ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Абделхафиз Мостафа Абдаллах Ахмед

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Специальность 05.13.18 —
«Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м. н., доцент
Цибулин В.Г.

Ростов-на-Дону — 2018

Оглавление

Стр.

Введение 5

Глава 1. Уравнения конвекции теплопроводной жидкости в пористой среде 20

1.1 Модель Дарси с учетом анизотропии тепловых характеристик и проницаемости среды 21

1.1.1 Уравнения для плоской задачи в естественных переменных 21

1.1.2 Система уравнений относительно функции тока и температуры 24

1.2 Конвекция бинарной жидкости в пористом анизотропном прямоугольнике 26

1.3 Косимметрия для анизотропных задач конвекции в пористой среде 30

1.3.1 Уравнения гравитационной фильтрационной конвекции 30

1.3.2 Бинарная жидкость в пористой среде 33

1.4 Устойчивость механического равновесия и возникновение конвекции 35

1.4.1 Анизотропная фильтрационная конвекция при подогреве 35

1.4.2 Задача для бинарной жидкости в пористом прямоугольнике 38

Основные итоги первой главы 42

Глава 2. Вычислительные методы исследования задач фильтрационной конвекции 43

2.1 Схема смещенных сеток для уравнений в естественных переменных 44

Стр.

2.1.1 Разностные операторы и метод прямых для задачи гравитационной фильтрационной конвекции 44
2.1.2 Дискретная модель двумерных движений фильтрационной конвекции 48
2.2 Аппроксимация плоских задач конвекции в пористой среде с использованием функции тока 52
2.2.1 Дискретная задача гравитационной конвекции в прямоугольнике 52
2.2.2 Разностные уравнения конвекции бинарной жидкости в пористой среде 55
2.2.3 Расчет критических чисел Рэлея, отвечающих возникновению конвекции 58
2.3 Сохранение косимметрии в разностных аппроксимациях уравнений анизотропной конвекции 60
2.4 Описание программного комплекса численного исследования анизотропных задач фильтрационной конвекции 63
Основные итоги второй главы 69

Глава 3. Численное исследование плоских задач анизотропной конвекции в пористой среде 70
3.1 Критические числа Рэлея и возникновение конвекции в пористом прямоугольнике 71
3.2 Расчет конвективных режимов 78
3.2.1 Стационарные конвективные режимы 78
3.2.2 Нарушение косимметрии при аппроксимации и разрушение семейства стационарных состояний . . . 82
3.3 Вычисление семейств стационарных движений и изолированных режимов 85
3.3.1 Случай косимметрии 86
3.3.2 Нарушение косимметрии 90
3.4 Неустойчивость механического равновесия для плоской задачи фильтрационной конвекции бинарной жидкости . . . 96

Стр.

Основные итоги третьей главы 102

Заключение 103

Список литературы 105

Приложение А. Программный комплекс Aniso2d для исследования плоской анизотропной конвекции в пористой среде 120

Введение

Обзор литературы. Для многих естественнонаучных и технических задач критически важными являются характеристики движения жидкостей и газов в пористых средах. Существенную часть этой тематики составляют проблемы предупреждения конвекции и анализа конвективных течений [95]. Большое число физических и структурных факторов затрудняет исследование теплофизических явлений путем прямого физического эксперимента. Поэтому важную роль играет математическое моделирование, основанное на ключевых физических данных и качественном вычислительном эксперименте.

Примером пористой среды с жидкостью является несцементированный песок, в котором имеются пустоты различной величины и формы, образующие «поровое пространство», или промежутки между отдельными твердыми частицами песка. Каждая пора соединена узким каналом с другими, образуя сообщающуюся между собой систему отверстий-ячеек, по которым перемещается заключенная в среде жидкость [31].

Изучение конвекции в пористых средах началось с анализа классических уравнений Дарси-Буссинеска в предположении изотропности проницаемости и тепловых свойств [68, 76]. На основе закона Дарси были получены важные результаты о потере устойчивости механическим равновесием и формировании конвективных режимов для задач о подогреве снизу заполненного жидкостью пористого объема. При малых градиентах температуры доминирует диффузия тепла и жидкость остается в состоянии механического равновесия. При превышении критического порога температуры состояние покоя теряет устойчивость и возникают конвективные режимы. Градиент температуры входит множителем в безразмерный параметр, который называется числом Рэлея (Рэлея-Дарси) [68, 81]. Эффективность переноса тепла измеряется в терминах чисел Нуссельта, которые характеризуют поток тепла через границы системы [63, 64].

Часто пористые материалы являются анизотропными по своим механическим и тепловым свойствам [110]. Это, как правило, есть следствие

предпочтительной ориентации или асимметричной геометрии частиц или волокон. Например, осадочные геологические формации состоят из ряда горизонтальных слоев и по своей природе анизотропны [127]. Они характеризуются различными значениями вертикальной к горизонтальной проницаемости [65, 105]. Использование физически более реалистичных свойств среды необходимо для моделирования конвекции в таких пористых средах [22].

В работах [45, 46, 47, 48, 51, 53, 59, 60, 67, 75, 103, 104, 113, 127] рассматривались различные задачи фильтрационной конвекции жидкостей с учетом неоднородности пористой среды и анизотропии механических и тепловых свойств. Влияние эффектов анизотропной проницаемости на тепловую конвекцию в пористом слое анализировалось в [48]. В работах [51, 53, 127] по конвекции в анизотропной пористой среде изучалась неустойчивость состояния покоя. В [67] рассматривался вопрос о возникновении конвекции в случае неоднородной проницаемости по толщине слоя.

Особый практический интерес представляют задачи, когда проницаемость изотропна по горизонтали, но имеет другое значение в направлении силы тяжести. Для горизонтально изотропной проницаемости термическая конвекция анализировалась в работах [45, 46, 47]. В [54, 79, 100] была исследована зависимость свойств конвективных потоков и теплопередачи от эффектов анизотропной проницаемости и ориентации главной оси соответствующего тензора [124]. В [122] рассматривалась задача о свободной конвекции в горизонтальном пористом слое, главная ось тензора проницаемости составляла угол с вектором гравитации, изотропия предполагалась в трансверсальных направлениях и для коэффициентов теплопроводности. Конвекция для пористого слоя с анизотропией тепловых свойств изучалась в [112]. Анализ с учетом анизотропии тепловых характеристик и проницаемости проводился в ряде работ, см. например [111, 121]. В статьях [55, 110, 111] даны обзоры работ по данной тематике и дополнительные ссылки.

В [115] представлены общие уравнения тепловой конвекции в бидисперсной пористой среде, когда коэффициенты проницаемости, взаимодействия и теплопроводности даются анизотропными симметричными тензорами. В бидисперсных материалах, помимо обычных пор (макропор)

также имеются трещины в твердом каркасе (микропористость). Модели неизотермического течения жидкости в бидисперсном пористом материале разрабатывались в работах [94, 97, 96, 98]. В [114, 116] представлена теория, в которой допускаются независимые поля скорости, давления и температуры в макро– и микрофазах.

Во многих технических и технологических процессах применяются многокомпонентные жидкости [33]. В частности, для ряда устройств с пористыми материалами перспективным является использование жидкостей с частицами нанометровых размеров (наножидкостей) [52]. В отличие от крупных дисперсных частиц примеси седиментируют значительно медленнее и не подвергают эрозии каналы, по которым движутся.

В многокомпонентных системах перенос массы каждой компоненты вызывается не только градиентом концентрации самой компоненты, но может определяться перекрестной диффузией и термодиффузией. Конвективная устойчивость смесей, состоящих из нереагирующих компонент, рассмотрена в монографиях [12, 16, 35]. Обычно исследование состоит в анализе монотонной и колебательной неустойчивости механического равновесия в случае, когда потоки тепла и вещества независимы друг от друга.

Возникновению конвекции в бинарных жидкостях, в частности, наножидкостях, насыщающих пористые среды, посвящены работы последнего времени, см. [42, 99, 102, 123, 128]. Для определения пороговых значений критических чисел Рэлея в случае многокомпонентных жидкостей в анизотропных пористых средах анализ пороговых значений проводится с помощью вычислительных программ [107, 108]. Мало исследованным остается вопрос о возникновении колебательных процессов в бинарных жидкостях, насыщающих пористые массивы, особенно с учетом анизотропии свойств среды и самой жидкости.

На конвективные явления в смесях большое влияние могут оказывать термодиффузионные процессы [57, 77, 78, 106]. Термодиффузия, представляющая собой перенос вещества под действием градиента температуры, была впервые исследована Ч. Соре [109]. В [83] изучалась задача Релея-Бенара для бинарной смеси с учетом вклада термодиффузии. В [62]

численно исследовано влияние конвекции в нагреваемом сбоку горизонтальном цилиндре на распределение бинарной смеси.

В работах [13, 15] изучалась термоконцентрационная неустойчивость бинарной смеси, насыщающей слой пористой среды. По результатам анализа спектральной задачи были определены пороговые значения и показано, что наряду с неустойчивостью монотонного типа возможен колебательный механизм неустойчивости. Это обусловлено различием тепловых свойств насыщающей жидкости и твердого скелета. Также получено, что при наличии достаточной продольной стратификации течение становится неустойчивым относительно термоконцентрационных возмущений

Линейная устойчивость стационарного плоскопараллельного конвективного течения бинарной смеси в плоском вертикальном слое рассмотрена в [14] с учетом эффекта термодиффузии. Описаны механизмы неустойчивости, определяющие границы устойчивости и критические возмущения. В [11] исследована бинарная смесь в пористом слое с учетом перекрестных кинетических и гравитационного эффектов. Определены границы областей неустойчивости и установлено, что многокомпонентность смеси существенно стабилизирует положение механического равновесия. Описана область параметров, отвечающих «парадоксу устойчивости», который состоит в неустойчивости смеси, утяжеляющейся с глубиной.

