на правах рукописи

БОРОДИНА ЕЛЕНА АЛЕКСАНДРОВНА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И КАЧЕСТВЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С НЕГЛАДКИМИ РЕШЕНИЯМИ

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2018

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет инженерных технологий»

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук, доцент,
Шабров Сергей Александрович

Официальные оппоненты:

Постников Евгений Борисович, доктор физико–математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Курский государственный университет», факультет физики, математики, информатики, кафедра физики и нанотехнологий, профессор;

Горбунов Вячеслав Алексеевич, доктор физико–математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет», электроэнергетический факультет, кафедра информационных систем и технологий, заведующий

Ведущая организация

ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет».

Защита состоится «26» декабря 2018 года в 15 час. 10 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 при ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1, главный корпус, ауд. 333.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте
http://www.science.vsu.ru/dissertations/6511/
Диссертация_Бородина_Е.А..pdf

Автореферат разослан 24 октября 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Шабров Сергей Александрович

Математическое моделирование бурно развивается: расширяются объекты для которых изучаются модели, описывающие различные процессы происходящие в них, как с позиций размерности, так и с позиций нелинейности. Однако, остаются объекты, моделирование процессов в них либо трудно формализуемо, либо невозможно с помощью существующих методов и подходов. Если математическая модель реализуется в виде граничной задачи, то, обычно, трудности, возникающие, как при анализе полученных моделей, так и при численном решении, вызваны отсутствием производных у решения (а в ряде случаев и «разрывностью» решения). Эти проблемы, как правило, решаются с привлечением теории обобщенных функций (Завалищин С.Т., Сесекин А.Н., Дерр В.Я., Кинзебулатов Д.М., Владимиров В.С., Егоров Ю.В., Антосик П., Минусинский Я., Сикорский Р., Маслов В.П., Цупин В.А., Дыхта В.А., Самсонюк О.Н., Мирзоев К.А., Шкаликов А.А., Митрохин С.И. и многие другие). Следует отметить, что на этом пути возникает ряд проблем. Например, проблема умножения обобщенной на разрывную, которая в классическом пространстве D' (линейных непрерывных функционалов над D — пространством бесконечно дифференцируемых финитных функций) неразрешима; она не до конца разрешима даже при переходе к алгебре обобщенных функций Коломбо. Для дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих особенности типа δ-функции, удалось решить ряд вопросов качественной теории (см., например, работы Мышкиса А.Д. и Владимирова А.А.). Другая проблема — слабая разрешимость краевых задач, что для приложений недостаточно.

Спектральная теория диктовала здесь главное направление развития, и теория обобщенных функций и теория операторов очень эффективно себя проявили в спектральных вопросах и, в дальнейшем многие сотни работ.

Другое направление развития — это качественная теория краевых задач на геометрическом графе, когда соответствующая граничная задача моделирует малые деформации системы, имеющей структуру геометрического графа. Такой подход очень эффективен, так как моделируемый объект занимает промежуточное положение между одномерными и двумерными объектами.

Выход работ Стилтьеса о нити с бусинками, Крейна М.Г., Гантмахера Ф.Р., Крейна М.Г., Каца И.С. о произвольно нагруженной струне, работы Келлога О., обозначил новое направление исследований в интересах физической теории колебаний. Но через некоторое время развитие этого направления несколько замедлилось. После выхода работ Ю.В. Покорного это направление получило новый «импульс»: наряду с интегралом Стилтьеса было предложено использование производных Радона–Никодима.

Еще одно направление — исследования закритических прогибов, развиваемое Сапроновым Ю.И. и его учениками.

Цель работы. Разработка новых качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей сложных физических систем, состоящих из стержней, реализуемых в виде граничных задач для дифференциальных уравнений; разработка и обоснование эффективных численных методов и алгоритмов. Реализация цели исследования осуществляется решением следующих задач как теоретического, так и прикладного характера:

— вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации систем, состоящих из стержней, помещенных во внешнюю среду (двойную «подушку») с локализованными особенностями;

— доказательство корректности полученных математических моделей;

— изучение нелинейных математических моделей, возникающих при моделировании нелинейных деформаций изучаемых систем при учете нелинейности;

— разработка эффективных численных методов решения граничных задач для уравнений шестого порядка (методы построения аналогов метода конечных элементов для математических моделей и сходимость приближенного решения к точному решению);

— разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных задач, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах;

— решение задач прикладного характера: приближенное решение математических моделей, описывающих деформации неоднородной стержня, находящейся во внешней среде с локализованными особенностями.

Объект исследования. Качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей систем, представляющих собой сложносочленённые одномерные конструкции, составленные из континуумов, которые взаимодействуют между собой только через связующие их точки.

Методы исследования. Разработанные в диссертационной работе методы исследования математических моделей сложносочлененных систем основаны на фундаментальных методах современного качественного анализа, теории интеграла и меры, функционального анализа. Адаптированный метод конечных элементов для граничных задач с локализованными особенностями, его обоснование, полученное с использованием последних разработок вычислительных методов для уравнений с особенностями.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, формализованных в виде единого уравнения с производными Радона–Никодима, численные методы и алгоритмы в виде комплексов проблемно-ориентированных программ.

1. Вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации систем, состоящих из стержней на двойном упругом основании, имеющих внутренние особенности, которые приводят к потере гладкости решения модели.

2. Доказательство корректности полученных математических моделей.

3. Интегральная обратимость математических моделей с производными по мере; доказательство оценок функции влияния.

4. Изучение нелинейных математических моделей, возникающих при моделировании нелинейных деформаций изучаемых систем при учете «нелинейности».

5. Разработка эффективных численных методов решения граничных задач для уравнений шестого порядка (методы построения аналогов метода конечных элементов для математических моделей и оценка близости приближенного решения к точному решению).

6. Разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных задач, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

Научная новизна. 1. В диссертационной работе предлагаются новые подходы при анализе математических моделей, основополагающим математическим объектом которых является единое уравнение с производными по мере. 2. Доказана возможность интегрального представления решения изученных дифференциальных моделей; показана корректность математической модели шестого порядка с производными по мере. 3. Доказаны оценки функции влияния математической модели шестого порядков; изучены нелинейные математические модели. 4. Метод конечных элементов адаптирован для математических моделей с производными по мере; доказана оценка близости приближенного решения к точному.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая и практическая значимость результатов и методов диссертационной работы заключается в возможности их использования в качестве инструментария для исследования математических моделей, описывающей деформации одномерных объектов с внутренними особенностями и особенностями, возникающих из-за наличия дефектов у внешней среды.

Разработаны и обоснованы новые качественные аналитические методы исследования математических моделей, которые формализованы в виде единого уравнения с производными по Радону–Никодиму. При этом построена функция влияния и получены ее оценки. Проведено исследование нелинейных дифференциальных моделей шестого порядка; получены достаточные условия их разрешимости.

Разработаны эффективные численные методы применительно к математическим моделям с производными по мере. Представлены новые методы построения и анализа аналогов метода конечных элементов для граничных задач с производными Радона-Никодима. Получены оценки близости приближенного решения к точному для изучаемых линейных математических моделей. Представлены результаты тестирования полученных численных методов с применением ЭВМ.

Область исследования. Область исследования и содержание диссертации соответствует формуле специальности 05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки), область исследования соответствует п. 2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», п. 3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», п. 4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

Апробация работы. Результаты работы докладывались на конференциях «Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика» (2014 г.); «Кибернетика и высокие технологии XXI века» (2008 г.); Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования (2007 г.); «Моделирование энергоинформационных процессов» (2013, 2014, 2015 гг.); «Математические методы в технике и технологиях (ММТТ–26)» (2013 г.); «Математическое моделирование в технике и технологиях (ММТТ–21)» (2008 г.); «Инновационный менеджмент в сфере высоких технологий» (2008 г.); на семинарах профессора А.Д. Баева (2017–2018 гг.); профессора М.И. Каменского (2017–2018 гг.).

Публикации. Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 14 работах, из них 3 из перечня, рекомендованных ВАК. Получено 1 свидетельство о регистрации программ для ЭВМ.

Личный вклад автора. Все результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Из совместных работ в диссертацию включены только результаты, полученные лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав, заключения, библиографического списка, состоящего из 81 наименования и 2 приложения, в котором приводятся листинги программ, написанных на Python и таблицы значений точного и приближенного решений и погрешности, которые получаются при проведении численных экспериментов. Работа изложена на 133 страницах и содержит 19 рисунков и 3 таблицы.

Содержание работы.

Во введении обоснована актуальность темы диссертационного исследования, определены его цели и задачи, перечислены методы исследования, представлены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе «Математическая модель шестого порядка с негладкими решениями» изучается математическая модель

$$\begin{cases} -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma} + \left(ru''_{xx}\right)''_{x\sigma} - \left(gu'_x\right)'_\sigma + uQ'_\sigma = F'_\sigma; \\ u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = 0; \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

полученная как экстремаль функционала

$$\Phi(u) = \int\limits_0^\ell \frac{pu'''^2_{xx\mu}}{2}\,d\mu + \int\limits_0^\ell \frac{ru''^2_{xx}}{2}\,dx + \int\limits_0^\ell \frac{gu'^2_x}{2}\,dx + \int\limits_0^\ell \frac{u^2}{2}\,dQ - \int\limits_0^\ell u\,dF, \tag{1.1.2}$$

определенного на множестве E (— непрерывно дифференцируемых на $[0;\ell]$ функций, вторая производная $u''_{xx}(x)$ которых μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, $u'''_{xx\mu}$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение, и удовлетворяющих граничным условиям $u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0$), потенциальной энергии стержня, помещенного на двойном упругом основании, в естественных предположениях, что $p(x)$, $r(x)$, $g(x)$, $Q(x)$ и $F(x)$ — функции ограниченной вариации и $\inf p(x) > 0$, $r(x)$ и $g(x)$ абсолютно непрерывны на $[0;\ell]$, $Q(x)$ не убывает на $[0;\ell]$, функция $\mu(x)$, порождающая на $[0;\ell]$ меру, строго возрастает на $[0;\ell]$.

