.
79. Чернышов А.Д. Применение метода быстрых разложений при решении краевой задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка / А.Д. Чернышов, Е.А. Соболева, О.В. Лешонков // Анализ современных проблем в науке: Сборник статей Международной научно-практической конференции. г. Самара. 20 марта. 2017. – Самара, изд-во ЦНИК, 2017. С. 77-81.
80. Чернышов, А.Д. Решение задач с фазовыми превращениями методом расширения границ / А.Д. Чернышов // Инженерно-физический журнал. – 2009. – ч. 2. – С. 236-238.
81. Чернышов А.Д., Горяйнов В.В., Шахов С.В., Попов В.М., Лешонков О.В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. – Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ. № 2018618592. 16.07.2018. – 2018.
82. Чернышов, А.Д. Применение метода быстрых разложений при нахождении напряжений в растянутой прямоугольной пластине / А.Д. Чернышов, Н.А. Хозяинова // Материалы I отчетной научной конференции преподавателей и научных сотрудников ВГУИТ за 2011 г. –Ч.2. – С.132.

83. Чернышов, А.Д. Решение задачи о растяжении упругой прямоугольной пластины методом быстрых разложений / А.Д. Чернышов, Н.А. Хозяинова // Вестник Воронежского государственного университета инженерных технологий. – 2012. - №4(54). – С. 43-47.
84. Чернышов, А.Д. Улучшенные ряды Фурье и граничные функции / А.Д. Чернышов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов международной конференции. Воронеж, 22-24 июня 2009. – ч. 2. – С. 236-238.
85. Шлыков Ю.П. Контактное термическое сопротивление / Ю.П. Шлыков, Е.А. Ганин, С.Н. Царевский – М.Энергия. 1977.
86. Atkinson, Kendall A. An Introduction of Numerical Analysis (2nd ed.), New York: John Wiley & Sons, с. 342. 1989.
87. Curtiss C.F., Hirschfelder J.O. Integration of stiff equations //Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA . 1952. Vol. 38(3) pp. 235–243.
88. Biot M. A. Variational principles in heat transfer. Clarendon Press, 1970.
89. Biot M. A. New Method in Heat Flow Analysis with Application to Flight Structure, J. Aeron. Sci., 24, 1959.
90. Dormand J.R., Prince P.J., “New Runge-Kutta algorithms for numerical simulations in dynamical astronomy”, Celestial Mech, 18(1978), pp. 223–232.
91. Dormand J.R., Prince P.J., “A family of embedded Runge-Kutta formulae”, J. Comput. Appl. Math., 6(1980), pp.19-26.
92. Investigation of contact thermal resistance in a finite cylinder with an internal source by the fast expansion method and the problem of consistency of boundary conditions / A.D. Chernyshov, V.M. Popov, V.V. Goryainov, O.V. Leshonkov // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2017. – Vol. 90. – № 5. С. 1225-1233.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение А

Таблица А.1. Максимальные значения абсолютной погрешности быстрого разложения с граничными функциями $M_0 - M_6$ для функции $\sin(5.3\pi x)$ с использованием интеграла Фурье при $x \in [0,1]$, $N = 1 \div 40$.

N	Используемые граничные функции			
	M_0	M_2	M_4	M_6
1	1.453	3.696	17.12	109.5
2	1.221	2.055	4.172	10.05
3	1.178	1.428	1.892	2.767
4	1.17	1.244	1.338	1.454
5	0.4935	0.3264	0.2299	0.168
6	0.2235	0.09809	0.04771	0.02453
7	0.1406	0.04478	0.01611	0.006189
8	0.09942	0.02419	0.006721	0.002004
9	0.07494	0.01442	0.003192	0.0007614
10	0.05895	0.009202	0.001662	0.0003242
11	0.04771	0.006179	0.0009284	0.0001509
12	0.03951	0.004313	0.0005475	7.533e-05
13	0.03333	0.003107	0.000338	3.986e-05
14	0.02855	0.002299	0.0002166	2.213e-05
15	0.02473	0.00174	0.0001433	1.281e-05
16	0.02161	0.001341	9.732e-05	7.687e-06
17	0.01911	0.001049	6.778e-05	4.755e-06
18	0.01698	0.000836	4.826e-05	3.026e-06
19	0.01522	0.0006721	3.489e-05	1.976e-06
20	0.01372	0.0005485	2.577e-05	1.314e-06
21	0.01239	0.00045	1.922e-05	8.958e-07
22	0.01131	0.0003749	1.462e-05	6.188e-07
23	0.01035	0.0003139	1.120e-05	4.363e-07
24	0.009485	0.0002641	8.699e-06	3.116e-07
25	0.0087	0.0002253	6.836e-06	2.251e-07
26	0.00807	0.0001928	5.405e-06	1.656e-07
27	0.007497	0.0001655	4.311e-06	1.228e-07

28	0.00697	0.000143	3.484e-06	9.181e-08
29	0.006485	0.0001248	2.829e-06	6.969e-08
30	0.006038	0.0001091	2.307e-06	5.340e-08
31	0.005644	9.569e-05	1.892e-06	4.118e-08
32	0.005317	8.406e-05	1.573e-06	3.193e-08
33	0.005012	7.419e-05	1.312e-06	2.498e-08
34	0.004728	6.616e-05	1.099e-06	1.980e-08
35	0.004462	5.910e-05	9.228e-07	1.576e-08
36	0.004212	5.289e-05	7.773e-07	1.261e-08
37	0.003979	4.740e-05	6.598e-07	1.013e-08
38	0.003759	4.253e-05	5.652e-07	8.168e-09
39	0.003553	3.822e-05	4.854e-07	6.634e-09
40	0.003374	3.437e-05	4.180e-07	5.450e-09

Таблица А.2. Максимальные значения абсолютной погрешности быстрого разложения с граничными функциями $M_0 - M_6$ для функции $\sin(5.3\pi x)$ с использованием поточечного метода при $x \in [0,1]$, $N = 1 \div 40$.

N	Используемые граничные функции			
	M_0	M_2	M_4	M_6
1	1.782	3.553	17.85	113.7
2	1.939	2.933	5.41	11.96
3	1.822	2.117	2.826	3.858
4	1.399	1.433	1.492	1.578
5	0.6386	0.406	0.2721	0.1905
6	0.3066	0.1333	0.06182	0.03021
7	0.1969	0.06361	0.02199	0.00803
8	0.1408	0.03535	0.009513	0.002706
9	0.107	0.02153	0.004647	0.001061
10	0.08464	0.01397	0.002476	0.0004639
11	0.06891	0.009506	0.001408	0.0002207
12	0.05734	0.006714	0.0008447	0.0001122
13	0.04854	0.004883	0.0005283	6.039e-05

14	0.04168	0.003642	0.0003425	3.404e-05
15	0.0362	0.002776	0.0002289	1.996e-05
16	0.03172	0.002155	0.0001572	1.212e-05
17	0.02811	0.001699	0.0001104	7.574e-06
18	0.02503	0.001356	7.910e-05	4.866e-06
19	0.02249	0.001099	5.769e-05	3.204e-06
20	0.02026	0.000898	4.282e-05	2.149e-06
21	0.01842	0.0007427	3.216e-05	1.475e-06
22	0.01678	0.0006178	2.455e-05	1.026e-06
23	0.01535	0.0005203	1.892e-05	7.279e-07
24	0.01413	0.0004399	1.475e-05	5.219e-07
25	0.01303	0.0003748	1.164e-05	3.804e-07
26	0.01202	0.0003221	9.234e-06	2.805e-07
27	0.01117	0.0002775	7.408e-06	2.085e-07
28	0.01041	0.00024	5.997e-06	1.573e-07
29	0.009717	0.0002098	4.878e-06	1.198e-07
30	0.009073	0.0001839	3.985e-06	9.187e-08
31	0.008477	0.0001615	3.298e-06	7.086e-08
32	0.007975	0.0001422	2.742e-06	5.549e-08
33	0.007521	0.0001261	2.288e-06	4.370e-08
34	0.007098	0.0001125	1.916e-06	3.459e-08
35	0.006702	0.0001005	1.611e-06	2.751e-08
36	0.006331	8.992e-05	1.370e-06	2.198e-08
37	0.005984	8.057e-05	1.169e-06	1.781e-08
38	0.005657	7.230e-05	9.997e-07	1.448e-08
39	0.005379	6.531e-05	8.572e-07	1.182e-08
40	0.005131	5.931e-05	7.367e-07	9.689e-09

Таблица А.3. Максимальные значения абсолютной погрешности быстрого разложения с граничными функциями $M_0 - M_6$ для функции x^{10} с использованием интеграла Фурье при $x \in [0,1]$, $N = 1 \div 40$.

N	Используемые граничные функции			
	M_0	M_2	M_4	M_6

1	0.3871	0.5636	0.5739	0.242
2	0.2272	0.127	0.04566	0.00635
3	0.1416	0.04011	0.007143	0.0005326
4	0.09404	0.01597	0.001705	7.628e-05
5	0.06618	0.007476	0.0005315	1.617e-05
6	0.04882	0.003932	0.0001997	4.338e-06
7	0.03737	0.002255	8.584e-05	1.409e-06
8	0.02947	0.001382	4.091e-05	5.225e-07
9	0.02378	0.0008926	2.113e-05	2.167e-07
10	0.01961	0.0006013	1.165e-05	9.775e-08
11	0.01643	0.0004197	6.774e-06	4.748e-08
12	0.01396	0.0003014	4.121e-06	2.444e-08
13	0.012	0.0002221	2.603e-06	1.325e-08
14	0.01042	0.0001672	1.699e-06	7.492e-09
15	0.009149	0.0001284	1.140e-06	4.405e-09
16	0.008072	0.0001002	7.840e-07	2.674e-09
17	0.007198	7.912e-05	5.511e-07	1.672e-09
18	0.006429	6.350e-05	3.957e-07	1.072e-09
19	0.005809	5.142e-05	2.882e-07	7.052e-10
20	0.005257	4.218e-05	2.140e-07	4.717e-10
21	0.004768	3.478e-05	1.605e-07	3.234e-10
22	0.004371	2.910e-05	1.226e-07	2.243e-10
23	0.004011	2.444e-05	9.429e-08	1.588e-10
24	0.003684	2.065e-05	7.347e-08	1.138e-10
25	0.003392	1.766e-05	5.790e-08	8.246e-11
26	0.003153	1.514e-05	4.589e-08	6.082e-11
27	0.002934	1.302e-05	3.671e-08	4.522e-11
28	0.002732	1.129e-05	2.972e-08	3.387e-11
29	0.002545	9.864e-06	2.417e-08	2.577e-11
30	0.002372	8.642e-06	1.975e-08	1.978e-11
31	0.002223	7.587e-06	1.622e-08	1.527e-11
32	0.002097	6.672e-06	1.350e-08	1.186e-11
33	0.001978	5.900e-06	1.128e-08	9.293e-12
34	0.001867	5.267e-06	9.455e-09	7.372e-12

35	0.001763	4.709e-06	7.949e-09	5.876e-12
36	0.001666	4.217e-06	6.702e-09	4.705e-12
37	0.001574	3.783e-06	5.696e-09	3.783e-12
38	0.001488	3.397e-06	4.883e-09	3.053e-12
39	0.001407	3.054e-06	4.197e-09	2.482e-12
40	0.001339	2.749e-06	3.616e-09	2.040e-12

Таблица А.4. Максимальные значения абсолютной погрешности быстрого разложения с граничными функциями M_0-M_6 для функции x^{10} с использованием поточечного метода при $x \in [0,1]$, $N = 1 \div 40$.

N	Используемые граничные функции			
	M_0	M_2	M_4	M_6
1	0.4267	0.6178	0.6002	0.2461
2	0.2698	0.1502	0.05083	0.006772
3	0.1764	0.05042	0.008476	0.0005971
4	0.1213	0.02106	0.002136	9.041e-05
5	0.08755	0.01024	0.0006973	2.003e-05
6	0.06583	0.005553	0.0002719	5.605e-06
7	0.05115	0.003263	0.0001206	1.884e-06
8	0.04082	0.00204	5.902e-05	7.201e-07
9	0.03329	0.001339	3.117e-05	3.063e-07
10	0.02768	0.0009154	1.752e-05	1.414e-07
11	0.02334	0.0006468	1.035e-05	7.001e-08
12	0.01994	0.0004696	6.388e-06	3.664e-08
13	0.01724	0.000349	4.084e-06	2.018e-08
14	0.01505	0.0002649	2.693e-06	1.157e-08
15	0.01326	0.0002046	1.826e-06	6.885e-09
16	0.01175	0.0001607	1.268e-06	4.227e-09
17	0.0105	0.0001279	8.996e-07	2.668e-09
18	0.009428	0.0001029	6.495e-07	1.728e-09
19	0.008517	8.392e-05	4.768e-07	1.146e-09
20	0.007722	6.900e-05	3.559e-07	7.729e-10
21	0.007051	5.733e-05	2.686e-07	5.330e-10

22	0.006445	4.791e-05	2.060e-07	3.723e-10
23	0.005922	4.049e-05	1.593e-07	2.652e-10
24	0.005468	3.434e-05	1.246e-07	1.908e-10
25	0.005053	2.935e-05	9.860e-08	1.395e-10
26	0.004673	2.528e-05	7.842e-08	1.031e-10
27	0.004357	2.183e-05	6.307e-08	7.682e-11
28	0.004068	1.892e-05	5.116e-08	5.808e-11
29	0.003801	1.657e-05	4.169e-08	4.432e-11
30	0.003554	1.455e-05	3.411e-08	3.404e-11
31	0.003325	1.280e-05	2.828e-08	2.629e-11
32	0.003136	1.128e-05	2.355e-08	2.062e-11
33	0.00296	1.002e-05	1.967e-08	1.626e-11
34	0.002796	8.946e-06	1.649e-08	1.288e-11
35	0.002642	8.000e-06	1.388e-08	1.026e-11
36	0.002498	7.165e-06	1.182e-08	8.204e-12
37	0.002363	6.426e-06	1.009e-08	6.651e-12
38	0.002235	5.771e-06	8.636e-09	5.414e-12
39	0.002129	5.218e-06	7.410e-09	4.424e-12
40	0.002032	4.742e-06	6.373e-09	3.628e-12

Таблица А.5. Максимальные значения абсолютной погрешности быстрого разложения с граничными функциями $M_0 - M_6$ для функции $\sin(1.2\pi x)$ с использованием поточечного метода при $x \in [0,1]$, $N = 1 \div 40$.

N	Используемые граничные функции			
	M_0	M_2	M_4	M_6
1	1.449	0.3047	0.09462	0.03217
2	0.7881	0.06119	0.007563	0.001065
3	0.558	0.02272	0.00149	0.0001124
4	0.4354	0.01097	0.000446	2.086e-05
5	0.3582	0.006153	0.0001703	5.418e-06
6	0.3046	0.003801	7.634e-05	1.760e-06
7	0.2652	0.002515	3.835e-05	6.702e-07
8	0.235	0.001752	2.098e-05	2.876e-07

9	0.211	0.001269	1.226e-05	1.354e-07
10	0.1915	0.0009493	7.553e-06	6.870e-08
11	0.1753	0.0007287	4.859e-06	3.703e-08
12	0.1616	0.0005716	3.242e-06	2.100e-08
13	0.1499	0.0004567	2.230e-06	1.243e-08
14	0.1399	0.0003707	1.575e-06	7.632e-09
15	0.131	0.000305	1.138e-06	4.840e-09
16	0.1233	0.000254	8.384e-07	3.156e-09
17	0.1164	0.0002138	6.289e-07	2.110e-09
18	0.1102	0.0001816	4.792e-07	1.442e-09
19	0.1047	0.0001556	3.704e-07	1.005e-09
20	0.09968	0.0001343	2.899e-07	7.131e-10
21	0.09513	0.0001168	2.295e-07	5.142e-10
22	0.09097	0.0001021	1.836e-07	3.762e-10
23	0.08717	8.987e-05	1.483e-07	2.790e-10
24	0.08367	7.948e-05	1.209e-07	2.094e-10
25	0.08044	7.063e-05	9.929e-08	1.590e-10
26	0.07746	6.306e-05	8.218e-08	1.220e-10
27	0.07468	5.652e-05	6.848e-08	9.452e-11
28	0.0721	5.086e-05	5.744e-08	7.389e-11
29	0.06969	4.594e-05	4.847e-08	5.825e-11
30	0.06744	4.163e-05	4.112e-08	4.628e-11
31	0.06533	3.784e-05	3.508e-08	3.704e-11
32	0.06334	3.450e-05	3.007e-08	2.985e-11
33	0.06148	3.154e-05	2.589e-08	2.421e-11
34	0.05972	2.891e-05	2.239e-08	1.976e-11
35	0.05806	2.656e-05	1.945e-08	1.622e-11
36	0.05649	2.446e-05	1.695e-08	1.338e-11
37	0.055	2.258e-05	1.484e-08	1.110e-11
38	0.05358	2.088e-05	1.303e-08	9.253e-12
39	0.05224	1.936e-05	1.148e-08	7.749e-12
40	0.05097	1.797e-05	1.014e-08	6.517e-12

Таблица А.6. Максимальные значения абсолютной погрешности быстрого разложения с граничными функциями $M_0 - M_6$ для функции $\sin(1.2\pi x)$ с использованием интеграла Фурье при $x \in [0,1]$, $N = 1 \div 40$.

N	Используемые граничные функции			
	M_0	M_2	M_4	M_6
1	0.1244	0.04069	0.01408	0.00498
2	0.03665	0.004734	0.0006838	0.0001037
3	0.01777	0.001204	9.333e-05	7.711e-06
4	0.01053	0.0004365	2.095e-05	1.080e-06
5	0.006979	0.0001948	6.333e-06	2.222e-07
6	0.004967	9.959e-05	2.335e-06	5.925e-08
7	0.003717	5.610e-05	9.927e-07	1.903e-08
8	0.002886	3.396e-05	4.694e-07	7.040e-09
9	0.002307	2.175e-05	2.411e-07	2.904e-09
10	0.001886	1.457e-05	1.324e-07	1.308e-09
11	0.001571	1.012e-05	7.676e-08	6.335e-10
12	0.001329	7.243e-06	4.658e-08	3.259e-10
13	0.001138	5.320e-06	2.938e-08	1.763e-10
14	0.0009857	3.997e-06	1.914e-08	9.967e-11
15	0.0008633	3.063e-06	1.283e-08	5.852e-11
16	0.00076	2.386e-06	8.814e-09	3.552e-11
17	0.0006769	1.883e-06	6.191e-09	2.219e-11
18	0.0006039	1.509e-06	4.442e-09	1.423e-11
19	0.0005448	1.221e-06	3.233e-09	9.352e-12
20	0.0004927	1.001e-06	2.400e-09	6.254e-12
21	0.0004463	8.247e-07	1.799e-09	4.286e-12
22	0.0004088	6.897e-07	1.373e-09	2.973e-12
23	0.000375	5.791e-07	1.056e-09	2.104e-12
24	0.0003443	4.889e-07	8.227e-10	1.508e-12
25	0.0003167	4.179e-07	6.482e-10	1.092e-12
26	0.0002943	3.583e-07	5.136e-10	8.054e-13
27	0.0002737	3.081e-07	4.107e-10	5.988e-13
28	0.0002548	2.669e-07	3.325e-10	4.484e-13

29	0.0002373	2.332e-07	2.704e-10	3.411e-13
30	0.0002211	2.043e-07	2.208e-10	2.618e-13
31	0.0002072	1.793e-07	1.814e-10	2.021e-13
32	0.0001953	1.576e-07	1.510e-10	1.569e-13
33	0.0001842	1.394e-07	1.261e-10	1.230e-13
34	0.0001739	1.244e-07	1.057e-10	9.754e-14
35	0.0001642	1.112e-07	8.886e-11	7.774e-14
36	0.0001551	9.958e-08	7.491e-11	6.224e-14
37	0.0001466	8.930e-08	6.365e-11	5.004e-14
38	0.0001385	8.019e-08	5.456e-11	4.039e-14
39	0.000131	7.209e-08	4.690e-11	3.283e-14
40	0.0001246	6.487e-08	4.040e-11	2.699e-14

Таблица А.7. Максимальные значения абсолютной погрешности первых производных быстрого разложения с граничными функциями $M_2 \div M_6$ для функций $\sin(5.3\pi x)$, $\sin(1.2\pi x)$, x^{10} с использованием интеграла Фурье при $x \in [0,1]$, $N = 1 \div 40$.

N	$\frac{d}{dx} \sin(5.3\pi x)$			$\frac{d}{dx} \sin(1.2\pi x)$		
	M_2	M_4	M_6	M_2	M_4	M_6
1	36.61	141.7	763.7	0.2934	0.09275	0.03187
2	25.2	48.67	110.3	0.05537	0.007051	0.00102
3	21.14	27.08	37.9	0.01955	0.001319	0.0001031
4	20.13	21.53	23.27	0.009083	0.000377	1.830e-05
5	7.194	4.678	3.309	0.004944	0.0001386	4.568e-06
6	2.711	1.179	0.5788	0.002985	6.021e-05	1.433e-06
7	1.465	0.4651	0.1693	0.001939	2.947e-05	5.298e-07
8	0.9095	0.2212	0.06232	0.00133	1.578e-05	2.216e-07
9	0.6116	0.1179	0.0265	0.0009516	9.052e-06	1.021e-07
10	0.434	0.06806	0.01249	0.0007042	5.490e-06	5.077e-08
11	0.3205	0.04169	0.006367	0.0005357	3.485e-06	2.690e-08
12	0.244	0.02677	0.003456	0.000417	2.297e-06	1.503e-08
13	0.1904	0.01786	0.001975	0.0003309	1.564e-06	8.778e-09
14	0.1516	0.0123	0.001179	0.000267	1.094e-06	5.328e-09

15	0.1227	0.008705	0.0007294	0.0002185	7.840e-07	3.343e-09
16	0.1009	0.006304	0.0004659	0.0001811	5.736e-07	2.159e-09
17	0.08394	0.004658	0.000306	0.0001518	4.274e-07	1.431e-09
18	0.07062	0.003504	0.0002059	0.0001285	3.238e-07	9.702e-10
19	0.06	0.002677	0.0001415	0.0001097	2.489e-07	6.714e-10
20	0.05141	0.002074	9.922e-05	9.440e-05	1.938e-07	4.732e-10
21	0.0444	0.001628	7.077e-05	8.182e-05	1.527e-07	3.392e-10
22	0.03862	0.001292	5.128e-05	7.139e-05	1.217e-07	2.468e-10
23	0.0338	0.001036	3.770e-05	6.265e-05	9.792e-08	1.820e-10
24	0.02975	0.0008389	2.808e-05	5.529e-05	7.950e-08	1.360e-10
25	0.02633	0.0006851	2.116e-05	4.903e-05	6.509e-08	1.028e-10
26	0.02342	0.000564	1.613e-05	4.369e-05	5.370e-08	7.855e-11
27	0.02092	0.0004677	1.242e-05	3.909e-05	4.462e-08	6.061e-11
28	0.01876	0.0003905	9.656e-06	3.512e-05	3.733e-08	4.721e-11
29	0.0169	0.0003282	7.572e-06	3.166e-05	3.142e-08	3.709e-11
30	0.01527	0.0002774	5.987e-06	2.865e-05	2.659e-08	2.937e-11
31	0.01384	0.0002358	4.771e-06	2.601e-05	2.263e-08	2.344e-11
32	0.01259	0.0002014	3.829e-06	2.368e-05	1.936e-08	1.883e-11
33	0.01149	0.0001729	3.093e-06	2.162e-05	1.664e-08	1.523e-11
34	0.01051	0.0001491	2.515e-06	1.979e-05	1.436e-08	1.240e-11
35	0.009638	0.0001291	2.057e-06	1.817e-05	1.245e-08	1.015e-11
36	0.008861	0.0001123	1.692e-06	1.671e-05	1.084e-08	8.359e-12
37	0.008165	9.803e-05	1.399e-06	1.541e-05	9.465e-09	6.918e-12
38	0.007541	8.589e-05	1.163e-06	1.424e-05	8.298e-09	5.755e-12
39	0.006979	7.550e-05	9.714e-07	1.319e-05	7.300e-09	4.809e-12
40	0.006471	6.659e-05	8.149e-07	1.223e-05	6.442e-09	4.037e-12

Продолжение таблицы А.7.

N	$\frac{d}{dx} x^{10}$		
	M_2	M_4	M_6
1	4.62	3.898	1.557
2	1.574	0.4776	0.0628

3	0.672	0.1018	0.007131
4	0.3387	0.03084	0.001296
5	0.1923	0.01168	0.0003327
6	0.119	0.005162	0.000105
7	0.07849	0.002554	3.925e-05
8	0.05441	0.001377	1.646e-05
9	0.03922	0.0007943	7.619e-06
10	0.02918	0.0004836	3.795e-06
11	0.02229	0.0003078	2.017e-06
12	0.0174	0.0002034	1.127e-06
13	0.01384	0.0001387	6.597e-07
14	0.01119	9.717e-05	4.006e-07
15	0.009174	6.970e-05	2.516e-07
16	0.007614	5.104e-05	1.626e-07
17	0.006388	3.807e-05	1.078e-07
18	0.005411	2.885e-05	7.313e-08
19	0.004624	2.219e-05	5.063e-08
20	0.003982	1.729e-05	3.569e-08
21	0.003453	1.363e-05	2.559e-08
22	0.003014	1.086e-05	1.862e-08
23	0.002647	8.744e-06	1.374e-08
24	0.002336	7.102e-06	1.027e-08
25	0.002073	5.816e-06	7.763e-09
26	0.001847	4.799e-06	5.932e-09
27	0.001654	3.989e-06	4.579e-09
28	0.001486	3.337e-06	3.566e-09
29	0.00134	2.809e-06	2.802e-09
30	0.001213	2.378e-06	2.219e-09
31	0.001101	2.024e-06	1.771e-09
32	0.001003	1.732e-06	1.423e-09
33	0.0009156	1.488e-06	1.151e-09
34	0.0008384	1.285e-06	9.372e-10
35	0.0007696	1.114e-06	7.674e-10
36	0.0007081	9.695e-07	6.318e-10

37	0.000653	8.470e-07	5.230e-10
38	0.0006035	7.427e-07	4.350e-10
39	0.0005589	6.533e-07	3.636e-10
40	0.0005185	5.766e-07	3.052e-10

Таблица А.8. Максимальные значения абсолютной погрешности первых производных быстрого разложения с граничными функциями $M_2 \div M_6$ для функций $\sin(5.3\pi x)$, $\sin(1.2\pi x)$, x^{10} с использованием поточечного метода при $x \in [0,1]$, $N = 1 \div 40$.