В [49, 128] проведено исследование возникновения конвекции при разнонаправленных градиентах температуры и концентрации на основе линейного анализа и численного решения нелинейной задачи. Обнаружено, что переход от состояния покоя к конвективным режимам имеет транскритический характер. Анализ показал наличие симметричных и несимметричных режимов в докритической и сверхкритической областях параметра Рэлея.

В работах [87, 117, 128] показано, что явление конкуренции между температурой и концентрациями примесей приводит к возникновению многочисленных устойчивых и неустойчивых решений для одних и тех же значений управляющих параметров. При этом отмечено, что ниже порога монотонной неустойчивости наблюдаются колебательные режимы, бегущие

волны в удлиненных контейнерах и асимметричные конвективные структуры. В работах [85, 86, 88, 102] сделан вывод, что данные явления происходят из-за того, что коэффициенты диффузии для температуры и примесей различны, а это влечет появление движений с различными временными масштабами.

Термоконцентрационная конвекция в прямоугольном контейнере интенсивно изучалась в работах [70, 86, 87, 89, 102], см. также библиографию в этих статьях. Исследовался вопрос о подавлении конвекции в контейнере и было указано, что в зависимости от коэффициентов пористости и диффузии неустойчивость может возникать колебательным или монотонным образом. В [49, 74, 85, 86, 90] были исследованы линейная и нелинейная устойчивость и определены подкритические, сверхустойчивые и стационарные конвективные режимы для трех управляющих параметров: отношения высоты к ширине контейнера, коэффициента пористости среды и числа Льюиса (отношение коэффициентов диффузии тепла и примеси). Конвекция двухкомпонентной жидкости в вытянутом горизонтально пористом контейнере с краевыми условиями Неймана на боковых стенках изучена в [70] на основе модели Дарси. Проведено асимптотическое и численное (метод конечных разностей) исследование изолированных стационарных конвективных режимов.

В [89] для задачи термоконцентрационной конвекции в прямоугольном контейнере изучено влияние различных граничных условий на потерю устойчивости механического равновесия, когда градиенты температуры и концентрации имеют разные знаки. Пороговые значения колебательной и монотонной неустойчивости определяются из анализа линеаризованных уравнений как функции управляющих параметров. Найдено, что на порог возникновения неустойчивости (в случае конечного контейнера) и величину критического волнового числа (для задачи о слое) значительно влияют коэффициент пористости и параметр, который равен отношению числа Дарси к произведению параметра пористости, числа Прандтля, отношения коэффициентов теплопроводности пористой среды и жидкости.

Пористость среды оказывает заметное влияние на возникновение конвекции при температуре и концентрациях с градиентами одного знака

[49, 74, 86]. Для стратифицированной по примеси жидкости в [50] изучена пальцевая конвекция, вызываемая импульсным боковым нагревом. В одном из экспериментов был рассмотрен случай, когда силы плавучести для температуры и концентрации равны, но противоположны. В результате наблюдался ряд почти горизонтальных конвективных ячеек, когда было превышено критическое условие начала пальцевой конвекции. Для контейнера квадратного сечения в [73] на основе численного эксперимента дано сравнение моделей Дарси, Форчхаймера и Бринкмана. Обзоры работ, посвященных анализу различных моделей фильтрационной конвекции, содержатся в [45, 46, 48, 67, 75, 95].

Анализ литературы по исследованию конвективных течений показывает важность разработки и применения специализированных вычислительных программ и комплексов. В то же время, актуальным является выделение классов задач, допускающих хотя бы частичное использования аналитических методов. Здесь оказывается полезной теория косимметричных динамических систем [39, 40], созданная в работах [39, 40, 41, 129].

При исследовании конвекции в изотропной пористой среде на основе модели Дарси Д.В. Любимовым был обнаружен нетривиальный эффект ответвления семейства стационарных состояний от потерявшего устойчивость механического равновесия [30]. Это явление было объяснено В.И. Юдовичем [40, 129] при помощи развитой им теории косимметрии. В отличие от задач с непрерывными симметриями [10], в которых семейства решений обладают одинаковым спектром устойчивости, случай косимметрии характеризуется возникновением семейств решений с индивидуальным спектром. Это было подтверждено расчетами конвективных движений для плоских задач фильтрационной конвекции теплопроводной жидкости [19, 26, 71] и многокомпонентных жидкостей без учета эффекта Соре [28]. Таким образом, случай косимметрии означает мультистабильность — сосуществование различных устойчивых режимов, достигаемых из отличающихся начальных данных.

В плоской изотропной постановке семейства конвективных движений в прямоугольнике были рассчитаны сначала при помощи метода Галеркина

[19, 21], а затем на основе метода сеток [71] и спектрально-разностного метода [26, 27]. Для описания конвективных течений в [56, 110, 111, 112, 122] применялась модель Дарси. Результаты анализа конвекции изотропной задачи Дарси для кольцевых областей даны в ряде работ, см. ссылки в [37].

В [41, 44] показано, что непрерывные семейства стационарных режимов распадаются или исчезают в случае возмущений, нарушающих косимметрию. В [41] дана теория таких бифуркаций и предложен аппарат построения селективного уравнения для анализа сохраняющихся состояний. Количество решений селективного уравнения определяется влиянием возмущений на распад однопараметрического семейства равновесий. Доказано, что при наличии внутри области равномерно распределенных источников тепла малой интенсивности семейство распадается, порождая два стационарных режима: устойчивый и неустойчивый. Если селективное уравнение не имеет решений, то возникают медленные (с большим периодом) периодические движения.

В [44, 118] изучено влияние нарушающих косимметрию возмущений и распад семейства стационарных режимов при числах Рэлея, соответствующих малым параметрам надкритичности, когда это семейство полностью устойчиво. В [44] были получены медленные периодические движения, возникающие при просачивании жидкости через пористую среду, а в [118] обнаружены устойчивые стационарные изолированные решения при неравномерном подогреве на границе области. В [20] исследована задача фильтрационной конвекции в горизонтальном цилиндре при наличии малых внутренних источников тепла. В [44] представлены результаты для конечномерной модели фильтрационной конвекции малого порядка. В [118] даны решения двумерной задачи методом конечных разностей, сохраняющим косимметрию задачи, а в [20, 56] для аппроксимации задачи использован метод Галеркина.

При расчете решений из однопараметрических семейств важным оказалось применение численных схем, наследующих свойство косимметрии исходных дифференциальных уравнений [27, 71]. Сохранение косимметрии в сеточных аналогах уравнений плоской задачи фильтрационной конвекции [71] было получено при аппроксимации нелинейных членов на основе

формул [32, 43]. В [27, 72] были развиты специальные конечно-разностные аппроксимации с использованием результатов [91].

До [1] считалось, что анизотропия разрушает косимметрию и препятствует возникновению однопараметрических семейств стационарных конвективных режимов, обнаруженных в [30] при анализе изотропной модели Дарси. При исследовании конвекции фильтрационной с учетом анизотропии свойств жидкости и среды в [1] были установлены условия на коэффициенты задачи, при которых появляется косимметрия. Это позволило получить аналитические выражения для критических чисел Рэлея, отвечающих возникновению конвекции в результате монотонной неустойчивости механического равновесия.

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Задачи конвективного переноса в пористых средах возникают в геофизике, теплофизике и различных отраслях техники и медицины, где в настоящее время применяются пористые материалы. Для обеспечения устойчивости технологических процессов требуется учитывать динамику заполняющих поры газа или жидкости при воздействии температуры, примесей, неоднородности пористой среды и т.д. Анизотропия свойств может возникать естественно или появляться вследствие инженерных решений.

Математическое моделирование конвективных движений теплопроводной жидкости с учетом насыщающих ее примесей и неоднородности среды является сложной задачей, требующей применения современных численных методов и разработки соответствующего программного обеспечения. При анализе систем нелинейных уравнений в частных производных важно учитывать имеющиеся дискретные и непрерывные симметрии, косимметричность рассматриваемых задач.

Конвекция в пористой среде интересна также возникающими сценариями мультистабильности – реализацией различных конвективных течений в зависимости от начальных данных. Д.В. Любимов обнаружил нетривиальное ответвление континуального семейства стационарных режимов от механического равновесия. В.И. Юдович объяснил это явление на основе разработанной им теории косимметрии и показал, что образование семейства не является следствием какой-либо непрерывной

симметрии. Исследованием изотропных задач фильтрационной конвекции занимались Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, Д.В. Любимов, Т.П. Любимова, Д.А. Брацун, Г.Ф. Путин, В.Н. Говорухин, В.Г. Цибулин, B. Karasözen, L. Storesletten, M. Mamou, P. Vasseur, D.A.S. Rees, A. Mojtabi, S.N. Gaikwad и др. Анизотропные задачи движения жидкости в пористой среде слабо изучены, их анализ с привлечением теории косимметрии прежде не проводился.

Целью диссертационной работы является моделирование и развитие методов анализа анизотропной конвекции теплопроводной жидкости, насыщающей пористую среду, на основе подхода, использующего аппарат теории косимметрии.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследование математических моделей гравитационной конвекции теплопроводной жидкости в пористой среде с анизотропией свойств, анализ возникновения конвективных движений.
2. Разработка разностных схем расчета конвекции жидкости в пористой среде, построение аппроксимаций уравнений анизотропной фильтрационной конвекции, сохраняющих свойство косимметрии.
3. Вычисление семейств стационарных режимов для задачи с анизотропией свойств теплопроводности и проницаемости, исследование селекции стационарных режимов при разрушении косимметрии.
4. Разработка программного комплекса для вычислительных экспериментов в задачах гравитационной фильтрационной конвекции с учетом анизотропии жидкости и среды.