Доказана теорема.

Теорема 1.1.1. *Необходимое условие минимума функционала $\Phi(u)$ на множестве E реализуется в виде граничной задачи*

$$\begin{cases} -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma}(x) + \left(ru''_{xx}\right)''_{x\sigma}(x) - \left(g(x)u'_x\right)'_\sigma(x) + \\ \qquad + u(x)Q'_\sigma(x) = F'_\sigma(x); \\ u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = 0; \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0. \end{cases} \tag{1.1.13}$$

Во втором параграфе изучаются простейшие свойства модели; вводятся необходимые множества. Пусть $S(\sigma)$ — множество точек разрыва функции $\sigma(x)$. На $J_\sigma = [0;\ell] \setminus S(\sigma)$ зададим метрику $\varrho(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$. Полученное метрическое пространство $(J_\sigma;\sigma)$ не является полным. Стандартное пополнение приводит (с точностью до изоморфизма) к множеству $\overline{[0;\ell]}_S$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на пару собственных значения $\xi - 0$, $\xi + 0$, которые ранее были предельными. Индуцируя упорядоченность с исходного множества, придем к неравенствам $x < \xi - 0 < \xi + 0 < y$

для всех x, y для которых выполнялись неравенства $x < \xi < y$ в исходном отрезке.

Функцию $v(x)$ в точках $\xi - 0$ и $\xi + 0$ множества $\overline{[0;\ell]}_S$ определим предельными значениями. Для определенной таким образом функции сохраним прежнее обозначение. Определенная на этом множестве функция становится непрерывной в смысле метрики $\varrho(x; y)$.

Объединение $\overline{[0;\ell]}_S$ и $S(\sigma)$ нам дает множество $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, в котором каждая точка $\xi \in S(\sigma)$ заменена на тройку собственных элементов $\{\xi - 0; \xi; \xi + 0\}$. Мы считаем, что уравнение задано именно на этом множестве, причем в точках $\xi \in S(\sigma)$ само уравнение принимает вид

$$-\Delta\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(\xi) + \Delta\left(ru''_{xx}\right)'_x(\xi) - \Delta\left(g(x)u'_x\right)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = \Delta F(\xi), \tag{1.2.2}$$

где $\Delta v(\xi) = v(\xi + 0) - v(\xi - 0)$ — полный скачок функции $v(x)$ в точке ξ.

Следующий параграф посвящен проблеме интегрального обращения задачи.

Математическую модель

$$\begin{cases} Lu \equiv -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma}(x) + \left(ru''_{xx}\right)''_{x\sigma}(x) - \left(g(x)u'_x\right)'_\sigma(x) + \\ \qquad\qquad +u(x)Q'_\sigma(x) = F'_\sigma(x); \\ u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = 0; \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

будем называть невырожденной, если однородная модель (при $F'_\sigma(x) \equiv 0$) имеет только тривиальное решение.

Доказано, что если модель обладает свойством невырожденности, то она интегрально обратима.

В четвертом параграфе доказана корректность изучаемой модели.

В последнем параграфе изучено важное свойство — свойство неосцилляции.

Точку x_0 назовем нулем решения $u(x)$ уравнения (1.5.1), кратности 1 (или простым нулём), если $u(x_0) = 0$ и $u'_x(x_0) \neq 0$; кратности 2, если $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0) = 0$ и $u''_{xx}(x_0) \neq 0$; кратности 3, если $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0) = 0$, $u''_{xx}(x_0) = 0$ и $\left(pu'''_{xx\mu}\right)(x_0 - 0) \times \left(pu'''_{xx\mu}\right)(x_0 + 0) > 0$; кратности 4, если $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0) = 0$, $u''_{xx}(x_0) = 0$ и $\left(pu'''_{xx\mu}\right)(x_0 - 0) = \left(pu'''_{xx\mu}\right)(x_0 + 0) = 0$, $\left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(x_0) \neq 0$; кратности 5, если $u(x_0) = 0$, $u'_x(x_0) = 0$, $u''_{xx}(x_0) = 0$ и $\left(pu'''_{xx\mu}\right)(x_0 - 0) = \left(pu'''_{xx\mu}\right)(x_0 + 0) = 0$, $\left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x(x_0) = 0$ и $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x_0 - 0) \times \left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x_0 + 0) > 0$.

Если x_0 не принадлежит множеству $S(\sigma)$, т. е. является точкой непрерывности самого решения и всех ее производных до пятого порядка включительно, то введенное определение совпадает с классическим. Если x_0 принадлежит разности множеств $S(\sigma)$ и $S(\mu)$ ($x_0 \in S(\sigma) \setminus S(\mu)$), то определение нуля кратности 1 и 2 снова совпадает с классическим.