N	$\frac{d}{dx} \sin(5.3\pi x)$			$\frac{d}{dx} \sin(1.2\pi x)$		
	M_2	M_4	M_6	M_2	M_4	M_6
1	35.63	145.6	783.6	0.3047	0.09462	0.03217
2	30.25	58.33	124.7	0.06119	0.007563	0.001065
3	27.02	35.38	49.46	0.02272	0.00149	0.0001124
4	22.69	23.6	24.93	0.01097	0.000446	2.086e-05
5	8.487	5.354	3.669	0.006153	0.0001703	5.418e-06
6	3.4	1.449	0.6867	0.003801	7.634e-05	1.760e-06
7	1.892	0.5947	0.2098	0.002515	3.835e-05	6.702e-07
8	1.198	0.2911	0.07979	0.001752	2.098e-05	2.876e-07
9	0.817	0.1587	0.03483	0.001269	1.226e-05	1.354e-07
10	0.5865	0.09324	0.01678	0.0009493	7.553e-06	6.870e-08
11	0.4371	0.05799	0.008719	0.0007287	4.859e-06	3.703e-08
12	0.3354	0.03772	0.004811	0.0005716	3.242e-06	2.100e-08
13	0.2635	0.02544	0.002788	0.0004567	2.230e-06	1.243e-08
14	0.211	0.01769	0.001685	0.0003707	1.575e-06	7.632e-09
15	0.1718	0.01263	0.001054	0.000305	1.138e-06	4.840e-09
16	0.1418	0.009213	0.0006801	0.000254	8.384e-07	3.156e-09
17	0.1185	0.006854	0.0004507	0.0002138	6.289e-07	2.110e-09
18	0.1001	0.005187	0.0003057	0.0001816	4.792e-07	1.442e-09
19	0.08528	0.003985	0.0002117	0.0001556	3.704e-07	1.005e-09
20	0.07331	0.003104	0.0001494	0.0001343	2.899e-07	7.131e-10
21	0.06348	0.002447	0.0001073	0.0001168	2.295e-07	5.142e-10
22	0.05535	0.00195	7.816e-05	0.0001021	1.836e-07	3.762e-10

23	0.04856	0.00157	5.776e-05	8.987e-05	1.483e-07	2.790e-10
24	0.04284	0.001276	4.323e-05	7.948e-05	1.209e-07	2.094e-10
25	0.03799	0.001046	3.273e-05	7.063e-05	9.929e-08	1.590e-10
26	0.03385	0.0008634	2.505e-05	6.306e-05	8.218e-08	1.220e-10
27	0.03029	0.0007181	1.937e-05	5.652e-05	6.848e-08	9.452e-11
28	0.02721	0.0006012	1.511e-05	5.086e-05	5.744e-08	7.389e-11
29	0.02454	0.0005065	1.189e-05	4.594e-05	4.847e-08	5.825e-11
30	0.02221	0.0004291	9.434e-06	4.163e-05	4.112e-08	4.628e-11
31	0.02016	0.0003655	7.540e-06	3.784e-05	3.508e-08	3.704e-11
32	0.01836	0.0003129	6.068e-06	3.450e-05	3.007e-08	2.985e-11
33	0.01677	0.0002692	4.916e-06	3.154e-05	2.589e-08	2.421e-11
34	0.01536	0.0002326	4.008e-06	2.891e-05	2.239e-08	1.976e-11
35	0.0141	0.0002018	3.286e-06	2.656e-05	1.945e-08	1.622e-11
36	0.01298	0.0001758	2.710e-06	2.446e-05	1.695e-08	1.338e-11
37	0.01197	0.0001537	2.246e-06	2.258e-05	1.484e-08	1.110e-11
38	0.01107	0.0001349	1.870e-06	2.088e-05	1.303e-08	9.253e-12
39	0.01025	0.0001187	1.565e-06	1.936e-05	1.148e-08	7.749e-12
40	0.009512	0.0001049	1.316e-06	1.797e-05	1.014e-08	6.517e-12

Продолжение таблицы А.8.

N	$\frac{d}{dx} x^{10}$		
	M_2	M_4	M_6
1	4.896	4.02	1.575
2	1.76	0.5163	0.06589
3	0.7856	0.1157	0.007793
4	0.4103	0.03661	0.001482
5	0.2396	0.01438	0.0003949
6	0.1516	0.006553	0.0001292
7	0.1018	0.003327	4.967e-05
8	0.07163	0.001832	2.139e-05
9	0.05228	0.001076	1.011e-05
10	0.03931	0.0006655	5.138e-06

11	0.0303	0.0004294	2.776e-06
12	0.02384	0.000287	1.576e-06
13	0.01909	0.0001978	9.340e-07
14	0.01553	0.0001398	5.740e-07
15	0.0128	0.0001011	3.643e-07
16	0.01067	7.460e-05	2.377e-07
17	0.008992	5.601e-05	1.590e-07
18	0.007646	4.271e-05	1.087e-07
19	0.006556	3.302e-05	7.579e-08
20	0.005664	2.586e-05	5.379e-08
21	0.004927	2.048e-05	3.880e-08
22	0.004312	1.639e-05	2.839e-08
23	0.003795	1.325e-05	2.106e-08
24	0.003358	1.080e-05	1.581e-08
25	0.002985	8.871e-06	1.201e-08
26	0.002666	7.343e-06	9.215e-09
27	0.00239	6.121e-06	7.140e-09
28	0.002152	5.135e-06	5.582e-09
29	0.001944	4.333e-06	4.401e-09
30	0.001762	3.677e-06	3.497e-09
31	0.001602	3.137e-06	2.799e-09
32	0.00146	2.689e-06	2.256e-09
33	0.001335	2.316e-06	1.830e-09
34	0.001224	2.003e-06	1.493e-09
35	0.001125	1.740e-06	1.226e-09
36	0.001036	1.517e-06	1.012e-09
37	0.0009565	1.328e-06	8.391e-10
38	0.0008848	1.166e-06	6.995e-10
39	0.0008201	1.027e-06	5.858e-10
40	0.0007616	9.077e-07	4.927e-10

Таблица А.9. Максимальные значения абсолютной погрешности вторых производных быстрого разложения с граничными функциями $M_2 \div M_6$ для функций $\sin(5.3\pi x)$, $\sin(1.2\pi x)$, x^{10} с использованием интеграла Фурье при $x \in [0,1]$, $N = 1 \div 40$.

N	$\frac{d^2}{dx^2} \sin(5.3\pi x)$			$\frac{d^2}{dx^2} \sin(1.2\pi x)$		
	M_2	M_4	M_6	M_2	M_4	M_6
1	402.7	1025	4747	1.768	0.5782	0.2001
2	338.5	569.6	1157	0.5208	0.06728	0.009719
3	326.5	395.9	524.6	0.2526	0.0171	0.001326
4	324.3	344.9	370.9	0.1497	0.006204	0.0002977
5	136.8	90.47	63.75	0.09918	0.002768	9.000e-05
6	61.98	27.19	13.22	0.07059	0.001415	3.319e-05
7	38.98	12.41	4.467	0.05283	0.0007973	1.411e-05
8	27.57	6.704	1.863	0.04102	0.0004826	6.671e-06
9	20.78	3.997	0.885	0.03279	0.0003092	3.427e-06
10	16.34	2.551	0.4608	0.02681	0.000207	1.882e-06
11	13.24	1.712	0.2574	0.02233	0.0001439	1.091e-06
12	10.97	1.196	0.1518	0.01889	0.0001029	6.620e-07
13	9.251	0.8613	0.09371	0.01618	7.561e-05	4.175e-07
14	7.915	0.6373	0.06005	0.01401	5.681e-05	2.720e-07
15	6.858	0.4823	0.03971	0.01227	4.354e-05	1.824e-07
16	6.002	0.3718	0.02698	0.0108	3.391e-05	1.253e-07
17	5.299	0.2908	0.01879	0.00962	2.676e-05	8.799e-08
18	4.712	0.2318	0.01338	0.008583	2.145e-05	6.313e-08
19	4.219	0.1863	0.009673	0.007742	1.736e-05	4.595e-08
20	3.796	0.1521	0.007144	0.007002	1.423e-05	3.411e-08
21	3.439	0.1247	0.005328	0.006343	1.172e-05	2.556e-08
22	3.128	0.1039	0.004052	0.005811	9.803e-06	1.952e-08
23	2.861	0.08702	0.003106	0.005329	8.230e-06	1.501e-08
24	2.629	0.07321	0.002412	0.004893	6.948e-06	1.169e-08
25	2.42	0.06245	0.001895	0.004501	5.939e-06	9.212e-09
26	2.237	0.05344	0.001498	0.004183	5.093e-06	7.300e-09
27	2.072	0.04587	0.001195	0.00389	4.379e-06	5.837e-09

28	1.925	0.03964	0.0009658	0.003621	3.793e-06	4.725e-09
29	1.798	0.03459	0.0007842	0.003373	3.314e-06	3.843e-09
30	1.674	0.03026	0.0006396	0.003143	2.903e-06	3.139e-09
31	1.572	0.02653	0.0005245	0.002944	2.548e-06	2.578e-09
32	1.474	0.0233	0.000436	0.002776	2.240e-06	2.146e-09
33	1.384	0.02057	0.0003638	0.002618	1.981e-06	1.792e-09
34	1.3	0.01834	0.0003046	0.002471	1.768e-06	1.502e-09
35	1.232	0.01639	0.0002558	0.002334	1.580e-06	1.263e-09
36	1.167	0.01466	0.0002155	0.002204	1.415e-06	1.065e-09
37	1.098	0.01314	0.0001829	0.002083	1.269e-06	9.047e-10
38	1.045	0.01179	0.0001567	0.001969	1.140e-06	7.755e-10
39	0.9849	0.01059	0.0001346	0.001862	1.025e-06	6.665e-10
40	0.9355	0.00953	0.0001159	0.001771	9.220e-07	5.742e-10

Продолжение таблицы А.9.

N	$\frac{d^2}{dx^2} x^{10}$		
	M_2	M_4	M_6
1	28.62	24.3	9.768
2	15.11	4.572	0.5993
3	8.791	1.324	0.09183
4	5.629	0.5087	0.02111
5	3.881	0.2336	0.006558
6	2.827	0.1215	0.002435
7	2.146	0.06916	0.001046
8	1.683	0.04217	0.0004957
9	1.354	0.02715	0.0002559
10	1.112	0.01825	0.0001407
11	0.9304	0.01271	8.180e-05
12	0.7892	0.009116	4.968e-05
13	0.6774	0.006708	3.138e-05
14	0.5875	0.005046	2.046e-05
15	0.5155	0.003871	1.373e-05

16	0.4544	0.003019	9.434e-06
17	0.405	0.002383	6.631e-06
18	0.3616	0.001912	4.759e-06
19	0.3265	0.001548	3.465e-06
20	0.2955	0.001269	2.573e-06
21	0.2678	0.001046	1.929e-06
22	0.2455	0.0008752	1.473e-06
23	0.2252	0.000735	1.133e-06
24	0.2068	0.0006207	8.828e-07
25	0.1904	0.0005307	6.957e-07
26	0.1769	0.0004552	5.513e-07
27	0.1646	0.0003914	4.409e-07
28	0.1532	0.0003391	3.570e-07
29	0.1428	0.0002964	2.903e-07
30	0.133	0.0002596	2.371e-07
31	0.1247	0.0002279	1.948e-07
32	0.1176	0.0002004	1.622e-07
33	0.1109	0.0001772	1.355e-07
34	0.1047	0.0001582	1.135e-07
35	0.09886	0.0001414	9.545e-08
36	0.0934	0.0001266	8.047e-08
37	0.08826	0.0001136	6.839e-08
38	0.08344	0.000102	5.862e-08
39	0.07889	9.170e-05	5.039e-08
40	0.07506	8.252e-05	4.341e-08

Таблица А.10. Максимальные значения абсолютной погрешности вторых производных быстрого разложения с граничными функциями $M_2 \div M_6$ для функций $\sin(5.3\pi x)$, $\sin(1.2\pi x)$, x^{10} с использованием поточечного метода при $x \in [0,1]$, $N = 1 \div 40$.

N	$\frac{d^2}{dx^2} \sin(5.3\pi x)$			$\frac{d^2}{dx^2} \sin(1.2\pi x)$		
	M_2	M_4	M_6	M_2	M_4	M_6
1	401.4	1030	4783	1.788	0.5821	0.2007

2	359.5	601.4	1210	0.5428	0.06965	0.009943
3	354	458.3	626.2	0.2707	0.01832	0.001399
4	356.1	370.4	391.3	0.1641	0.00686	0.0003245
5	151.9	99.32	68.72	0.1107	0.003146	0.0001011
6	70.89	31.28	14.98	0.07989	0.001646	3.833e-05
7	45.18	14.67	5.228	0.06048	0.0009451	1.669e-05
8	32.23	8.078	2.236	0.04741	0.0005818	8.057e-06
9	24.46	4.893	1.085	0.03819	0.0003779	4.215e-06
10	19.34	3.162	0.5745	0.03141	0.0002561	2.352e-06
11	15.73	2.145	0.3257	0.02633	0.0001798	1.382e-06
12	13.09	1.512	0.1947	0.02238	0.0001299	8.497e-07
13	11.08	1.098	0.1216	0.01925	9.620e-05	5.416e-07
14	9.516	0.818	0.07868	0.01673	7.276e-05	3.564e-07
15	8.266	0.623	0.05252	0.01471	5.610e-05	2.411e-07
16	7.253	0.4832	0.036	0.013	4.397e-05	1.671e-07
17	6.417	0.3804	0.02523	0.01159	3.491e-05	1.182e-07
18	5.721	0.3038	0.01807	0.01039	2.806e-05	8.524e-08
19	5.134	0.2459	0.01318	0.00938	2.285e-05	6.258e-08
20	4.632	0.2009	0.009755	0.008481	1.875e-05	4.654e-08
21	4.203	0.166	0.007346	0.007741	1.558e-05	3.522e-08
22	3.828	0.1384	0.00559	0.007081	1.302e-05	2.690e-08
23	3.506	0.116	0.004313	0.006485	1.096e-05	2.083e-08
24	3.222	0.09842	0.003365	0.00598	9.324e-06	1.630e-08
25	2.973	0.08382	0.002642	0.005537	7.959e-06	1.283e-08
26	2.742	0.07161	0.002105	0.005131	6.818e-06	1.025e-08
27	2.55	0.06198	0.001689	0.004759	5.912e-06	8.240e-09
28	2.371	0.0538	0.001362	0.004426	5.140e-06	6.657e-09
29	2.214	0.04682	0.001107	0.004148	4.480e-06	5.424e-09
30	2.069	0.04083	0.0009101	0.00389	3.912e-06	4.465e-09
31	1.935	0.036	0.0007512	0.003651	3.456e-06	3.690e-09
32	1.823	0.03186	0.0006224	0.003428	3.061e-06	3.061e-09
33	1.713	0.02824	0.0005174	0.00322	2.716e-06	2.548e-09
34	1.613	0.02508	0.0004354	0.003026	2.415e-06	2.146e-09
35	1.527	0.02231	0.0003681	0.002867	2.150e-06	1.817e-09

36	1.442	0.01992	0.0003122	0.002722	1.922e-06	1.542e-09
37	1.364	0.01796	0.0002655	0.002585	1.734e-06	1.312e-09
38	1.29	0.01621	0.0002264	0.002456	1.566e-06	1.120e-09
39	1.23	0.01466	0.0001935	0.002335	1.417e-06	9.577e-10
40	1.173	0.01327	0.0001668	0.00222	1.283e-06	8.266e-10

Продолжение таблицы А.10.

N	$\frac{d^2}{dx^2} x^{10}$		
	M_2	M_4	M_6
1	29.01	24.54	9.807
2	15.75	4.747	0.6146
3	9.406	1.422	0.09693
4	6.155	0.5631	0.02305
5	4.319	0.2656	0.00737
6	3.191	0.1413	0.002815
7	2.451	0.08199	0.001237
8	1.941	0.05082	0.000599
9	1.574	0.03318	0.0003147
10	1.303	0.02256	0.0001759
11	1.095	0.01589	0.0001036
12	0.9339	0.0115	6.377e-05
13	0.8054	0.008532	4.071e-05
14	0.7011	0.006462	2.680e-05
15	0.6172	0.004988	1.815e-05
16	0.5466	0.003913	1.258e-05
17	0.4877	0.003109	8.903e-06
18	0.4376	0.002501	6.425e-06
19	0.3953	0.002038	4.719e-06
20	0.3576	0.001673	3.511e-06
21	0.3267	0.00139	2.657e-06
22	0.299	0.001163	2.030e-06
23	0.2739	0.0009785	1.573e-06

24	0.2527	0.0008328	1.231e-06
25	0.2341	0.0007111	9.689e-07
26	0.217	0.0006093	7.741e-07
27	0.2013	0.0005284	6.224e-07
28	0.1872	0.0004595	5.028e-07
29	0.1755	0.0004005	4.098e-07
30	0.1647	0.0003498	3.374e-07
31	0.1545	0.0003091	2.789e-07
32	0.1451	0.0002738	2.313e-07
33	0.1364	0.000243	1.925e-07
34	0.1282	0.000216	1.622e-07
35	0.1214	0.0001923	1.373e-07
36	0.1153	0.000172	1.165e-07
37	0.1095	0.0001551	9.920e-08
38	0.1041	0.0001401	8.465e-08
39	0.09893	0.0001268	7.240e-08
40	0.09407	0.0001148	6.249e-08

Таблица А.11. Значения коэффициентов Фурье быстрого разложения с граничной функцией M_0 для функций $\sin(5.3\pi x)$ с использованием поточечного метода и интеграла Фурье $N=1\div 50$.

N	Поточечный метод	Интеграл Фурье
1	0.5337	0.5341
2	-0.2998	-0.301
3	0.2527	0.2529
4	-0.299	-0.2994
5	0.9357	0.9362
6	0.3037	0.305
7	-0.09988	-0.09879
8	0.05047	0.05032
9	-0.03005	-0.03015
10	0.01915	0.02004
11	-0.01389	-0.01409
12	0.01154	0.01035
13	-0.007761	-0.00788
14	0.006455	0.00605
15	-0.007885	-0.00484
16	0.00358	0.00394
17	-0.003226	-0.00323
18	0.002821	0.00269
19	-0.00102	-0.00224
20	0.004773	0.00191
21	-0.001346	-0.00164
22	0.001714	0.00141
23	-0.00149	-0.00124
24	0.001644	0.00106
25	-0.002376	-0.00094
26	0.0003137	0.00084
27	-0.0007062	-0.000721
28	0.002196	0.00068
29	-0.000498	-0.000563

30	0.001722	0.000547
31	-0.0016	-0.000439
32	0.0006235	0.000428
33	-0.0009278	-0.000419
34	-0.00168	0.000337
35	-3.922e-05	-0.000337
36	0.0007454	0.000278
37	-0.001302	-0.000277
38	0.006431	0.000308
39	-0.0001295	-0.000206
40	0.003439	0.000258
41	0.0006	-0.000154
42	0.00406	0.000188
43	0.002329	-0.000124
44	0.001714	0.000151
45	0.002154	-0.000184
46	0.004792	0.000114
47	0	-0.000149
48	0.001416	9.3e-05
49	-0.003435	-0.000116
50	0.00469	0.000108

Таблица А.12. Значение погрешности представления неявной функции в явном виде с использованием граничной функции шестого порядка.

N	1	2	3	4	5	6	7
Δ	0.07772	0.007407	0.0005315	1.918e-05	1.285e-05	3.606e-06	9.554e-07
8	9	10	11	12	13	14	15
2.900e-07	1.077e-07	4.602e-08	2.193e-08	1.112e-08	6.013e-09	3.381e-09	1.990e-09
16	17	18	19	20	21	22	23
1.205e-09	7.556e-10	4.845e-10	3.198e-10	2.142e-10	1.473e-10	1.023e-10	7.270e-11
24	25	26	27	28	29	30	31
5.207e-11	3.801e-11	2.800e-11	2.084e-11	1.571e-11	1.198e-11	9.175e-12	7.083e-12
32	33	34	35	36	37	38	39
5.542e-12	4.369e-12	3.456e-12	2.750e-12	2.196e-12	1.780e-12	1.447e-12	1.182e-12

Приложение Б

Программа Б.1. Исследование погрешности быстрого разложения.

```

[> restart;
[> "Процедура поиска максимума на выбранном отрезке" :
[> MAX := proc(f, limit1, limit2)
    local U, L, K, maxelem, Max, j1, i :
    K := 500 :
    L := 2 :
    U[1] := 0 : U[2] := 1 :
    while U[L] > U[L - 1] do
    L := L + 1 :
    j1 := 0 :
    for i from limit1 to limit2 by  $\frac{1}{K}$  do
        j1 := j1 + 1 :
        Max[j1] := evalf(subs({x = i}, f)) :
    end do:
    maxelem := Max[1] :
    for i from 2 to j1 by 1 do
        if maxelem <= Max[i] then
            maxelem := Max[i] :
        else
            maxelem := Max[i] :
        end if:
    end do:
    U[L] := maxelem :
    K := K + 50 :
    end do:
    return(U[L]);
    end proc:
[> "задаем, сколько учитываем знаков после запятой" :
[> Digits := 50 :
[>
[> g1 := sin(5.3·Pi·x) : g2 := sin(1.2·Pi·x) : g3 := x10 :
[> "задаем количество учитываемых членов в ряде" :
[> N1 := 50 :
[> "заполняем матрицы с разложениями для каждой функции с использованием различных
    граничных функций M0-M6. Коэффициенты ряда вычисляются с помощью
    поточечного метода и интегралов Фурье" :
[> for N from 1 to N1 by 1 do
    for k from 1 to 3 by 1 do
        a1k := limx→0 gk : a2k := subs({x = 1}, gk) : a3k := limx→0 diff(gk, x$2) : a4k := subs({x = 1},
            diff(gk, x$2)) : a5k := limx→0 diff(gk, x$4) : a6k := subs({x = 1}, diff(gk, x$4)) : a7k :=
            limx→0 diff(gk, x$6) : a8k := subs({x = 1}, diff(gk, x$6)) :
        M1,k := a1k·(1 - x) + a2k·x :
        M2,k := a1k·(1 - x) + a2k·x + a3k· $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3}\right)$  + a4k· $\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right)$  :
        M3,k := a1k·(1 - x) + a2k·x + a3k· $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3}\right)$  + a4k· $\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right)$  + a5k· $\left(\frac{x^4}{24}\right)$  :
    end do:
    end do:

```

$$-\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{18} + \frac{x}{45} + a6_k \cdot \left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{36} + \frac{7 \cdot x}{360} \right);$$

$$M_{4,k} := a1_k \cdot (1-x) + a2_k \cdot x + a3_k \cdot \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3} \right) + a4_k \cdot \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6} \right) + a5_k \cdot \left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{18} + \frac{x}{45} \right) + a6_k \cdot \left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{36} + \frac{7 \cdot x}{360} \right) + a7_k \cdot \left(\frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040} - \frac{x^5}{360} + \frac{x^3}{270} - \frac{2 \cdot x}{945} \right) + a8_k \cdot \left(\frac{x^7}{5040} - \frac{x^5}{720} + \frac{7 \cdot x^3}{2160} - \frac{31 \cdot x}{15120} \right);$$

for j from 1 to 4 by 1 do

$$PointCoef_{j,k} := \frac{\sum_{n=1}^N subs \left(\left\{ x = \frac{n}{N+1} \right\}, (g_k - M_{j,k}) \cdot \sin(m \cdot \text{Pi} \cdot x) \right)}{\sum_{n=1}^N subs \left(\left\{ x = \frac{n}{N+1} \right\}, (\sin(m \cdot \text{Pi} \cdot x))^2 \right)} : Point_{j,k,N} := M_{j,k}$$

$$+ \sum_{m=1}^N (PointCoef_{j,k} \cdot \sin(m \cdot \text{Pi} \cdot x)) :$$

$$FurCoef_{j,k} := 2 \cdot \text{int} \left((g_k - M_{j,k}) \cdot \sin(m \cdot \text{Pi} \cdot x), x=0..1 \right) : Fur_{j,k,N} := M_{j,k} + \sum_{m=1}^N (FurCoef_{j,k} \cdot \sin(m \cdot \text{Pi} \cdot x)) :$$

end do:
end do:
end do:

> "переменные для формирования имени выходных файлов" :
> $s_1 := "G:\\значение функции, вычисленной с помощью поточечного метода" : fs_1$
:= "G:\\значение функции, вычисленной с помощью интегралов Фурье" :
> $s_2 := "G:\\значение первой производной, вычисленной с помощью поточечного метода" :$
 fs_2
:= "G:\\значение первой производной, вычисленной с помощью интегралов Фурье" :
> $s_3 := "G:\\значение второй производной, вычисленной с помощью поточечного метода" :$
 fs_3
:= "G:\\значение второй производной, вычисленной с помощью интегралов Фурье" :
> $ss_1 := " \sin(5,3\text{pix})" : ss_2 := " \sin(1,2\text{pix})" : ss_3 := " x10" :$
> $sss_1 := " с граничной функцией M0.txt" :$
 $sss_2 := " с граничной функцией M2.txt" :$
 $sss_3 := " с граничной функцией M4.txt" :$
 $sss_4 := " с граничной функцией M6.txt" :$
> "поиск максимальных значений невязок разложения функции при поточечном методе и интегралах Фурье" :
> **for k from 1 to 3 by 1 do**
for N from 1 to N1 by 1 do
for j from 1 to 4 by 1 do

```
Nevj, k, N := MAX(|Pointj, k, N - gk, 0, 1) :
```

```
FNevj, k, N := MAX(|Furj, k, N - gk, 0, 1) :
```

```
end do:
```

```
end do:
```

```
end do:
```

```
> "запись результатов вычислений для поточечного метода в файлы" :
```

```
> for k from 1 to 3 by 1 do
```

```
  for i from 1 to 4 by 1 do
```

```
    Ki, k := [Nev[i, k, kI] $k1 = 1 ..N1] :
```

```
    f := fopen(cat(s1, ssk, sssi), WRITE) :
```

```
    writedata(f, evalf4(Ki, k)) :
```

```
    fclose(f) :
```

```
  end do:
```

```
end do:
```

```
> "запись результатов вычислений для интегралов Фурье в файлы" :
```

```
> for k from 1 to 3 by 1 do
```

```
  for i from 1 to 4 by 1 do
```

```
    Ki, k := [FNev[i, k, kI] $k1 = 1 ..N1] :
```

```
    f := fopen(cat(fs1, ssk, sssi), WRITE) :
```

```
    writedata(f, evalf4(Ki, k)) :
```

```
    fclose(f) :
```

```
  end do:
```

```
end do:
```

```
> "поиск максимальных значений невязок однократного дифференцирования разложения  
  функции при поточечном методе и интегралах Фурье" :
```

```
> for k from 1 to 3 by 1 do
```

```
  for N from 1 to NI by 1 do
```

```
    for j from 1 to 4 by 1 do
```

```
      DNevj, k, N := MAX(|diff(Pointj, k, N - gk x), 0, 1) :
```

```
      DFNevj, k, N := MAX(|diff(Furj, k, N - gk x), 0, 1) :
```

```
    end do:
```

```
  end do:
```

```
end do:
```

```
> "запись результатов вычислений для поточечного метода в файлы" :
```

```
> for k from 1 to 3 by 1 do
```

```
  for i from 1 to 4 by 1 do
```

```
    Ki, k := [DNev[i, k, kI] $k1 = 1 ..N1] :
```

```
    f := fopen(cat(s2, ssk, sssi), WRITE) :
```

```
    writedata(f, evalf4(Ki, k)) :
```

```
    fclose(f) :
```

```
  end do:
```

```
end do:
```

```
> "запись результатов вычислений для интегралов Фурье в файлы" :
```

```
> for k from 1 to 3 by 1 do
```

```
  for i from 1 to 4 by 1 do
```