Научная новизна:

1. 1. выделен класса косимметричных задач для анизотропной гравитационной конвекции, позволило получить явные аналитические формулы для критических значений параметров, отвечающих возникновению конвекции.
2. Для построения миметических численных схем, наследующих свойства начально–краевых задач, использован подход, основанный на сохранении косимметричности. Анализ систем в случае нарушения

косимметрии дал возможность описать мультистабильность в задачах анизотропной фильтрационной конвекции.

3. На основе разработанных численных схем реализован комплекс программ, позволяющий проводить вычисления в интерактивном режиме для класса задач, рассмотренных в диссертации.

Практическая значимость Проведенное исследование посвящено математическому исследованию плоских конвективных движений теплопроводной жидкости в пористой анизотропной среде. Полученные результаты могут быть использованы для моделирования конвекции в бинарной жидкости, насыщающей пористую анизотропную среду, а также в микромеханике, биотехнологии, медицине и т. д. Работа вносит теоретический вклад в развитие методов анализа решений нелинейных уравнений в частных производных. Применяемые в диссертации подходы могут быть использованы для исследования систем нелинейных дифференциальных уравнений. Полученный материал будет включен в специальные курсы для студентов и аспирантов физико-математических специальностей.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных задач применялись методы математической физики и вычислительной математики, теория динамических систем с косимметрией. Для аппроксимации нелинейных уравнений в частных производных использовалаль схема смещенных сеток. Расчет нестационарных и устойчивых стационарных режимов проводился для систем обыкновенных дифференциально-алгебраических уравнений при помощи метода Рунге-Кутта. Континуальные семейства стационарных состояний вычислялись при помощи подхода, основанного на косимметричной версии теоремы о неявной функции. Компьютерный эксперимент проводился в среде пакета MATLAB с использованием средств матричного и спектрального анализа, систем визуализации.

Область исследования. Область исследования и содержание диссертации соответствует формуле специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физикоматематические науки), область исследования соответствует п. 2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», п. 4 «Реализация эффективных численных методов

и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента», п. 5. «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Для математических моделей движения теплопроводной жидкости в пористой среде представлен анализ возникновения конвекции с учетом анизотропии жидкости и среды. Установлены соотношения на параметры, при которых соответствующие начально-краевые задачи являются косимметричными. Выведены явные формулы для критических чисел Рэлея в случае монотонной неустойчивости механического равновесия.
2. Исследовано возникновение конвекции в анизотропной пористой среде, насыщенной теплопроводной жидкостью с примесью. В случае косимметрии задачи получено соотношение между критическими значениями температурного и концентрационного чисел Рэлея, при которых возникают конвективные движения.
3. Представлены результаты вычисления семейств стационарных режимов для задачи с анизотропией свойств теплопроводности и проницаемости пористой среды, в численном эксперименте изучена селекция стационарных режимов при разрушении косимметрии.
4. Построены конечно-разностные аппроксимации дифференциальных моделей анизотропной фильтрационной конвекции, сохраняющие свойство косимметрии.
5. Разработан комплекс программ, позволяющий проводить численное исследование плоских конвективных режимов теплопроводной жидкости с примесью в пористой анизотропной среде.

Достоверность обусловлена математически корректной постановкой задач, использованием апробированных методов и совпадением в частных случаях с известными экспериментальными и теоретическими результатами других авторов.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 печатных работ: 2 составляют статьи в реферируемых изданиях из списка ВАК [1–2],

в том числе, 2 статьи в базе данных Scopus. Имеется свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ [38], 8 работ опубликовано в сборниках конференций [3–9,92].

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих международных научных конференциях и семинарах:
– Международная конференция «Численное моделирование прибрежных, шельфовых и устьевых процессов» (Ростов-на-Дону, 5–9 октября 2015 г.);
– XVIII и XIX Международные конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.; 15–18 октября 2018 г.);
– Всероссийская конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики» (Абрау-Дюрсо, 5–11 сентября 2016 г.; 3–8 сентября 2018 г.);
– Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по «Спектральным и эволюционным задачам» (Ласпи-Батилиман, 17–29 сентября 2017 г.);
– Всероссийская школа-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (Дивноморское, 31 мая–3 июня 2018 г.);
– Международная конференция «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis VIII» (Ростов-на-Дону, 22–27 апреля 2018 г.);
– Работа докладывалась на научном семинаре кафедры вычислительной математики и математической физики ЮФУ (руководитель проф. Жуков М. Ю., 2018 г.).

Личный вклад. В публикациях [1–9,38,92] автору принадлежит разработка программ, предназначенных для исследования моделей конвекции в пористой среде, и проведение расчетов. В работах [1–5,7,8,38]проведение аналитических выкладон, разработка численных схем и анализ результатов расчетов принадлежат авторам в равной степени.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения. Полный объём диссертации составляет 121 страницу, включая 21 рисунок и 15 таблиц. Список литературы содержит 131 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** дан обзор литературы по теме диссертации, обоснована актуальность темы, изложены цели работы и методы исследования, сформулированы научная новизна и практическая значимость результатов, представлена структура работы и приведен краткий обзор содержания работы.

Первая глава посвящена описанию и анализу свойств математических моделей фильтрационной конвекции на основе закона Дарси и приближения Буссинеска. В § 1.1 рассматривается общая постановка начально-краевых задач для естественных переменных и производится переход к безразмерным величинам. Для плоской задачи фильтрационной конвекции выписываются уравнения относительно функции тока и девиации температуры, проводится анализ свойств полученной системы.

В § 1.2 выводится система уравнений для исследования конвекции в случае бинарной анизотропной жидкости в пористой среде. Применяются уравнения Буссинеска-Дарси с учетом эффекта Соре (термодиффузионный перенос). Выписана начально-краевая задача относительно функции тока, температуры и концентрации.

В § 1.3 проводится исследование условий, при которых рассматриваемые системы обладают линейной косимметрией. Аналитически находятся соотношения на параметры теплопроводности, проницаемости, молекулярной диффузии и термодиффузии, обеспечивающие косимметричность соответствующих систем.

В § 1.4 для косимметричных систем анизотропной фильтрационной конвекциии выводятся явные выражения критических чисел Рэлея, отвечающих монотонной неустойчивости механического равновесия. Для задачи о возникновении конвекции в анизотропной пористой среде, насыщенной теплопроводной жидкостью с примесью, получено соотношение между значениями температурного и концентрационного чисел Рэлея, соответствующие порогу неустойчивости состояния покоя.

Во второй главе. для решения сформулированных задач развивается подход на основе метода прямых, с использованием схемы смещенных

сеток по пространственным координатам и метода Рунге-Кутты для интегрирования по времени. Дискретизация уравнений по пространственным переменным строится на основе конечных разностей второго порядка точности. Рассмотрены различные варианты аппроксимации диффузионных и нелинейных слагаемых и выбраны операторы, сохраняющие косимметрию исходной задачи. Аналогичным образом построена система разностных уравнений, аппроксимирующая начально-краевую задачу конвекции жидкости с примесью в анизотропной среде.

В § 2.1 вводятся смещенные сетки для температуры, давления, скорости и определяются разностные операторы и операторы вычисления среднего. Далее выводится система алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующая плоскую задачу гравитационной конвекции в прямоугольнике. На основе введенных операторов получены аппроксимации уравнений в естественных переменных для внутренних узлов сетки.

В § 2.2 производится дискретизации задачи в переменных функция тока и девиация температуры. Для анализа устойчивости механического равновесия выписывается спектральная задача и получается система для численного определения критических чисел Рэлея. Аналогичным образом выводится система разностных уравнений, аппроксимирующая начально-краевую задачу конвекции жидкости с примесью в анизотропной среде.

В § 2.3 рассматривается вопрос о сохранении косимметрии в разностных аппроксимациях задачи гравитационной фильтрационной конвекции. Предложены аппроксимации линейных операторов теплопроводности, сохранение свойство косимметрии для дискретных задач.

Параграф § 2.4 посвящен программной реализация численных методов, развитых для исследования моделей анизотропной конвекции в пористой среде с учетом косимметричности используемых дифференциальных уравнений. Описывается структура и возможности программного комплекса Aniso2d, предназначеного для численного анализа и визуализации результатов. Комплекс программ Aniso2d разработан в среде MATLAB.

В третьей главе представлены результаты исследования гравитационной конвекции ортотропной жидкости и конвекции бинарной жидкости

в пористых прямоугольниках. На основе разработанных численных схем и программного обеспечения, описанных в главе 2, проводятся вычисления критических чисел Рэлея, конвективных движений и семейств стационарных режимов.

В § 3.1 анализируется возникновение конвекции в пористом прямоугольнике с учетом анизотропии тепловых характеристик и проницаемости. Представлены результаты вычисления критических чисел Рэлея и расчета нейтральных кривых.

В § 3.2 проводится численное исследование ответвляющихся от механического равновесия стационарных конвективных движений. Исследуется вопрос о расчете стационарных режимов при использовании аппроксимаций, нарушающих косимметрию исходной постановки.

В § 3.3 приводятся результаты вычисления семейств стационарных режимов для ряда значений управляющих параметров. Анализируется разрушение семейства стационарных режимов при нарушении условий косимметрии. Проводятся вычисления селективных функций, соответствующих различным сценариям изменения параметров задачи, и находятся изолированные конвективные режимы, существующие после распада семейства равновесий.

В § 3.4 рассматривается плоская задача о возникновении конвекции в пористом прямоугольнике, насыщенном бинарной жидкостью. Для ортотропных жидкости и среды на основе уравнений Дарси-Буссинеска и учета эффекта Соре проводится анализ монотонной и колебательной неустойчивости механического равновесия.

В Заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Глава 1. Уравнения конвекции теплопроводной жидкости в пористой среде

При исследовании конвекции в пористой среде, насыщенной теплопроводной жидкостью, применяются различные модели гидротермомеханики [95]. Для анализа возникновения конвективных движений широко используется подход на основе закона Дарси и приближения Буссинеска. На основе этого подхода изучаются эффекты анизотропии применительно к задаче гравитационной конвекции теплопроводной жидкости в пористой среде и бинарной жидкости в пористой среде.