Заметим, что нули кратности больше, чем 5 могут быть только у тривиального решения.

Определение. Однородное уравнение

$$Lu \equiv -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma}(x) + \left(ru''_{xx}\right)''_{x\sigma}(x) - \left(g(x)u'_x\right)'_\sigma(x) + u(x)Q'_\sigma(x) = 0. \quad (1.5.3)$$

назовем неосциллирующим на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$, если любое нетривиальное решение этого уравнения имеет не более пяти нулей (с учетом кратностей).

Определение. Будем говорить, что система непрерывных на $[0;\ell]$ функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{i=n}$ является системой Чебышева порядка $n-1$ (T_{n-1}-системой) на I ($=[0;\ell]$, $(0;\ell]$, $[0;\ell)$ или $(0;\ell)$), если произвольный нетривиальный обобщённый многочлен $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x)$ имеет не более $n-1$ нуля на I с учётом кратности.

Определение. Систему $\{\varphi_i(x)\}$ непрерывных на $[0;\ell]$ функций (возможно состоящую и из счётного числа функций) назовём системой Маркова или M-системой, если для любого n система $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{i=n}$ является T_{n-1}-системой.

Следующая теорема играет ключевую роль при изучении нелинейных математических моделей.

Для удобства введем следующие обозначения: $D^0u = u$, $D^1u = u'_x$, $D^2u = u''_{xx}$, $D^3u = u'''_{xx\mu}$, $D^4u = \left(pu'''_{xx\mu}\right)'_x$, $D^5u = \left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}$.

Теорема 1.5.1. *Следующие условия эквивалентны 1. однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$; 2. справедливо представление Пойа–Маммана*

$$Lu = -\psi_6\left(\psi_5\left(\psi_4\left(\psi_3\left(\psi_2\left(\psi_1(\psi_0 u)'_x\right)'_x\right)'_\mu\right)'_x\right)'_x\right)'_\sigma, \quad (1.5.4)$$

где функции

$$\psi_0(x), \int\limits_0^x \psi_1(s)\,ds, \int\limits_0^x\int\limits_0^t \psi_2(s)\,ds\,dt, \int\limits_0^x\int\limits_0^\tau\int\limits_0^t \psi_3(s)\,ds\,dt\,d\mu(\tau),$$

$$\int\limits_0^x\int\limits_0^\eta\int\limits_0^\tau\int\limits_0^t \psi_4(s)\,ds\,dt\,d\mu(\tau)\,d\eta, \int\limits_0^x\int\limits_0^\nu\int\limits_0^\eta\int\limits_0^\tau\int\limits_0^t \psi_5(s)\,ds\,dt\,d\mu(\tau)\,d\eta\,d\nu,$$

принадлежат E, $\psi_6(x)$ — σ-суммируема на $[0;\ell]$ и $\psi_i(x) > 0$ ($i = 0,1,2,3,4,5,6$); 3. существует фундаментальная система $\{u_i(x)\}_{i=1}^6$

решений однородного уравнения $Lu = 0$ такая, что

$$\left.\begin{array}{l} W_1(x) = u_1(x) > 0, \\ W_2(x) = W[u_1, u_2](x) = \begin{vmatrix} D^0u_1(x) & D^0u_2(x) \\ D^1u_1(x) & D^1u_2(x) \end{vmatrix} > 0, \\ W_3(x) = W[u_1, u_2, u_3](x) = \begin{vmatrix} D^0u_1(x) & D^0u_2(x) & D^0u_3(x) \\ D^1u_1(x) & D^1u_2(x) & D^1u_3(x) \\ D^2u_1(x) & D^2u_2(x) & D^2u_3(x) \end{vmatrix} > 0, \end{array}\right\} \quad (1.5.5)$$

$$W_4(x) = W[u_1, u_2, u_3, u_4](x) = \\ = \begin{vmatrix} D^0u_1(x) & D^0u_2(x) & D^0u_3(x) & D^0u_4(x) \\ D^1u_1(x) & D^1u_2(x) & D^1u_3(x) & D^1u_4(x) \\ D^2u_1(x) & D^2u_2(x) & D^2u_3(x) & D^2u_4(x) \\ D^3u_1(x) & D^3u_2(x) & D^3u_3(x) & D^3u_4(x) \end{vmatrix} > 0$$

$$W_5(x) = W[u_1, u_2, u_3, u_4, u_5](x) = \\ = \begin{vmatrix} D^0u_1(x) & D^0u_2(x) & D^0u_3(x) & D^0u_4(x) & D^0u_5(x) \\ D^1u_1(x) & D^1u_2(x) & D^1u_3(x) & D^1u_4(x) & D^1u_5(x) \\ D^2u_1(x) & D^2u_2(x) & D^2u_3(x) & D^2u_4(x) & D^2u_5(x) \\ D^3u_1(x) & D^3u_2(x) & D^3u_3(x) & D^3u_4(x) & D^3u_5(x) \\ D^4u_1(x) & D^4u_2(x) & D^4u_3(x) & D^4u_4(x) & D^4u_5(x) \end{vmatrix} > 0$$