Программа Б.2. Представление неявной функции в приближенном явном виде на отрезке $x \in [0,1]$.

```

> restart;
> "процедура поиска максимума функции на отрезке" :
> MAX := proc(f, limit1, limit2)
  local U, L, K, maxelem, Max, j1, i :
  K := 500 :
  L := 2 :
  U[1] := 0 : U[2] := 1 :
  while U[L] > U[L - 1] do
  L := L + 1 :
  j1 := 0 :

  for i from limit1 to limit2 by  $\frac{1}{K}$  do
    j1 := j1 + 1 :
    Max[j1] := evalf(subs({x=i},f)) :
  end do:
  maxelem := Max[1] :
  for i from 2 to j1 by 1 do
    if maxelem <= Max[i] then
      maxelem := Max[i] :
    else
      maxelem := Max[i] :
    end if:
  end do:
  U[L] := maxelem :
  K := K + 50 :
end do:
return(U[L]);
end proc:
> "устанавливаем число учитываемых знаков после запятой" :
> Digits := 50 :
> "подключаем библиотеки для того, чтобы корни уравнений были вещественными" :
> with(plots) : _EnvAllSolutins := true : with(RealDomain) :
> "задаем неявную функцию и определяем коэффициенты специальной граничной
  функции" :
> Fxy :=  $x^2 + y^2 - 2 \cdot \sin(x \cdot y + 0.9) - 4$  :
D2Fxy := implicitdiff(Fxy=0, y, x$2) :
D4Fxy := implicitdiff(Fxy=0, y, x$4) :
D6Fxy := implicitdiff(Fxy=0, y, x$6) :
A1 := [evalf(solve(eval(Fxy, x=0), y))] : a1 := max(A1) :
A2 := [evalf(solve(eval(Fxy, x=1), y))] : a2 := max(A2) :
A3 := [eval(D2Fxy, {x=0, y=a1})] : a3 := max(A3) :
A4 := [eval(D2Fxy, {x=1, y=a2})] : a4 := max(A4) :
A5 := [eval(D4Fxy, {x=0, y=a1})] : a5 := max(A5) :
A6 := [eval(D4Fxy, {x=1, y=a2})] : a6 := max(A6) :
A7 := [eval(D6Fxy, {x=0, y=a1})] : a7 := max(A7) :
A8 := [eval(D6Fxy, {x=1, y=a2})] : a8 := max(A8) :
> "записываем специальную граничную функцию" :

```

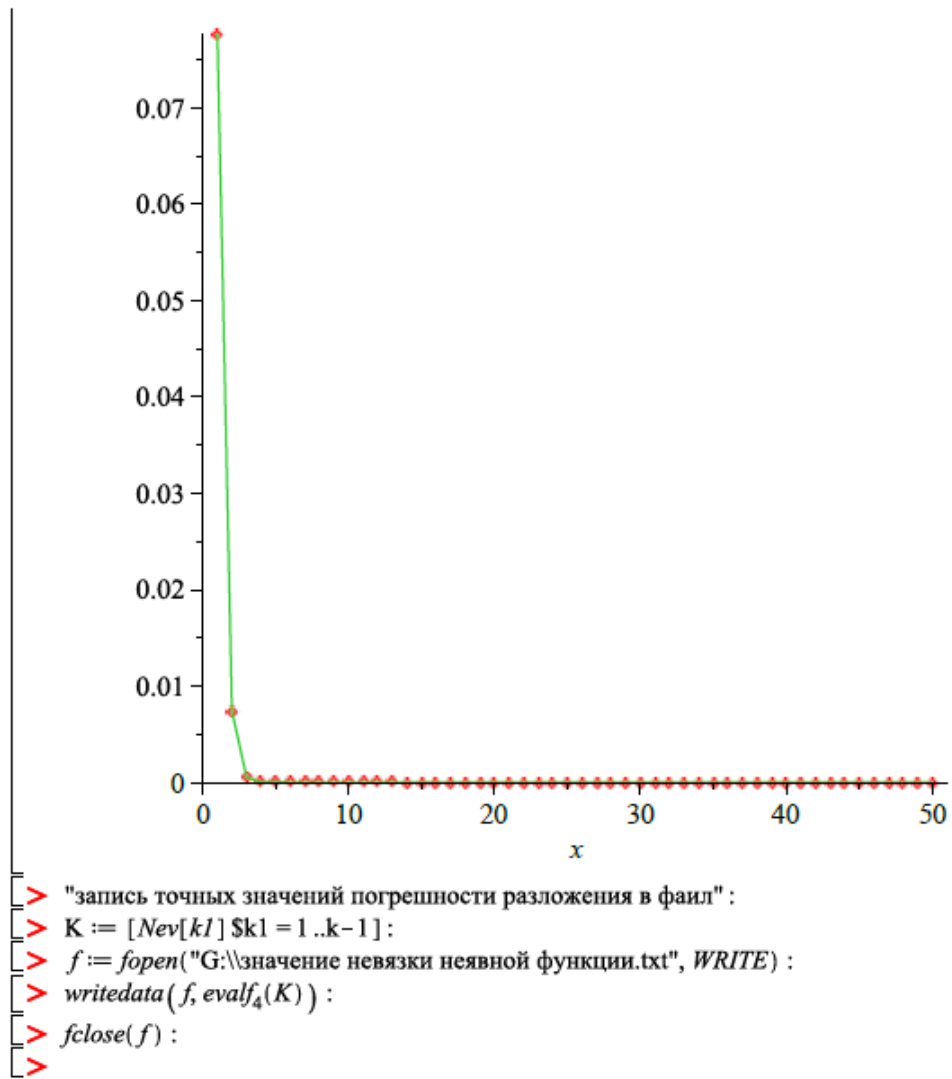


```

> M2 := a1·(1 - x) + a2·x + a3· $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x}{3}\right)$  + a4· $\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right)$  + a5· $\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120}$ 
  -  $\frac{x^3}{18} + \frac{x}{45}\right)$  + a6· $\left(\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{36} + \frac{7·x}{360}\right)$  + a7· $\left(\frac{x^6}{720} - \frac{x^7}{5040} - \frac{x^5}{360} + \frac{x^3}{270}$ 
  -  $\frac{2·x}{945}\right)$  + a8· $\left(\frac{x^7}{5040} - \frac{x^5}{720} + \frac{7·x^3}{2160} - \frac{31·x}{15120}\right)$ ;
=
> "устанавливаем количество учитываемых членов в ряду Фурье" :
> k := 50 :
> "цикл представления неявной функции в виде ряда" :
> for N from 1 to k by 1 do
  L := 0 : Ll := 0 :

  for k from 1 to N by 1 do
    G :=  $\left[ \text{evalf}\left(\text{solve}\left(\text{eval}\left(\text{Fxy}, x = \frac{k}{N+1}\right), y\right)\right) \right]$ ;
    L := L + subs $\left(\left\{x = \frac{k}{N+1}\right\}, (\text{evalf}(\max(G)) - M2) \cdot \sin(n \cdot \text{Pi} \cdot x)\right)$  :
    Ll := Ll + subs $\left(\left\{x = \frac{k}{N+1}\right\}, (\sin(n \cdot \text{Pi} \cdot x))^2\right)$  :
  end do:
  fgN :=  $\sum_{n=1}^N \frac{L}{Ll} \cdot \sin(n \cdot \text{Pi} \cdot x) + M2$ ;
  end do:
> "вычисление максимальной погрешности представлений на отрезке x=0..1" :
> for N from 1 to k - 1 by 1 do
  NevN := MAX(|eval(Fxy, y = fgN)|, 0, 1) :
  end do:
> "формирование точек графика погрешности" :
> L := [[kl, Nev[kl]] $kl = 1 ..k - 1] :
> "график погрешности" :
> plot([L, L], x = 0 ..k, style = [point, line]);

```



Программа Б.3. Интегрирование с использованием МБР.

```

> restart;
> Digits := 150 :
> f1 := (1 + x)10 :
> a := 1 : k := 1 :
> D1 := diff(f1, x$2) : D2 := diff(f1, x$4) : D3 := diff(f1, x$6) :
> F[1] := eval(f1, x=0) : F[2] := eval(f1, x=a) : F[3] := eval(D1, x=0) : F[4]
:= eval(D1, x=a) : F[5] := eval(D2, x=0) : F[6] := eval(D2, x=a) : F[7]
:= eval(D3, x=0) : F[8] := eval(D3, x=a) :
> M2 := f1 - (evalf(F[1]·(1 - x/a) + F[2]·x/a + F[3]·(1/2·x2 - 1/6·a·x3 - a/3·x)
+ F[4]·(1/6·a·x3 - a/6·x) + F[5]·(x4/24 - x5/120·a - x3·a/18 + x·a3/45) + F[6]
·(x5/120·a - x3·a/36 + 7·x·a3/360) + F[7]·(x6/720 - x7/5040·a - x5·a/360 + x3·a3
- 2·x·a5/945) + F[8]·(x7/5040·a - x5·a/720 + 7·x3·a3/2160 - 31·x·a5/15120)) :
M2 := (1 + x)10 - 1. + 1743. x - 45. x2 - 2985. x3 - 210. x4 + 1134. x5 - 210. x6 - 450. x7 (1)
> N1 := 100 :
> for N from 1 to N1 by 1 do
L := 0 :
H := 
$$\frac{\sum_{m=1}^N \text{subs}\left(\left\{x = \frac{m \cdot a}{N+1}\right\}, M2 \cdot \sin\left(n \cdot \text{Pi} \cdot \frac{x}{a}\right)\right)}{\sum_{m=1}^N \text{subs}\left(\left\{x = \frac{m \cdot a}{N+1}\right\}, \left(\sin\left(n \cdot \text{Pi} \cdot \frac{x}{a}\right)\right)^2\right)}$$
 :
for n from 1 to N do
L := L + H·a/(n·Pi) · (1 - (-1)n) :
end do:
f := a/2 · (F[1] + F[2]) - 1/24 · a3 · (F[3] + F[4]) + a5/240 · (F[5] + F[6]) - 17·a7/40320 · (F[7]
+ F[8]) + L :
integral[k] := |f - int(f1, x=0..a)| :
k := k + 1 :
n := 'n':
end do:
> JH := evalf([integral[k2]$k2=1..N1]) :
> d := fopen("E:\\" (1 + ) 10 .txt",
WRITE) :
> writedata(d, evalf4(JH)) :
> fclose(d) :
>

```

Программа Б.4. Решение нелинейной интегро–дифференциальной задачи (1.9.111)–(1.9.113).

```

[> restart;
[> _EnvAllSolutions := true :
[> digits := 200 :
[> with(student) :
[> y1 := sin(1/3 * Pi * x) :
[> n := 11 :
[> for N from 1 to n do

Pr := -1/9 * sin(1/3 * Pi * x) * pi^2 + 1/2 * cos(1/3 * Pi * x) * (3 * sqrt(3) - pi) / pi - sin(1/3 * Pi * x)^3 :

y := F[1] * x + F[2] * (1/2 * x^2 - 1/6 * x^3 - 1/3 * x) + F[3] * (1/6 * x^3 - 1/6 * x) + sum(phi[m] * sin(m * Pi * x), m = 1 .. N) :

U1 := diff(y, x$2) + diff(y, x) * (eval(int(y * x, x), x = 1) - eval(int(y * x, x), x = 0)) - y^3 - Pr :
U2[1] := eval(U1, x = 0) :
U2[2] := eval(U1, x = 1) :

for p from 1 to N do
U2[2 + p] := eval(int(U1 * sin(p * Pi * x), x), x = 1) - eval(int(U1 * sin(p * Pi * x), x), x = 0) :
end do:

U2[3 + N] := eval(diff(y, x), x = 0) - 1/3 * Pi :

res := fsolve({seq(U2[i], i = 1 .. 3 + N)}, {seq(phi[i] = 0.007, i = 1 .. N), F[1] = 0.8650487208, F[2] = 0, F[3] = -0.9518900120}) :

for i from 1 to N do
phi[i] := subs(res, phi[i]);
od:

F[1] := subs(res, F[1]) : F[2] := subs(res, F[2]) : F[3] := subs(res, F[3]) :

K := 500 :
L := 2 :
U[1] := 0 : U[2] := 1 :

while U[L] > U[L - 1] do
L := L + 1 :
j := 0 :
for i from 0 to 1 by 1/K do
j := j + 1 :
Max[j] := evalf(subs({x = i}, |y - y1|)) :
end do:

maxelem := Max[1] :
for i from 2 to j by 1 do

```

```

if maxelem  $\geq$  Max[i] then
maxelem := maxelem :
else
maxelem := Max[i] :
end if
end do
U[L] := maxelem :
K := K + 50 :
end do
Resh[N] := U[L] :

```

```

G1 := diff(y, x$2) + diff(y, x) * (eval(int(y*x, x), x=1) - eval(int(y*x, x), x=0)) - y3 :

```

```

K := 500 :
L := 2 :
U[1] := 0 : U[2] := 1 :

```

```

while U[L] > U[L - 1] do
L := L + 1 :
j := 0 :
for i from 0 to 1 by  $\frac{1}{K}$  do
j := j + 1 :
Max[j] := evalf(subs({x=i}, [Pr - G1])) :
end do

```

```

maxelem := Max[1] :
for i from 2 to j by 1 do
if maxelem  $\geq$  Max[i] then
maxelem := maxelem :
else
maxelem := Max[i] :
end if
end do
U[L] := maxelem :
K := K + 50 :
end do
DifNev[N] := U[L] :

```

```

F := 'F':
phi := 'phi':

```

```

end do

```

```

> L := [[k, Resh[k]] $k = 1 ..n] :
evalf4(L)

```

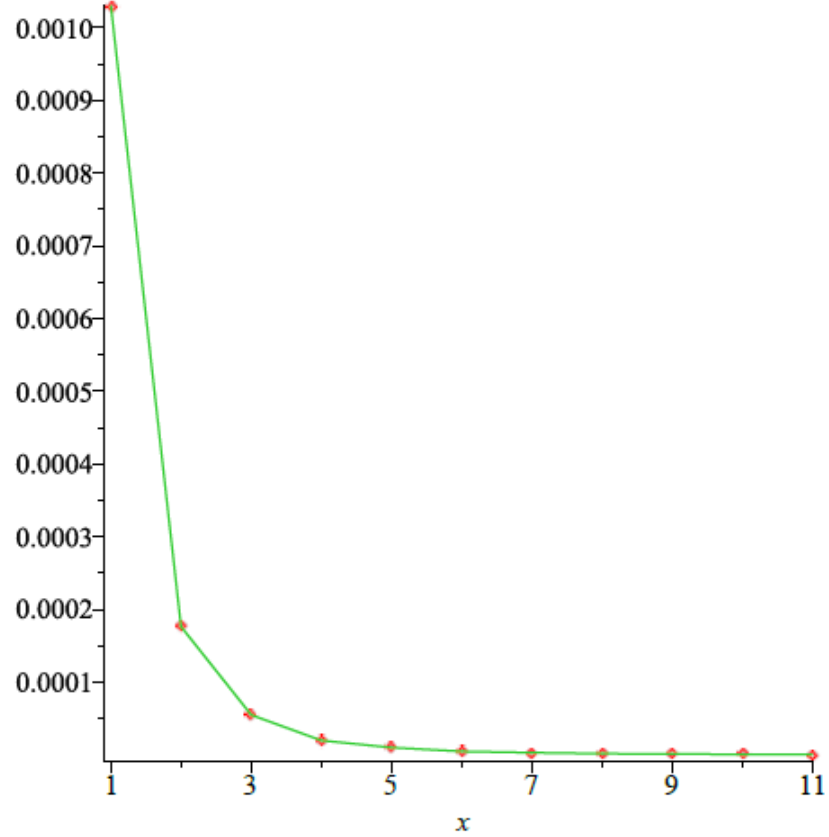
```

[[1., 0.001030], [2., 0.0001763], [3., 0.00005496], [4., 0.00001980], [5., 0.00001007], [6.,
0.000004777], [7., 0.000003047], [8., 0.000001668], [9., 0.000001213], [10.,
7.241 10-7], [11., 5.726 10-7]]

```

(1)

```
> plot([L, L], x = 1 ..n, style = [point, line]);
```

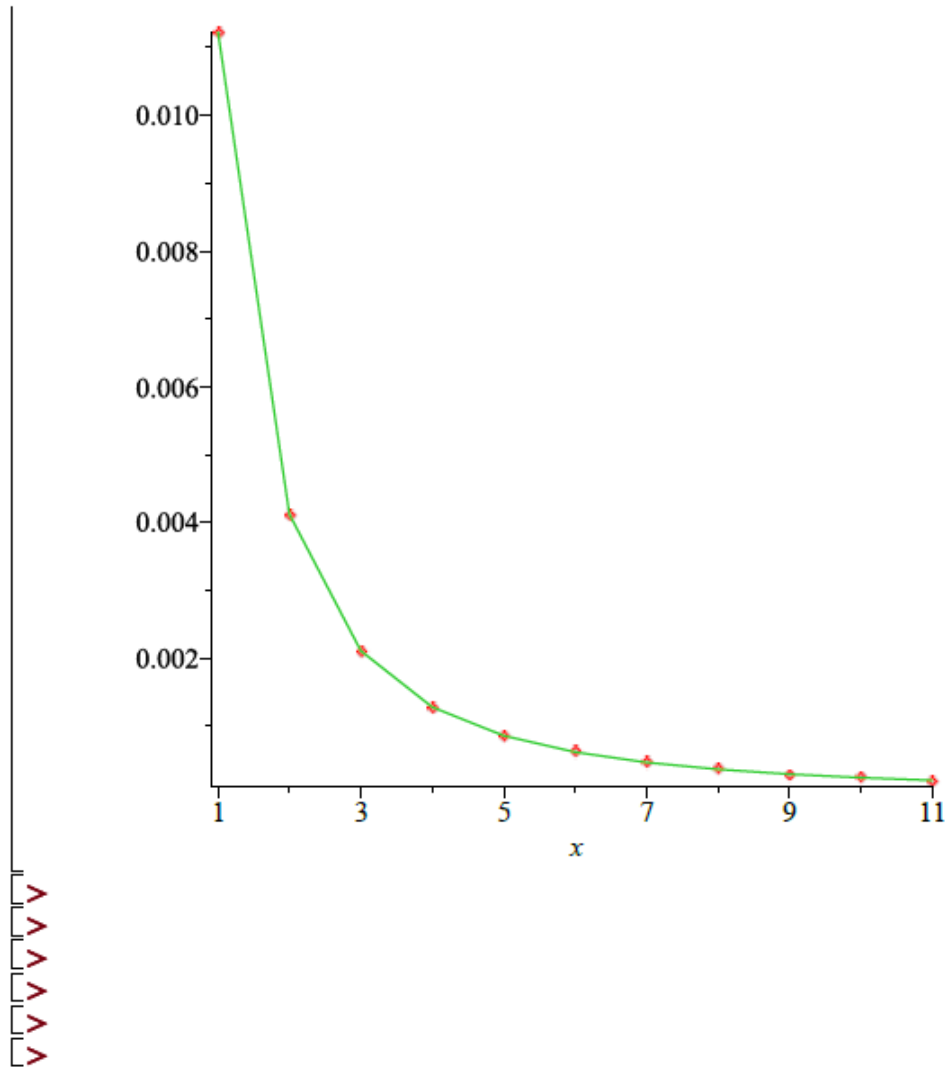


```
> L2 := [[k, DifNev[k]] $k = 1 ..n];
```

```
L2 := [[1, 0.0112348698], [2, 0.0041185661], [3, 0.0021041916], [4, 0.0012742802], [5,  
0.0008531146], [6, 0.0006108018], [7, 0.0004586013], [8, 0.0003571142], [9,  
0.0002858280], [10, 0.0002340264], [11, 0.0001951245]]
```

(2)

```
> plot([L2, L2], x = 1 ..n, style = [point, line]);
```



Программа Б.5. Решение задачи (1.9.118)

```

[> restart;
[> _EnvAllSolutions := true :
[> digits := 200 :
[> with(student) :
[> y1 := sin(1/3 * Pi * x) :
[> n := 11 :
[> for N from 1 to n do
  Pr := -1/9 sin(1/3 * Pi * x)^2 - sin(1/3 * Pi * x)^3 :
  y := F[1]x + F[2] (1/2 x^2 - 1/6 x^3 - 1/3 x) + F[3] (1/6 x^3 - 1/6 x) + sum_{m=1}^N phi[m] * sin(m * Pi
    * x) :
  U1 := diff(y, x^2) - y^3 - Pr :
  U2[1] := eval(U1, x=0) :
  U2[2] := eval(U1, x=1) :
  for p from 1 to N do
    U2[2 + p] := eval(int(U1 * sin(p * Pi * x), x), x=1) - eval(int(U1 * sin(p * Pi * x), x), x=0) :
  end do:
  U2[3 + N] := eval(diff(y, x), x=0) - 1/3 * Pi :
  res := fsolve({seq(U2[i], i=1..3 + N)}, {seq(phi[i]=0.007, i=1..N), F[1]
    = 0.8650487208, F[2]=0, F[3]=-0.9518900120}) :
  for i from 1 to N do
    phi[i] := subs(res, phi[i]);
  od:
  F[1] := subs(res, F[1]) : F[2] := subs(res, F[2]) : F[3] := subs(res, F[3]) :
  K := 500 :
  L := 2 :
  U[1] := 0 : U[2] := 1 :
  while U[L] > U[L - 1] do
    L := L + 1 :
    j := 0 :
    for i from 0 to 1 by 1/K do
      j := j + 1 :
      Max[j] := evalf(subs({x=i}, |y - y1|)) :
    end do:
    maxelem := Max[1] :
    for i from 2 to j by 1 do
      if maxelem <= Max[i] then

```



```

maxelem := maxelem :
else
maxelem := Max[i] :
end if:
end do:
U[L] := maxelem :
K := K + 50 :
end do:
Resh[N] := U[L] :

```

```

G1 := diff(y, x$2) - y3 :

```

```

K := 500 :
L := 2 :
U[1] := 0 : U[2] := 1 :

```

```

while U[L] > U[L - 1] do
  L := L + 1 :
  j := 0 :
  for i from 0 to 1 by  $\frac{1}{K}$  do
    j := j + 1 :
    Max[j] := evalf(subs({x = i}, |Pr - G1|)) :
  end do:

```

```

maxelem := Max[1] :
for i from 2 to j by 1 do
  if maxelem ≥ Max[i] then
    maxelem := maxelem :
  else
    maxelem := Max[i] :
  end if:
end do:
U[L] := maxelem :
K := K + 50 :
end do:
DifNev[N] := U[L] :

```

```

F := 'F':
phi := 'phi':

```

```

end do:

```

```

> L := [[k, Resh[k]] $k = 1 ..n] :
evalf4(L)

```

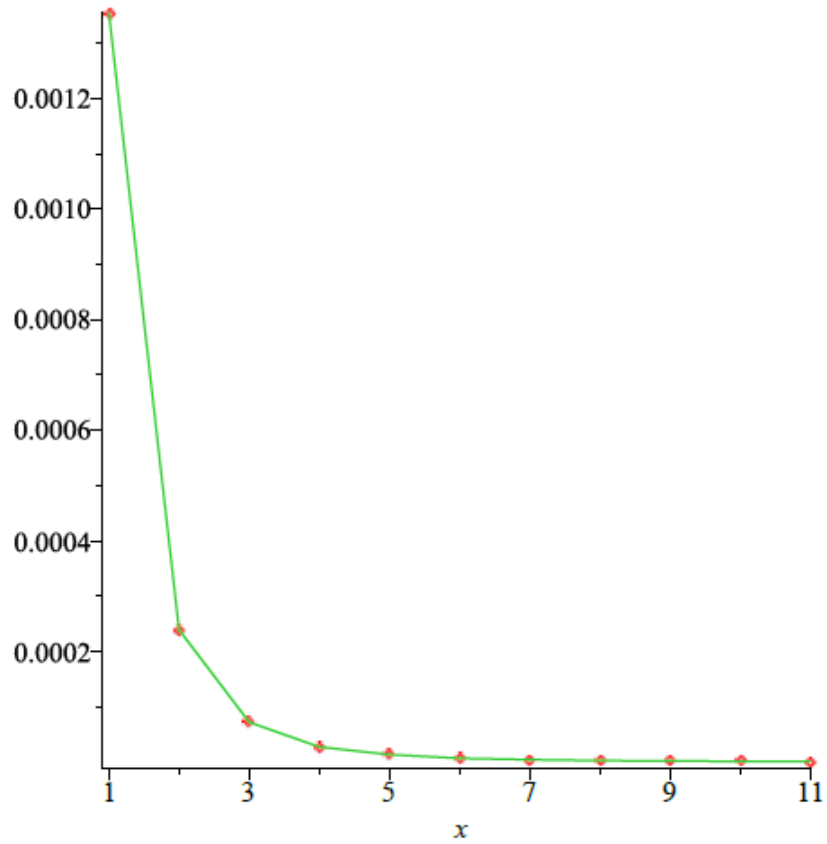
```

[[1., 0.001355], [2., 0.0002388], [3., 0.00007173], [4., 0.00002696], [5., 0.00001314], [6.,
0.000006508], [7., 0.000003974], [8., 0.000002272], [9., 0.000001581], [10.,
9.853 10-7], [11., 7.466 10-7]]

```

(1)

```
> plot([L, L], x = 1 ..n, style = [point, line]);
```

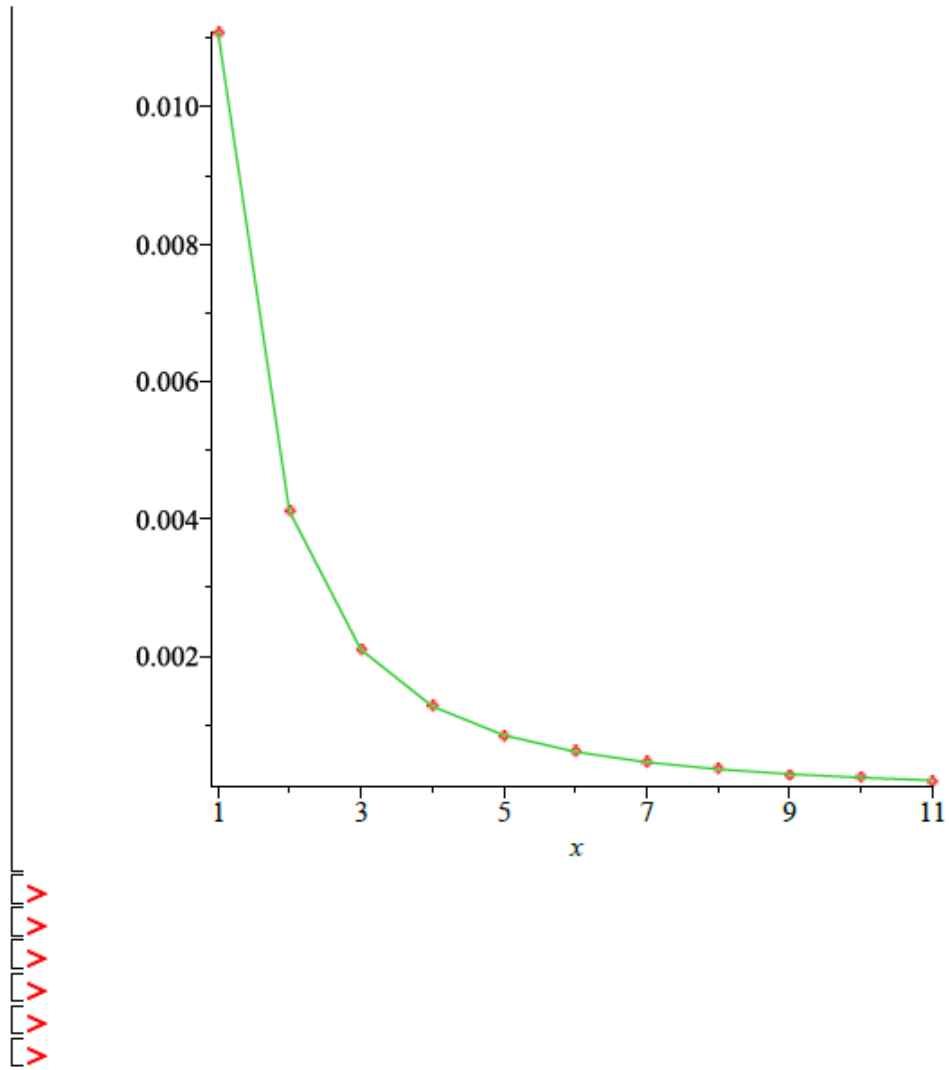


```
> L2 := [[k, DifNev[k]] $k = 1 ..n];
```

```
L2 := [[1, 0.0110942553], [2, 0.0041117544], [3, 0.0020985565], [4, 0.0012722672], [5,  
0.0008517708], [6, 0.0006100182], [7, 0.0004581375], [8, 0.0003567532], [9,  
0.0002856022], [10, 0.0002338364], [11, 0.0001949821]]
```