В данной главе рассматривается общая постановка начально-краевых задач в случае подогрева снизу для естественных переменных и производится переход к безразмерным величинам в § 1.1. Для плоской задачи фильтрационной конвекции выписываются уравнения относительно функции тока и девиации температуры, проводится анализ свойств полученной системы.

В § 1.2 выводится система уравнений для исследования конвекции в случае бинарной жидкости в пористой прямоугольной области. Даются постановки начально-краевых задач с учетом концентрации примеси.

На основе теории косимметрии В.И. Юдовичем [40, 129] проводится исследование условий, при которых рассматриваемые системы обладают линейной косимметрией в § 1.3. Аналитически находятся соотношения на параметры теплопроводности, проницаемости, молекулярной диффузии и термодиффузии, обеспечивающие косимметричность соответствующих динамических систем.

В § 1.4 для этого случая выводятся явные выражения для критических чисел Рэлея, отвечающих монотонной неустойчивости механического равновесия.

1.1 Модель Дарси с учетом анизотропии тепловых характеристик и проницаемости среды

Уравнения для описания анизотропной фильтрационной гравитационной конвекции на основе закона Дарси могут быть записаны в виде следующей системы [95, 121]

$$\nabla p + \mu M \cdot \vec{V} + \rho_0 \beta (T - T_0)\vec{g} = 0, \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{1.2}$$

$$(\rho c_p)_m \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho c_p)_f \vec{V} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\Lambda \cdot \nabla T). \tag{1.3}$$

Здесь $\vec{V} = (u,v,w)$ — скорость, t — время, (x,y,z) — декартовы координаты, p — давление, T — температура, μ — вязкость жидкости, ρ — плотность, ρ_0 — плотность жидкости при отсчетной температуре T_0, β — коэффициент теплового расширения, $\vec{g} = (0, -g, 0)$ — гравитационное ускорение, M — тензор коэффициентов обратной проницаемости, Λ — тензор коэффициентов теплопроводности, Параметр $(\rho c_p)_m$ характеризует осредненное для жидкости и пористой среды произведение плотности на теплоемкость при ностоянном давлении, а параметр $(\rho c_p)_f$ дает аналогичную характеристику для жидкости.

1.1.1 Уравнения для плоской задачи в естественных переменных

Опишем постановку задачи о подогреве прямоугольного контейнера $\Omega = [0,a] \times [0,b]$, на границе которого заданы условия непротекания и линейный по высоте профиль температуры, а сила тяжести действует в направлении, обратном координате y

$$\begin{aligned} &u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0, \quad v(x,0,t) = v(x,b,t) = 0, \\ &T_*(y) = T_2 - \frac{y}{b}(T_2 - T_1), \end{aligned} \tag{1.4}$$

здесь T_1 и T_2 соответствуют температуре на верхней ($y = b$) и нижней ($y = 0$) границах. Для плоской задачи можно считать, что

$$\frac{\partial}{\partial z}(....) = 0, \quad w = 0, \quad M_{31} = M_{32} = 0. \tag{1.5}$$

В покомпонентной записи (1.1)–(1.3) получается следующая система уравнений,

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x} + \mu(M_{11}u + M_{12}v), \tag{1.6}$$

$$0 = \frac{\partial p}{\partial y} + \mu(M_{21}u + M_{22}v) - \rho_0\beta(T - T_0)g, \tag{1.7}$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}(\rho c_p)_m\frac{\partial T}{\partial t} &= -(\rho c_p)_f\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\Lambda_{11}\frac{\partial T}{\partial x} + \Lambda_{12}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\\ &+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Lambda_{21}\frac{\partial T}{\partial x} + \Lambda_{22}\frac{\partial T}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{1.9}$$

Далее вводится девиация температурного поля θ:

$$T(x,y,t) = T_*(y) + \theta(x,y,t)$$

и делается переход к безразмерным величинам по формулам:

$$x = h_*\tilde{x}, \quad y = h_*\tilde{y}, \quad u = v_*\tilde{u}, \quad v = v_*\tilde{v}, \quad t = t_*\tilde{t},$$

$$\hat{P} = P_*\tilde{P}, \quad \hat{P} = p - \int\limits_0^y \rho_0\beta g(T_* - T_0)dy,$$

$$\theta = \tau_*\tilde{\theta}, \quad M_{ij} = M_{22}\mu_{ij}, \quad d_{ij} = \frac{1}{\Lambda_{22}}\Lambda_{ij}.$$

Выбираются размерные характеристики длины h_*, скорости v_*, давления P_*, времени t_* и температуры τ_*:

$$h_* = b, \quad v_* = \frac{\Lambda_{22}}{(\rho c_p)_f b}, \quad P_* = \frac{\mu\Lambda_{22}M_{22}}{(\rho c_p)_f}$$

$$\tau_* = \Delta T = (T_2 - T_1), \quad t_* = \frac{b^2(\rho c_p)_m}{\Lambda_{22}} \tag{1.10}$$

Фильтрацюиное число Рэлея λ определяется следующей формулой

$$\lambda = \frac{(\rho c_p)_f\Delta T b\rho_0\beta g}{M_{22}\mu\Lambda_{22}} \tag{1.11}$$

В результате для безразмерных величин (знак "тильда" над переменными опущен) получается система:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_{11} u + \mu_{12} v = 0, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \mu_{21} u + \mu_{22} v - \lambda\theta = 0, \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u\frac{\partial \theta}{\partial x} + v\frac{\partial \theta}{\partial y} - v = L_D\theta, \tag{1.15}$$

Здесь оператор L_D содержит безразмерные коэффициенты теплопроводности d_{ij} и дается формулой

$$L_D = \frac{\partial}{\partial x}\left(d_{11}\frac{\partial}{\partial x} + d_{12}\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(d_{21}\frac{\partial}{\partial x} + d_{22}\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{1.16}$$

Полученная система уравнений относительно скорости, давления и девиации (возмущения) температуры может быть записана в векторной форме

$$\nabla p + M \cdot V + \lambda\theta\vec{\gamma} = 0, \tag{1.17}$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \tag{1.18}$$

$$\dot{\theta} = L_D\theta - \vec{V} \cdot \vec{\gamma} - (\vec{V} \cdot \nabla)\theta. \tag{1.19}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени t, M представляет тензор безразмерных коэффициентов обратной проницаемости μ_{ij}, $\gamma = (0,-1)$ – единичный вектор, определяющий направление силы тяжести.

Уравнения (1.12)–(1.15) дополняются краевыми условями непротекания и однородности девиации температуры на границе $\partial\Omega$

$$u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0, \quad v(x,0,t) = v(x,b,t) = 0, \tag{1.20}$$

$$\theta(x,0,t) = \theta(0,y,t) = \theta(a,y,t) = \theta(x,b,t) = 0. \tag{1.21}$$

1.1.2 Система уравнений относительно функции тока и температуры

Система (1.12)–(1.15) описывает конвекцию в естественных переменных. Для анализа двумерной задачи удобно ввести функцию тока ψ

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x, \quad ()_x = \frac{\partial}{\partial x}(), \quad ()_y = \frac{\partial}{\partial y}(), \tag{1.22}$$

и получить систему относительно двух неизвестных: функции тока ψ и температуры θ (девиации температуры). Уравнение (1.14) автоматически вынолняется. Дифференцированием (1.12) по y, (1.13) по x и последующим вычислением их разности получается уравнение

$$0 = \mu_{11}\psi_{yy} - (\mu_{12} + \mu_{21})\psi_{xy} + \mu_{22}\psi_{xx} + \lambda\theta_x = f_1 \tag{1.23}$$

В (1.15) заменим u, v по формулая (1.22)

$$\dot{\theta} = L_D\theta - \psi_x - J(\psi, \theta) = f_2, \tag{1.24}$$

Здесь

$$J = \theta_x\psi_y - \theta_y\psi_x \tag{1.25}$$

Из (1.4) следуют краевые условия для функции тока

$$\psi(x,0,t) = \psi(0,y,t) = \psi(a,y,t) = \psi(x,b,t) = 0. \tag{1.26}$$

Из уравнений (1.23)–(1.26), (1.20) при $\mu_{ii} = d_{ii} = 1, \quad (i = 1,2)$ и $\mu_{ij} = d_{ij} = 0, \quad (i \neq j)$ следует система, описывающая конвекцию теплопроводной жидкости для изотропной пористой среды. В [40] показано, что в этом случае задача имеет косимметрию и возможно возникновение семейства стационарных конвективных движений.

Далее понадобятся следующее свойства якобиана $J(\psi,\theta)$

$$\int_\Omega J(\psi,\theta)\psi dxdy = 0 \tag{1.27}$$

Также система (1.23)–(1.24) обладает свойством гироскопичности

$$\int_\Omega J(\psi,\theta)\theta dxdy = 0. \tag{1.28}$$

Это, в частности, обеспечивает отсутствие нелинейностей третьего порядка в интегральном уравнении энергии, которое получится, если умножить (1.24) на θ и проинтегрировать по области Ω с учетом краевых условий (1.20)

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{\theta^2}{2}dxdy = -\int_{\Omega}\left[(\nabla\theta)^2 - (\nabla\psi)^2\right]dxdy. \tag{1.29}$$

При дискретизации уравнений (1.23)–(1.24) нужно следить за тем, чтобы выполнялись дискретные аналоги интегральных тождеств (1.27)–(1.28). Построенные таким образом численные схемы будут консервативными, следуя терминологии [36].

