на правах рукописи

Лешонков Олег Владимирович

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МЕТОДОМ БЫСТРЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2018

Работа выполнена в ФГБОУ ВО
«Воронежский государственный университет инженерных технологий»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Чернышов Александр Данилович.**
Официальные оппоненты:	**Минаева Надежда Витальевна,** доктор физико-математических наук, Воронежский государственный университет, факультет прикладной математики, информатики и механики, кафедра механики и компьютерного моделирования, профессор.
	Пеньков Виктор Борисович, доктор физико-математических наук, профессор, Липецкий государственный технический университет, механико-машиностроительный факультет, кафедра общей механики, профессор.
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО Тульский государственный университет.

Защита состоится «26» декабря 2018 г. В 17 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 при ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, г. Воронеж, Университетская пл., д.1, ауд. 333.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомится в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/dissertations/6530/Диссертация_Лешонков_О.В..pdf/

Автореферат разослан «__» _________ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
доцент

Шабров Сергей Александрович

Актуальность темы

Теория дифференциальных уравнений – один из наиболее важных и активно развивающихся разделов в области современной математики. Дифференциальные уравнения находят свое применение в области постройки математических моделей, которыми описываются подавляющее большинство физических явлений и процессов. Решение таких уравнений или систем вместе с граничными, начальными или некоторыми дополнительными условиями, открывает возможности получения количественных и качественных характеристик изучаемого процесса с заданной степенью точности.

Однако со стремительным развитием физики и других наук, модель которых можно построить на основе дифференциальных задач, использование классических методов становится весьма затруднительным. Это связано прежде всего с трудностями вычислительного процесса, а также с появлением новых классов дифференциальных задач к которым такие методы неприменимы. К таким уравнениям можно отнести класс интегро-дифференциальных уравнений, а также целый ряд нелинейных задач, задач с неизвестными или подвижными границами.

В настоящий момент развитие теории дифференциальных уравнений заключается в поиске новых, более экономичных и точных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных, а также развивается направление по решению нелинейных интегро-дифференциальных задач.

Сложность решения обыкновенных дифференциальных уравнений и систем зачастую связана с наличием в таких задачах ряда особенностей, в значительной мере влияющих на ход и характер их решения (Афанасьев А.П., Левитин А.В., Волков Е.А., Калиткин Н.Н., Дзюба С.М. Рубанов Н.А., Репина Ю.Е., Джумбаев Д.С., Коробицын В.В., Фролова Ю.В. и многие другие).

Важная часть исследований в теории решения дифференциальных уравнений связана с оценкой скорости вычислений с помощью различных вычислительных схем и оценкой сложности вычислений по существующим методам (Булатов М.В., Тыглиян А.В., Филиппов С.С, Curtiss C.F., Hirschfelder J.O., Хайрер Э., Ваннер Г., Dormand J.R., Prince P.J., Куликов Г.Ю., Меркулов А.И., Абдуллаев В.М., Колесов Ю.С., Майоров В.В. и многие другие).

В последние годы большое внимание привлекают нелинейные уравнения. Это происходит по причине того, что обычно физические процессы линейны лишь в первом приближении. Учет дополнительных эффектов и условий порождает нелинейные уравнения со своими особенностями, которые трудно поддаются решению. Множество работ посвящено не столько созданию методов решения ряда нелинейных дифференциальных задач, сколько оценке и качественному анализу поведения решения такого уравнения или класса уравнений. Это значит, что разрабатываются методы, которые позволяют сказать без решения уравнений об ограниченности этих решений или об их периодичности, или о характере зависимости решений от коэффициентов (Мухамадиев Э.М., Аширбаева А.Ж., Наимов А.Н., Демина М.В., Кудряшов Н.А., Усов А.Б и многие другие).

Зачастую, при построении математической модели, уравнения или граничные условия, содержат не только производные, но и интегралы от неизвестной функции что еще сильнее усложняет процедуру получения решение таких задач (Абдуллаев В.М., Бандурин Н.Г., Хачатрян А.Х., Абгарян К.А., Федотов А.И.).