(2)

```
> plot([L2, L2], x = 1 ..n, style = [point, line]);
```



Программа Б.6. Решение задачи (1.9.119)

```

[> restart;
[> _EnvAllSolutions := true :
[> digits := 200 :
[> with(student) :
[> y1 := sin( (1/3)·Pi·x ) :
[> n := 11 :
[> for N from 1 to n do

Pr := - 1/9 sin( (1/3) π x ) π2 + 1/2  $\frac{\cos\left(\frac{1}{3} \pi x\right) (3\sqrt{3} - \pi)}{\pi}$  :

y := F[1]x + F[2] ( 1/2 x2 - 1/6 x3 - 1/3 x ) + F[3] ( 1/6 x3 - 1/6 x ) +  $\sum_{m=1}^N \text{phi}[m] \cdot \sin(m \cdot \text{Pi} \cdot x)$  :
U1 := diff(y, x) + diff(y, x) · (eval(int(y·x, x), x=1) - eval(int(y·x, x), x=0)) - Pr :
U2[1] := eval(U1, x=0) :
U2[2] := eval(U1, x=1) :

for p from 1 to N do
U2[2 + p] := eval(int(U1·sin(p·Pi·x), x), x=1) - eval(int(U1·sin(p·Pi·x), x), x=0) :
end do:

U2[3 + N] := eval(diff(y, x), x=0) - 1/3 ·Pi :
res := fsolve( {seq(U2[i], i=1..3 + N) }, {seq(phi[i]=0.007, i=1..N), F[1]
=0.8650487208, F[2]=0, F[3]=-0.9518900120} ) :

for i from 1 to N do
phi[i] := subs(res, phi[i]);
od:

F[1] := subs(res, F[1]) : F[2] := subs(res, F[2]) : F[3] := subs(res, F[3]) :

K := 500 :
L := 2 :
U[1] := 0 : U[2] := 1 :

while U[L] > U[L - 1] do
L := L + 1 :
j := 0 :
for i from 0 to 1 by 1/K do
j := j + 1 :
Max[j] := evalf(subs( {x=i}, |y - y1| )) :
end do:

maxelem := Max[1] :
for i from 2 to j by 1 do

```

```

if  $maxelem \geq Max[i]$  then
   $maxelem := maxelem$  :
else
   $maxelem := Max[i]$  :
end if :
end do :
 $U[L] := maxelem$  :
 $K := K + 50$  :
end do :
 $Resh[N] := U[L]$  :

```

```

 $G1 := diff(y, x\$2) + diff(y, x) \cdot (eval(int(y \cdot x, x), x = 1) - eval(int(y \cdot x, x), x = 0))$  :

```

```

 $K := 500$  :
 $L := 2$  :
 $U[1] := 0$  :  $U[2] := 1$  :

```

```

while  $U[L] > U[L - 1]$  do
   $L := L + 1$  :
   $j := 0$  :
  for  $i$  from 0 to 1 by  $\frac{1}{K}$  do
     $j := j + 1$  :
     $Max[j] := evalf(subs(\{x = i\}, |Pr - G1|))$  :
  end do :

```

```

 $maxelem := Max[1]$  :
for  $i$  from 2 to  $j$  by 1 do
  if  $maxelem \geq Max[i]$  then
     $maxelem := maxelem$  :
  else
     $maxelem := Max[i]$  :
  end if :
end do :
 $U[L] := maxelem$  :
 $K := K + 50$  :
end do :
 $DifNev[N] := U[L]$  :

```

```

 $F := 'F'$  :
 $phi := 'phi'$  :

```

```

end do :
>  $L := [[k, Resh[k]] \$k = 1 .. n]$  :
 $evalf_4(L)$ 

```

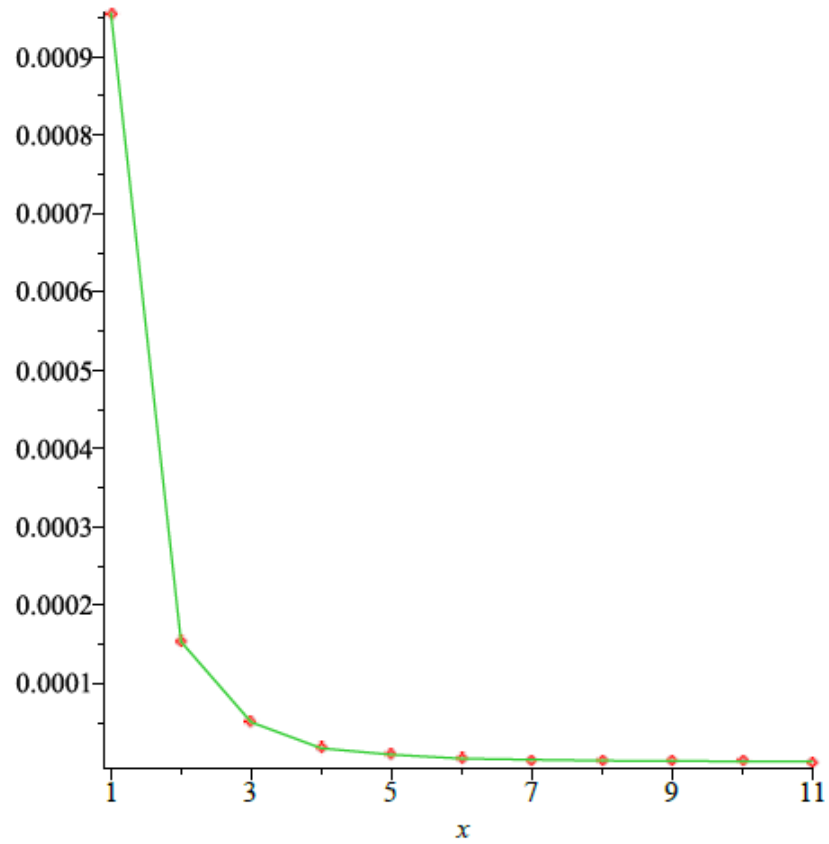
```

[[1., 0.0009562], [2., 0.0001533], [3., 0.00005060], [4., 0.00001730], [5., 0.000009200],
 [6., 0.000004199], [7., 0.000002773], [8., 0.000001512], [9., 0.000001099], [10.,
 6.686 10-7], [11., 5.188 10-7]]

```

(1)

```
> plot([L, L], x = 1 ..n, style = [point, line]);
```

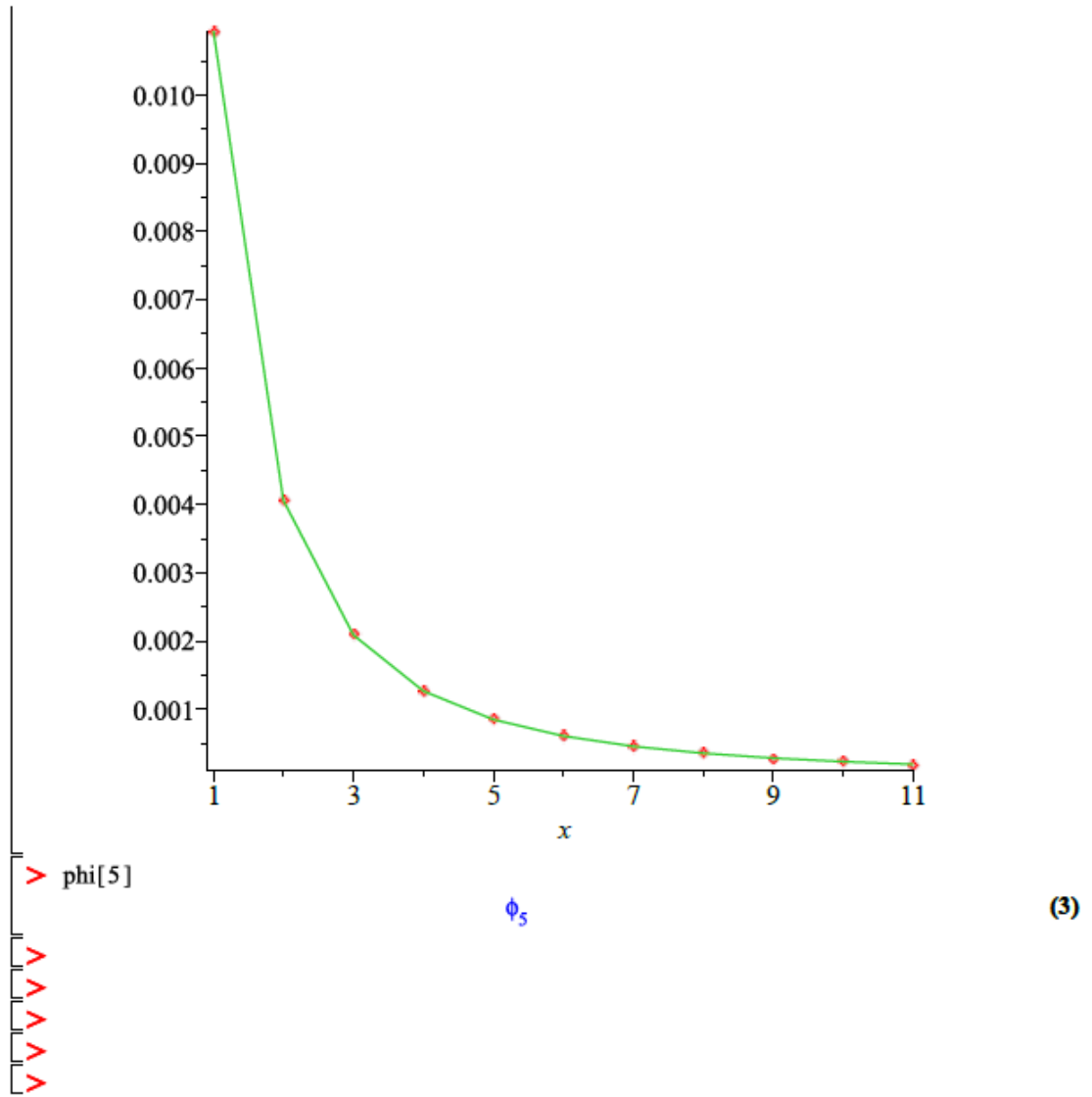


```
> L2 := [[k, DifNev[k]] $k = 1 ..n];
```

```
L2 := [[1, 0.01093605535], [2, 0.004058920104], [3, 0.002088823776], [4,  
0.001267960508], [5, 0.0008502972193], [6, 0.0006092868751], [7, 0.0004577354647],  
[8, 0.0003565813154], [9, 0.0002854804981], [10, 0.0002337921], [11,  
0.0001949619335]]
```

(2)

```
> plot([L2, L2], x = 1 ..n, style = [point, line]);
```

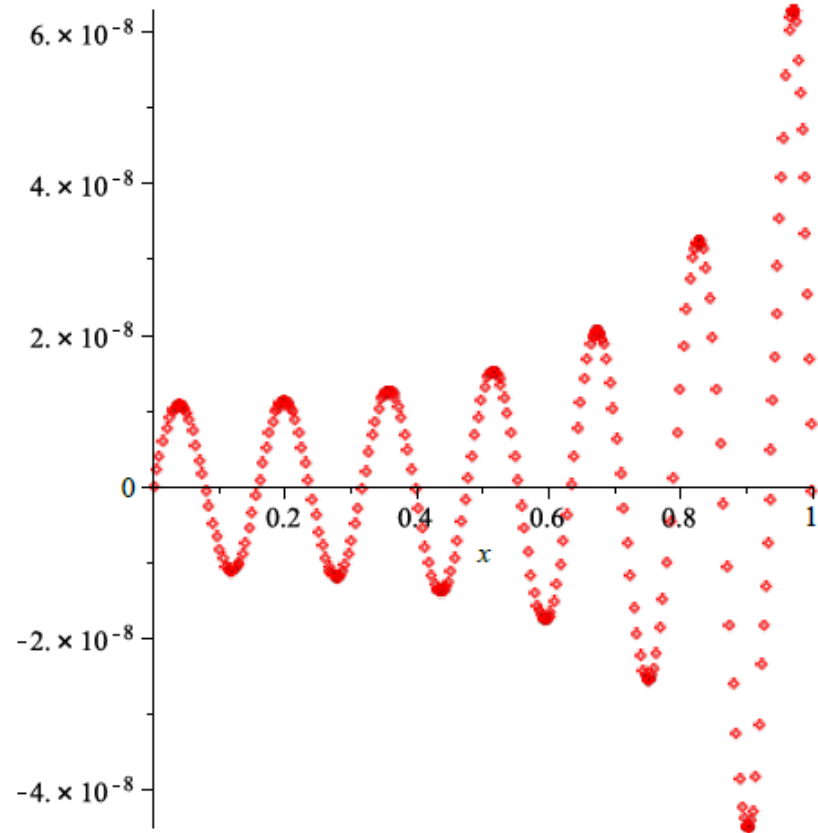


Программа Б.7. Решение краевой задачи (1.9.111), (1.9.121), (1.9.122)

```

> restart;
> _EnvAllSolutions := true :
> digits := 200 :
> with(student) :
> y1 := sin(1/3 * Pi * x) :
> Pr := diff(y1, x$2) + diff(y1, x) * ∫₀¹ x·y1 dx - y1³ :
> y := F[1]x + F[2] (1/2 x² - 1/6 x³ - 1/3 x) + F[3] (1/6 x³ - 1/6 x) + ∑_{m=1}^{NI} phi[m]·sin(m·Pi
·x) :
> U1 := diff(y, x$2) + diff(y, x) * ∫₀¹ x·y dx - y³ - Pr :
> H := int(U1·sin(p·Pi·x), x) :
> N1 := 12 :
> U2[1] := eval(U1, x=0) :
> U2[2] := eval(U1, x=1) :
> f := eval(H, x=1) - eval(H, x=0) :
> for p from 1 to N1 do
  U2[2 + p] := subs(f) :
end do:
> U2[3 + N1] := eval(y, x=1) - √3/2 :
> res := fsolve({seq(U2[i], i=1..3 + N1)}, {seq(phi[i], i=1..N1), F[1], F[2], F[3]}):
> for i from 1 to N1 do
  phi[i] := subs(res, phi[i]) :
od:
> F[1] := subs(res, F[1]) : F[2] := subs(res, F[2]) : F[3] := subs(res, F[3]) :
> plot([y1 - y], x=0..1, color=[red], style=[point]);

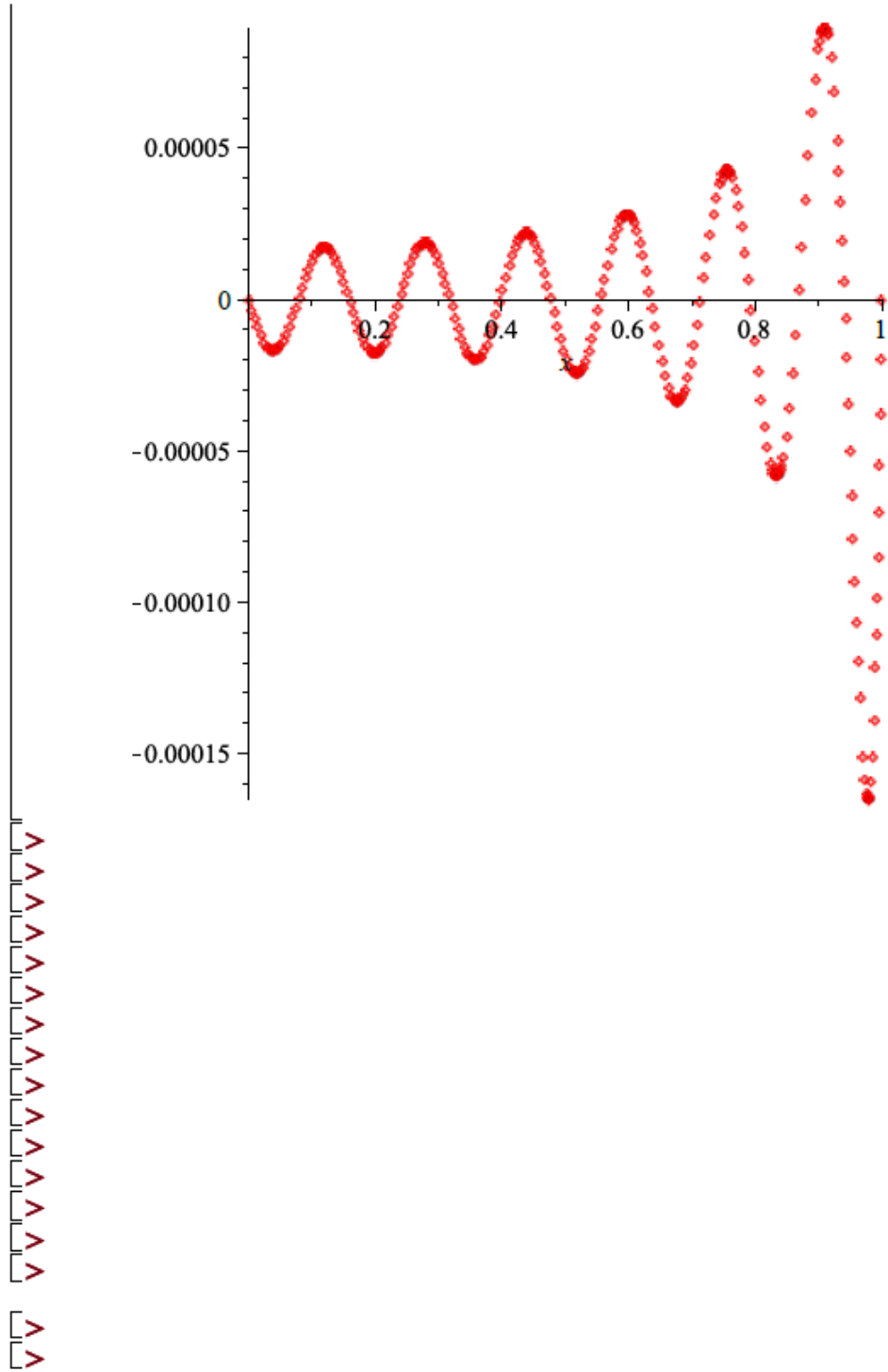
```

```

> G := diff(y, x$2) + diff(y, x) · ∫01 x·y dx - y3 :
> plot([Pr - G], x=0..1, color=[red, blue], style=[point, line]);

```



Программа Б.8. Решение задачи о контактном термическом сопротивлении цилиндра с кольцевой границей нарушения контакта. >

>

> restart;Digits:= 80;

Digits := 80

>

Ввод количества членов в рядах Фурье

>

> N:=3;

N := 3

>

Ввод в аналитическом виде обыкновенных дифференциальных уравнений и граничных условий, полученных после первого применения оператора быстрых разложений

>

> №1__[m]:=(diff(A[1](r),r\$6)+3/r*diff(A[1](r),r\$5)-
3/r^2*diff(A[1](r),r\$4)+6/r^3*diff(A[1](r),r\$3)-
9/r^4*diff(A[1](r),r\$2)+9/r^5*diff(A[1](r),r\$1))*2*h^4/m^5/Pi^5+diff(u[m](r),r\$2)+dif
f(u[m](r),r\$1)/r-m^2*Pi^2/h^2*u[m](r);;

> for i from 1 by 1 to N do №1[i]:=subs(m=i,№1__[m]) end do:

> №2:=(diff(A[1](r),r\$4)+2/r*diff(A[1](r),r\$3))*h^3/45+h/3*(1-
h^2/15/r^2)*diff(A[1](r),r\$2)+h/3/r*(1+h^2/15/r^2)*diff(A[1](r),r\$1)-
1/h*A[1](r)+Pi/h*sum(m*u[m](r), m=1..N)-b*psi(r)+U[0]/h+h*Q[0]/2;;

> №3:=diff(A[1](r),r\$1);;

> №4:=R*diff(A[1](r),r\$3)+diff(A[1](r),r\$2);;

> u__[m]:=diff(u[m](r),r\$1);;

> for i from 1 by 1 to N do №5[i]:=subs(m=i,u__[m]) end do;;

>

>

Вторые быстрые разложения

> t:=(r-r_0)/(R-r_0);;

```

> A[1](r):=a_1*(t-t^2/2-1/3)+a_2*(t^2/2-1/6)+a_3*(t^3/6-t^4/24-
t^2/6+1/45)+a_4*(t^4/24-t^2/12+7/360)+a_5*(t^5/120-t^6/720-t^4/72+t^2/90-
2/945)+a_6*(t^6/720-t^4/144+7*t^2/720-31/15120)+a_7*(1/5040*t^7-1/40320*t^8-
1/2160*t^6+1/1080*t^4-1/945*t^2+1/4725)+a_8*(1/40320*t^8-
1/4320*t^6+7/8640*t^4-31/30240*t^2+127/604800)+a_0+sum(a_[m]*cos(m*Pi*t),
m=1..N)::;
> u[1](r):=u_11*(t-t^2/2-1/3)+u_12*(t^2/2-1/6)+u_13*(t^3/6-t^4/24-
t^2/6+1/45)+u_14*(t^4/24-t^2/12+7/360)+u_0_1+sum(u_1[m]*cos(m*Pi*t), m=1..N)::;
> u[2](r):=u_21*(t-t^2/2-1/3)+u_22*(t^2/2-1/6)+u_23*(t^3/6-t^4/24-
t^2/6+1/45)+u_24*(t^4/24-t^2/12+7/360)+u_0_2+sum(u_2[m]*cos(m*Pi*t), m=1..N)::;
> u[3](r):=u_31*(t-t^2/2-1/3)+u_32*(t^2/2-1/6)+u_33*(t^3/6-t^4/24-
t^2/6+1/45)+u_34*(t^4/24-t^2/12+7/360)+u_0_3+sum(u_3[m]*cos(m*Pi*t), m=1..N)::;
>
>

```

Применение оператора быстрых разложений к обыкновенным дифференциальным уравнениям (начало). Запись линейных алгебраических уравнений в аналитическом виде.

```

> №3::;
> №3_R:=eval(subs(r=R,№3));;
> №3_r_0:=eval(subs(r=r_0,№3));;
> №4::;
> №4_R:=eval(subs(r=R,№4));;
> №4_r_0:=eval(subs(r=r_0,№4));;
> №5[1]::;№5[2]::;№5[3]::;
> for i from 1 by 1 to N do №5_R[i]:=eval(eval(subs(r=R,№5[i]))) end do::;
> for i from 1 by 1 to N do №5_r_0[i]:=eval(eval(subs(r=r_0,№5[i]))) end do::;
> №2::;
> asd:=subs(psi(r)=0,№2)::;
> as2:=diff(asd,r)::;
> №2_r_0:=eval(expand(subs(r=r_0,as2)));;
> №2_R:=eval(expand(subs(r=R,as2)));;
> as2_3:=diff(asd,`$`(r,3));;

```



```

> N02_r_0::
> N02_R::
> N02_3_r_0::
> N02_3_R::
> for s from 1 by 1 to N do N01_r_0[s]:=evalf(N01_r_0[s]) end do;;
> for s from 1 by 1 to N do N01_R[s]:=evalf(N01_R[s]) end do;;
> for s from 1 by 1 to N do N01p[s]:=eval(N01[s]) end do;;
> N02p:=eval(asd)::
> psi_r_1(r):=(r-r_1)^2*(r-r_0)^4::
> psi_r_2(r):=(r-R)^4*(r-r_2)^2::
> N02___integral:=(int(N02p,r))::
N02___integral_psi_r_1:=int(b*psi_r_1(r),r)::
N02___integral_psi_r_2:=int(b*psi_r_2(r),r)::
> N02_integral:=(eval(subs(r=R,N02___integral)-subs(r=r_0,N02___integral)))+
(eval(subs(r=r_1,N02___integral_psi_r_1)-subs(r=r_0,N02___integral_psi_r_1)))+
(eval(subs(r=R,N02___integral_psi_r_2)-subs(r=r_2,N02___integral_psi_r_2))):;
> for s from 1 by 1 to N do N02___[s]:=(int(N02p*cos(s*Pi*t),r)) end do;;
> for s from 1 by 1 to N do N02___psi_r_1[s]:=(int(b*psi_r_1(r)*cos(s*Pi*t),r)) end do;;
for s from 1 by 1 to N do N02___psi_r_2[s]:=(int(b*psi_r_2(r)*cos(s*Pi*t),r)) end do;;
> for s from 1 by 1 to N do N02_[s]:=eval(subs(r=R,N02___[s])-
subs(r=r_0,N02___[s]))+eval(subs(r=r_1,N02___psi_r_1[s])-
subs(r=r_0,N02___psi_r_1[s]))+
(eval(subs(r=R,N02___psi_r_2[s])-subs(r=r_2,N02___psi_r_2[s]))) end do;;
> for s from 1 by 1 to N do N01___integral_[s]:=int(N01p[s],r):: end do;;
> for s from 1 by 1 to N do N01_integral_[s]:=evalf(subs(r=R,N01___integral_[s])-
subs(r=r_0,N01___integral_[s])):; end do;;
> for i to N do for j to N do N01___[i,j] :=(int(N01p[i]*cos(j*Pi*t),r)) end do:end do:
> for i to N do for j to N do N01__[i,j]:=evalf(subs(r=R,N01___[i,j])-
subs(r=r_0,N01___[i,j])) end do:end do:
>

```

>

Решение системы линейных алгебраических уравнений

```
> sistema:= fsolve({№3_R,№4_R,№3_r_0,№4_r_0,
№5_R[1],№5_R[2],№5_R[3],
№5_r_0[1],№5_r_0[2],№5_r_0[3],
№2_r_0,№2_R,№2_3_r_0,№2_3_R,№2_integral,№2_[1],№2_[2],№2_[3],
№1_r_0_[1],№1_r_0_[2],№1_r_0_[3],№1_R_[1],№1_R_[2],№1_R_[3],№1_integral_[
1],№1_integral_[2],№1_integral_[3],
№1_[1,1],№1_[1,2],№1_[1,3],№1_[2,1],№1_[2,2],№1_[2,3],№1_[3,1],№1_[3,2],№1_[
3,3]}),
{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_0,a_[1],a_[2],a_[3],
u_11,u_12,u_13,u_14,u_0_1,u_1[1],u_1[2],u_1[3],
u_21,u_22,u_23,u_24,u_0_2,u_2[1],u_2[2],u_2[3],
u_31,u_32,u_33,u_34,u_0_3,u_3[1],u_3[2],u_3[3]})::;
```

>

> assign(sistema);

>

>

Составление и вывод аналитического решения задачи в виде быстрого разложения

```
> A[1](r):=a_1*(t-t^2/2-1/3)+a_2*(t^2/2-1/6)+a_3*(t^3/6-t^4/24-
t^2/6+1/45)+a_4*(t^4/24-t^2/12+7/360)+a_5*(t^5/120-t^6/720-t^4/72+t^2/90-
2/945)+a_6*(t^6/720-t^4/144+7*t^2/720-31/15120)+a_7*(1/5040*t^7-1/40320*t^8-
1/2160*t^6+1/1080*t^4-1/945*t^2+1/4725)+a_8*(1/40320*t^8-
1/4320*t^6+7/8640*t^4-31/30240*t^2+127/604800)+a_0+sum(a_[m]*cos(m*Pi*t),
m=1..N)::;

> u[1](r):=u_11*(t-t^2/2-1/3)+u_12*(t^2/2-1/6)+u_13*(t^3/6-t^4/24-
t^2/6+1/45)+u_14*(t^4/24-t^2/12+7/360)+u_0_1+sum(u_1[m]*cos(m*Pi*t), m=1..N)::;

> u[2](r):=u_21*(t-t^2/2-1/3)+u_22*(t^2/2-1/6)+u_23*(t^3/6-t^4/24-
t^2/6+1/45)+u_24*(t^4/24-t^2/12+7/360)+u_0_2+sum(u_2[m]*cos(m*Pi*t), m=1..N)::;

> u[3](r):=u_31*(t-t^2/2-1/3)+u_32*(t^2/2-1/6)+u_33*(t^3/6-t^4/24-
t^2/6+1/45)+u_34*(t^4/24-t^2/12+7/360)+u_0_3+sum(u_3[m]*cos(m*Pi*t), m=1..N)::;
```

```

> A[3](r):=-diff(A[1](r),`$`(r,2))-diff(A[1](r),`$`(r,1))/r-Q[0];;
> A[2](r):=U[0];;
> A[4](r):=-Q[0];;
> A[5](r):=collect(-diff(A[3](r),`$`(r,2))-diff(A[3](r),`$`(r,1))/r,diff);;
> U1_:=A[1](r)*(1-z/h)+U[0]*z/h+A[3](r)*(z^2/2-z^3/6/h-h*z/3)-Q[0]*(z^3/6/h-
h*z/6)+A[5](r)*(z^4/24-z^5/120/h-h*z^3/18+h^3*z/45)+sum(u[m](r)*sin(m*Pi*z/h),
m=1..N);