Система (1.23)–(1.24) инвариантна относительно преобразования

$$R_{xy} \ : \ \{x, y, \psi, \theta\} \mapsto \{a - x, b - y, \psi, -\theta\}. \tag{1.30}$$

Если $\mu_{12} = \mu_{21} = d_{12} = d_{21} = 0$, то имеется также инвариантность

$$R_x \ : \ \{x, y, \psi, \theta\} \mapsto \{a - x, y, -\psi, \theta\}. \tag{1.31}$$

Для анализа конвективных движений система (1.20), (1.23)–(1.26) должна быть дополнена начальным распределением температуры

$$\theta(x,y,0) = \theta_0(x,y). \tag{1.32}$$

Начальное условие для функции тока не требуется, а соответствующее распределение при $t = 0$ находится из задачи (1.23), (1.26) по заданной функции $\theta_0(x,y)$. Полученная начально-краевая задача позволяет рассчитать стационарные и нестационарные режимы гравитационной конвекции анизотропной теплопроводной жидкости в анизотропном пористом прямоугольнике, подогреваемом снизу.

1.2 Конвекция бинарной жидкости в пористом анизотропном прямоугольнике

Рассматривается задача о возникновении конвекции теплопроводной жидкости с примесью в пористой прямоугольной области, подогреваемой снизу и заданном распределении примеси на границе. Применяются уравнения Буссинеска-Дарси [95], которые в безразмерных переменных могут быть записаны в следующем виде.

$$\eta\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\nabla p+\mu M\cdot V+\rho_0[\beta_T(T-T_0)+\beta_C(C-C_0)]\vec{g}=0, \quad (1.33)$$

$$\nabla\cdot\vec{V}=0, \quad \nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right) \quad (1.34)$$

$$\kappa_1\frac{\partial T}{\partial t}+\kappa_2\vec{V}\cdot\nabla T=\nabla\cdot(\Lambda^T\cdot\nabla T) \quad (1.35)$$

$$\kappa_3\frac{\partial C}{\partial t}+\kappa_4\vec{V}\cdot\nabla C=\nabla\cdot\left(\Lambda^C\cdot\nabla C+\Lambda^{CT}\cdot\nabla T\right) \quad (1.36)$$

Здесь t — время, (x,y,z) — декартовы координаты, параметр η учитывает инерцию поля скорости $\vec{V}=(u,v,w)$, p — давление, T — температура, C — концентрация примеси, μ — вязкость жидкости, ρ — плотность, $\vec{g}=(0,-g,0)$ и g — ускорение свободного падения, Λ^T — тензор коэффициентов термопроводимости, M — тензор коэффициентов обратной проницаемости, ρ_0 — плотность жидкости при отсчетной температуре T_0 и концентрации C_0. Заданы коэффициенты теплового и объемного концентрационного расширения β_T и β_C, Λ^C и Λ^{CT} — тензоры коэффициентов молекулярной диффузии и термодиффузии (эффект Соре). Параметры $\kappa_j,(j=1,\cdots,4)$ характеризуют инерцию распространения тепля и примеси, $\kappa_1=(\rho c_p)_m$ есть осредненное для жидкости и пористой среды произведение плотности на теплоемкость при ностоянном давлении, а $\kappa_2=(\rho c_p)_f$ соответствует жидкости при наличии примеси. Аналогичные характеристики κ_3,κ_4 используются в уравнении (1.36), далее принято, что $\kappa_1/\kappa_2=\kappa_3/\kappa_4$.

На основе уравнений (1.33)–(1.36) рассматривается плоская задача для прямоугольного контейнера $\Omega = [0,a] \times [0,b]$, на границе которого заданы условия непротекания

$$\vec{v} \cdot n \,|_{\partial\Omega} = 0,$$

n — нормаль к границе $\partial\Omega$, и определены линейные по высоте профили распределения температуры и примеси

$$T_*(y) = T_2 - \frac{y}{b}\Delta T, \quad \Delta T = (T_2 - T_1),$$
$$C_*(y) = C_2 - \frac{y}{b}\Delta C, \quad \Delta C = (C_2 - C_1).$$

Здесь T_1 и T_2 (C_1 и C_2) — температуры (концентрации примеси) на верхней ($y = b$) и нижней ($y = 0$) границах соответственно, сила тяжести действует в направлении, обратном координате y.

Далее вводится возмущение температурного поля θ и концентрации c

$$T(x,y,t) = T_*(y) + \theta(x,y,t),$$
$$C(x,y,t) = C_*(y) + c(x,y,t)$$

и делается переход к безразмерным величинам по формулам:

$$u = v_* u', \quad v = v_* v', \quad x = bx', \quad y = by', \quad t = t_* t',$$
$$\eta = \frac{P_* t_*}{b v_*}\eta', \quad \theta = \frac{\theta'}{\beta_T}, \quad c = \frac{c'}{\beta_C}, \quad M_{ij} = \frac{\rho_0 g \mu_{ij}}{v_* \mu},$$
$$p - \rho_0 g \int\limits_0^y \left[\beta_T (T_* - T_0) + \beta_C (C_* - C_0)\right] dy = P_* p',$$
$$\Lambda_{ij}^T = \Lambda_{11}^T d_{ij}^T, \quad \Lambda_{ij}^C = \frac{\Lambda_{11}^T \kappa_3}{\kappa_1} d_{ij}^C, \quad \Lambda_{ij}^{CT} = \frac{\beta_T \Lambda_{11}^T \kappa_3}{\beta_C \kappa_1} d_{ij}^{CT}, \tag{1.37}$$

где размерные характеристики времени t_*, скорости v_*, давления P_*, определены следующим образом:

$$t_* = \frac{b^2 \kappa_1}{\Lambda_{11}^T}, \quad v_* = \frac{\Lambda_{11}^T}{\kappa_2 b}, \quad P_* = \rho_0 g b \tag{1.38}$$

Поведение системы характеризуется температурным числом Рэлея λ^T и концентрационным числом Рэлея λ^C:

$$\lambda^T = \frac{\kappa_2 v_* \Delta T b \beta_T}{\Lambda_{11}^T} = \Delta T \beta_T, \tag{1.39}$$

$$\lambda^C = \frac{\kappa_4 \kappa_1 v_* \Delta C b \beta_C}{\kappa_3 \Lambda_{11}^T} = \Delta C \beta_C. \tag{1.40}$$

Из уравнений (1.33)–(1.36) получается система для двумерной задачи (штрихи над безразмерными переменными опускаются):

$$\eta \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \mu_{11} u - \mu_{12} v, \tag{1.41}$$

$$\eta \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} - \mu_{21} u - \mu_{22} v + \theta + c, \tag{1.42}$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.43}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = L^T \theta - u \frac{\partial \theta}{\partial x} - v \frac{\partial \theta}{\partial y} + \lambda^T v, \tag{1.44}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = L^C c - u \frac{\partial c}{\partial x} - v \frac{\partial c}{\partial y} + \lambda^C v + L^{CT} \theta, \tag{1.45}$$

где

$$L^T = \frac{\partial}{\partial x}\left[d_{11}^T \frac{\partial}{\partial x} + d_{12}^T \frac{\partial}{\partial y}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[d_{21}^T \frac{\partial}{\partial x} + d_{22}^T \frac{\partial}{\partial y}\right]. \tag{1.46}$$

Операторы L^C и L^{CT} получаются из (1.46) заменой d_{ij}^T по d_{ij}^C и d_{ij}^{CT} соответственно.

Уравнения (1.41)–(1.45) дополняются краевыми условями непротекания и однородности девиации температуры θ и концентрации c на границе $\partial\Omega$

$$u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0, \quad v(x,0,t) = v(x,b,t) = 0, \tag{1.47}$$

$$\theta(x,0,t) = \theta(0,y,t) = \theta(a,y,t) = \theta(x,b,t) = 0, \tag{1.48}$$

$$c(x,0,t) = c(0,y,t) = c(a,y,t) = c(x,b,t) = 0. \tag{1.49}$$

В результате введения функции тока ψ

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x, \tag{1.50}$$

получается система относительно функции тока ψ, температуры θ и концентрации c:

$$-\eta\Delta\dot{\psi} = M_0\psi + \theta_x + c_x, \tag{1.51}$$

$$M_0\psi = \mu_{11}\psi_{yy} - (\mu_{12} + \mu_{21})\psi_{xy} + \mu_{22}\psi_{xx} \tag{1.52}$$

$$\dot{\theta} = L^T\theta - \lambda^T\psi_x - J(\psi,\theta), \quad J(\psi,\theta) = \theta_x\psi_y - \theta_y\psi_x \tag{1.53}$$

$$\dot{c} = L^C c - \lambda^C\psi_x + L^{CT}\theta - J(\psi,c). \tag{1.54}$$

Из (1.47) следуют краевые условия для функции тока

$$\psi(x,0,t) = \psi(0,y,t) = \psi(a,y,t) = \psi(x,b,t) = 0 \tag{1.55}$$

Система (1.48)–(1.49), (1.51)–(1.55) дополняется начальными условиями

$$\theta(x,y,0) = \theta_0(x,y), \tag{1.56}$$

$$c(x,y,0) = c_0(x,y), \tag{1.57}$$

$$\psi(x,y,0) = \psi_0(x,y), \tag{1.58}$$

здесь $\psi_0(x,y)$, $\theta_0(x,y)$ и $c_0(x,y)$ – соответственно начальные распределения функция тока, девиации температуры и концентрации частиц.

1.3 Косимметрия для анизотропных задач конвекции в пористой среде

В данном параграфе установлены условия на параметры, при которых рассматриваемые системы являются косимметричными. В [40] введено понятие косимметричной пары операторов, действующих в гильбертовом пространстве – таких, что их значения в каждой точке ортогональны. Их общий нуль называется косимметричным решением. В [40, 129] показано, что некосимметричные нули каждого члена косимметричнои пары в условиях общего положения образуют однопараметрические семейства.