Особенно широкий класс многомерных физических явлений определяется системами в частных производных. Подобные математические модели весьма многообразны и их решение представляется особенно сложными методами, как, например, уравнения теплопроводности, наиболее простейшие из класса уравнений в частных производных второго порядка (Кантарович Л.В., Крылов В.И., Biot M.A., Боли Б., Лыков А.В., Тихонов А.Н.).

Цель работы. Разработка эффективных методик и алгоритмов решения следующих задач с применением численно-аналитического метода быстрых разложений (МБР), разработанного профессором А.Д. Чернышовым:

1. вычисление интегралов с переменным верхним пределом от сложных функций;
2. представление неявно заданной функции в приближенном явном виде;
3. решение нелинейной интегро-дифференциальной задачи с различными граничными условиями;
4. исследование математической модели контактного термического сопротивления со смешанными граничными условиями.

Реализация цели исследования заключается в решении следующих теоретических и прикладных задач:

1. Доказательство единственности и многократной дифференцируемости быстрого разложения наперед заданное число раз;
2. разработка эффективного численного алгоритма и его реализация в виде комплекса проблемно-ориентированных программ на ЭВМ с проведением численных экспериментов на тестовых задачах для: вычисления интегралов с переменным верхним пределом от сложных функций; представления неявно заданной функции в приближенном явном виде с высокой точностью; решение нелинейных интегро-дифференциальных задач.
3. решение задачи прикладного характера – определение контактного термического сопротивления цилиндра конечных размеров с кольцевой границей нарушения контакта и в случае неосесимметричного теплового потока, а также разработка комплекса программ для ЭВМ с проведением вычислительных экспериментов.

Объекты исследования. Методика вычисления интегралов с переменным верхним пределом от сложных функций; алгоритм представления неявно заданной функции в приближенном явном аналитическом виде; алгоритм решения сложных нелинейных интегро-дифференциальных задач; математическая модель контактного термического сопротивления со смешанными граничными условиями.

Методы исследования. В диссертационной работе использовались новые методики решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, систем в частных производных на основе метода быстрых разложений.

Основные положения, выносимые на защиту.

- Алгоритм, основанный на методе быстрых разложений, позволяет проводить вычисления интегралов с переменным верхним пределом от сложных функций с высокой точностью и минимальными затратами машинных ресурсов.
- Методика, основанная на представлении функции в виде суммы специальной граничной функции и ряда Фурье по синусам, позволяет представить неявно заданную функцию в приближенном аналитическом виде на любом отрезке с высокой точностью.
- Методика с применением быстрых разложений позволяет получать решения нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с высокой точностью.
- Алгоритмы, основанные на методе быстрых разложений, позволяют находить решения задач о контактной термопроводности цилиндра конечных размеров со смешанными граничными условиями.

Научная новизна. В диссертационной работе получено:

1. приближенное аналитическое решение сложной нелинейной интегро-дифференциальной задачи с высокой точностью;
2. реализован алгоритм вычисления интегралов с переменным верхним пределом от сложных функций;

3. реализован способ представления неявно заданной функции в приближенном явном виде;
4. получено приближенное аналитическое решение задачи о контактном термическом сопротивлении цилиндров конечного размера с кольцевыми границами нарушения контакта. Обсуждается проблема согласования граничных условий;
5. решена задача о контактном термосопротивлении в случае неосесимметричного теплового потока.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая и практическая значимость результатов и методов диссертационной работы заключается в возможности построения более экономичных и быстрых схем решения различного класса прикладных задач, а также провести решение таких задач, которые не поддаются решению другими методами. Представлены результаты численного решения ряда задач с применением ЭВМ.

Область исследования. Область исследования и содержание диссертации соответствует формуле специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки), область исследования соответствует п. 2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», п.3 «Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий», п. 4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента»

Апробация работы. Основные результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

1. Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Воронеж. 12 – 15 сентября. 2016 г.