```

```

U1_ := ( 1199.532907364202072172537385825025830350123966807786529274938 \
6475890215311441653 + 0.166944169264351470111702352617239400631915 \
56902529778678522275089484809898272693 10-18 cos( 537.943947532498842 \
20250742864375049386937832181080579126283297813490006956955635 r -
0.005379439475324988422025074286437504938693783218108057912628329 \
7813490006956955635 ) + 0.47610174863359026650599134265993303089171 \
0863202289369254877406844323379531041 10-20 cos( 1075.887895064997684 \
4050148572875009877387566436216115825256659562698001391391127 r - 0 \
.0107588789506499768440501485728750098773875664362161158252566595 \
62698001391391127 ) + 0.3092874128778529629971853565759638260889604 \
404060369570666479253840301446642604 10-21 cos( 1613.8318425974965266 \
075222859312514816081349654324173737884989344047002087086690 r - 0. \
01613831842597496526607522285931251481608134965432417373788498934 \
4047002087086690 ) + 0.93155162211390446788742272420142620779836429 \
10219559808342627300280319708766309 10-18 ( 171.232876712328767123287 \
6712328767123287671232876712328767123287671232876712328767123288 r - 0.0017 \
12328767123287671232876712328767123287671232876712328767123287671 \
2328767123288 )2 - 0.45068621031913934686725333853078335342548107195 \
381563459851292397371969751600000 10-28 ( 171.23287671232876712328767 \
12328767123287671232876712328767123287671232876712328767123288 r - 0.001712 \
32876712328767123287671232876712328767123287671232876712328767123 \
28767123288 )3 - 0.1088446283943513465208946486775214968149993180285 \
6724471798424808739178037774928 10-17 ( 171.2328767123287671232876712 \
328767123287671232876712328767123287671232876712328767123288 r - 0.00171232 \
87671232876712328767123287671232876712328767123287671232876712328 \
767123288 )4 + 0.107244743737648197373895545182850240979821985857486 \
33049180621939884778218136731 10-20 ( 171.232876712328767123287671232 \
8767123287671232876712328767123287671232876712328767123288 r - 0.0017123287 \
67123287671232876712328767123287671232876712328767123287671232876 \
7123288 )5 + 0.11003564602853625633412149508017150076983019809090973 \

```


0.546274876919999052810263004189177747770948133535586508278393419 \
 97219737592318486 10^{-13} – 0.1357647359158446602873556955327817916172 \
 0069590683124305496477860394347047212912 10^{-20} r – 0.3829680582462165 \
 0352163157491152712803175778064095249361272371019677160481944062 \
 10^{-12} (171.23287671232876712328767123287671232876712328767123287671 \
 232876712328767123288 r – 0.001712328767123287671232876712328767123 \
 2876712328767123287671232876712328767123288)² + 0.62889815008472624 \
 656300164889549071694866523889030734244116050970425843369632738 10^{-15} \
 (171.2328767123287671232876712328767123287671232876712328767123287 \
 6712328767123288 r – 0.00171232876712328767123287671232876712328767 \
 12328767123287671232876712328767123288)³ + 0.9678965861489279443914 \
 3274195590900705306634181110791157473586605090744477961183 10^{-12} (1 \
 71.23287671232876712328767123287671232876712328767123287671232876 \
 712328767123288 r – 0.001712328767123287671232876712328767123287671 \
 2328767123287671232876712328767123288)⁴ – 0.98001644512127493341075 \
 768573293741874500135153981798433776782767052280500909283 10^{-12} (17 \
 1.232876712328767123287671232876712328767123287671232876712328767 \
 12328767123288 r – 0.0017123287671232876712328767123287671232876712 \
 328767123287671232876712328767123288)⁵ + 0.298396449028691214486022 \
 18675066279836175987424084499303879790668152592175098411 10^{-12} (171. \
 23287671232876712328767123287671232876712328767123287671232876712 \
 328767123288 r – 0.001712328767123287671232876712328767123287671232 \
 8767123287671232876712328767123288)⁶ / $r^2 + 2$ (–0.89806605431598893 \
 072868278616373516550081669496379102566880097897219643049087049 10^{-16} \
 sin(537.9439475324988422025074286437504938693783218108057912628329 \
 7813490006956955635 r – 0.00537943947532498842202507428643750493869 \
 37832181080579126283297813490006956955635) – 0.5122321081741580693 \
 2598184424761448902582122627005340187147058228298161157881401 10^{-17} sin(\
 1075.887895064997684405014857287500987738756643621611582525665956 \
 2698001391391127 r – 0.01075887895064997684405014857287500987738756 \
 6436216115825256659562698001391391127) – 0.49913787541687812319684 \
 928862935533217404235502151917403268766707909295303840213 10^{-18} sin(\
 1613.831842597496526607522285931251481608134965432417373788498934 \
 4047002087086690 r – 0.01613831842597496526607522285931251481608134 \
 9654324173737884989344047002087086690) + 0.54627487691986328807434 \
 715952889039207541535174396930758248658872914241114458092 10^{-13} r – \
 0.546274876919863288074347159528890392075415351743969307582486588 \
 72914241114458092 10^{-18} – 0.2315168888625715822948219204781421336089 \
 8000271600118215677033765773272132671233 10^{-25} (171.2328767123287671 \
 2328767123287671232876712328767123287671232876712328767123288 r – 0 \
 .0017123287671232876712328767123287671232876712328767123287671232 \
 876712328767123288)² – 0.745511153385968126855442799161106142568488 \

47964772085423276882251638205738184440 10^{-15} (171.232876712328767123\
 2876712328767123287671232876712328767123287671232876712328767123288 $r - 0.0$ \
 0171232876712328767123287671232876712328767123287671232876712328767123287\
 6712328767123288)³ + 0.91819129912370031998198240738741644674505124\
 877984871996409434416821731319663795 10^{-18} (171.23287671232876712328\
 767123287671232876712328767123287671232876712328767123288 $r - 0.001$ \
 71232876712328767123287671232876712328767123287671232876712328767\
 12328767123288)⁴ + 0.1130503212621947839049193442604501720237981487\
 2353740407192914915474598955025866 10^{-14} (171.2328767123287671232876\
 7123287671232876712328767123287671232876712328767123288 $r - 0.00171$ \
 23287671232876712328767123287671232876712328767123287671232876712\
 328767123288)⁵ - 0.953882673251374268519804147446725754245134648832\
 08950475542735226597553020885032 10^{-15} (171.232876712328767123287671\
 23287671232876712328767123287671232876712328767123288 $r - 0.0017123$ \
 28767123287671232876712328767123287671232876712328767123287671232\
 8767123288)⁶ + 0.24894789461822238465690993866055296320466823793807\
 639419236853928858734043224959 10^{-15} (171.23287671232876712328767123\
 287671232876712328767123287671232876712328767123288 $r - 0.001712328$ \
 76712328767123287671232876712328767123287671232876712328767123287\
 67123288)⁷ / $r^3 - (-0.259885669278536056765543180856772341794593062$ \
 52355368743749952044375830268650852 10^{-10} $\sin(537.9439475324988422025$ \
 0742864375049386937832181080579126283297813490006956955635 $r - 0.00$ \
 53794394753249884220250742864375049386937832181080579126283297813\
 490006956955635) - 0.592926471806970222977868252268224854582512852\
 15866194948856834827012170880915181 10^{-11} $\sin(1075.887895064997684405$ \
 0148572875009877387566436216115825256659562698001391391127 $r - 0.01$ \
 07588789506499768440501485728750098773875664362161158252566595626\
 98001391391127) - 0.1299981244947554382560497559485069167287679261\
 1139377724422747355496269056501984 10^{-11} $\sin(1613.8318425974965266075$ \
 222859312514816081349654324173737884989344047002087086690 $r - 0.016$ \
 13831842597496526607522285931251481608134965432417373788498934404\
 7002087086690) - 0.22457781474657980794703259990342226687132696363\
 714607950173102870441700380120182 10^{-12} + 0.224577816104227167105479\
 20277697922219914487980915303857004345925406478984063652 10^{-7} $r - 0.$ \
 32306411819420868830291180593946440939143762271762363481566464539\
 602316799468873 10^{-12} (171.23287671232876712328767123287671232876712\
 328767123287671232876712328767123288 $r - 0.001712328767123287671232$ \
 8767123287671232876712328767123287671232876712328767123288)² - 0.66\
 29428672252931125968717410656911007212783163089780216265314151033\
 6126354767935 10^{-9} (171.23287671232876712328767123287671232876712328\

$767123287671232876712328767123288 r - 0.001712328767123287671232876 \backslash$
 $712328767123287671232876712328767123287671232876712328767123288)^3 + 0.83905 \backslash$
 $51756175299087420870597028573790625011571402551235768560168412010 \backslash$
 $3168586717 10^{-9} (171.23287671232876712328767123287671232876712328767 \backslash$
 $123287671232876712328767123288 r - 0.001712328767123287671232876712 \backslash$
 $3287671232876712328767123287671232876712328767123288)^4 - 0.30657169 \backslash$
 $42075594669376940274835576695497532954529229380535594931659512894 \backslash$
 $7018917 10^{-9} (171.23287671232876712328767123287671232876712328767123 \backslash$
 $287671232876712328767123288 r - 0.001712328767123287671232876712328 \backslash$
 $767123287671232876712328767123287671232876712328767123288)^5 - (-0.483109198 \backslash$
 $40367860474913545920948816664130769060569081245363517051463561991 \backslash$
 $104050 10^{-13} \cos(537.94394753249884220250742864375049386937832181080 \backslash$
 $579126283297813490006956955635 r - 0.005379439475324988422025074286 \backslash$
 $4375049386937832181080579126283297813490006956955635) - 0.55110432 \backslash$
 $46482011195136140325621164708666697729372695978410895961631531255 \backslash$
 $4846961 10^{-14} \cos(1075.887895064997684405014857287500987738756643621 \backslash$
 $6115825256659562698001391391127 r - 0.01075887895064997684405014857 \backslash$
 $2875009877387566436216115825256659562698001391391127) - 0.80552459 \backslash$
 $71942200863081170795087496460763335748489128239246181411037083195 \backslash$
 $3865297 10^{-15} \cos(1613.831842597496526607522285931251481608134965432 \backslash$
 $4173737884989344047002087086690 r - 0.01613831842597496526607522285 \backslash$
 $9312514816081349654324173737884989344047002087086690) + 0.54627487 \backslash$
 $69199990528102630041891777477709481335355865082783934199721973759 \backslash$
 $2318486 10^{-13} - 0.13576473591584466028735569553278179161720069590683 \backslash$
 $124305496477860394347047212912 10^{-20} r - 0.38296805824621650352163157 \backslash$
 $491152712803175778064095249361272371019677160481944062 10^{-12} (171.23 \backslash$
 $28767123287671232876712328767123287671232876712328767123287671232 \backslash$
 $8767123288 r - 0.00171232876712328767123287671232876712328767123287 \backslash$
 $67123287671232876712328767123288)^2 + 0.6288981500847262465630016488 \backslash$
 $9549071694866523889030734244116050970425843369632738 10^{-15} (171.2328 \backslash$
 $76712328767123287671232876712328767123287671232876712328767123287 \backslash$
 $67123288 r - 0.0017123287671232876712328767123287671232876712328767 \backslash$
 $123287671232876712328767123288)^3 + 0.967896586148927944391432741955 \backslash$
 $90900705306634181110791157473586605090744477961183 10^{-12} (171.232876 \backslash$
 $71232876712328767123287671232876712328767123287671232876712328767 \backslash$
 $123288 r - 0.001712328767123287671232876712328767123287671232876712 \backslash$
 $3287671232876712328767123288)^4 - 0.98001644512127493341075768573293 \backslash$
 $741874500135153981798433776782767052280500909283 10^{-12} (171.23287671 \backslash$
 $23287671232876712328767123287671232876712328767123287671232876712 \backslash$
 $3288 r - 0.00171232876712328767123287671232876712328767123287671232 \backslash$
 $87671232876712328767123288)^5 + 0.2983964490286912144860221867506627 \backslash$
 $9836175987424084499303879790668152592175098411 10^{-12} (171.2328767123 \backslash$

2328767123287671232876712328767123288 $r - 0.00171232876712328767123$ \

 2876712328767123287671232876712328767123287671232876712328767123288)⁴ - 0.1 \

 59160082463865131808859097848425580405993838456361029626135288562 \

 50394767859538 10^{-7} (171.2328767123287671232876712328767123287671232 \

 8767123287671232876712328767123288 $r - 0.00171232876712328767123287$ \

 67123287671232876712328767123287671232876712328767123288)² - 0.6464 \

 12051600861832073990911351835376677668150049020477083594394440500 \

 85880742976 10^{-9} $\cos(537.9439475324988422025074286437504938693783218$ \

 1080579126283297813490006956955635 $r - 0.00537943947532498842202507$ \

 42864375049386937832181080579126283297813490006956955635) - 0.2716 \

 55577424727568254237832210053365455175280057586463733606483241840 \

 10514494999 10^{-9} $\cos(1075.887895064997684405014857287500987738756643$ \

 6216115825256659562698001391391127 $r - 0.01075887895064997684405014$ \

 8572875009877387566436216115825256659562698001391391127) - 0.71337 \

 20334375367308407846009165439266572386020105684418592040880207937 \

 433372015 10^{-10} $\cos(1613.8318425974965266075222859312514816081349654$ \

 324173737884989344047002087086690 $r - 0.016138318425974965266075222$ \

 859312514816081349654324173737884989344047002087086690) $\sin(1.7951$ \

 95802051310421978653361874001648112668228214346183414254052747323 \

 6607349766 z) + (-0.66317904489065893553326517047365152622581939472 \

 319380826637184969547750583784388 10^{-6} + 0.3333050865670434150406109 \

 6996911141754469248434864184328534066018046693536621492 10^{-8} (171.23 \

 2876712328767123287671232876712328767123287671232876712328767123287671232 \

 8767123288 $r - 0.0017123287671232876712328767123287671232876712328767123287$ \

 67123287671232876712328767123288)³ - 0.1449746356327210071093398358 \

 4496913587055777296727785074272644739680053643164991 10^{-8} (171.23287 \

 6712328767123287671232876712328767123287671232876712328767123287671232876 \

 7123288 $r - 0.0017123287671232876712328767123287671232876712328767123287671$ \

 2328767123287671232876712328767123288)⁴ - 0.2100083585851231083422367832637 \

 2885457592318058840706344255809547709933018602256 10^{-8} (171.23287671 \

 2328767123287671232876712328767123287671232876712328767123287671232876712 \

 3288 $r - 0.0017123287671232876712328767123287671232876712328767123287671232$ \

 87671232876712328767123288)² - 0.8564927072030455888324081941370433 \

 8380201282601909399642870470310170708719998886 10^{-10} $\cos(537.9439475$ \

 32498842202507428643750493869378321810805791262832978134900069569 \

 55635 $r - 0.0053794394753249884220250742864375049386937832181080579$ \

 126283297813490006956955635) - 0.355617686789370301046590047607311 \

 46236733546956110369090243596359976456907400972 10^{-10} $\cos(1075.88789$ \

 50649976844050148572875009877387566436216115825256659562698001391 \

```
391127 r - 0.010758878950649976844050148572875009877387566436216115 \
825256659562698001391391127) - 0.952308046646376055774345865104525 \
0292349321080926542629077753298814658562613322 10-11 cos( 1613.831842 \
59749652660752228593125148160813496543241737378849893440470020870 \
86690 r - 0.0161383184259749652660752228593125148160813496543241737 \
37884989344047002087086690)) sin( 2.69279370307696563296798004281100 \
24721690023423215192751213810791209854911024649 z)
```

>

Вычисление контактного термического сопротивления в конечном цилиндре с внутренним источником и вывод его численного значения

>

```
> U1_z:=subs(z=0,U1_);;
```

```
> U1_d:=diff(U1_,'$(z,1));;
```

```
> U1_dz:=subs(z=0,U1_d);;
```

>

>

```
> znam:=2*Pi*int(r*U1_dz,r=r_0..R);;
```

```
> chis:=evalf(subs(r=r_0,U1_z)-subs(r=R,U1_z));;
```

```
> TR:=evalf(chis/znam);
```

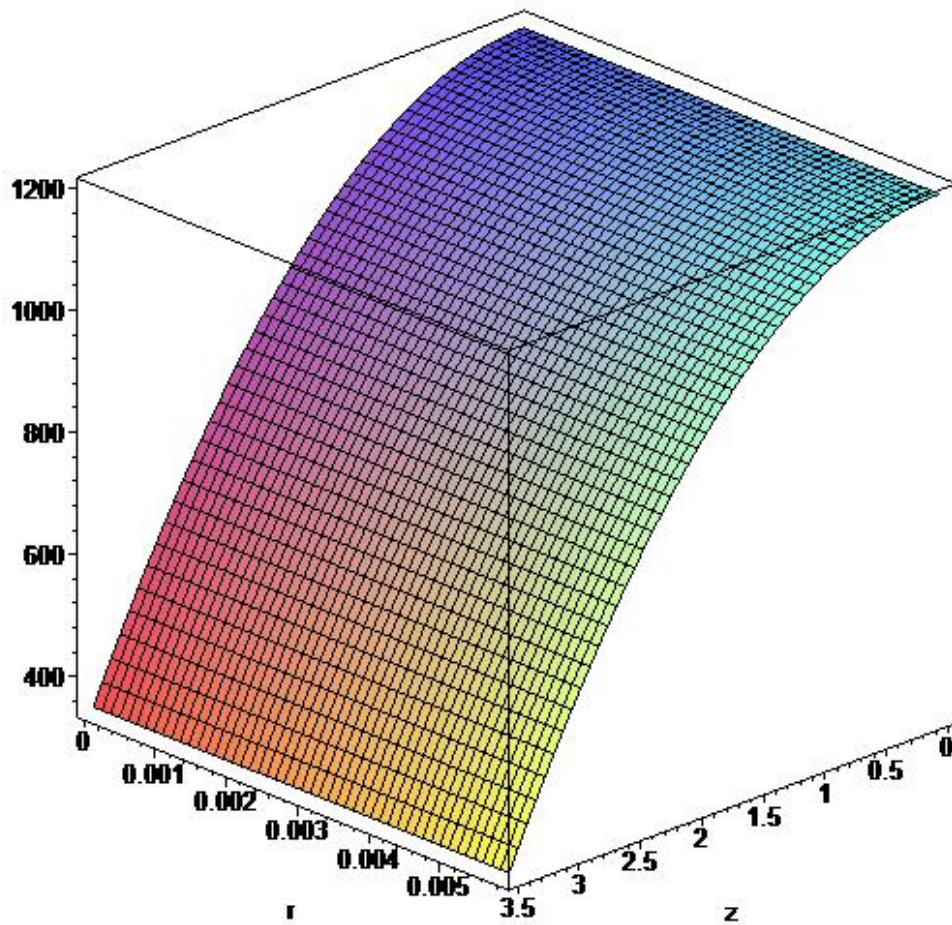
```
TR := -0.1433741672291028664174315568784082413091270893492629276277600 \
0737314651323120388 10-8
```

>

>

Построение трехмерного графика распределения температуры в цилиндре конечной длины с постоянным внутренним источником

```
> plot3d(U1_, z=0..h, r=r_0..R);
```



>

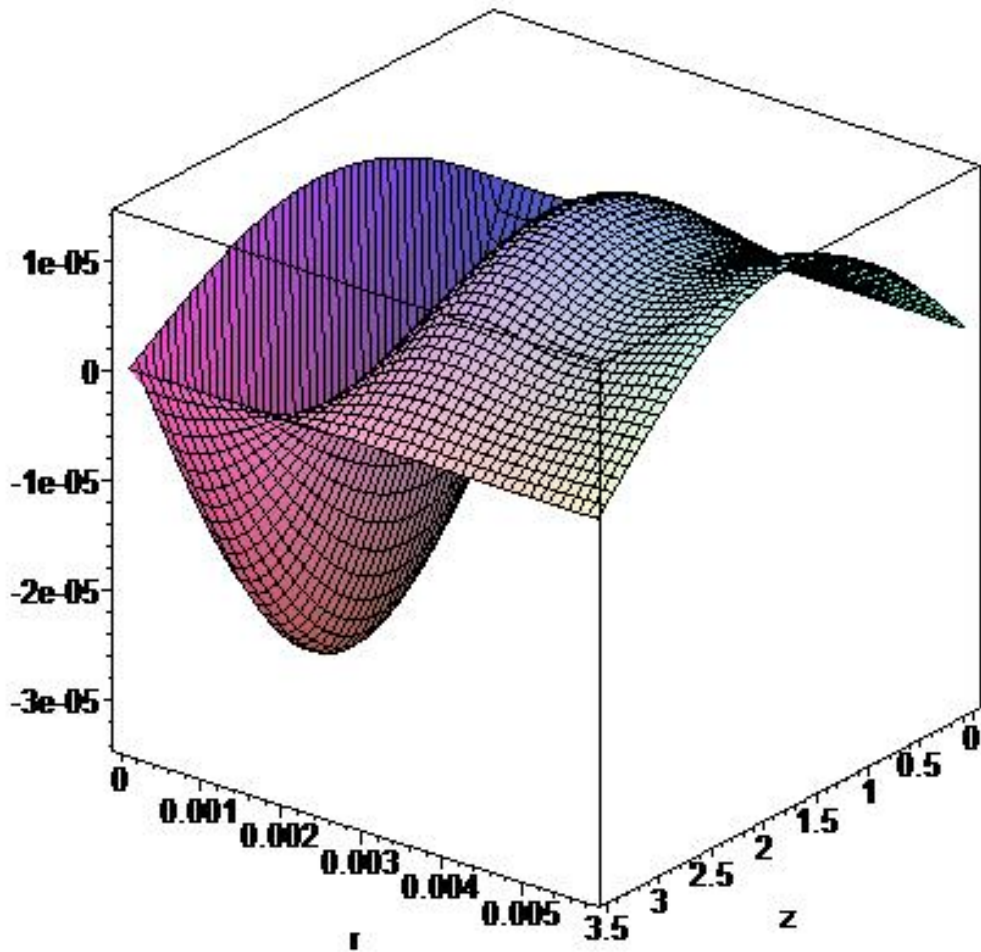
>

Определение невязки дифференциального уравнения теплопроводности и построение ее трехмерного графика для оценки погрешности метода быстрых разложений

>

```
> dddddd:=(diff(U1_,'$(r,2))+diff(U1_,'$(r,1))/r+diff(U1_,'$(z,2))+Q[0])/Q[0];;
```

```
> plot3d(dddddd, z=0..h, r=r_0..R);
```



>

Определение невязки граничного условия на торце цилиндра при $z=0$ и построение ее двумерного графика для оценки погрешности метода быстрых разложений

>

```
> gu1:=U1_dz-b*psi_r_1(r):
```

```
> gu2:=U1_dz-b*0:
```

```
> gu3:=U1_dz-b*psi_r_2(r):
```

```
> as1:=plot(gu1, r=r_0..r_1, color=blue,thickness=5):;
```

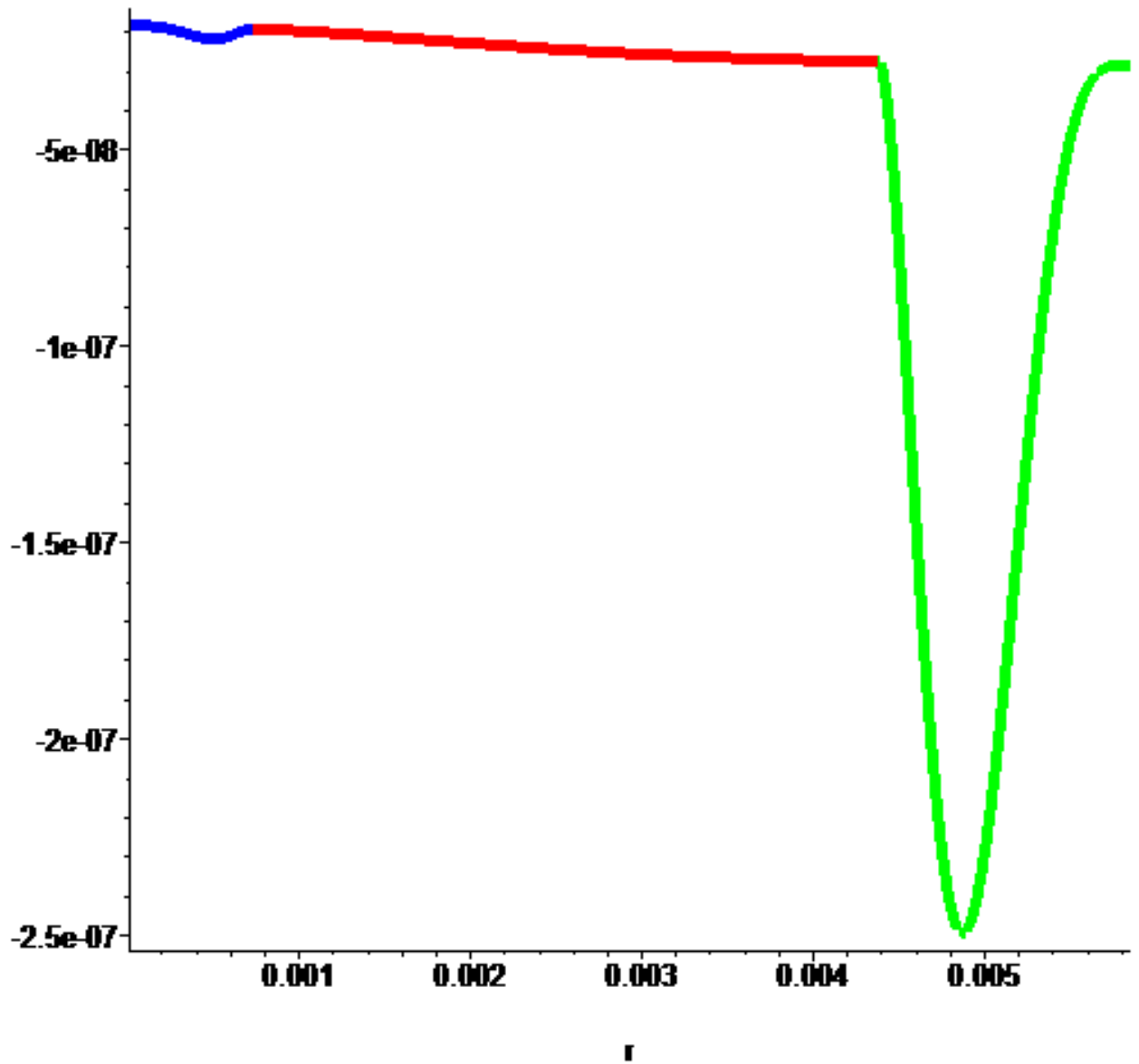
```
> as2:=plot(gu2, r=r_1..r_2, color=red,thickness=5):;
```

```
> as3:=plot(gu3, r=r_2..R, color=green,thickness=5):;
```

```
> with(plots):
```

```
> with(plottools):
```

```
> plots[display](as1,as2,as3,axes=normal);
```



```
>
```

```
>
```