$$W_6(x) = W[u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6](x) = \\ = \begin{vmatrix} D^0u_1(x) & D^0u_2(x) & D^0u_3(x) & D^0u_4(x) & D^0u_5(x) & D^0u_6(x) \\ D^1u_1(x) & D^1u_2(x) & D^1u_3(x) & D^1u_4(x) & D^1u_5(x) & D^1u_6(x) \\ D^2u_1(x) & D^2u_2(x) & D^2u_3(x) & D^2u_4(x) & D^2u_5(x) & D^2u_6(x) \\ D^3u_1(x) & D^3u_2(x) & D^3u_3(x) & D^3u_4(x) & D^3u_5(x) & D^3u_6(x) \\ D^4u_1(x) & D^4u_2(x) & D^4u_3(x) & D^4u_4(x) & D^4u_5(x) & D^4u_6(x) \\ D^5u_1(x) & D^5u_2(x) & D^5u_3(x) & D^5u_4(x) & D^5u_5(x) & D^5u_6(x) \\ D^6u_1(x) & D^6u_2(x) & D^6u_3(x) & D^6u_4(x) & D^6u_5(x) & D^6u_6(x) \end{vmatrix} > 0;$$

4. в пространстве решений однородного уравнения $Lu = 0$ существует фундаментальная система решений, являющаяся M-системой на $[0, \ell]$; 5. существует фундаментальная система решений однородного уравнения, которая является системой Чебышева порядка 5.

Во второй главе «Нелинейные модели и математическая модель образования капель» изучаются нелинейные модели

$$\begin{cases} -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma}(x) + (ru''_{xx})''_{x\sigma}(x) - (g(x)u'_x)'_\sigma(x) + \\ \qquad + u(x)Q'_\sigma(x) = f(x, u) \quad (x \in \overline{[0; \ell]_\sigma}), \\ u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = 0; \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0. \end{cases} \quad (2.0.1)$$

(с различными типами нелинейности) и математическая модель образования капель. Для этого в первом параграфе вводятся необходимые определения и получены оценки функции влияния.

Уравнение в (2.0.1), также как и в первой главе, задано на $\overline{[0;\ell]}_\sigma$ — расширении отрезка $[0;\ell]$ в котором каждая точка ξ, принадлежащая множеству $S(\sigma)$ точек разрыва функции $\sigma(x)$, заменена на тройку собственных элементов $\{\xi_-, \xi, \xi_+\}$ бывшие ранее предельными. Само уравнение в точке ξ понимается как равенство

$$-\Delta\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(\xi) + \Delta\left(ru''_{xx}\right)'_{x}(\xi) - \Delta\left(gu'_{x}\right)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = f(\xi, u(\xi)),$$

где $\Delta\alpha(\xi) = \alpha(\xi+0) - \alpha(\xi-0)$ — полный скачок функции $\alpha(x)$ в точке ξ.

Решение задачи (2.0.1) мы ищем в множестве E^σ — непрерывно дифференцируемых на $[0;\ell]$ функций $u(x)$, производная $u'_x(x)$ которых абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, вторая производная $u''_{xx}(x)$ μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; третья производная $u'''_{xx\mu}(x)$ имеет конечное на $[0;\ell]$ изменение; квазипроизводная $\left(pu'''_{xx\mu}\right)(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0;\ell]$; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)'_{x}(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$; $\left(pu'''_{xx\mu}\right)''_{xx}(x)$ — σ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

Доказан ряд теорем. Приведем формулировку одной из них.

Теорема 2.2.1. *Пусть выполнены следующие условия: 1) $f(x,u)$ не убывает по u при каждом $x \in [0,\ell]$; $f(x,0) \geqslant 0$; 2) существует N пар чисел a_i, b_i, удовлетворяющих неравенствам*

$$0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 \ldots < a_N < b_N \tag{2.2.1}$$

и таких, что при всех $k = 1, 2, \ldots, N$

$$f(x, b_k u(x)) \leqslant \frac{b_k}{\int\limits_0^\ell v_2(s)\, d\sigma(s)}; \tag{2.2.2}$$

3) для каждого k существует множество $w_k \subset \overline{[0;\ell]}_\sigma$ положительной σ-меры такое, что

$$f(x, a_k u_0(x)) \geqslant \frac{a_k}{\int\limits_{w_k} v_1(s)\, d\sigma(s)}; \tag{2.2.3}$$

4) неравенства (2.2.2) и (2.2.3) превращаются в строгие на множествах положительной меры. Тогда задача (2.0.1) имеет $2N-1$ нетривиальных решений $\{u_i(x)\}_{i=1}^{2N-1}$, удовлетворяющих неравенствам $u_{2i-1} \leqslant u_{2i+1}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$.

В последнем параграфе рассматривается математическая модель образования капель над получаемым покрытием.