1.3.1 Уравнения гравитационной фильтрационной конвекции

Для задачи с учетом анизотропии тепловых свойств и проницаемости имеется линейная косимметрия, что устанавливает следующая лемма.

Лемма 1. При выполнении условий на параметры

$$\mu_{11}d_{12} = -\mu_{12}d_{22}, \quad \mu_{11}d_{21} = -\mu_{21}d_{22}, \quad \mu_{11}d_{11} = \mu_{22}d_{22} \tag{1.59}$$

косимметрией задачи (1.12)–(1.20) будет вектор-функция

$$Z = (d_{22}\theta_y, -d_{22}\theta_x, 0, \mu_{11}\psi) \tag{1.60}$$

Доказательство.
Косимметрия Z должна быть ортогональна F — правой части системы (1.12)–(1.20). Это требует выполнения интегрального тождества

$$I = (F,Z) = 0$$

где

$$I = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = d_{22}\int_0^b\int_0^a \quad [\theta_y\left(p_x + \mu_{11}u + \mu_{12}v\right) - \\ - \quad \theta_x\left(p_y + \mu_{21}u + \mu_{22}v\right) + \lambda\left(\frac{\theta^2}{2}\right)_x]dxdy,$$

$$I_2 = \mu_{11}\int_0^b\int_0^a \quad [\psi(d_{11}\theta_{xx} + d_{12}\theta_{xy} + d_{21}\theta_{yx} + d_{22}\theta_{yy}) + \\ + \quad v\psi - \psi(u\theta_x + v\theta_y)]dxdy.$$

В результате перебрасывая производные и учета краевых условий выводятся следующие тождества

$$\int_0^b\int_0^a \left(\theta_y p_x - \theta_x p_y\right)dxdy = \\ = \int_0^a \theta p_x\Big|_0^b dx - \int_0^b \theta p_y\Big|_0^a dy - \int_0^b\int_0^a \theta\left(p_{xy} - p_{xy}\right)dxdy = 0 \quad (1.61)$$

и

$$\int_0^b\int_0^a \lambda\left(\frac{\theta^2}{2}\right)_x dxdy = \lambda\int_0^b\left(\frac{\theta^2}{2}\right)\Big|_0^a dy = 0. \quad (1.62)$$

Тогда для I_1 получается

$$I_1 = d_{22}\int_0^b\int_0^a \left[\theta_y(\mu_{11}u + \mu_{12}v) - \theta_x(\mu_{21}u + \mu_{22}v)\right]dxdy. \quad (1.63)$$

Поскольку

$$\int_0^b\int_0^a v\psi dxdy = -\int_0^b\int_0^a \psi_x\psi dxdy = -\int_0^b \frac{\psi^2}{2}\Big|_0^a dy = 0 \quad (1.64)$$

и

$$\int_0^b\int_0^a \psi(u\theta_x + v\theta_y)dxdy = \; - \int_0^b\int_0^a \theta[\psi(u_x + v_y) + \psi_x u + \psi_y v]dxdy \\ + \int_0^b \psi u\theta\Big|_0^a dy + \int_0^a \psi v\theta\Big|_0^b dx = 0 \quad (1.65)$$

то после перебрасывания производных получается, что

$$
\begin{aligned}
I_2 = \int_0^b \int_0^a & \quad \mu_{11}[d_{11}v\theta_x + vd_{12}\theta_y - u(d_{21}\theta_x + d_{22}\theta_y)]dxdy - \\
& - \mu_{11} \int_0^b \psi(d_{11}\theta_x + d_{12}\theta_y)\Big|_0^a dy - \\
& - \mu_{11} \int_0^a \psi(d_{21}\theta_x + d_{22}\theta_y)\Big|_0^b dx.
\end{aligned} \tag{1.66}
$$

С учетом краевых условий одномерные интегралы пропадают, из (1.63)–(1.66) следует выражение для I

$$
\begin{aligned}
I = \int_0^b \int_0^a & \quad [u\theta_x(-d_{22}\mu_{21} - (\mu_{11}d_{21}) + v\theta_x(-d_{22}\mu_{22} + (\mu_{11}d_{11}) + \\
& + v\theta_y(d_{22}\mu_{12} + (\mu_{11}d_{12})]dxdy = 0.
\end{aligned} \tag{1.67}
$$

При выполнении условий (1.59) интеграл $I = 0$, т.е. вектор Z (1.60) будет косимметрией задачи (1.12)–(1.20).

Аналогично показывается, что для системы (1.23)–(1.26), (1.20) при условиях (1.59) косимметрия дается вектор-функцией $Z = (d_{22}\theta, -\mu_{11}\psi)$.

Согласно [129], требуется проверить, что обращается в нуль интеграл

$$
I = \int_\Omega [f_1 d_{22}\theta - f_2\mu_{11}\psi]\, dxdy = \tag{1.68}
$$

$$
\begin{aligned}
= \int_\Omega & \big[[\mu_{11}\psi_{yy} - (\mu_{12} + \mu_{21})\psi_{xy} + \mu_{22}\psi_{xx} + \lambda\theta_x]d_{22}\theta - \\
& -[L_D\theta - \psi_x - J(\psi,\theta)]\mu_{11}\psi\big]\, dxdy
\end{aligned} \tag{1.69}
$$

Слагаемое с якобианом J пропадает в силу (1.27). Интегрирование по частям и учет краевых условий (1.20), (1.23)–(1.26) позволяет записать I в виде

$$
\begin{aligned}
I = \int_\Omega & \quad [\psi_y\theta_x(-d_{22}\mu_{21} - d_{21}\mu_{11}) + \psi_y\theta_y(d_{22}\mu_{11} - d_{22}\mu_{11}) - \\
& - \psi_x\theta_x(-d_{22}\mu_{22} + d_{11}\mu_{11}) - \psi_x\theta_y(d_{22}\mu_{12} + d_{12}\mu_{11})]dxdy
\end{aligned} \tag{1.70}
$$

В силу условий (1.59) получается $I = 0$.

1.3.2 Бинарная жидкость в пористой среде

Выше показано, что задача о конвекции теплопроводной жидкости в пористой среде с учетом анизотропии свойств среды является косимметричной. Для системы (1.48), (1.49), (1.51)–(1.58) также имеется косимметрия. Следующая лемма устанавливает условия существования линейной по переменным задачи косимметрии

Лемма. Вектор-функция

$$Z = (\theta + c, S_1\psi, S_2\psi), \quad S_1 = \mu_{11}\frac{\left[d_{22}^{CT} - d_{22}^{C}\right]}{d_{22}^{T}d_{22}^{C}}, \quad S_2 = -\frac{\mu_{11}}{d_{22}^{C}} \tag{1.71}$$

будет косимметрией системы (1.48), (1.49), (1.51)–(1.58) при выполнении условий на параметры

$$\begin{aligned}
&\mu_{11}d_{12}^{C} = -\mu_{12}d_{22}^{C}, \quad \mu_{11}d_{21}^{C} = -\mu_{21}d_{22}^{C}, \quad \mu_{11}d_{11}^{C} = \mu_{22}d_{22}^{C},\\
&\left[\mu_{12}d_{22}^{C} + \mu_{11}d_{12}^{CT}\right] d_{22}^{T} = \left[-d_{22}^{C} + d_{22}^{CT}\right] \mu_{11}d_{12}^{T},\\
&\left[\mu_{21}d_{22}^{C} + \mu_{11}d_{21}^{CT}\right] d_{22}^{T} = \left[-d_{22}^{C} + d_{22}^{CT}\right] \mu_{11}d_{21}^{T},\\
&\left[-\mu_{22}d_{22}^{C} + \mu_{11}d_{11}^{CT}\right] d_{22}^{T} = \left[-d_{22}^{C} + d_{22}^{CT}\right] \mu_{11}d_{11}^{T}.
\end{aligned} \tag{1.72}$$

Доказательство. После умножения правой части системы (1.51)–(2.65) на косимметрию (1.71) и интегрирования по частям с учетом краевых условий (1.48), (1.49), (1.58) получается интеграл

$$\begin{aligned}
I = \int_{\Omega} \Big[\; & \psi_y\theta_y\left[\mu_{11} + S_1d_{22}^{T} + S_2d_{22}^{CT}\right] + \psi_y c_y\left[\mu_{11} + S_2d_{22}^{C}\right] + \\
& \psi_y\theta_x\left[-\mu_{12} + S_1d_{12}^{T} + S_2d_{12}^{CT}\right] + \psi_y c_x\left[-\mu_{12} + S_2d_{12}^{C}\right] + \\
& +\psi_x\theta_y\left[-\mu_{21} + S_1d_{21}^{T} + S_2d_{21}^{CT}\right] + \psi_x c_y\left[-\mu_{21} + S_2d_{21}^{C}\right] + \\
& +\psi_x\theta_x\left[\mu_{22} + S_1d_{11}^{T} + S_2d_{11}^{CT}\right] + \psi_x c_x\left[\mu_{22} + S_2d_{11}^{C}\right]\Big]dxdy
\end{aligned} \tag{1.73}$$

В силу условий (1.72) этот интеграл обращается в ноль для любых функций ψ, θ, c, удовлетворяющих краевым условиям. Это означает ортогональность вектор-функции Z векторному полю задачи, т.е. Z является косимметрией системы (1.48), (1.49), (1.51)–(1.58).