Программа Б.9. Решение задачи о контактном термическом сопротивлении цилиндра с учетом неосесимметричного теплового потока.

```

> restart, Digits := 50;
                                                    Digits := 50
(1)
> with(linalg) :
> with(LinearAlgebra) :
> r0 := 10-5 : R := 5.85·10-3 : h := 3.5 : b1 := 103 : N := 5 : n ≠ p : k1 := Pi : k2 := 18 :
  U0 := 450 : Q0 := 90 : L :=  $\frac{\text{Pi}}{2}$  :
> b :=  $\frac{U0}{h} + \frac{1}{2} \cdot Q0 \cdot h$  :
> R1 :=  $\left(1 - \frac{z}{h}\right)$  : R2 :=  $\frac{z}{h}$  : R3 :=  $\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6 \cdot h} - \frac{h \cdot z}{3}$  : R4 :=  $\frac{z^3}{6 \cdot h} - \frac{h \cdot z}{6}$  : R5
  :=  $\frac{z^4}{24} - \frac{z^5}{120 \cdot h} - \frac{h \cdot z^3}{18} + \frac{h^3 \cdot z}{45}$  : R6 :=  $\frac{z^5}{120 \cdot h} - \frac{h \cdot z^3}{36} + \frac{7 \cdot h^3 \cdot z}{360}$  :
> Isin :=  $\frac{1}{2} h$  : IR5 :=  $\frac{h^5}{\pi^5 m^5}$  : IRI :=  $\frac{h}{m \pi}$  : II :=  $-\frac{h (\cos(m \pi) - 1)}{m \pi}$  : Iz :=
   $-\frac{h^2 \cos(m \pi)}{m \pi}$  :

> t :=  $\frac{r - r0}{R - r0}$  :

> hi :=  $\cos(p \cdot \pi \cdot r)$  :
> f :=  $b1 \cdot \sin(k1 \cdot t) \cdot (r - R)^4 \cdot (r - r0)^4$  :

> sv :=  $b1 \cdot \sin(k1 \cdot t) \cdot (r - R)^4 \cdot (r - r0)^4$  : svW :=  $b1 \cdot \cos(k1 \cdot t) \cdot (r - R)^4 \cdot (r - r0)^4$  :
> PR :=  $b + sv \cdot \cos(k2 \cdot \theta) + svW \cdot \sin(k2 \cdot \theta)$  :
  :
> a0 := 1 :
> a1 :=  $t - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{3}$  :
> a2 :=  $\frac{t^2}{2} - \frac{1}{6}$  :
> a3 :=  $\frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{24} - \frac{t^2}{6} + \frac{1}{45}$  :
> a4 :=  $\frac{t^4}{24} - \frac{t^2}{12} + \frac{7}{360}$  :
> a5 :=  $\frac{t^5}{120} - \frac{t^6}{720} - \frac{t^4}{72} + \frac{t^2}{90} - \frac{2}{945}$  :
> a6 :=  $\frac{t^6}{720} - \frac{t^4}{144} + \frac{7 \cdot t^2}{720} - \frac{31}{15120}$  :
> a7 :=  $\frac{t^7}{5040} - \frac{t^8}{40320} - \frac{t^6}{2160} + \frac{t^4}{1080} - \frac{t^2}{945} + \frac{1}{4725}$  :

```

$$\begin{aligned}
&> a8 := \frac{t^8}{40320} - \frac{t^6}{4320} + \frac{7 \cdot t^4}{8640} - \frac{31 \cdot t^2}{30240} + \frac{127}{604800} : \\
&> a9 := \cos(n \cdot \pi \cdot t) : \\
&> u0 := 1 : \\
&> u1 := t - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{3} : \\
&> u2 := \frac{t^2}{2} - \frac{1}{6} : \\
&> u3 := \frac{t^3}{6} - \frac{t^4}{24} - \frac{t^2}{6} + \frac{1}{45} : \\
&> u4 := \frac{t^4}{24} - \frac{t^2}{12} + \frac{7}{360} : \\
&> u5 := \cos(n \cdot \pi \cdot t) : \\
&V, W (17) : \\
&> a10 := IR5 \cdot \text{diff}(a0, r\$6) + \frac{3}{r} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a0, r\$5) + \frac{3 \cdot (k2^2 - 1)}{r^2} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a0, r\$4) \\
&\quad - \frac{6 IR5 (k2^2 - 1)}{r^3} \cdot \text{diff}(a0, r\$3) + \frac{3 IR5 (k2^4 + 7 k2^2 - 3)}{r^4} \cdot \text{diff}(a0, r\$2) \\
&\quad - \frac{9 IR5 (k2^4 + 5 k2^2 - 1)}{r^5} \cdot \text{diff}(a0, r) \\
&\quad - \frac{k2^2 (IR1 h r^4 - IR5 h k2^4 - h r^4 \cdot I1 + r^4 Iz - 20 IR5 h k2^2 - 64 IR5 h)}{h r^6} \cdot a0 : \\
&> a11 := IR5 \cdot \text{diff}(a1, r\$6) + \frac{3}{r} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a1, r\$5) + \frac{3 \cdot (k2^2 - 1)}{r^2} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a1, r\$4) \\
&\quad - \frac{6 IR5 (k2^2 - 1)}{r^3} \cdot \text{diff}(a1, r\$3) + \frac{3 IR5 (k2^4 + 7 k2^2 - 3)}{r^4} \cdot \text{diff}(a1, r\$2) \\
&\quad - \frac{9 IR5 (k2^4 + 5 k2^2 - 1)}{r^5} \cdot \text{diff}(a1, r) \\
&\quad - \frac{k2^2 (IR1 h r^4 - IR5 h k2^4 - h r^4 \cdot I1 + r^4 Iz - 20 IR5 h k2^2 - 64 IR5 h)}{h r^6} \cdot a1 : \\
&> a12 := IR5 \cdot \text{diff}(a2, r\$6) + \frac{3}{r} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a2, r\$5) + \frac{3 \cdot (k2^2 - 1)}{r^2} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a2, r\$4) \\
&\quad - \frac{6 IR5 (k2^2 - 1)}{r^3} \cdot \text{diff}(a2, r\$3) + \frac{3 IR5 (k2^4 + 7 k2^2 - 3)}{r^4} \cdot \text{diff}(a2, r\$2) \\
&\quad - \frac{9 IR5 (k2^4 + 5 k2^2 - 1)}{r^5} \cdot \text{diff}(a2, r) \\
&\quad - \frac{k2^2 (IR1 h r^4 - IR5 h k2^4 - h r^4 \cdot I1 + r^4 Iz - 20 IR5 h k2^2 - 64 IR5 h)}{h r^6} \cdot a2 : \\
&> a13 := IR5 \cdot \text{diff}(a3, r\$6) + \frac{3}{r} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a3, r\$5) + \frac{3 \cdot (k2^2 - 1)}{r^2} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a3, r\$4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{6 IR5 (k^2 - 1)}{r^3} \cdot \text{diff}(a3, r\$3) + \frac{3 IR5 (k^2 + 7 k^2 - 3)}{r^4} \cdot \text{diff}(a3, r\$2) \\
& - \frac{9 IR5 (k^2 + 5 k^2 - 1)}{r^5} \cdot \text{diff}(a3, r) \\
& - \frac{k^2 (IR1 h r^4 - IR5 h k^2 - h r^4 \cdot I1 + r^4 Iz - 20 IR5 h k^2 - 64 IR5 h)}{h r^6} \cdot a3 :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> a14 := & IR5 \cdot \text{diff}(a4, r\$6) + \frac{3}{r} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a4, r\$5) + \frac{3 \cdot (k^2 - 1)}{r^2} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a4, r\$4) \\
& - \frac{6 IR5 (k^2 - 1)}{r^3} \cdot \text{diff}(a4, r\$3) + \frac{3 IR5 (k^2 + 7 k^2 - 3)}{r^4} \cdot \text{diff}(a4, r\$2) \\
& - \frac{9 IR5 (k^2 + 5 k^2 - 1)}{r^5} \cdot \text{diff}(a4, r) \\
& - \frac{k^2 (IR1 h r^4 - IR5 h k^2 - h r^4 \cdot I1 + r^4 Iz - 20 IR5 h k^2 - 64 IR5 h)}{h r^6} \cdot a4 :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> a15 := & IR5 \cdot \text{diff}(a5, r\$6) + \frac{3}{r} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a5, r\$5) + \frac{3 \cdot (k^2 - 1)}{r^2} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a5, r\$4) \\
& - \frac{6 IR5 (k^2 - 1)}{r^3} \cdot \text{diff}(a5, r\$3) + \frac{3 IR5 (k^2 + 7 k^2 - 3)}{r^4} \cdot \text{diff}(a5, r\$2) \\
& - \frac{9 IR5 (k^2 + 5 k^2 - 1)}{r^5} \cdot \text{diff}(a5, r) \\
& - \frac{k^2 (IR1 h r^4 - IR5 h k^2 - h r^4 \cdot I1 + r^4 Iz - 20 IR5 h k^2 - 64 IR5 h)}{h r^6} \cdot a5 :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> a16 := & IR5 \cdot \text{diff}(a6, r\$6) + \frac{3}{r} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a6, r\$5) + \frac{3 \cdot (k^2 - 1)}{r^2} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a6, r\$4) \\
& - \frac{6 IR5 (k^2 - 1)}{r^3} \cdot \text{diff}(a6, r\$3) + \frac{3 IR5 (k^2 + 7 k^2 - 3)}{r^4} \cdot \text{diff}(a6, r\$2) \\
& - \frac{9 IR5 (k^2 + 5 k^2 - 1)}{r^5} \cdot \text{diff}(a6, r) \\
& - \frac{k^2 (IR1 h r^4 - IR5 h k^2 - h r^4 \cdot I1 + r^4 Iz - 20 IR5 h k^2 - 64 IR5 h)}{h r^6} \cdot a6 :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> a17 := & IR5 \cdot \text{diff}(a7, r\$6) + \frac{3}{r} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a7, r\$5) + \frac{3 \cdot (k^2 - 1)}{r^2} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a7, r\$4) \\
& - \frac{6 IR5 (k^2 - 1)}{r^3} \cdot \text{diff}(a7, r\$3) + \frac{3 IR5 (k^2 + 7 k^2 - 3)}{r^4} \cdot \text{diff}(a7, r\$2) \\
& - \frac{9 IR5 (k^2 + 5 k^2 - 1)}{r^5} \cdot \text{diff}(a7, r) \\
& - \frac{k^2 (IR1 h r^4 - IR5 h k^2 - h r^4 \cdot I1 + r^4 Iz - 20 IR5 h k^2 - 64 IR5 h)}{h r^6} \cdot a7 :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> a18 := & IR5 \cdot \text{diff}(a8, r\$6) + \frac{3}{r} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a8, r\$5) + \frac{3 \cdot (k2^2 - 1)}{r^2} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a8, r\$4) \\
& - \frac{6 IR5 (k2^2 - 1)}{r^3} \cdot \text{diff}(a8, r\$3) + \frac{3 IR5 (k2^4 + 7 k2^2 - 3)}{r^4} \cdot \text{diff}(a8, r\$2) \\
& - \frac{9 IR5 (k2^4 + 5 k2^2 - 1)}{r^5} \cdot \text{diff}(a8, r) \\
& - \frac{k2^2 (IR1 h r^4 - IR5 h k2^4 - h r^4 \cdot I1 + r^4 I2 - 20 IR5 h k2^2 - 64 IR5 h)}{h r^6} \cdot a8 :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> a19 := & IR5 \cdot \text{diff}(a9, r\$6) + \frac{3}{r} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a9, r\$5) + \frac{3 \cdot (k2^2 - 1)}{r^2} \cdot IR5 \cdot \text{diff}(a9, r\$4) \\
& - \frac{6 IR5 (k2^2 - 1)}{r^3} \cdot \text{diff}(a9, r\$3) + \frac{3 IR5 (k2^4 + 7 k2^2 - 3)}{r^4} \cdot \text{diff}(a9, r\$2) \\
& - \frac{9 IR5 (k2^4 + 5 k2^2 - 1)}{r^5} \cdot \text{diff}(a9, r) \\
& - \frac{k2^2 (IR1 h r^4 - IR5 h k2^4 - h r^4 \cdot I1 + r^4 I2 - 20 IR5 h k2^2 - 64 IR5 h)}{h r^6} \cdot a9 :
\end{aligned}$$

$$> u10 := \left(\text{diff}(u0, r\$2) + \frac{1}{r} \cdot \text{diff}(u0, r) - \frac{m^2 \pi^2}{h^2} \cdot u0 + \frac{k2^2}{r^2} \cdot u0 \right) \text{Isin} :$$

$$> u11 := \left(\text{diff}(u1, r\$2) + \frac{1}{r} \cdot \text{diff}(u1, r) - \frac{m^2 \pi^2}{h^2} \cdot u1 + \frac{k2^2}{r^2} \cdot u1 \right) \text{Isin} :$$

$$> u12 := \left(\text{diff}(u2, r\$2) + \frac{1}{r} \cdot \text{diff}(u2, r) - \frac{m^2 \pi^2}{h^2} \cdot u2 + \frac{k2^2}{r^2} \cdot u2 \right) \text{Isin} :$$

$$> u13 := \left(\text{diff}(u3, r\$2) + \frac{1}{r} \cdot \text{diff}(u3, r) - \frac{m^2 \pi^2}{h^2} \cdot u3 + \frac{k2^2}{r^2} \cdot u3 \right) \text{Isin} :$$

$$> u14 := \left(\text{diff}(u4, r\$2) + \frac{1}{r} \cdot \text{diff}(u4, r) - \frac{m^2 \pi^2}{h^2} \cdot u4 + \frac{k2^2}{r^2} \cdot u4 \right) \text{Isin} :$$

$$> u15 := \left(\text{diff}(u5, r\$2) + \frac{1}{r} \cdot \text{diff}(u5, r) - \frac{m^2 \pi^2}{h^2} \cdot u5 + \frac{k2^2}{r^2} \cdot u5 \right) \text{Isin} :$$

V, W (21) :

$$\begin{aligned}
> a20 := & \frac{h^3}{45} \cdot \text{diff}(a0, r\$4) + \frac{2 \cdot h^3}{45 \cdot r} \cdot \text{diff}(a0, r\$3) + \left(\frac{h}{3} + \frac{(2 k2^2 - 1) h^3}{45 \cdot r^2} \right) \cdot \text{diff}(a0, r\$2) \\
& + \left(\frac{h}{3 \cdot r} - \frac{(2 k2^2 - 1) h^3}{45 \cdot r^3} \right) \cdot \text{diff}(a0, r) + \left(-\frac{1}{h} + \frac{k2^2 h}{3 \cdot r^2} + \frac{k2^2 (k2^2 + 4) h^3}{45 \cdot r^4} \right) \cdot a0 :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> a21 := & \frac{h^3}{45} \cdot \text{diff}(a1, r\$4) + \frac{2 \cdot h^3}{45 \cdot r} \cdot \text{diff}(a1, r\$3) + \left(\frac{h}{3} + \frac{(2 k2^2 - 1) h^3}{45 \cdot r^2} \right) \cdot \text{diff}(a1, r\$2) \\
& + \left(\frac{h}{3 \cdot r} - \frac{(2 k2^2 - 1) h^3}{45 \cdot r^3} \right) \cdot \text{diff}(a1, r) + \left(-\frac{1}{h} + \frac{k2^2 h}{3 \cdot r^2} + \frac{k2^2 (k2^2 + 4) h^3}{45 \cdot r^4} \right) \cdot a1 :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
> a22 &:= \frac{h^3}{45} \cdot \text{diff}(a2, rS4) + \frac{2 \cdot h^3}{45 \cdot r} \cdot \text{diff}(a2, rS3) + \left(\frac{h}{3} + \frac{(2k^2 - 1)h^3}{45 \cdot r^2} \right) \cdot \text{diff}(a2, rS2) \\
&\quad + \left(\frac{h}{3 \cdot r} - \frac{(2k^2 - 1)h^3}{45 \cdot r^3} \right) \cdot \text{diff}(a2, r) + \left(-\frac{1}{h} + \frac{k^2 h}{3 \cdot r^2} + \frac{k^2(k^2 + 4)h^3}{45 \cdot r^4} \right) \cdot a2 : \\
> a23 &:= \frac{h^3}{45} \cdot \text{diff}(a3, rS4) + \frac{2 \cdot h^3}{45 \cdot r} \cdot \text{diff}(a3, rS3) + \left(\frac{h}{3} + \frac{(2k^2 - 1)h^3}{45 \cdot r^2} \right) \cdot \text{diff}(a3, rS2) \\
&\quad + \left(\frac{h}{3 \cdot r} - \frac{(2k^2 - 1)h^3}{45 \cdot r^3} \right) \cdot \text{diff}(a3, r) + \left(-\frac{1}{h} + \frac{k^2 h}{3 \cdot r^2} + \frac{k^2(k^2 + 4)h^3}{45 \cdot r^4} \right) \cdot a3 : \\
> a24 &:= \frac{h^3}{45} \cdot \text{diff}(a4, rS4) + \frac{2 \cdot h^3}{45 \cdot r} \cdot \text{diff}(a4, rS3) + \left(\frac{h}{3} + \frac{(2k^2 - 1)h^3}{45 \cdot r^2} \right) \cdot \text{diff}(a4, rS2) \\
&\quad + \left(\frac{h}{3 \cdot r} - \frac{(2k^2 - 1)h^3}{45 \cdot r^3} \right) \cdot \text{diff}(a4, r) + \left(-\frac{1}{h} + \frac{k^2 h}{3 \cdot r^2} + \frac{k^2(k^2 + 4)h^3}{45 \cdot r^4} \right) \cdot a4 : \\
> a25 &:= \frac{h^3}{45} \cdot \text{diff}(a5, rS4) + \frac{2 \cdot h^3}{45 \cdot r} \cdot \text{diff}(a5, rS3) + \left(\frac{h}{3} + \frac{(2k^2 - 1)h^3}{45 \cdot r^2} \right) \cdot \text{diff}(a5, rS2) \\
&\quad + \left(\frac{h}{3 \cdot r} - \frac{(2k^2 - 1)h^3}{45 \cdot r^3} \right) \cdot \text{diff}(a5, r) + \left(-\frac{1}{h} + \frac{k^2 h}{3 \cdot r^2} + \frac{k^2(k^2 + 4)h^3}{45 \cdot r^4} \right) \cdot a5 : \\
> a26 &:= \frac{h^3}{45} \cdot \text{diff}(a6, rS4) + \frac{2 \cdot h^3}{45 \cdot r} \cdot \text{diff}(a6, rS3) + \left(\frac{h}{3} + \frac{(2k^2 - 1)h^3}{45 \cdot r^2} \right) \cdot \text{diff}(a6, rS2) \\
&\quad + \left(\frac{h}{3 \cdot r} - \frac{(2k^2 - 1)h^3}{45 \cdot r^3} \right) \cdot \text{diff}(a6, r) + \left(-\frac{1}{h} + \frac{k^2 h}{3 \cdot r^2} + \frac{k^2(k^2 + 4)h^3}{45 \cdot r^4} \right) \cdot a6 : \\
> a27 &:= \frac{h^3}{45} \cdot \text{diff}(a7, rS4) + \frac{2 \cdot h^3}{45 \cdot r} \cdot \text{diff}(a7, rS3) + \left(\frac{h}{3} + \frac{(2k^2 - 1)h^3}{45 \cdot r^2} \right) \cdot \text{diff}(a7, rS2) \\
&\quad + \left(\frac{h}{3 \cdot r} - \frac{(2k^2 - 1)h^3}{45 \cdot r^3} \right) \cdot \text{diff}(a7, r) + \left(-\frac{1}{h} + \frac{k^2 h}{3 \cdot r^2} + \frac{k^2(k^2 + 4)h^3}{45 \cdot r^4} \right) \cdot a7 : \\
> a28 &:= \frac{h^3}{45} \cdot \text{diff}(a8, rS4) + \frac{2 \cdot h^3}{45 \cdot r} \cdot \text{diff}(a8, rS3) + \left(\frac{h}{3} + \frac{(2k^2 - 1)h^3}{45 \cdot r^2} \right) \cdot \text{diff}(a8, rS2) \\
&\quad + \left(\frac{h}{3 \cdot r} - \frac{(2k^2 - 1)h^3}{45 \cdot r^3} \right) \cdot \text{diff}(a8, r) + \left(-\frac{1}{h} + \frac{k^2 h}{3 \cdot r^2} + \frac{k^2(k^2 + 4)h^3}{45 \cdot r^4} \right) \cdot a8 : \\
> a29 &:= \frac{h^3}{45} \cdot \text{diff}(a9, rS4) + \frac{2 \cdot h^3}{45 \cdot r} \cdot \text{diff}(a9, rS3) + \left(\frac{h}{3} + \frac{(2k^2 - 1)h^3}{45 \cdot r^2} \right) \cdot \text{diff}(a9, rS2) \\
&\quad + \left(\frac{h}{3 \cdot r} - \frac{(2k^2 - 1)h^3}{45 \cdot r^3} \right) \cdot \text{diff}(a9, r) + \left(-\frac{1}{h} + \frac{k^2 h}{3 \cdot r^2} + \frac{k^2(k^2 + 4)h^3}{45 \cdot r^4} \right) \cdot a9 : \\
> u20 &:= \frac{\pi}{h} \cdot m \cdot u0 : \\
> u21 &:= \frac{\pi}{h} \cdot m \cdot u1 : \\
> u22 &:= \frac{\pi}{h} \cdot m \cdot u2 :
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &> u_{23} := \frac{\pi}{h} \cdot m \cdot u_3 : \\ &> u_{24} := \frac{\pi}{h} \cdot m \cdot u_4 : \\ &> u_{25} := \frac{\pi}{h} \cdot m \cdot u_5 : \end{aligned}$$

V , W :

$$\begin{aligned} &> \text{inta10} := \text{int}(a_{10}, r=r0..R) : \text{diffa10} := \text{diff}(a_{10}, r) : \text{cinta10} := \text{int}(a_{10} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &> \text{inta11} := \text{int}(a_{11}, r=r0..R) : \text{diffa11} := \text{diff}(a_{11}, r) : \text{cinta11} := \text{int}(a_{11} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &> \text{inta12} := \text{int}(a_{12}, r=r0..R) : \text{diffa12} := \text{diff}(a_{12}, r) : \text{cinta12} := \text{int}(a_{12} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &> \text{inta13} := \text{int}(a_{13}, r=r0..R) : \text{diffa13} := \text{diff}(a_{13}, r) : \text{cinta13} := \text{int}(a_{13} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &> \text{inta14} := \text{int}(a_{14}, r=r0..R) : \text{diffa14} := \text{diff}(a_{14}, r) : \text{cinta14} := \text{int}(a_{14} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &> \text{inta15} := \text{int}(a_{15}, r=r0..R) : \text{diffa15} := \text{diff}(a_{15}, r) : \text{cinta15} := \text{int}(a_{15} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &> \text{inta16} := \text{int}(a_{16}, r=r0..R) : \text{diffa16} := \text{diff}(a_{16}, r) : \text{cinta16} := \text{int}(a_{16} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &> \text{inta17} := \text{int}(a_{17}, r=r0..R) : \text{diffa17} := \text{diff}(a_{17}, r) : \text{cinta17} := \text{int}(a_{17} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &> \text{inta18} := \text{int}(a_{18}, r=r0..R) : \text{diffa18} := \text{diff}(a_{18}, r) : \text{cinta18} := \text{int}(a_{18} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &> \text{inta19} := \text{int}(a_{19}, r=r0..R) : \text{diffa19} := \text{diff}(a_{19}, r) : \text{cinta19} := \text{int}(a_{19} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &> \text{intu10} := \text{int}(u_{10}, r=r0..R) : \text{diffu10} := \text{diff}(u_{10}, r) : \text{cintu10} := \text{int}(u_{10} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &> \text{intu11} := \text{int}(u_{11}, r=r0..R) : \text{diffu11} := \text{diff}(u_{11}, r) : \text{cintu11} := \text{int}(u_{11} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &> \text{intu12} := \text{int}(u_{12}, r=r0..R) : \text{diffu12} := \text{diff}(u_{12}, r) : \text{cintu12} := \text{int}(u_{12} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &> \text{intu13} := \text{int}(u_{13}, r=r0..R) : \text{diffu13} := \text{diff}(u_{13}, r) : \text{cintu13} := \text{int}(u_{13} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &> \text{intu14} := \text{int}(u_{14}, r=r0..R) : \text{diffu14} := \text{diff}(u_{14}, r) : \text{cintu14} := \text{int}(u_{14} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &> \text{intu15} := \text{int}(u_{15}, r=r0..R) : \text{diffu15} := \text{diff}(u_{15}, r) : \text{cintu15} := \text{int}(u_{15} \cdot hi, r=r0..R) : \end{aligned}$$

V , W :

$$\begin{aligned} &> \text{inta20} := \text{int}(a_{20}, r=r0..R) : \text{diffa20} := \text{diff}(a_{20}, r) : \text{cinta20} := \text{int}(a_{20} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &\quad \text{diffa203} := \text{diff}(a_{20}, r\$3) : \\ &> \text{inta21} := \text{int}(a_{21}, r=r0..R) : \text{diffa21} := \text{diff}(a_{21}, r) : \text{cinta21} := \text{int}(a_{21} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &\quad \text{diffa213} := \text{diff}(a_{21}, r\$3) : \\ &> \text{inta22} := \text{int}(a_{22}, r=r0..R) : \text{diffa22} := \text{diff}(a_{22}, r) : \text{cinta22} := \text{int}(a_{22} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &\quad \text{diffa223} := \text{diff}(a_{22}, r\$3) : \\ &> \text{inta23} := \text{int}(a_{23}, r=r0..R) : \text{diffa23} := \text{diff}(a_{23}, r) : \text{cinta23} := \text{int}(a_{23} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &\quad \text{diffa233} := \text{diff}(a_{23}, r\$3) : \\ &> \text{inta24} := \text{int}(a_{24}, r=r0..R) : \text{diffa24} := \text{diff}(a_{24}, r) : \text{cinta24} := \text{int}(a_{24} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &\quad \text{diffa243} := \text{diff}(a_{24}, r\$3) : \\ &> \text{inta25} := \text{int}(a_{25}, r=r0..R) : \text{diffa25} := \text{diff}(a_{25}, r) : \text{cinta25} := \text{int}(a_{25} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &\quad \text{diffa253} := \text{diff}(a_{25}, r\$3) : \\ &> \text{inta26} := \text{int}(a_{26}, r=r0..R) : \text{diffa26} := \text{diff}(a_{26}, r) : \text{cinta26} := \text{int}(a_{26} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &\quad \text{diffa263} := \text{diff}(a_{26}, r\$3) : \\ &> \text{inta27} := \text{int}(a_{27}, r=r0..R) : \text{diffa27} := \text{diff}(a_{27}, r) : \text{cinta27} := \text{int}(a_{27} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &\quad \text{diffa273} := \text{diff}(a_{27}, r\$3) : \\ &> \text{inta28} := \text{int}(a_{28}, r=r0..R) : \text{diffa28} := \text{diff}(a_{28}, r) : \text{cinta28} := \text{int}(a_{28} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &\quad \text{diffa283} := \text{diff}(a_{28}, r\$3) : \\ &> \text{inta29} := \text{int}(a_{29}, r=r0..R) : \text{diffa29} := \text{diff}(a_{29}, r) : \text{cinta29} := \text{int}(a_{29} \cdot hi, r=r0..R) : \\ &\quad \text{diffa293} := \text{diff}(a_{29}, r\$3) : \end{aligned}$$