В третьей главе «Адаптация метода конечных элементов для математических моделей шестого порядка с негладкими решениями» метод конечных элементов адаптируется для нахождения приближенных решений изучаемых математических моделей. В первом параграфе строится алгоритм нахождения приближенного решения математической модели

$$\begin{cases} -\left(pu'''_{xx\mu}\right)'''_{xx\sigma}(x) + \left(ru''_{xx}\right)''_{x\sigma}(x) - \left(g(x)u'_{x}\right)'_{\sigma}(x) + \\ \qquad +u(x)Q'_{\sigma}(x) = F'_{\sigma}(x); \\ u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = 0; \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0. \end{cases} \tag{3.0.1}$$

Введем энергетическое скалярное произведение

$$\langle u, v \rangle = \int\limits_0^1 u'''_{xxx} v'''_{xxx}\, dx + \int\limits_0^1 r u''_{xx} v''_{xx}\, dx + \int\limits_0^1 g u'_x v'_x\, dx + \int\limits_0^1 uv\, dQ,$$

в пространстве дважды непрерывно дифференциальных функций, вторая производная которых абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, третья производная суммируема с квадратом на $[0;\ell]$, и удовлетворяющих условиям $u(0) = u'_x(0) = u''_{xx}(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = u''_{xx}(\ell) = 0$.

Приближенное решение $u_N(x)$ математической модели (3.0.1) будем искать в виде

$$u_N(x) = \sum_{k=1}^{N-1} a_k \varphi_{3k-2}(x) + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \varphi_{3k-1}(x) + \sum_{k=1}^{N-1} c_k \varphi_{3k}(x).$$

Здесь a_k, b_k и c_k — значение функции, первой и второй производной соответственно в узловой точке; $\varphi_i(x)$ — базисные функции, которые строятся следующим образом.

Отрезок $[0;\ell]$ разобьем на N частей, точки разбиения обозначим через x_k. Тогда $\varphi_{3k-2}(x) = 1 + 10\left(\frac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}}\right)^3 + 15\left(\frac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}}\right)^4 + 6\left(\frac{x-x_k}{x_k-x_{k-1}}\right)^5$, если $x \in [x_{k-1}; x_k]$, $\varphi_{3k-2}(x) = 1 - 10\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^3 + 15\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^4 - 6\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^5$, если $x \in [x_k; x_{k+1}]$, и 0, в противном случае; $\varphi_{3k-1}(x) = x - x_k - 6\frac{(x-x_k)^3}{(x_k-x_{k-1})^2} - 8\frac{(x-x_k)^4}{(x_k-x_{k-1})^3} - 3\frac{(x-x_k)^5}{(x_k-x_{k-1})^4}$, если $x \in [x_{k-1}; x_k]$, $\varphi_{3k-1}(x) = x - x_k - 6\frac{(x-x_k)^3}{(x_{k+1}-x_k)^2} + 8\frac{(x-x_k)^4}{(x_{k+1}-x_k)^3} - 3\frac{(x-x_k)^5}{(x_{k+1}-x_k)^4}$, если $x \in [x_k; x_{k+1}]$, 0, в противном случае; $\varphi_{3k}(x) = \frac{1}{2}(x-x_k)^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{(x-x_k)^3}{x_k-x_{k-1}} + \frac{3}{2}\frac{(x-x_k)^4}{(x_k-x_{k-1})^2} + \frac{1}{2}\frac{(x-x_k)^5}{(x_k-x_{k-1})^3}$, если $x \in [x_{k-1}; x_k]$, $\varphi_{3k}(x) = \frac{1}{2}(x - x_k)^2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{(x-x_k)^3}{x_{k+1}-x_k} + \frac{3}{2}\frac{(x-x_k)^4}{(x_{k+1}-x_k)^2} - \frac{1}{2}\frac{(x-x_k)^5}{(x_{k+1}-x_k)^3}$, если $x \in [x_k; x_{k+1}]$, и 0, если $x \notin [x_{k-1}; x_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots, N-1$.

Доказана теорема.

Теорема 3.2.1. *Пусть $u(x)$ — точное решение математической модели* (3.0.1); *$v(x)$ — приближенное решение, найденное с помощью адаптированного метода конечных элементов. Тогда*

$$\langle u - v, u - v \rangle \leqslant \widetilde{C} \cdot h,$$

где константа $\widetilde{C}$ не зависит от $h = {}^1\!/_N$ (N — количество интервалов на которые производится разбиение отрезка $[0; 1]$, причем сетка предполагается равномерной).

Проведены численные эксперименты, которые подтверждают теоретическую оценку.