2. Анализ современных проблем в науке. Самара. 20 марта. 2017 г.
3. Проблемы тепломассообмена и гидродинамики в энергомашиностроении. Казань. 13 – 15 сентября. 2016 г.

Публикации. Все результаты, изложенные в диссертационной работе, получены автором самостоятельно. Из совместных работ в диссертацию включены только результаты, полученные автором лично.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 3 глав, заключения, библиографического списка, состоящего из 83 наименований и 2 приложений, в котором приводятся таблицы и листинги программ. Работа изложена на 213 страницах и содержит 13 рисунков и 27 таблиц.

Основное содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертационного исследования, определены его цели и задачи, перечислены методы исследования, представлены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе «Основные положения метода быстрых разложений» кратко изложены теоретические основы, применяемого в дальнейшем, метода, разработанного профессором А.Д. Чернышовым. Доказана:

Теорема 1. *О единственности быстрого разложения.*

Пусть две функции $\delta_1(x)$ *и* $\delta_2(x)$ *принадлежат классу непрерывных функций* $C^{(2)}$ *на отрезке* $x\in[0..a]$, *которые представлены быстрым разложением по синусам:*

$$\begin{gathered}\delta_i(x)=Ch_{2x}(\delta_i(x))=M_2(\delta_i(x))+\sum_{m=1}^{\infty}\delta_{i,m+4}\sin\left(m\pi\frac{x}{a}\right),\\ M_2(\delta_i(x))=\delta_{i,1}\left(1-\frac{x}{a}\right)+\delta_{i,2}\frac{x}{a}+\delta_{i,3}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{a6}-\frac{ax}{3}\right)+\delta_{i,4}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x}{6}\right),\ i=1,2\end{gathered}\qquad(1)$$

$\delta_{i,1},\ ...,\ \delta_{i,m+4},\ i=1,2,\ m=1\div\infty$ *– коэффициенты быстрого разложения (1).*

Если для коэффициентов быстрого разложения (1) выполняется равенство:

$$\delta_1 = \delta_2, \ldots, \; \delta_{1,m+4} = \delta_{2,m+4}$$

то на отрезке $x \in [0..a]$ *функции* $\delta_1(x)$ *и* $\delta_2(x)$ *совпадают, т.е.* $\delta_1(x) = \delta_2(x)$

Теорема 2. *О дифференцируемости быстрого разложения.*

Пусть $U(x) \in C^{(2)}$ *на отрезке* $x \in [0..a]$ *представлена быстрым разложением*

$$\begin{aligned} &U(x) = M_2(x) + \sum_{m=1}^{\infty} U_{m+4} \sin\left(m\pi \frac{x}{a}\right), \\ &M_2(x) = U_1\left(1 - \frac{x}{a}\right) + U_2 \frac{x}{a} + U_3\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{a6} - \frac{ax}{3}\right) + U_4\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x}{6}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

$U_1, \ldots, U_{m+4}, i = 1, 2, m = 1 \div \infty$ *– коэффициенты быстрого разложения (2).*

Разложение (2) можно почленно дифференцировать до двух раз, причем полученный ряд будет сходится к значениям производных раскладываемой функции до второго порядка на всем отрезке $x \in [0..a]$ *включая его границы.*

Разработана методика вычисления интегралов от сложных функций вида:

$$\int_0^x f(t)dt \quad , \quad x \in [0, a]$$

Алгоритм основан на МБР и реализован в виде в виде комплекса программ для ЭВМ.

МБР можно использовать для представления неявной функции в приближенном явном виде. Для этих целей разработан и реализован алгоритм, представленный комплексом программ для ЭВМ. Приведены результаты численного эксперимента, в котором оценивалась погрешность представления неявной функции $x^2 + y^2 = 2\sin(xy + 0.9) + 4$, $x \in [0,1]$, $y \geq 0$ в виде быстрого ряда (2).