$\begin{aligned} &> \text{intu20} := \text{int}(u20, r=r0..R) : \text{diffu20} := \text{diff}(u20, r) : \text{cintu20} := \text{int}(u20 \cdot \text{hi}, r=r0..R) : \\ &\quad \text{diffu203} := \text{diff}(u20, rS3) : \\ &> \text{intu21} := \text{int}(u21, r=r0..R) : \text{diffu21} := \text{diff}(u21, r) : \text{cintu21} := \text{int}(u21 \cdot \text{hi}, r=r0..R) : \\ &\quad \text{diffu213} := \text{diff}(u21, rS3) : \\ &> \text{intu22} := \text{int}(u22, r=r0..R) : \text{diffu22} := \text{diff}(u22, r) : \text{cintu22} := \text{int}(u22 \cdot \text{hi}, r=r0..R) : \\ &\quad \text{diffu223} := \text{diff}(u22, rS3) : \\ &> \text{intu23} := \text{int}(u23, r=r0..R) : \text{diffu23} := \text{diff}(u23, r) : \text{cintu23} := \text{int}(u23 \cdot \text{hi}, r=r0..R) : \\ &\quad \text{diffu233} := \text{diff}(u23, rS3) : \\ &> \text{intu24} := \text{int}(u24, r=r0..R) : \text{diffu24} := \text{diff}(u24, r) : \text{cintu24} := \text{int}(u24 \cdot \text{hi}, r=r0..R) : \\ &\quad \text{diffu243} := \text{diff}(u24, rS3) : \\ &> \text{intu25} := \text{int}(u25, r=r0..R) : \text{diffu25} := \text{diff}(u25, r) : \text{cintu25} := \text{int}(u25 \cdot \text{hi}, r=r0..R) : \\ &\quad \text{diffu253} := \text{diff}(u25, rS3) : \end{aligned}$

$\begin{aligned} &\quad \text{V} (2 1) : \\ &> \text{intsv} := \text{int}(sv, r=r0..R) : \text{diffsv} := \text{diff}(sv, r) : \text{diffsv3} := \text{diff}(sv, rS3) : \text{cintsv} := \text{int}(sv \cdot \text{hi}, r \\ &\quad =r0..R) : \\ &\quad \text{W} (2 1) : \\ &> \text{intsvW} := \text{int}(svW, r=r0..R) : \text{diffsvW} := \text{diff}(svW, r) : \text{diffsv3W} := \text{diff}(svW, rS3) : \text{cintsvW} \\ &\quad := \text{int}(svW \cdot \text{hi}, r=r0..R) : \end{aligned}$

$\begin{aligned} &\quad (2 4) : \\ &> \text{gr1a0} := -\text{diff}(a0, rS3) - \frac{1}{R} \cdot \text{diff}(a0, rS2) + \frac{1-k2^2}{R^2} \cdot \text{diff}(a0, r) + \frac{2k2^2}{R^3} \cdot a0 : \text{gr2a0} := \\ &\quad -\text{diff}(a0, rS3) - \frac{1}{r0} \cdot \text{diff}(a0, rS2) + \frac{1-k2^2}{r0^2} \cdot \text{diff}(a0, r) + \frac{2k2^2}{r0^3} \cdot a0 : \text{gr3a0} \\ &\quad := \text{diff}(a0, r) : \text{gr4u0} := \text{diff}(u0, r) : \\ &> \text{gr1a1} := -\text{diff}(a1, rS3) - \frac{1}{R} \cdot \text{diff}(a1, rS2) + \frac{1-k2^2}{R^2} \cdot \text{diff}(a1, r) + \frac{2k2^2}{R^3} \cdot a1 : \text{gr2a1} := \\ &\quad -\text{diff}(a1, rS3) - \frac{1}{r0} \cdot \text{diff}(a1, rS2) + \frac{1-k2^2}{r0^2} \cdot \text{diff}(a1, r) + \frac{2k2^2}{r0^3} \cdot a1 : \text{gr3a1} \\ &\quad := \text{diff}(a1, r) : \text{gr4u1} := \text{diff}(u1, r) : \\ &> \text{gr1a2} := -\text{diff}(a2, rS3) - \frac{1}{R} \cdot \text{diff}(a2, rS2) + \frac{1-k2^2}{R^2} \cdot \text{diff}(a2, r) + \frac{2k2^2}{R^3} \cdot a2 : \text{gr2a2} := \\ &\quad -\text{diff}(a2, rS3) - \frac{1}{r0} \cdot \text{diff}(a2, rS2) + \frac{1-k2^2}{r0^2} \cdot \text{diff}(a2, r) + \frac{2k2^2}{r0^3} \cdot a2 : \text{gr3a2} \\ &\quad := \text{diff}(a2, r) : \text{gr4u2} := \text{diff}(u2, r) : \\ &> \text{gr1a3} := -\text{diff}(a3, rS3) - \frac{1}{R} \cdot \text{diff}(a3, rS2) + \frac{1-k2^2}{R^2} \cdot \text{diff}(a3, r) + \frac{2k2^2}{R^3} \cdot a3 : \text{gr2a3} := \\ &\quad -\text{diff}(a3, rS3) - \frac{1}{r0} \cdot \text{diff}(a3, rS2) + \frac{1-k2^2}{r0^2} \cdot \text{diff}(a3, r) + \frac{2k2^2}{r0^3} \cdot a3 : \text{gr3a3} \\ &\quad := \text{diff}(a3, r) : \text{gr4u3} := \text{diff}(u3, r) : \end{aligned}$

```

> gr1a4 := -diff(a4, r$3) - 1/R * diff(a4, r$2) + (1 - k2^2)/R^2 * diff(a4, r) + 2*k2^2/R^3 * a4 : gr2a4 :=
-diff(a4, r$3) - 1/r0 * diff(a4, r$2) + (1 - k2^2)/r0^2 * diff(a4, r) + 2*k2^2/r0^3 * a4 : gr3a4
:= diff(a4, r) : gr4u4 := diff(u4, r) :
=
> gr1a5 := -diff(a5, r$3) - 1/R * diff(a5, r$2) + (1 - k2^2)/R^2 * diff(a5, r) + 2*k2^2/R^3 * a5 : gr2a5 :=
-diff(a5, r$3) - 1/r0 * diff(a5, r$2) + (1 - k2^2)/r0^2 * diff(a5, r) + 2*k2^2/r0^3 * a5 : gr3a5
:= diff(a5, r) : gr4u5 := diff(u5, r) :
=
> gr1a6 := -diff(a6, r$3) - 1/R * diff(a6, r$2) + (1 - k2^2)/R^2 * diff(a6, r) + 2*k2^2/R^3 * a6 : gr2a6 :=
-diff(a6, r$3) - 1/r0 * diff(a6, r$2) + (1 - k2^2)/r0^2 * diff(a6, r) + 2*k2^2/r0^3 * a6 : gr3a6
:= diff(a6, r) :
=
> gr1a7 := -diff(a7, r$3) - 1/R * diff(a7, r$2) + (1 - k2^2)/R^2 * diff(a7, r) + 2*k2^2/R^3 * a7 : gr2a7 :=
-diff(a7, r$3) - 1/r0 * diff(a7, r$2) + (1 - k2^2)/r0^2 * diff(a7, r) + 2*k2^2/r0^3 * a7 : gr3a7
:= diff(a7, r) :
=
> gr1a8 := -diff(a8, r$3) - 1/R * diff(a8, r$2) + (1 - k2^2)/R^2 * diff(a8, r) + 2*k2^2/R^3 * a8 : gr2a8 :=
-diff(a8, r$3) - 1/r0 * diff(a8, r$2) + (1 - k2^2)/r0^2 * diff(a8, r) + 2*k2^2/r0^3 * a8 : gr3a8
:= diff(a8, r) :
=
> gr1a9 := -diff(a9, r$3) - 1/R * diff(a9, r$2) + (1 - k2^2)/R^2 * diff(a9, r) + 2*k2^2/R^3 * a9 : gr2a9 :=
-diff(a9, r$3) - 1/r0 * diff(a9, r$2) + (1 - k2^2)/r0^2 * diff(a9, r) + 2*k2^2/r0^3 * a9 : gr3a9
:= diff(a9, r) :
=
> M := matrix((9 + 6 * N + N^2), (9 + 6 * N + N^2)) :
> M1 := matrix(N, (9 + 6 * N + N^2)) :
> M2 := matrix(N, (9 + 6 * N + N^2)) :
> M3 := matrix(N, (9 + 6 * N + N^2)) :
> M4 := matrix(N^2, (9 + 6 * N + N^2)) :
> M5 := matrix(1, (9 + 6 * N + N^2)) :
> M6 := matrix(1, (9 + 6 * N + N^2)) :
> M7 := matrix(1, (9 + 6 * N + N^2)) :
> M8 := matrix(1, (9 + 6 * N + N^2)) :
> M9 := matrix(1, (9 + 6 * N + N^2)) :

```

```

> M10 := matrix(N, (9 + 6·N + N2)) :
> M11 := matrix(1, (9 + 6·N + N2)) :
> M12 := matrix(1, (9 + 6·N + N2)) :
> M13 := matrix(1, (9 + 6·N + N2)) :
> M14 := matrix(1, (9 + 6·N + N2)) :
> M15 := matrix(N, (9 + 6·N + N2)) :
> M16 := matrix(N, (9 + 6·N + N2)) :
> M17 := vector((9 + 6·N + N2)) :
> M18 := vector(N) :
> M19 := vector(N) :
> M20 := vector(N) :
> MW := matrix((9 + 6·N + N2), (9 + 6·N + N2)) :
> M1W := matrix(N, (9 + 6·N + N2)) :
> M2W := matrix(N, (9 + 6·N + N2)) :
> M3W := matrix(N, (9 + 6·N + N2)) :
> M4W := matrix(N2, (9 + 6·N + N2)) :
> M5W := matrix(1, (9 + 6·N + N2)) :
> M6W := matrix(1, (9 + 6·N + N2)) :
> M7W := matrix(1, (9 + 6·N + N2)) :
> M8W := matrix(1, (9 + 6·N + N2)) :
> M9W := matrix(1, (9 + 6·N + N2)) :
> M10W := matrix(N, (9 + 6·N + N2)) :
> M11W := matrix(1, (9 + 6·N + N2)) :
> M12W := matrix(1, (9 + 6·N + N2)) :
> M13W := matrix(1, (9 + 6·N + N2)) :
> M14W := matrix(1, (9 + 6·N + N2)) :
> M15W := matrix(N, (9 + 6·N + N2)) :
> M16W := matrix(N, (9 + 6·N + N2)) :
> M17W := vector((9 + 6·N + N2)) :
> M18W := vector(N) :
> M19W := vector(N) :
> M20W := vector(N) :

```

```

>
> i := 0 : l := 0 :
>
> for m from 1 by 1 to N do
>
>   i := i + 1 : j := 1 :

```

$MI_{i,j} := \text{inta10}; MIW_{i,j} := \text{inta10};$
 $j := j + 1;$

$MI_{i,j} := \text{inta11}; MIW_{i,j} := \text{inta11};$
 $j := j + 1;$

$MI_{i,j} := \text{inta12}; MIW_{i,j} := \text{inta12};$
 $j := j + 1;$

$MI_{i,j} := \text{inta13}; MIW_{i,j} := \text{inta13};$
 $j := j + 1;$

$MI_{i,j} := \text{inta14}; MIW_{i,j} := \text{inta14};$
 $j := j + 1;$

$MI_{i,j} := \text{inta15}; MIW_{i,j} := \text{inta15};$
 $j := j + 1;$

$MI_{i,j} := \text{inta16}; MIW_{i,j} := \text{inta16};$
 $j := j + 1;$

$MI_{i,j} := \text{inta17}; MIW_{i,j} := \text{inta17};$
 $j := j + 1;$

$MI_{i,j} := \text{inta18}; MIW_{i,j} := \text{inta18};$
 $j := j + 1;$

for n **from** 1 **by** 1 **to** N **do**
 $MI_{i,j} := \text{inta19}; MIW_{i,j} := \text{inta19};$
 $j := j + 1;$
end do;

for k **from** 1 **by** 1 **to** N **do**
if $k = m$ **then**
 $MI_{i,j} := \text{intu10}; MIW_{i,j} := \text{intu10};$
elif $k \neq m$ **then**
 $MI_{i,j} := 0; MIW_{i,j} := 0;$
end if;
 $j := j + 1;$
end do;

for k **from** 1 **by** 1 **to** N **do**
if $k = m$ **then**
 $MI_{i,j} := \text{intu11}; MIW_{i,j} := \text{intu11};$
elif $k \neq m$ **then**
 $MI_{i,j} := 0; MIW_{i,j} := 0;$
end if;


```

j := j + 1 :
end do:

  for k from 1 by 1 to N do
    if k = m then
      MIi,j := intu12 : MIWi,j := intu12 :
    elif k ≠ m then
      MIi,j := 0 : MIWi,j := 0 :
    end if:
    j := j + 1 :
  end do:

  for k from 1 by 1 to N do
    if k = m then
      MIi,j := intu13 : MIWi,j := intu13 :
    elif k ≠ m then
      MIi,j := 0 : MIWi,j := 0 :
    end if:
    j := j + 1 :
  end do:

  for k from 1 by 1 to N do
    if k = m then
      MIi,j := intu14 : MIWi,j := intu14 :
    elif k ≠ m then
      MIi,j := 0 : MIWi,j := 0 :
    end if:
    j := j + 1 :
  end do:

  for n from 1 by 1 to N do
  for k from 1 by 1 to N do
    if k = m then
      MIi,j := intu15 : MIWi,j := intu15 :
    elif k ≠ m then
      MIi,j := 0 : MIWi,j := 0 :
    end if:
    j := j + 1 :
  end do:
  end do:

  l := l + 1 :
  MIl := 0 : MIWl := 0 :
  end do:

```

```

[
> r = r 0 :
  i := 0 :

```

for m from 1 by 1 to N do

i := *i* + 1 : *j* := 1 :

$M2_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}10) : M2W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}10) :$
 j := *j* + 1 :

$M2_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}11) : M2W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}11) :$
 j := *j* + 1 :

$M2_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}12) : M2W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}12) :$
 j := *j* + 1 :

$M2_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}13) : M2W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}13) :$
 j := *j* + 1 :

$M2_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}14) : M2W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}14) :$
 j := *j* + 1 :

$M2_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}15) : M2W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}15) :$
 j := *j* + 1 :

$M2_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}16) : M2W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}16) :$
 j := *j* + 1 :

$M2_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}17) : M2W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}17) :$
 j := *j* + 1 :

$M2_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}18) : M2W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}18) :$
 j := *j* + 1 :

for n from 1 by 1 to N do

$M2_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}19) : M2W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa}19) :$
 j := *j* + 1 :

end do:

for k from 1 by 1 to N do

if *k* = *m* **then**

$M2_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu}10) : M2W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu}10) :$

elif *k* ≠ *m* **then**

$M2_{i,j} := 0 : M2W_{i,j} := 0 :$

end if:

j := *j* + 1 :

end do:

for k from 1 by 1 to N do

if *k* = *m* **then**

$M2_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu}11) : M2W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu}11) :$

```

    elif  $k \neq m$  then
       $M2_{i,j} := 0 : M2W_{i,j} := 0 :$ 
    end if:
     $j := j + 1 :$ 
  end do:

  for  $k$  from 1 by 1 to  $N$  do
    if  $k = m$  then
       $M2_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu12}) : M2W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu12}) :$ 
    elif  $k \neq m$  then
       $M2_{i,j} := 0 : M2W_{i,j} := 0 :$ 
    end if:
     $j := j + 1 :$ 
  end do:

  for  $k$  from 1 by 1 to  $N$  do
    if  $k = m$  then
       $M2_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu13}) : M2W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu13}) :$ 
    elif  $k \neq m$  then
       $M2_{i,j} := 0 : M2W_{i,j} := 0 :$ 
    end if:
     $j := j + 1 :$ 
  end do:

  for  $k$  from 1 by 1 to  $N$  do
    if  $k = m$  then
       $M2_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu14}) : M2W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu14}) :$ 
    elif  $k \neq m$  then
       $M2_{i,j} := 0 : M2W_{i,j} := 0 :$ 
    end if:
     $j := j + 1 :$ 
  end do:

  for  $n$  from 1 by 1 to  $N$  do
  for  $k$  from 1 by 1 to  $N$  do
    if  $k = m$  then
       $M2_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu15}) : M2W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu15}) :$ 
    elif  $k \neq m$  then
       $M2_{i,j} := 0 : M2W_{i,j} := 0 :$ 
    end if:
     $j := j + 1 :$ 
  end do:
  end do:

   $l := l + 1 :$ 
   $M17_l := 0 : M17W_l := 0 :$ 
  end do:
   $r = R :$ 

```

```

> i := 0 :

for m from 1 by 1 to N do
  i := i + 1 : j := 1 :
  M3i,j := subs( {r=R}, diffa10) : M3Wi,j := subs( {r=R}, diffa10) :
  j := j + 1 :
  M3i,j := subs( {r=R}, diffa11) : M3Wi,j := subs( {r=R}, diffa11) :
  j := j + 1 :
  M3i,j := subs( {r=R}, diffa12) : M3Wi,j := subs( {r=R}, diffa12) :
  j := j + 1 :
  M3i,j := subs( {r=R}, diffa13) : M3Wi,j := subs( {r=R}, diffa13) :
  j := j + 1 :
  M3i,j := subs( {r=R}, diffa14) : M3Wi,j := subs( {r=R}, diffa14) :
  j := j + 1 :
  M3i,j := subs( {r=R}, diffa15) : M3Wi,j := subs( {r=R}, diffa15) :
  j := j + 1 :
  M3i,j := subs( {r=R}, diffa16) : M3Wi,j := subs( {r=R}, diffa16) :
  j := j + 1 :
  M3i,j := subs( {r=R}, diffa17) : M3Wi,j := subs( {r=R}, diffa17) :
  j := j + 1 :
  M3i,j := subs( {r=R}, diffa18) : M3Wi,j := subs( {r=R}, diffa18) :
  j := j + 1 :
for n from 1 by 1 to N do
  M3i,j := subs( {r=R}, diffa19) : M3Wi,j := subs( {r=R}, diffa19) :
  j := j + 1 :
end do:
for k from 1 by 1 to N do
  if k=m then
    M3i,j := subs( {r=R}, diffu10) : M3Wi,j := subs( {r=R}, diffu10) :
    elif k ≠ m then
      M3i,j := 0 : M3Wi,j := 0 :
    end if:
  j := j + 1 :
end do:
for k from 1 by 1 to N do

```

```

if  $k = m$  then
   $M3_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu11}) : M3W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu11}) :$ 
elif  $k \neq m$  then
   $M3_{i,j} := 0 : M3W_{i,j} := 0 :$ 
end if:
 $j := j + 1 :$ 
end do:

  for  $k$  from 1 by 1 to  $N$  do
    if  $k = m$  then
       $M3_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu12}) : M3W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu12}) :$ 
    elif  $k \neq m$  then
       $M3_{i,j} := 0 : M3W_{i,j} := 0 :$ 
    end if:
     $j := j + 1 :$ 
  end do:

for  $k$  from 1 by 1 to  $N$  do
  if  $k = m$  then
     $M3_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu13}) : M3W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu13}) :$ 
  elif  $k \neq m$  then
     $M3_{i,j} := 0 : M3W_{i,j} := 0 :$ 
  end if:
   $j := j + 1 :$ 
end do:

for  $k$  from 1 by 1 to  $N$  do
  if  $k = m$  then
     $M3_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu14}) : M3W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu14}) :$ 
  elif  $k \neq m$  then
     $M3_{i,j} := 0 : M3W_{i,j} := 0 :$ 
  end if:
   $j := j + 1 :$ 
end do:

for  $n$  from 1 by 1 to  $N$  do
for  $k$  from 1 by 1 to  $N$  do
  if  $k = m$  then
     $M3_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu15}) : M3W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu15}) :$ 
  elif  $k \neq m$  then
     $M3_{i,j} := 0 : M3W_{i,j} := 0 :$ 
  end if:
   $j := j + 1 :$ 
end do:
end do:

 $l := l + 1 :$ 
 $M17_l := 0 : M17W_l := 0 :$ 

```

end do:

Заполнение матрицы умноженного на $\cos(p\pi)$ и проинтегрированного первого уравнения:

```

> i := 0 :
  for p from 1 by 1 to N do
    for m from 1 by 1 to N do

      i := i + 1 : j := 1 :

      M4i,j := cinta10 : M4Wi,j := cinta10 :
      j := j + 1 :

      M4i,j := cinta11 : M4Wi,j := cinta11 :
      j := j + 1 :

      M4i,j := cinta12 : M4Wi,j := cinta12 :
      j := j + 1 :

      M4i,j := cinta13 : M4Wi,j := cinta13 :
      j := j + 1 :

      M4i,j := cinta14 : M4Wi,j := cinta14 :
      j := j + 1 :

      M4i,j := cinta15 : M4Wi,j := cinta15 :
      j := j + 1 :

      M4i,j := cinta16 : M4Wi,j := cinta16 :
      j := j + 1 :

      M4i,j := cinta17 : M4Wi,j := cinta17 :
      j := j + 1 :

      M4i,j := cinta18 : M4Wi,j := cinta18 :
      j := j + 1 :

    for n from 1 by 1 to N do
      if n ≠ p then
        M4i,j := cinta19 : M4Wi,j := cinta19 :
        j := j + 1 :
      elif n = p then
        M4i,j := 0 : M4Wi,j := 0 :
        j := j + 1 :
      end if:
    end do:

    for k from 1 by 1 to N do
      if k = m then
        M4i,j := cintu10 : M4Wi,j := cintu10 :

```

```

    elif  $k \neq m$  then
       $M4_{i,j} := 0$ :  $M4W_{i,j} := 0$ :
    end if:
     $j := j + 1$ :
  end do:

  for  $k$  from 1 by 1 to  $N$  do
    if  $k = m$  then
       $M4_{i,j} := cintu11$ :  $M4W_{i,j} := cintu11$ :
    elif  $k \neq m$  then
       $M4_{i,j} := 0$ :  $M4W_{i,j} := 0$ :
    end if:
     $j := j + 1$ :
  end do:

  for  $k$  from 1 by 1 to  $N$  do
    if  $k = m$  then
       $M4_{i,j} := cintu12$ :  $M4W_{i,j} := cintu12$ :
    elif  $k \neq m$  then
       $M4_{i,j} := 0$ :  $M4W_{i,j} := 0$ :
    end if:
     $j := j + 1$ :
  end do:

  for  $k$  from 1 by 1 to  $N$  do
    if  $k = m$  then
       $M4_{i,j} := cintu13$ :  $M4W_{i,j} := cintu13$ :
    elif  $k \neq m$  then
       $M4_{i,j} := 0$ :  $M4W_{i,j} := 0$ :
    end if:
     $j := j + 1$ :
  end do:

  for  $k$  from 1 by 1 to  $N$  do
    if  $k = m$  then
       $M4_{i,j} := cintu14$ :  $M4W_{i,j} := cintu14$ :
    elif  $k \neq m$  then
       $M4_{i,j} := 0$ :  $M4W_{i,j} := 0$ :
    end if:
     $j := j + 1$ :
  end do:

  for  $n$  from 1 by 1 to  $N$  do
    if  $n \neq p$  then
      for  $k$  from 1 by 1 to  $N$  do
        if  $k = m$  then
           $M4_{i,j} := cintu15$ :  $M4W_{i,j} := cintu15$ :
        end if:
      end do:
    end if:
  end do:

```

```

j := j + 1 :
  elif k ≠ m then
    M4i,j := 0 : M4Wi,j := 0 :
    j := j + 1 :
  end if:
end do:
elif n = p then
for k from 1 by 1 to N do
  M4i,j := 0 : M4Wi,j := 0 :
  j := j + 1 :
end do:
end if:
end do:

l := l + 1 :
M17l := 0 : M17Wl := 0 :
end do:
end do:

:
> i := 1 : j := 1 :

M5i,j := inta20 : M5Wi,j := inta20 :
j := j + 1 :

M5i,j := inta21 : M5Wi,j := inta21 :
j := j + 1 :

M5i,j := inta22 : M5Wi,j := inta22 :
j := j + 1 :

M5i,j := inta23 : M5Wi,j := inta23 :
j := j + 1 :

M5i,j := inta24 : M5Wi,j := inta24 :
j := j + 1 :

M5i,j := inta25 : M5Wi,j := inta25 :
j := j + 1 :

M5i,j := inta26 : M5Wi,j := inta26 :
j := j + 1 :

M5i,j := inta27 : M5Wi,j := inta27 :
j := j + 1 :

M5i,j := inta28 : M5Wi,j := inta28 :

```


$j := j + 1 :$

for n from 1 by 1 to N do

$M5_{i,j} := \text{inta29} : M5W_{i,j} := \text{inta29} :$

$j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

$M5_{i,j} := \text{intu20} : M5W_{i,j} := \text{intu20} :$

$j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

$M5_{i,j} := \text{intu21} : M5W_{i,j} := \text{intu21} :$

$j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

$M5_{i,j} := \text{intu22} : M5W_{i,j} := \text{intu22} :$

$j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

$M5_{i,j} := \text{intu23} : M5W_{i,j} := \text{intu23} :$

$j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

$M5_{i,j} := \text{intu24} : M5W_{i,j} := \text{intu24} :$

$j := j + 1 :$

end do:

for n from 1 by 1 to N do

for m from 1 by 1 to N do

$M5_{i,j} := \text{intu25} : M5W_{i,j} := \text{intu25} :$

$j := j + 1 :$

end do:

end do:

$l := l + 1 :$

$M17_l := \text{intsv} : M17W_l := \text{intsv}W :$

$r = r0$

> $i := 1 : j := 1 :$

$M6_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa20}) : M6W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa20}) :$

$j := j + 1 :$

$M6_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa21}) : M6W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa21}) :$
 $j := j + 1 :$

$M6_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa22}) : M6W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa22}) :$
 $j := j + 1 :$

$M6_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa23}) : M6W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa23}) :$
 $j := j + 1 :$

$M6_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa24}) : M6W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa24}) :$
 $j := j + 1 :$

$M6_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa25}) : M6W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa25}) :$
 $j := j + 1 :$

$M6_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa26}) : M6W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa26}) :$
 $j := j + 1 :$

$M6_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa27}) : M6W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa27}) :$
 $j := j + 1 :$

$M6_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa28}) : M6W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa28}) :$
 $j := j + 1 :$

for n from 1 by 1 to N do

$M6_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa29}) : M6W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa29}) :$
 $j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

$M6_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu20}) : M6W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu20}) :$
 $j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

$M6_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu21}) : M6W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu21}) :$
 $j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

$M6_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu22}) : M6W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu22}) :$
 $j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

$M6_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu23}) : M6W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu23}) :$
 $j := j + 1 :$

end do:

```

for m from 1 by 1 to N do
   $M6_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu24}) : M6W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu24}) :$ 
   $j := j + 1 :$ 
end do:

for n from 1 by 1 to N do
for m from 1 by 1 to N do
   $M6_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu25}) : M6W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu25}) :$ 
   $j := j + 1 :$ 
end do:
end do:

 $l := l + 1 :$ 
 $M17_l := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffsv}) : M17W_l := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffsvW}) :$ 

   $r = R$ 
>  $i := 1 : j := 1 :$ 

 $M7_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffa20}) : M7W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffa20}) :$ 
 $j := j + 1 :$ 

 $M7_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffa21}) : M7W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffa21}) :$ 
 $j := j + 1 :$ 

 $M7_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffa22}) : M7W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffa22}) :$ 
 $j := j + 1 :$ 

 $M7_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffa23}) : M7W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffa23}) :$ 
 $j := j + 1 :$ 

 $M7_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffa24}) : M7W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffa24}) :$ 
 $j := j + 1 :$ 

 $M7_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffa25}) : M7W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffa25}) :$ 
 $j := j + 1 :$ 

 $M7_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffa26}) : M7W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffa26}) :$ 
 $j := j + 1 :$ 

 $M7_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffa27}) : M7W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffa27}) :$ 
 $j := j + 1 :$ 

 $M7_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffa28}) : M7W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffa28}) :$ 
 $j := j + 1 :$ 

for n from 1 by 1 to N do