Далее рассматривается случай ортотропных бинарной жидкости и среды ($\mu_{ij} = d_{ij}^{T} = d_{ij}^{C} = d_{ij}^{CT} = 0, i \neq j, i,j = 1,2$). Из условий косимметрии

(1.72) остаются следующие два соотношения на параметры

$$\mu_{11} d_{11}^{C} = \mu_{22} d_{22}^{C}, \tag{1.74}$$

$$\left[-\mu_{22} d_{22}^{C} + \mu_{11} d_{11}^{CT}\right] d_{22}^{T} = \left[-d_{22}^{C} + d_{22}^{CT}\right] \mu_{11} d_{11}^{T}. \tag{1.75}$$

Замечание. Аналогично [1] можно показать, что при условиях (1.72) система (1.41)–(1.46), (1.47)–(1.49) обладает косимметрией

$$L = (\theta_x, c_x, 0, S_1\psi, S_2\psi).$$

Таким образом, для задачи с учетом анизотропии тепловых свойств жидкости с примесью и проницаемости среды получены условия, при которых соответствующая система уравнений имеет линейную по переменным задачи косимметрию.

При отсутствии примеси ($C = 0$) задача сводится к системе для теплопроводной жидкости. В этом случае косимметрией системи (1.48), (1.51), (2.64) и (1.58) является вектор $L = (\theta, S\psi)$ где $S = -\mu_{11}/d_{22}^{T}$.

1.4 Устойчивость механического равновесия и возникновение конвекции

Исследование устойчивости механического равновесия является важной задачей при анализе возникновениz конвекции. В случае анизотропии получение явных выражений для критических значений чисел Рэлея удается провести для параметров, отвечающих условиями косимметрии.

1.4.1 Анизотропная фильтрационная конвекция при подогреве

Спектральная задачя для определения критических значений λ при постоянных d_{ij} получается из (1.23)–(1.24)

$$0 = \mu_{11}\psi_{yy} - (\mu_{12} + \mu_{21})\psi_{xy} + \mu_{22}\psi_{xx} + \lambda\theta_x \tag{1.76}$$

$$0 = d_{11}\theta_{xx} + (d_{12} + d_{21})\theta_{xy} + d_{22}\theta_{yy} - \psi_x. \tag{1.77}$$

$$\theta(x,0,t) = \theta(0,y,t) = \theta(a,y,t) = \theta(x,b,t) = 0. \tag{1.78}$$

$$\psi(x,0,t) = \psi(0,y,t) = \psi(a,y,t) = \psi(x,b,t) = 0. \tag{1.79}$$

В результате замен

$$\lambda = \kappa^2, \quad \frac{\psi}{\kappa} \longrightarrow \psi, \tag{1.80}$$

и дополнительных упрощений

$$\mu_{12} = \mu_{21}, \quad d_{12} = d_{21}, \tag{1.81}$$

из (1.76)–(1.77) получается система

$$0 = \mu_{11}\psi_{yy} - 2\mu_{12}\psi_{xy} + \mu_{22}\psi_{xx} + \kappa\theta_x \tag{1.82}$$

$$0 = d_{11}\theta_{xx} + 2d_{12}\theta_{xy} + d_{22}\theta_{yy} - \kappa\psi_x. \tag{1.83}$$

Далее рассматривается случай косимметрии, пусть $\mu_{11} = d_{22}$, $\mu_{22} = d_{11}$ и пренебрегается кросс-диффузней ($\mu_{12} = \mu_{21} = d_{12} = d_{21} = 0$). В этом

случае система (1.82)–(1.83) запишется в виде

$$d_{11}\psi_{xx} + d_{22}\psi_{yy} + \kappa\theta_x = 0, \tag{1.84}$$

$$d_{11}\theta_{xx} + d_{22}\theta_{yy} - \kappa\psi_x = 0. \tag{1.85}$$

Введением комплексной переменной

$$w = \psi + i\theta \tag{1.86}$$

из (1.84)–(1.85) выводится

$$d_{11}w_{xx} + d_{22}w_{yy} - i\kappa w_x = 0. \tag{1.87}$$

С помощью подстановки

$$w(x,y) = \varphi(x,y)e^{i\kappa x/2d_{11}}, \tag{1.88}$$

получается следующая спектральная задача для прямоугольника $\Omega = [0,a] \times [0,b]$

$$d_{11}\varphi_{xx} + d_{22}\varphi_{yy} = \frac{\kappa^2}{4d_{11}}\varphi, \quad \varphi|_{\partial D} = 0. \tag{1.89}$$

После замены пространственных координат по формулам

$$\frac{x}{\sqrt{d_{11}}} = \tilde{x}, \quad \frac{y}{\sqrt{d_{22}}} = \tilde{y}, \tag{1.90}$$

задача Дирихле для прямоугольника $\tilde{\Omega} = [0,\tilde{a}] \times [0,\tilde{b}]$, $\tilde{a} = a/\sqrt{d_{11}}$, $\tilde{b} = b/\sqrt{d_{22}}$, имеет вид

$$\Delta\varphi = -\omega^2\varphi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial\tilde{y}^2}, \tag{1.91}$$

$$\omega = \frac{\kappa}{2\sqrt{d_{11}}}, \quad \varphi|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0. \tag{1.92}$$

Собственныме функции и числа задачи (1.91) даются формулами

$$\varphi_{ij} = C\sin\left(\frac{i\pi\tilde{x}\sqrt{d_{11}}}{a}\right)\sin\left(\frac{j\pi\tilde{y}\sqrt{d_{22}}}{b}\right), \tag{1.93}$$

$$\omega_{ij}^2 = \pi^2\left(\frac{d_{11}}{a^2}i^2 + \frac{d_{22}}{b^2}j^2\right). \tag{1.94}$$

Таким образом, для критических чисел Рэлея получается явная формула:

$$\lambda_{ij} = 4\pi^2 d_{11}\left(\frac{d_{11}}{a^2}i^2 + \frac{d_{22}}{b^2}j^2\right), \quad i,j = 1,2,.... \tag{1.95}$$

Критические значения фильтрационного числа Рэлея λ для случая изотропии следуют из (1.95) при $d_{11} = d_{22}$ и совпадают с формулой [40]

$$\lambda_{ij} = 4\pi^2\left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{b^2}\right), \quad i, j \in Z. \tag{1.96}$$

В [40, 129] показано, что первое критическое значение λ_{11} двукратно для произвольной области и при переходе параметра λ через λ_{11} от состояния механического равновесия ответвляется семейство стационарных режимов. Это семейство для плоской задачи фильтрационной конвекции имеет переменный спектр, что отличает косимметричную ситуацию от симметричной [129]. Каждому переходу λ через последующие критические значения λ_{ij} соответствует бифуркация рождения семейства неустойчивых стационарных режимов.

Собственные числа спектральной задачи (1.82)–(1.83) являются функциями коэффициентов проницаемости, теплопроводности и геометрических параметров. Для фиксированной области корень квадратный из числа Рэлея λ зависит от шести параметров

$$\kappa = \kappa(\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{22}, d_{11}, d_{12}, d_{22}). \tag{1.97}$$

С использованием свойства симметрии задачи делается замена $x \longmapsto (a-x)$ в уравнениях (1.82)–(1.83):

$$0 = \mu_{11}\psi_{yy} + 2\mu_{12}\psi_{xy} + \mu_{22}\psi_{xx} - \kappa\theta_x \tag{1.98}$$

$$0 = d_{11}\theta_{xx} - 2d_{12}\theta_{xy} + d_{22}\theta_{yy} + \kappa\psi_x. \tag{1.99}$$

В результате сравнения (1.98)–(1.99) с исходными уравнениями (1.82)–(1.83) получается следующее соотношение на параметры:

$$\kappa(\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{22}, d_{11}, d_{12}, d_{22}) = \kappa(d_{22}, -d_{12}, d_{11}, \mu_{22}, -\mu_{12}, \mu_{11}). \tag{1.100}$$

В частности, если зафиксированы параметры $\mu_{22} = d_{11}, \mu_{12} = d_{12} = 0$, то критическое значение числа Рэлея λ зависит от μ_{11}, d_{22}. В этом случае из (1.100) получается следующее свойство для критических чисел.

$$\lambda(\mu_{11}, d_{22}) = \lambda(d_{22}, \mu_{11}) \tag{1.101}$$

Отметим, что случай $\mu_{11} = d_{22}$ отвечает косимметрии задачи.

Таким образом, косимметрия соответствует экстремуму для параметра, характеризующего отклонение от косимметричного случая, и справедлива формула ($\delta \in R$).

$$\lambda(\mu_{11} + \delta, \mu_{11}) = \lambda(\mu_{11}, \mu_{11} + \delta) \tag{1.102}$$

В гл. 3 приведены результаты, подтверждающие этот вывод.

1.4.2 Задача для бинарной жидкости в пористом прямоугольнике

Уравнениям (1.51)–(2.65) удовлетворяет нулевое решение

$$\theta = \psi = c = 0, \tag{1.103}$$

отвечающее механическому равновесию. Далее проводится анализ устойчивости механического равновесия в случае ортотропной среды и жидкости:

$$\mu_{12} = \mu_{21} = d_{12}^T = d_{21}^T = d_{12}^C = d_{21}^C = d_{12}^{CT} = d_{21}^{CT} = 0.$$

Для возмущений из (1.51)–(2.65) получается линейная система

$$-\eta\Delta\dot{\psi} = \mu_{11}\psi_{yy} + \mu_{22}\psi_{xx} + \theta_x + c_x, \tag{1.104}$$

$$\dot{\theta} = d_{11}^T\theta_{xx} + d_{22}^T\theta_{yy} - \lambda^T\psi_x, \tag{1.105}$$

$$\dot{c} = d_{11}^C c_{xx} + d_{22}^C c_{yy} - \lambda^C\psi_x + d_{11}^{CT}\theta_{xx} + d_{22}^{CT}\theta_{yy}, \tag{1.106}$$

с нулевыми краевыми условиями

$$\psi|_{\partial\tilde{\Omega}} = \theta|_{\partial\tilde{\Omega}} = c|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.107}$$