Приводится способ решения сложных нелинейных интегро-дифференциальных задач с различными граничными условиями. Для численного эксперимента к решению представлено нелинейное интегро-дифференциальное уравнение вида:

$$y'' + y'\int_0^1 xy\,dx - y^3 = -\frac{1}{9}\pi^2 \sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right) + \frac{-\pi + 3\sqrt{3}}{2\pi}\cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right) - \sin^3\left(\frac{1}{3}\pi x\right)$$

с граничными условиями Коши $y(0)=0,\ y'(0)=\pi/3$, а также с краевыми условиями $y(0)=0,\ y(1)=\sqrt{3}/2$. Для проведения численных экспериментов выполнена реализация алгоритма в виде программного кода.

Во второй главе диссертации «Исследование контактного термического сопротивления в конечном цилиндре с внутренним источником методом быстрых разложений и проблема согласования граничных условий» рассматривалась модель цилиндра конечной высоты h, с внутренним отверстием радиуса r_0 и внешним радиусом R. Величина внутреннего радиуса r_0 является достаточно малой величиной, что приближает форму цилиндра к сплошной. Температуру стержня U полагаем гладкой функцией из класса $U \in \left\{C^{(5)}\left(0 \le z \le h\right) \times C^{(7)}\left(r_0 \le r \le R\right)\right\}$. Полагаем, что боковые поверхности цилиндра теплоизолированы, т.е $\partial U/\partial r\big|_{r=r_0} = 0,\ \partial U/\partial r\big|_{r=R} = 0$. На верхнем торце при $z=h$ считаем температуру постоянной $U\big|_{z=h} = U_0$, на нижнем при $z=0$ задан непрерывный неравномерный тепловой поток, обусловленный макронеровностями, т.е $\partial U/\partial z\big|_{z=0} = b\psi(r)$, $b \ge 0$, $\psi(r) \ge 0$, $r_0 \le r \le R$. Наличие зон нарушения теплового контакта на торце $z=0$ вносит дополнительные ограничения на выбор зависимости $\psi(r)$. Для простоты будем считать, что вследствие макронеровностей нарушение теплового контакта будет происходить на некоторых окружностях $r = r_i = r_0 + \frac{i}{j+1}\left(R - r_0\right),\ i = 1 \div j$,

$z=0$ где j – заранее заданное количество таких кольцевых зон, т. е. $\psi(r)\geq 0$, $\psi(r_i)=0$. Для того, чтобы функция решения не терпела разрывов в угловых точках рассматриваемой области, на выбор накладываются ограничения в виде следующих условий согласования:

$$\psi'(r_0)=\psi'(R)=0,\ R\psi'''(R)+\psi''(R)=0,\ r_0\psi'''(r_0)+\psi''(r_0)=0$$

В качестве зависимости $\psi(r)$ выбрана следующая функция, удовлетворяющая условиям согласования (11)

$$\psi(r)=(r-R)^4\left(1-\cos 2\pi(j+1)t\right)(r-r_0)^4\ ,\ t=\frac{r-r_0}{R-r_0}\in[0,1]$$

Дифференциальное уравнение теплопроводности записывается в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+Q_0=0 \tag{4}$$

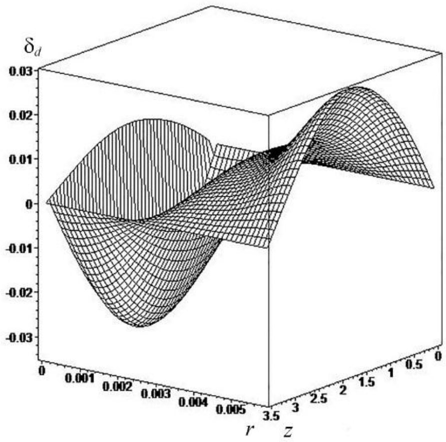

Рис. 1. *Невязка при* $N=3$ *дифференциального уравнения (4)*

где Q_0 – постоянный внутренний источник тепловой энергии, обусловленный, например, термоядерной реакцией внутри стержня или другими причинами. Для исследования данной модели с помощью МБР реализован вычислительный алгоритм в виде комплекса программ для ЭВМ. На рисунке 1 представлена невязка дифференциального уравнения (4) при использовании в быстром разложении всего лишь трех членов в ряде Фурье. Величина контактного термического сопротивления рассчитывалась с помощью формулы