```

```

M7i,j := subs( {r=R}, diffu29) : M7Wi,j := subs( {r=R}, diffu29) :
j := j + 1 :
end do:

for m from 1 by 1 to N do
M7i,j := subs( {r=R}, diffu20) : M7Wi,j := subs( {r=R}, diffu20) :
j := j + 1 :
end do:

for m from 1 by 1 to N do
M7i,j := subs( {r=R}, diffu21) : M7Wi,j := subs( {r=R}, diffu21) :
j := j + 1 :
end do:

for m from 1 by 1 to N do
M7i,j := subs( {r=R}, diffu22) : M7Wi,j := subs( {r=R}, diffu22) :
j := j + 1 :
end do:

for m from 1 by 1 to N do
M7i,j := subs( {r=R}, diffu23) : M7Wi,j := subs( {r=R}, diffu23) :
j := j + 1 :
end do:

for m from 1 by 1 to N do
M7i,j := subs( {r=R}, diffu24) : M7Wi,j := subs( {r=R}, diffu24) :
j := j + 1 :
end do:

for n from 1 by 1 to N do
for m from 1 by 1 to N do
M7i,j := subs( {r=R}, diffu25) : M7Wi,j := subs( {r=R}, diffu25) :
j := j + 1 :
end do:
end do:

l := l + 1 :
M17l := subs( {r=R}, diffsv) : M17Wl := subs( {r=R}, diffsvW) :

=
> r = r 0
i := 1 : j := 1 :

M8i,j := subs( {r=r0}, diffu203) : M8Wi,j := subs( {r=r0}, diffu203) :
j := j + 1 :

M8i,j := subs( {r=r0}, diffu213) : M8Wi,j := subs( {r=r0}, diffu213) :
j := j + 1 :

```

$M8_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa223}) : M8W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa223}) :$
 $j := j + 1 :$

$M8_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa233}) : M8W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa233}) :$
 $j := j + 1 :$

$M8_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa243}) : M8W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa243}) :$
 $j := j + 1 :$

$M8_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa253}) : M8W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa253}) :$
 $j := j + 1 :$

$M8_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa263}) : M8W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa263}) :$
 $j := j + 1 :$

$M8_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa273}) : M8W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa273}) :$
 $j := j + 1 :$

$M8_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa283}) : M8W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa283}) :$
 $j := j + 1 :$

for n from 1 by 1 to N do

$M8_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa293}) : M8W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffa293}) :$
 $j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

$M8_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu203}) : M8W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu203}) :$
 $j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

$M8_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu213}) : M8W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu213}) :$
 $j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

$M8_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu223}) : M8W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu223}) :$
 $j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

$M8_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu233}) : M8W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, \text{diffu233}) :$
 $j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

```

    M8i,j := subs( {r=r0}, diffu243) : M8Wi,j := subs( {r=r0}, diffu243) :
    j := j + 1 :
end do:

for n from 1 by 1 to N do
for m from 1 by 1 to N do
M8i,j := subs( {r=r0}, diffu253) : M8Wi,j := subs( {r=r0}, diffu253) :
j := j + 1 :
end do:
end do:

l := l + 1 :
M17l := subs( {r=r0}, diffsv3) : M17Wl := subs( {r=r0}, diffsv3W) :

    r = R
> i := 1 : j := 1 :

M9i,j := subs( {r=R}, diffa203) : M9Wi,j := subs( {r=R}, diffa203) :
j := j + 1 :

M9i,j := subs( {r=R}, diffa213) : M9Wi,j := subs( {r=R}, diffa213) :
j := j + 1 :

M9i,j := subs( {r=R}, diffa223) : M9Wi,j := subs( {r=R}, diffa223) :
j := j + 1 :

M9i,j := subs( {r=R}, diffa233) : M9Wi,j := subs( {r=R}, diffa233) :
j := j + 1 :

M9i,j := subs( {r=R}, diffa243) : M9Wi,j := subs( {r=R}, diffa243) :
j := j + 1 :

M9i,j := subs( {r=R}, diffa253) : M9Wi,j := subs( {r=R}, diffa253) :
j := j + 1 :

M9i,j := subs( {r=R}, diffa263) : M9Wi,j := subs( {r=R}, diffa263) :
j := j + 1 :

M9i,j := subs( {r=R}, diffa273) : M9Wi,j := subs( {r=R}, diffa273) :
j := j + 1 :

M9i,j := subs( {r=R}, diffa283) : M9Wi,j := subs( {r=R}, diffa283) :
j := j + 1 :

for n from 1 by 1 to N do
M9i,j := subs( {r=R}, diffa293) : M9Wi,j := subs( {r=R}, diffa293) :
j := j + 1 :
end do:

```

```

for  $m$  from 1 by 1 to  $N$  do
   $M9_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu203}) : M9W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu203}) :$ 
   $j := j + 1 :$ 
end do

for  $m$  from 1 by 1 to  $N$  do
   $M9_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu213}) : M9W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu213}) :$ 
   $j := j + 1 :$ 
end do

  for  $m$  from 1 by 1 to  $N$  do
     $M9_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu223}) : M9W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu223}) :$ 
     $j := j + 1 :$ 
  end do

for  $m$  from 1 by 1 to  $N$  do
   $M9_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu233}) : M9W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu233}) :$ 
   $j := j + 1 :$ 
end do

for  $m$  from 1 by 1 to  $N$  do
   $M9_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu243}) : M9W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu243}) :$ 
   $j := j + 1 :$ 
end do

for  $n$  from 1 by 1 to  $N$  do
for  $m$  from 1 by 1 to  $N$  do
   $M9_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu253}) : M9W_{i,j} := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffu253}) :$ 
   $j := j + 1 :$ 
end do
end do

   $l := l + 1 :$ 
   $M17_l := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffsv3}) : M17W_l := \text{subs}(\{r=R\}, \text{diffsv3W}) :$ 

  :
  >  $i := 0 :$ 
  for  $p$  from 1 by 1 to  $N$  do

     $i := i + 1 : j := 1 :$ 

     $M10_{i,j} := \text{cinta20} : M10W_{i,j} := \text{cinta20} :$ 
     $j := j + 1 :$ 

     $M10_{i,j} := \text{cinta21} : M10W_{i,j} := \text{cinta21} :$ 
     $j := j + 1 :$ 
  
```

$M10_{i,j} := cinta22 : M10W_{i,j} := cinta22 :$
 $j := j + 1 :$

$M10_{i,j} := cinta23 : M10W_{i,j} := cinta23 :$
 $j := j + 1 :$

$M10_{i,j} := cinta24 : M10W_{i,j} := cinta24 :$
 $j := j + 1 :$

$M10_{i,j} := cinta25 : M10W_{i,j} := cinta25 :$
 $j := j + 1 :$

$M10_{i,j} := cinta26 : M10W_{i,j} := cinta26 :$
 $j := j + 1 :$

$M10_{i,j} := cinta27 : M10W_{i,j} := cinta27 :$
 $j := j + 1 :$

$M10_{i,j} := cinta28 : M10W_{i,j} := cinta28 :$
 $j := j + 1 :$

for n **from** 1 **by** 1 **to** N **do**

if $n \neq p$ **then**

$M10_{i,j} := cinta29 : M10W_{i,j} := cinta29 :$

$j := j + 1 :$

elif $n = p$ **then**

$M10_{i,j} := 0 : M10W_{i,j} := 0 :$

$j := j + 1 :$

end if:

end do:

for m **from** 1 **by** 1 **to** N **do**

$M10_{i,j} := cintu20 : M10W_{i,j} := cintu20 :$

$j := j + 1 :$

end do:

for m **from** 1 **by** 1 **to** N **do**

$M10_{i,j} := cintu21 : M10W_{i,j} := cintu21 :$

$j := j + 1 :$

end do:

for m **from** 1 **by** 1 **to** N **do**

$M10_{i,j} := cintu22 : M10W_{i,j} := cintu22 :$

$j := j + 1 :$

end do:

for m **from** 1 **by** 1 **to** N **do**


```

    M10i,j := cintu23 : M10Wi,j := cintu23 :
    j := j + 1 :

```

```

end do:

```

```

for m from 1 by 1 to N do

```

```

    M10i,j := cintu24 : M10Wi,j := cintu24 :

```

```

    j := j + 1 :

```

```

end do:

```

```

for n from 1 by 1 to N do

```

```

    if n ≠ p then

```

```

for m from 1 by 1 to N do

```

```

    M10i,j := cintu25 : M10Wi,j := cintu25 :

```

```

    j := j + 1 :

```

```

end do:

```

```

elif n = p then

```

```

for m from 1 by 1 to N do

```

```

    M10i,j := 0 : M10Wi,j := 0 :

```

```

    j := j + 1 :

```

```

end do:

```

```

end if:

```

```

end do:

```

```

l := l + 1 :

```

```

M17l := cintsv : M17Wl := cintsvW :

```

```

end do:

```

```

> r = R :
  i := 1 : j := 1 :

```

```

M11i,j := subs({r=R}, gr1a0) : M11Wi,j := subs({r=R}, gr1a0) :

```

```

j := j + 1 :

```

```

M11i,j := subs({r=R}, gr1a1) : M11Wi,j := subs({r=R}, gr1a1) :

```

```

j := j + 1 :

```

```

M11i,j := subs({r=R}, gr1a2) : M11Wi,j := subs({r=R}, gr1a2) :

```

```

j := j + 1 :

```

```

M11i,j := subs({r=R}, gr1a3) : M11Wi,j := subs({r=R}, gr1a3) :

```

```

j := j + 1 :

```

```

M11i,j := subs({r=R}, gr1a4) : M11Wi,j := subs({r=R}, gr1a4) :

```

```

j := j + 1 :

```

```

M11i,j := subs({r=R}, gr1a5) : M11Wi,j := subs({r=R}, gr1a5) :

```

```

j := j + 1 :

M11i,j := subs({r=r0}, gr1a6) : M11Wi,j := subs({r=r0}, gr1a6) :
j := j + 1 :

M11i,j := subs({r=R}, gr1a7) : M11Wi,j := subs({r=R}, gr1a7) :
j := j + 1 :

M11i,j := subs({r=R}, gr1a8) : M11Wi,j := subs({r=R}, gr1a8) :
j := j + 1 :

for n from 1 by 1 to N do
M11i,j := subs({r=R}, gr1a9) : M11Wi,j := subs({r=R}, gr1a9) :
j := j + 1 :
end do:

for m from 1 by 1 to N do
M11i,j := 0 : M11Wi,j := 0 :
j := j + 1 :
end do:

for m from 1 by 1 to N do
M11i,j := 0 : M11Wi,j := 0 :
j := j + 1 :
end do:

for m from 1 by 1 to N do
M11i,j := 0 : M11Wi,j := 0 :
j := j + 1 :
end do:

for m from 1 by 1 to N do
M11i,j := 0 : M11Wi,j := 0 :
j := j + 1 :
end do:

for m from 1 by 1 to N do
M11i,j := 0 : M11Wi,j := 0 :
j := j + 1 :
end do:

for n from 1 by 1 to N do
for m from 1 by 1 to N do
M11i,j := 0 : M11Wi,j := 0 :
j := j + 1 :
end do:
end do:

```

```

l := l + 1 :
M17l := 0 : M17Wl := 0 :
  r = r 0 :
>   i := 1 : j := 1 :

M12i,j := subs( {r=r0}, gr2a0) : M12Wi,j := subs( {r=r0}, gr2a0) :
j := j + 1 :

M12i,j := subs( {r=r0}, gr2a1) : M12Wi,j := subs( {r=r0}, gr2a1) :
j := j + 1 :

M12i,j := subs( {r=r0}, gr2a2) : M12Wi,j := subs( {r=r0}, gr2a2) :
j := j + 1 :

M12i,j := subs( {r=r0}, gr2a3) : M12Wi,j := subs( {r=r0}, gr2a3) :
j := j + 1 :

M12i,j := subs( {r=r0}, gr2a4) : M12Wi,j := subs( {r=r0}, gr2a4) :
j := j + 1 :

M12i,j := subs( {r=r0}, gr2a5) : M12Wi,j := subs( {r=r0}, gr2a5) :
j := j + 1 :

M12i,j := subs( {r=r0}, gr2a6) : M12Wi,j := subs( {r=r0}, gr2a6) :
j := j + 1 :

M12i,j := subs( {r=r0}, gr2a7) : M12Wi,j := subs( {r=r0}, gr2a7) :
j := j + 1 :

M12i,j := subs( {r=r0}, gr2a8) : M12Wi,j := subs( {r=r0}, gr2a8) :
j := j + 1 :

for n from 1 by 1 to N do
  M12i,j := subs( {r=r0}, gr2a9) : M12Wi,j := subs( {r=r0}, gr2a9) :
  j := j + 1 :
end do:

for m from 1 by 1 to N do
  M12i,j := 0 : M12Wi,j := 0 :
  j := j + 1 :
end do:

for m from 1 by 1 to N do
  M12i,j := 0 : M12Wi,j := 0 :
  j := j + 1 :
end do:

```

```

for m from 1 by 1 to N do
   $M12_{i,j} := 0 : M12W_{i,j} := 0 :$ 
   $j := j + 1 :$ 
end do:

```

```

for m from 1 by 1 to N do
   $M12_{i,j} := 0 : M12W_{i,j} := 0 :$ 
   $j := j + 1 :$ 
end do:

```

```

for m from 1 by 1 to N do
   $M12_{i,j} := 0 : M12W_{i,j} := 0 :$ 
   $j := j + 1 :$ 
end do:

```

```

for n from 1 by 1 to N do
for m from 1 by 1 to N do
   $M12_{i,j} := 0 : M12W_{i,j} := 0 :$ 
   $j := j + 1 :$ 
end do:
end do:

```

```

 $l := l + 1 :$ 
 $M17_l := 0 : M17W_l := 0 :$ 

```

```

A 1  $r = r0 :$ 
>  $i := 1 : j := 1 :$ 

```

```

 $M13_{i,j} := subs(\{r=r0\}, gr3a0) : M13W_{i,j} := subs(\{r=r0\}, gr3a0) :$ 
 $j := j + 1 :$ 

```

```

 $M13_{i,j} := subs(\{r=r0\}, gr3a1) : M13W_{i,j} := subs(\{r=r0\}, gr3a1) :$ 
 $j := j + 1 :$ 

```

```

 $M13_{i,j} := subs(\{r=r0\}, gr3a2) : M13W_{i,j} := subs(\{r=r0\}, gr3a2) :$ 
 $j := j + 1 :$ 

```

```

 $M13_{i,j} := subs(\{r=r0\}, gr3a3) : M13W_{i,j} := subs(\{r=r0\}, gr3a3) :$ 
 $j := j + 1 :$ 

```

```

 $M13_{i,j} := subs(\{r=r0\}, gr3a4) : M13W_{i,j} := subs(\{r=r0\}, gr3a4) :$ 
 $j := j + 1 :$ 

```

```

 $M13_{i,j} := subs(\{r=r0\}, gr3a5) : M13W_{i,j} := subs(\{r=r0\}, gr3a5) :$ 
 $j := j + 1 :$ 

```

```

 $M13_{i,j} := subs(\{r=r0\}, gr3a6) : M13W_{i,j} := subs(\{r=r0\}, gr3a6) :$ 

```

$j := j + 1 :$

$M13_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, gr3a7) : M13W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, gr3a7) :$
 $j := j + 1 :$

$M13_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, gr3a8) : M13W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, gr3a8) :$
 $j := j + 1 :$

for n from 1 by 1 to N do

$M13_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, gr3a9) : M13W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, gr3a9) :$
 $j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

$M13_{i,j} := 0 : M13W_{i,j} := 0 :$

$j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

$M13_{i,j} := 0 : M13W_{i,j} := 0 :$

$j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

$M13_{i,j} := 0 : M13W_{i,j} := 0 :$

$j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

$M13_{i,j} := 0 : M13W_{i,j} := 0 :$

$j := j + 1 :$

end do:

for m from 1 by 1 to N do

$M13_{i,j} := 0 : M13W_{i,j} := 0 :$

$j := j + 1 :$

end do:

for n from 1 by 1 to N do

for m from 1 by 1 to N do

$M13_{i,j} := 0 : M13W_{i,j} := 0 :$

$j := j + 1 :$

end do:

end do:

$l := l + 1 :$

$M17_l := 0 : M17W_l := 0 :$

```

A 1   r = R :
>   i := 1 : j := 1 :

M14i,j := subs({r=R}, gr3a0) : M14Wi,j := subs({r=R}, gr3a0) :
j := j + 1 :

M14i,j := subs({r=R}, gr3a1) : M14Wi,j := subs({r=R}, gr3a1) :
j := j + 1 :

M14i,j := subs({r=R}, gr3a2) : M14Wi,j := subs({r=R}, gr3a2) :
j := j + 1 :

M14i,j := subs({r=R}, gr3a3) : M14Wi,j := subs({r=R}, gr3a3) :
j := j + 1 :

M14i,j := subs({r=R}, gr3a4) : M14Wi,j := subs({r=R}, gr3a4) :
j := j + 1 :

M14i,j := subs({r=R}, gr3a5) : M14Wi,j := subs({r=R}, gr3a5) :
j := j + 1 :

M14i,j := subs({r=R}, gr3a6) : M14Wi,j := subs({r=R}, gr3a6) :
j := j + 1 :

M14i,j := subs({r=R}, gr3a7) : M14Wi,j := subs({r=R}, gr3a7) :
j := j + 1 :

M14i,j := subs({r=R}, gr3a8) : M14Wi,j := subs({r=R}, gr3a8) :
j := j + 1 :

for n from 1 by 1 to N do
M14i,j := subs({r=R}, gr3a9) : M14Wi,j := subs({r=R}, gr3a9) :
j := j + 1 :
end do:

for m from 1 by 1 to N do
M14i,j := 0 : M14Wi,j := 0 :
j := j + 1 :
end do:

for m from 1 by 1 to N do
M14i,j := 0 : M14Wi,j := 0 :
j := j + 1 :
end do:

for m from 1 by 1 to N do
M14i,j := 0 : M14Wi,j := 0 :

```


$M15_{i,j} := 0 : M15W_{i,j} := 0 :$
 $j := j + 1 :$

$M15_{i,j} := 0 : M15W_{i,j} := 0 :$
 $j := j + 1 :$

$M15_{i,j} := 0 : M15W_{i,j} := 0 :$
 $j := j + 1 :$

for n **from** 1 **by** 1 **to** N **do**
 $M15_{i,j} := 0 : M15W_{i,j} := 0 :$
 $j := j + 1 :$
end do:

for k **from** 1 **by** 1 **to** N **do**
if $k = m$ **then**
 $M15_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, gr4u0) : M15W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, gr4u0) :$
elif $k \neq m$ **then**
 $M15_{i,j} := 0 : M15W_{i,j} := 0 :$
end if:
 $j := j + 1 :$
end do:

for k **from** 1 **by** 1 **to** N **do**
if $k = m$ **then**
 $M15_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, gr4u1) : M15W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, gr4u1) :$
elif $k \neq m$ **then**
 $M15_{i,j} := 0 : M15W_{i,j} := 0 :$
end if:
 $j := j + 1 :$
end do:

for k **from** 1 **by** 1 **to** N **do**
if $k = m$ **then**
 $M15_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, gr4u2) : M15W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, gr4u2) :$
elif $k \neq m$ **then**
 $M15_{i,j} := 0 : M15W_{i,j} := 0 :$
end if:
 $j := j + 1 :$
end do:

for k **from** 1 **by** 1 **to** N **do**
if $k = m$ **then**
 $M15_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, gr4u3) : M15W_{i,j} := \text{subs}(\{r=r0\}, gr4u3) :$
elif $k \neq m$ **then**
 $M15_{i,j} := 0 : M15W_{i,j} := 0 :$
end if:


```

    j := j + 1 :
end do:

for k from 1 by 1 to N do
  if k = m then
    M15i,j := subs( {r=r0}, gr4u4) : M15Wi,j := subs( {r=r0}, gr4u4) :
  elif k ≠ m then
    M15i,j := 0 : M15Wi,j := 0 :
  end if:
  j := j + 1 :
end do:

for n from 1 by 1 to N do
for k from 1 by 1 to N do
  if k = m then
    M15i,j := subs( {r=r0}, gr4u5) : M15Wi,j := subs( {r=r0}, gr4u5) :
  elif k ≠ m then
    M15i,j := 0 : M15Wi,j := 0 :
  end if:
  j := j + 1 :
end do:
end do:

l := l + 1 :
M17l := 0 : M17Wl := 0 :
end do:

U m   r = R :
> i := 0 :

for m from 1 by 1 to N do

  i := i + 1 : j := 1 :

  M16i,j := 0 : M16Wi,j := 0 :
  j := j + 1 :

  M16i,j := 0 : M16Wi,j := 0 :
  j := j + 1 :

  M16i,j := 0 : M16Wi,j := 0 :
  j := j + 1 :

  M16i,j := 0 : M16Wi,j := 0 :
  j := j + 1 :

  M16i,j := 0 : M16Wi,j := 0 :

```

```

j := j + 1 :

M16i,j := 0 : M16Wi,j := 0 :
j := j + 1 :

M16i,j := 0 : M16Wi,j := 0 :
j := j + 1 :

M16i,j := 0 : M16Wi,j := 0 :
j := j + 1 :

M16i,j := 0 : M16Wi,j := 0 :
j := j + 1 :

for n from 1 by 1 to N do
M16i,j := 0 : M16Wi,j := 0 :
j := j + 1 :
end do

for k from 1 by 1 to N do
  if k = m then
M16i,j := subs( {r=R}, gr4u0) : M16Wi,j := subs( {r=R}, gr4u0) :
  elif k ≠ m then
M16i,j := 0 : M16Wi,j := 0 :
  end if :
j := j + 1 :
end do

for k from 1 by 1 to N do
  if k = m then
M16i,j := subs( {r=R}, gr4u1) : M16Wi,j := subs( {r=R}, gr4u1) :
  elif k ≠ m then
M16i,j := 0 : M16Wi,j := 0 :
  end if :
j := j + 1 :
end do

  for k from 1 by 1 to N do
  if k = m then
M16i,j := subs( {r=R}, gr4u2) : M16Wi,j := subs( {r=R}, gr4u2) :
  elif k ≠ m then
M16i,j := 0 : M16Wi,j := 0 :
  end if :
j := j + 1 :
end do

for k from 1 by 1 to N do
  if k = m then

```

```

M16i,j := subs({r=R}, gr4u3) : M16Wi,j := subs({r=R}, gr4u3) :
  elif k ≠ m then
    M16i,j := 0 : M16Wi,j := 0 :
  end if:
j := j + 1 :
end do:

for k from 1 by 1 to N do
  if k = m then
    M16i,j := subs({r=R}, gr4u4) : M16Wi,j := subs({r=R}, gr4u4) :
    elif k ≠ m then
      M16i,j := 0 : M16Wi,j := 0 :
    end if:
    j := j + 1 :
  end do:

  for n from 1 by 1 to N do
  for k from 1 by 1 to N do
    if k = m then
      M16i,j := subs({r=R}, gr4u5) : M16Wi,j := subs({r=R}, gr4u5) :
      elif k ≠ m then
        M16i,j := 0 : M16Wi,j := 0 :
      end if:
      j := j + 1 :
    end do:
  end do:

  l := l + 1 :
  M17l := 0 : M17Wl := 0 :
  end do:

```

```

> M := stackmatrix(M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7, M8, M9, M10, M11, M12, M13, M14, M15,
  M16) :
> MW := stackmatrix(M1W, M2W, M3W, M4W, M5W, M6W, M7W, M8W, M9W, M10W, M11W,
  M12W, M13W, M14W, M15W, M16W) :

> RE := linsolve(M, M17) : REW := linsolve(MW, M17W) :
> aM := RE1·a0 + RE2·a1 + RE3·a2 + RE4·a3 + RE5·a4 + RE6·a5 + RE7·a6 + RE8·a7 + RE9
  ·a8 + sum(REk3+9·cos(k3·π·t), k3 = 1 ..N) :
> aMW := REW1·a0 + REW2·a1 + REW3·a2 + REW4·a3 + REW5·a4 + REW6·a5 + REW7·a6
  + REW8·a7 + REW9·a8 + sum(REWk4+9·cos(k4·π·t), k4 = 1 ..N) :
> i := 0 :
  for m from 1 by 1 to N do
    i := i + 1 :
    M18i := (RE9+N+m·u0 + RE9+2·N+m·u1 + RE9+3·N+m·u2 + RE9+4·N+m·u3

```

```

    + RE_{9+5 \cdot N+m} \cdot u_4 + \text{sum}(RE_{9+(5+v_2) \cdot N+m} \cdot \cos(v_2 \cdot \pi \cdot t), v_2 = 1 ..N)) \cdot \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{z}{h}\right);
  end do;
> i := 0;
  for m from 1 by 1 to N do
    i := i + 1;
    M18W_i := (REW_{9+N+m} \cdot u_0 + REW_{9+2 \cdot N+m} \cdot u_1 + REW_{9+3 \cdot N+m} \cdot u_2 + REW_{9+4 \cdot N+m} \cdot u_3 + REW_{9+5 \cdot N+m} \cdot u_4 + \text{sum}(REW_{9+(5+v_3) \cdot N+m} \cdot \cos(v_3 \cdot \pi \cdot t), v_3 = 1 ..N)) \cdot \sin\left(m \cdot \pi \cdot \frac{z}{h}\right);
  end do;
> U := aM \cdot R1 + \left(-\text{diff}(aM, r\$2) - \frac{1}{r} \cdot \text{diff}(aM, r) - \frac{k^2}{r^2} \cdot aM\right) \cdot R3 + \left(\text{diff}(aM, r\$4) + \frac{2}{r} \cdot \text{diff}(aM, r\$3) + \frac{2k^2-1}{r^2} \cdot \text{diff}(aM, r\$2) - \frac{2k^2-1}{r^3} \cdot \text{diff}(aM, r) + \frac{k^2(k^2+4)}{r^4} \cdot aM\right) \cdot R5 + \text{sum}(M18_{v1}, v1 = 1 ..N);

> UW := aMW \cdot R1 + \left(-\text{diff}(aMW, r\$2) - \frac{1}{r} \cdot \text{diff}(aMW, r) - \frac{k^2}{r^2} \cdot aMW\right) \cdot R3 + \left(\text{diff}(aMW, r\$4) + \frac{2}{r} \cdot \text{diff}(aMW, r\$3) + \frac{2k^2-1}{r^2} \cdot \text{diff}(aMW, r\$2) - \frac{2k^2-1}{r^3} \cdot \text{diff}(aMW, r) + \frac{k^2(k^2+4)}{r^4} \cdot aMW\right) \cdot R5 + \text{sum}(M18W_{v5}, v5 = 1 ..N);

> V := b \cdot z - \frac{Q0}{2} \cdot z^2 + U \cdot \cos(k2 \cdot \theta) + UW \cdot \sin(k2 \cdot \theta);

> plot3d(subs({\theta=L}, V), z=0..h, r=r0..R);

```

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018618592

**Расчет контактного термического сопротивления в
конечном цилиндре с постоянным внутренним источником
при помощи быстрых разложений**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования «Воронежский
государственный университет инженерных технологий»
(ФГБОУ ВО «ВГУИТ»)* (RU)

Авторы: *Чернышов Александр Данилович (RU), Горяйнов Виталий
Валерьевич (RU), Шахов Сергей Васильевич (RU), Попов Виктор
Михайлович (RU), Лешонков Олег Владимирович (RU)*

Заявка № **2018615226**

Дата поступления **23 мая 2018 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **16 июля 2018 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

 Г.П. Ивлиев