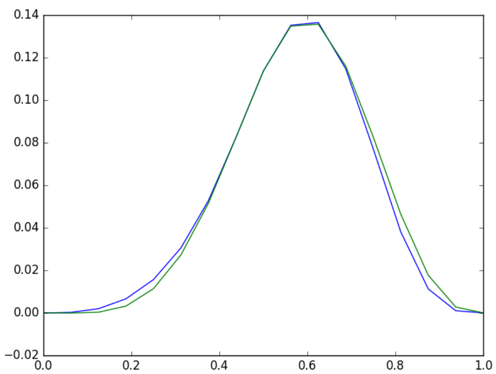

Рис. 1. *Графики точного и приближенного решений при $N = 2$*

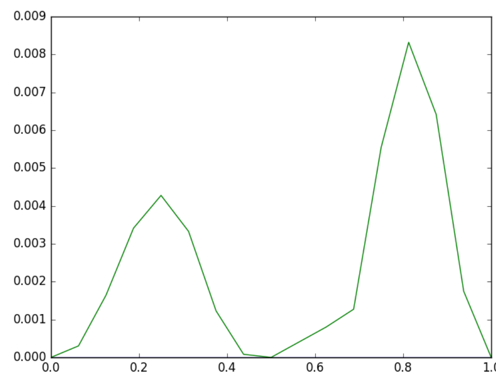

Рис. 2. *График погрешности при $N = 2$*

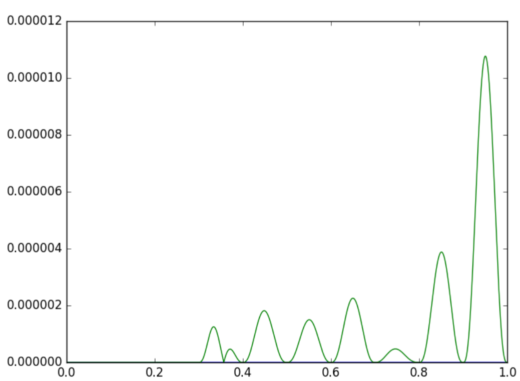

Рис. 3. *График погрешности при $N = 10$*

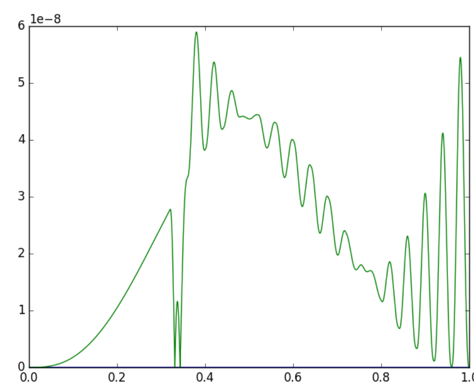

Рис. 4. *График погрешности при $N = 25$*

Программа работает по следующему алгоритму. Задаются коэффициенты модели. Затем находятся коэффициенты системы, которая составляется при реализации адаптированного метода конечных элементов. Потом полученная система решается, и получается приближенное решение. Строится либо график, либо таблица значений. Схема взаимодействия модулей скрипта довольно проста, и представлена на рисунке 5.

Общие сведения о программе. Программа называется First_2.1.py. Для работы программы необходим интерпретатор языка Python, пакеты math, scipy.integrate, copy, time, pylab и matplotlib.

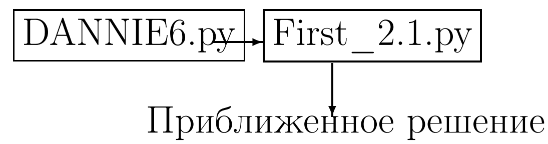

Рис. 5. *Схема взаимодействия модулей*

Для нормальной работы программы необходимо порядка 1 Гб оперативной памяти. Объём исходного текста составляет 14 808 байта.

Функциональное назначение. Предназначена для нахождения приближенного решения граничной задачи шестого порядка с интегралом Стилтьеса, которая возникает при моделировании малых деформаций продольно сжатой упругой балки на двойном упругом основании в модифицированной модели Власова-Леонтьева, по заданным параметрам модели.

Структура программы. В модуле с названием DANNIE6.py задаются параметры модели. Из консоли запускается скрипт First_2.1.py, который спрашивает количество шагов и необходимое действие (построить график приближенного решения или записать значения приближенного решения в текстовый файл). Затем находятся коэффициенты системы, которая составляется при реализации адаптированного метода конечных элементов. Потом полученная система решается, и получается приближенное решение.

Требования к программному окружению. Операционная система Linux, Windows XP, 2003, 7.

Эксплуатация программы. Для запуска программы необходимо задать параметры модели: $M(x)$, $p(x)$, $r(x)$, $g(x)$, $Q(x)$, $F(x)$, ξ_i, которые необходимо ввести в файл с именем DANNIE6.py, и другие параметры, которые вводятся с клавиатуры. На выходе будет получен либо график приближенного решения, либо таблица приближенного решения, которая может быть записана в файл. После задания параметров достаточно запустить скрипт с именем First_2.1.py.

На выходе будет получен график приближенного решения модели.

В заключении излагаются основные результаты диссертации.