$$T_R = \left(\min U\big|_{z=0} - \max U\big|_{z=0}\right) \Big/ 2\pi \int_{r_0}^{R} \left(\frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_{z=0} \right) r dr$$

В третей главе «**.** Исследование контактного теплосопротивления методом быстрых разложений в цилиндре конечных размеров с учетом неосесимметричности температурного поля» рассмотрен цилиндр, аналогичный рассмотренному в Главе 2. Температура стержня U полагается гладкой функцией из класса $U \in \left\{ C^{(4)}\left(0 \le z \le h\right), C^{(7)}\left(r_0 \le r \le R\right) \right\}$, что потребуется при построении решения. На боковой поверхности снаружи и внутри цилиндр тетермоизолирован $\partial U / \partial r\big|_{r=r_0} = 0$, $\partial U / \partial r\big|_{r=R} = 0$, на верхнем торце при $z = h$ поддерживается постоянная температура U_0, а на нижнем торце при $z = 0$ задан непрерывный неравномерный тепловой поток:

$$\partial U / \partial z\big|_{z=0} = \psi\left(r,\theta\right) \ , \psi\left(r,\theta\right) \ge 0 \ , \ r_0 \le r \le R, \ 0 \le \theta \le 2\pi$$

Зависимость $\psi\left(r,\theta\right)$ подберем так, чтобы частная производная от температуры на торце при $z = 0$ всюду была положительной кроме зон, где возможно нарушение контакта из-за макронеровностей. Для того, чтобы решение задачи было непрерывно потребуем в углах области Ω выполнение условий согласования граничных условий между собой, т.е. на выбор зависимости $\psi\left(r,\theta\right)$ накладываются следующие дополнительные условия:

$$\partial \psi\left(r,\theta\right) / \partial r \,|_{r=r_0} = \psi\left(r,\theta\right) / \partial r \,|_{r=R} = 0$$

Будем считать, что через торцевую поверхность $z = 0$ цилиндр охлаждается, однако в результате наличия макронеровностей отсутствует тепловой поток в некоторых точках, то есть $\psi\left(r,\theta\right) \ge 0$, $r_0 \le r \le R, \ 0 \le \theta \le 2\pi$. Представим одну из возможных зависимостей $\psi\left(r,\theta\right)$, для рассматриваемого процесса:

$$\psi(r,\theta) = b + b_1\left[\sin\left(\mathrm{k}_1\frac{r-r_0}{R-r_0} + \mathrm{k}_2\,\theta\right)\right](r-R)^4(r-r_0)^4 =$$

$$= b + b_1[\sin\left(\mathrm{k}_1\frac{r-r_0}{R-r_0}\right)\cos(\mathrm{k}_2\,\theta) +$$

$$+\cos\left(\mathrm{k}_1\frac{r-r_0}{R-r_0}\right)\sin(\mathrm{k}_2\,\theta)](r-R)^4(r-r_0)^4,\ b_1 \le \frac{2b}{(R-r_0)^8}$$

Коэффициенты $b_1,\ k_1,\ k_2$ находятся экспериментально. В дальнейшем рассматривается частный случай, когда постоянная b определяется по формуле $b = U_0/h + Q_0 h/2$. Величины $b,\ b_1$ характеризуют интенсивность теплового потока через торец $z = 0$, k_1 характеризует сдвиг фазы, k_2 – частоту неравномерного теплового потока. Запишем уравнение теплопроводности в переменных (r,θ,z):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + Q_0 = 0 \qquad (5)$$