Основные результаты диссертации

В диссертационной работе представлены новые качественные и приближенные аналитические методы исследования математических моделей, которые описывают деформации стержня на двойном упругом основании с локализованными особенностями, которые приводят к потере гладкости у решения. Современный аналитический аппарат изучения таких моделей находится в начальной стадии формирования. Полученные качественные аналитические методы исследования основываются на эффективных результатах анализа граничных задач с производными Радона–Никодима. В настоящее время численные методы для уравнений с производными по мере, их обоснование также находятся в стадии формирования. В работе получены новые результаты, относящиеся к области приближенного решения смешанных задач с производными Радона–Никодима, а также дана оценка погрешности. Представлены комплексы проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Основные результаты диссертационного исследования заключаются в следующем.

1. Вариационное обоснование математических моделей, описывающих малые деформации систем, состоящих из стержней на двойном упругом основании, имеющих внутренние особенности, которые приводят к потере гладкости решения модели.

2. Доказательство корректности полученных математических моделей.

3. Интегральная обратимость математических моделей с производными по мере; доказательство оценок функции влияния.

4. Изучение нелинейных математических моделей, возникающих при моделировании нелинейных деформаций изучаемых систем при учете «нелинейности».

5. Разработка эффективных численных методов решения граничных задач для уравнений шестого порядка (методы построения аналогов метода конечных элементов для математических моделей и оценка близости приближенного решения к точному решению).

6. Разработка эффективных алгоритмов решения негладких граничных задач, а также разработка комплексов программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов на тестовых задачах.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях из перечня ВАК РФ

1. Абрамов, Г.В. Исследование дефектов при формировании пленок центрифугированием / Г.В. Абрамов, Е.А. Бородина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 1. — С. 53–59.

2. Об одной математической модели шестого порядка с негладкими решениями / А.Д. Баев, Е.А. Бородина, Ф.В. Голованева, С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 93–105.

3. Адаптация метода конечных элементов для математических моделей шестого порядка с негладкими решениями / А.Д. Баев, Е.А. Бородина, Ф.В. Голованева, С.А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 3. — С. 64–76.

Публикации в других изданиях

4. Абрамов, Г.В. Математическое моделирование процесса формирования тонких резистивных пленок центрифугированием / Г.В. Абрамов, Е.А. Бородина // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования. Материалы II международной научной конференции. — 2007. — С. 1031–1035.

5. Абрамов, Г.В. Гидродинамическое описание процесса формирования пленом центрифугированием / Г.В. Абрамов, Е.А. Бородина // Кибернетика и высокие технологии XXI века. — Т. 2. — 2008. — С. 1031—1035.

6. Абрамов, Г.В. Моделирование процесса формирования нанопленок центрифугированием / Г.В. Абрамов, Е.А. Бородина // Математическое моделирование в технике и технологиях (ММТТ–21). XXI международная научная конференция. — 2008. — С. 50–52.

7. Абрамов, Г.В. Подходы к математическому моделированию процесса формирования пленок центрифугированием / Г.В. Абрамов, Е.А. Бородина // Инновационный менеджмент в сфере высоких технологий. Всероссийская школа–семинар молодых ученых и преподавателей, аспирантов, студентов и менеджеров малых предприятий. — 2008. — С. 223–225.

8. Абрамов, Г.В. Математическое моделирование многослойного течения жидкости / Г.В. Абрамов, Е.А. Бородина // Моделирование энергоинформационных процессов. I международная научно–практическая интернет–конференция. — 2013. — С. 141–145.

9. Абрамов, Г.В. Определение области отрыва капель жидкости при центрифугировании / Г.В. Абрамов, Е.А. Бородина // Математические методы в технике и технологиях. — ММТТ. — № 8 (67). — 2014. — С. 236–238.

10. Абрамов, Г.В. Особенности формирования пленок центрифугированием / Г.В. Абрамов, Е.А. Бородина // Моделирование энергоинформационных процессов. II международная научно-практическая интернет-конференция. — 2014. — С. 25–29.

11. Абрамов, Г.В. Влияние параметров процесса центрифугирования на образование дефектов / Г.В. Абрамов, Е.А. Бородина // Моделирование энергоинформационных процессов. Сборник статей III международной научно-практической интернет-конференции. — 2015. — С. 77–81.

12. Бородина, Е.А. Исследование многослойного течения жидкости при центрифугировании / Е.А. Бородина // Математические методы в технике и технологиях — ММТТ. — № 3. — 2013. — С. 40–41.

13. Бородина, Е.А. Влияние угловой скорости на образование дефектов при формировании пленок центрифугированием / Е.А. Бородина // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. — Т. 2, №5–2 (10–2). — 2014. — С. 55–57.

14. Достаточные условия разрешимости граничной задачи шестого порядка с негладкими решениями и сильной нелинейностью / А.В. Елфимова, М.А. Симонова, М.Б. Давыдова, Е.А. Бородина // Современные методы теории краевых задач. Материалы Международной конференции, посвященной 90-летию Владимира Александровича Ильина. — 2018. — С. 90–91.

15. Бородина, Е.А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. — Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ. № 2018.