Q_0 – внутренний источник тепла, нагревающий стержень. Решение задачи для U будем искать в виде:

$$U = bz - \frac{Q_0}{2}z^2 + V(r,z)\cos(k_2\theta) + W(r,z)\sin(k_2\theta) \qquad (6)$$

В результате решение задачи сведено к определению функций $V(r,z)$, $W(r,z)$ в уравнении для температуры (6). Для исследования данной модели с помощью МБР реализован в виде комплекса программ ЭВМ вычислительный алгоритм. На рисунке 2 представлена невязка дифференциального уравнения (5) при использовании всего пяти членов в ряде Фурье

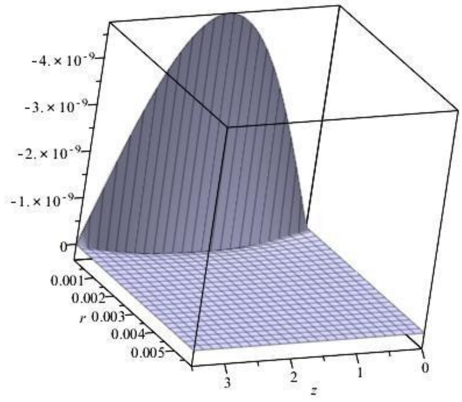

Рис. 2. *Невязка дифференциального уравнения (5) при* $N = 5,\ \theta = \pi/2$

Величина термического сопротивления рассчитывалась с помощью формулы

$$T_R = \left(\min U\big|_{z=0} - \max U\big|_{z=0}\right) \Big/ 2\pi \int_{r_0}^{R} \left(\frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_{z=0} \right) r dr$$

На рисунках 3, 4 представлены: 1. Зависимость величина термосопротивление в зоне нарушения теплового контакта от угла θ; 2. Влияние величины k_2, которая определяет количество зон неравномерного нарушения теплового контакта, на термосопротивление**.**

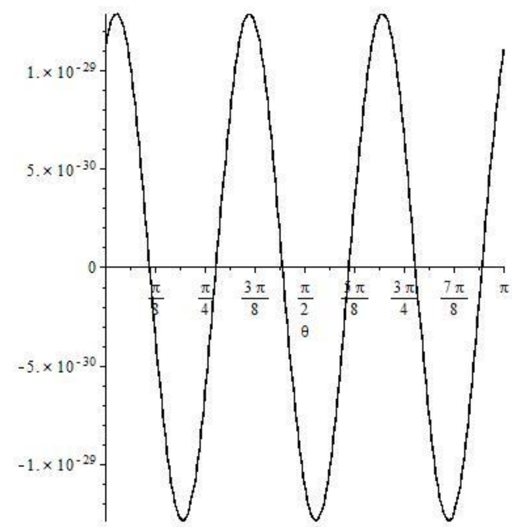

Рис. 3. Зависимость величина термосопротивление в зоне нарушения теплового контакта от угла θ*;*

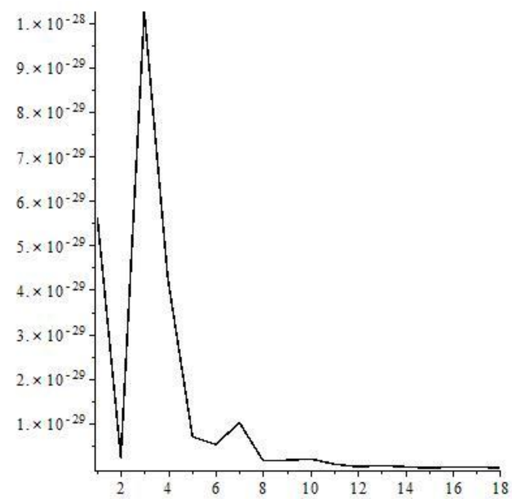

Рис. 4. *Влияние величины* k_2*, на термосопротивление.*

В заключении сформулированы основные результаты и сделаны общие выводы по диссертационной работе:

1. Доказаны теоремы о единственности и многократной дифференцируемости быстрого разложения;
2. Разработана методика вычисления интегралов с переменным верхним пределом. На тестовых примерах показана её эффективность;
3. Разработан и реализован алгоритм представления неявно заданной функции и приближенном явном виде на отрезке;
4. Представлен способ решения сложных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с использованием метода быстрых разложений.
5. Сформулирована и решена задача о контактном термическом сопротивлении цилиндра с кольцевой границей нарушения контакта. Рассмотрена проблема согласования граничных условий в углах рассматриваемой области.
6. Сформулирована задача о контактном термическом сопротивлении цилиндра в случае неосесимметричного теплового потока. Разработан и реализован алгоритм решения такой задачи.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Investigation of contact thermal resistance in a finite cylinder with an internal source by the fast expansion method and the problem of consistency of boundary conditions / A.D. Chernyshov, V.M. Popov, V.V. Goryainov, O.V. Leshonkov // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2017. – Vol. 90. – № 5. C. 1225-1233.
2. Чернышов А.Д., Кузнецов С.Ф., Горяйнов В.В., Лешонков О.В. Приближенное решение сложных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с помощью метода быстрых разложений / А.Д. Чернышов, С.Ф. Кузнецов, В.В. Горяйнов, О.В. Лешонков // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. – 2018. – № 3. – С. 200-205.

Прочие публикации автора

3. Исследование влияния геометрических размеров конечных цилиндров с внутренним источником на контактное термическое сопротивление с по-

мощью быстрых разложений / А.Д. Чернышов, В.М. Попов, В.В. Горяйнов, О.В. Лешонков // Тепловые процессы в технике. – 2016. – № 11. – С. 506-512.
4. Чернышов А.Д. Исследование контактного теплосопротивления методом быстрых разложений в цилиндре конечных размеров с учетом неосесимметричности температурного поля / А.Д. Чернышов, В.М. Попов, О.В. Лешонков // Тепловые процессы в технике. – 2017. – № 1. – С. 27-33.
5. Лешонков О.В. Применение метода быстрых разложений для решения задачи о термическом сопротивлении в твердых телах / О.В. Лешонков // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сборник трудов Международной научно-технической конференции. г. Воронеж 12–15 сентября. 2016. – Воронеж, изд-во Научно-технические публикации, 2016. С. 257-258.
6. Исследование контактного термического сопротивления конечных цилиндров с внутренним источником методом быстрых разложений / А.Д. Чернышов, В.М. Попов, В.В, Горяйнов, О.В, Лешонков // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сборник трудов международной научно-технической конференции. г. Воронеж 12–15 сентября. 2016. – Воронеж, изд-во Научно-технические публикации, 2016. С. 307-310.
7. Чернышов А.Д. Применение метода быстрых разложений при решении краевой задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка / А.Д. Чернышов, Е.А. Соболева, О.В. Лешонков // Анализ современных проблем в науке: Сборник статей Международной научно-практической конференции. г. Самара. 20 марта. 2017. – Самара, изд-во ЦНИК, 2017. С. 77-81.
8. Определение контактного термосопротивления конечных цилиндров с внутренним источником методам быстрых разложений / А.Д. Чернышов, В.М. Попов, В.В. Горяйнов, О.В. Лешонков // Проблемы тепломассообмена и гидродинамики в энергомашиностроении: Материалы X школы-семинара молодых ученых и специалистов академика РАН В.Е. Алемасова. г. Казань. 13 – 15 сентября. 2016. КазНЦ РАН, 2016. С. 244-247.

Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ

9. Чернышов А.Д., Горяйнов В.В., Шахов С.В., Попов В.М., Лешонков О.В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. – Зарегестрировано в Реестре программ для ЭВМ. № 2018618592. 16.07.2018. – 2018.