Спектральная задача для определения спектра устойчивости механического равновесия имеет вид (σ – декремент)

$$-\sigma\eta\Delta\psi = \mu_{11}\psi_{yy} + \mu_{22}\psi_{xx} + \theta_x + c_x, \tag{1.108}$$

$$\sigma\theta = d_{11}^T\theta_{xx} + d_{22}^T\theta_{yy} - \lambda^T\psi_x, \tag{1.109}$$

$$\sigma c = d_{11}^C c_{xx} + d_{22}^C c_{yy} - \lambda^C\psi_x + d_{11}^{CT}\theta_{xx} + d_{22}^{CT}\theta_{yy}. \tag{1.110}$$

Для получения критических чисел Рэлея λ^T, λ^C, отвечающих монотонной потере устойчивости механического равновесия (декремент равен нулю), система (1.108)–(1.110), переписывается с введением следующих обозначений

$$\mu = \frac{\mu_{11}}{\mu_{22}}, \quad \lambda_1 = \frac{\lambda^T}{\mu_{22} d_{11}^T}, \quad \lambda_2 = \frac{\lambda^C}{\mu_{22} d_{11}^C},$$
$$d_1 = \frac{d_{22}^T}{d_{11}^T}, \quad d_2 = \frac{d_{22}^C}{d_{11}^C}, \quad d_3 = \frac{d_{11}^{CT}}{d_{11}^C}, \quad d_4 = \frac{d_{22}^{CT}}{d_{11}^C}. \tag{1.111}$$

и замены переменных

$$\theta' = \frac{\theta}{\mu_{22}}, \quad c' = \frac{c}{\mu_{22}}.$$

В результате получается система (штрихи для θ, c удалены)

$$0 = \mu\psi_{yy} + \psi_{xx} + \ (\theta + c)_x, \tag{1.112}$$
$$0 = \theta_{xx} + d_1\theta_{yy} - \lambda_1\psi_x, \tag{1.113}$$
$$0 = c_{xx} + d_2 c_{yy} - \lambda_2\psi_x + d_3\theta_{xx} + d_4\theta_{yy}, \tag{1.114}$$
$$\psi|_{\partial\tilde{\Omega}} = \theta|_{\partial\tilde{\Omega}} = c|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0. \tag{1.115}$$

Косимметрией системы (1.112)–(1.115) будет вектор-функция

$$Z = (\theta + c, (d_3 - 1)\psi, -\psi) \tag{1.116}$$

При этом должны выполняться условия косимметрии (1.74), (1.75), записываемые в новых обозначениях в виде

$$d_2 = \mu, \quad d_{11}^T \left[d_{22}^{CT} - d_{22}^C\right] = d_{22}^T \left[d_{11}^{CT} - d_{11}^C\right]. \tag{1.117}$$

Утверждение. Критические числе Рэлея λ^T и λ^C, отвечающие монотонной неустойчивости механического равновесия (1.103), связаны соотношением

$$\lambda_{crit}^T \left[d_{11}^C - d_{11}^{CT}\right] + d_{11}^T \lambda_{crit}^C = 4\pi^2 d_{11}^T d_{11}^C \left(\frac{\mu_{22}}{a^2} + \frac{\mu_{11}}{b^2}\right). \tag{1.118}$$

Действительно, из (1.112)–(1.114) следует система

$$\mu\psi_{yy} + \psi_{xx} + (\theta + c)_x = 0, \tag{1.119}$$
$$(\theta + c)_{xx} + \mu(\theta + c)_{yy} - 4\omega^2\psi_x = 0, \tag{1.120}$$

где

$$4\omega^2 = \lambda_1(1 - d_3) + \lambda_2. \tag{1.121}$$

В результате замены

$$\tilde{\psi} = 2\omega\psi, \quad \tilde{y} = y/\sqrt{\mu}, \quad \tilde{x} = x$$

из (1.119), (1.120) получается следующая задача:

$$\tilde{\Delta}\tilde{\psi} + 2\omega(\theta + c)_{\tilde{x}} = 0, \quad \tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial\tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial\tilde{y}^2}. \tag{1.122}$$

$$\tilde{\Delta}(\theta + c) - 2\omega\tilde{\psi}_{\tilde{x}} = 0, \quad \psi|_{\partial\tilde{\Omega}} = (\theta + c)|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0. \tag{1.123}$$

Введением комплексной переменной

$$W = \tilde{\psi} + i(\theta + c)$$

из (1.122), (1.123) выводится уравнение относительно комплекснозначной функции W

$$\tilde{\Delta}W - 2i\omega W_x = 0. \tag{1.124}$$

При помощи подстановки

$$W(x,y) = \varphi(x,y)\exp(i\omega x), \tag{1.125}$$

из (1.124) следует спектральная задача:

$$\Delta\varphi = -\omega^2\varphi, \quad \varphi|_{\partial\tilde{\Omega}} = 0. \tag{1.126}$$

Собственные функции и собственные числа задачи (1.126) даются формулами

$$\varphi_{ij} = \sin(\frac{i\pi x}{a})\sin(\frac{j\pi\tilde{y}}{\tilde{b}}), \tag{1.127}$$

$$\omega_{ij}^2 = \pi^2\left(\frac{i^2}{a^2} + \frac{j^2}{\tilde{b}^2}\right) \tag{1.128}$$

Возникновению неустойчивости механического равновесия отвечает собственное значение ω_{11}. Следовательно для критических чисел Рэлея λ^T

и λ^C, отвечающих монотонной неустойчивости (переход спектральных величин в правую полуплоскость по вещественной оси), из (1.127) с учетом (1.111) получается соотношение (1.118).

Следствие 1. Для теплопроводной жидкости при $(C = 0)$ критические значения числа Рэлея следуют из (3.7), (1.127) и даются явными выражениями:

$$\lambda_{ij}^T = 4\pi^2\mu_{22}\left(\frac{d_{11}^T}{a^2}i^2 + \frac{d_{22}^T}{b^2}j^2\right), \quad i,j = 1,2,.... \tag{1.129}$$

Следствие 2. В случае жидкости с примесью при отсутствии температурного градиента для критических значений числа Рэлея λ^C получаются явные выражения:

$$\lambda_{ij}^C = 4\pi^2\mu_{22}\left(\frac{d_{11}^C}{a^2}i^2 + \frac{d_{22}^C}{b^2}j^2\right), \quad i,j = 1,2,.... \tag{1.130}$$

Из (1.129) при $i = j = 1$ следует критическое значение λ^T, совпадающее с получаемым из (1.118) при $\lambda_{crit}^C = 0$ и $d_{11}^{CT} = 0$. Аналогично при $\lambda_{crit}^T = 0$ из (1.118) получается критические значение λ^C, которое следует из (1.130) при $i = j = 1$.

Основные итоги первой главы

В главе даны постановки начально-краевых задач о конвекции теплопроводной жидкости в пористой анизотропной среде. На основе модели Дарси и приближения Буссинеска выписаны уравнения для двух задач: гравитационной конвекции теплопроводной жидкости и конвекции бинарной смеси – теплопроводной жидкости, содержащей примеси. Проведен переход к безразмерным переменным и выписаны системы в естественных переменных и с функцией тока. Даны постановки задач о конвекции в прямоугольнике, подогреваемом снизу и конвекции бинарной жидкости.

Для задачи о гравитационной конвекции проведен анализ условий на параметры, при которых описывающая задачу система уравнений является косимметричной. Выведены явные формулы для критических чисел Рэлея, описывающих возникновение неустойчивости для состояния покоя (механического равновесия). Аналогичный анализ проведен для бинарной жидкости. Установлены условия косимметричности системы и выведены явные формулы для критических чисел, отвечающих монотонной потере устойчивости состоянием механического равновесия.

Глава 2. Вычислительные методы исследования задач фильтрационной конвекции

Для решения сформулированных в главе 1 задач развивается подход на основе метода прямых с использованием схемы смещенных сеток по пространственным координатам и метода Рунге-Кутты для интегрирования по времени. Аппроксимация при этом строится аналогично [71, 72], где исследовались изотропные задачи фильтрационной конвекции.

В § 2.1 вводятся смещенные сетки для температуры, давления и скоростей, определяются разностные операторы и операторы вычисления среднего. Далее выводится система алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующая плоскую задачу гравитационной конвекции в прямоугольнике. Рассматриваются различные варианты аппроксимации диффузионных и нелинейных слагаемых. Полученная система уравнений записывается в векторной форме и производится преобразование системы к дифференциальному уравнению относительно температуры, по решению которого можно восстановить распределения компонент скорости и давления.

В § 2.2 производится дискретизации задачи в переменных «функция тока и девиация температуры». Для анализа устойчивости механического равновесия выписывается спектральная задача и получается система для численного определения критических чисел Рэлея. Аналогичным образом выводится система разностных уравнений, аппроксимирующая начально-краевую задачу конвекции жидкости с примесью в анизотропной среде.

В § 2.3 рассматривается вопрос о сохранении косимметрии в разностных аппроксимациях задачи гравитационной фильтрационной конвекции.

Параграф § 2.4 посвящен программной реализация численных методов, развитых для исследования моделей анизотропной конвекции в пористой среде с учетом косимметричности используемых дифференциальных уравнений. Описывается структура и возможности программного комплекса Aniso2d, предназначеного для численного анализа и визуализации результатов.

2.1 Схема смещенных сеток для уравнений в естественных переменных

Аппроксимация задачи (1.12)–(1.15) проводится на основе схемы смещенных сеток [61], реализация которой для анализа фильтрационной конвекции в изотропном случае дана в [72]. Вводятся разностные операторы для случая неравномерного размещения узлов и даны их представления на равномерной сетке.

2.1.1 Разностные операторы и метод прямых для задачи гравитационной фильтрационной конвекции

По координатам x и y вводится разбнение следующим образом

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = a, \tag{2.1}$$

$$0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_m < y_{m+1} = b, \tag{2.2}$$

Узлы (x_i, y_j) образуют основную сетку, на которой будут определяться значения температуры θ_i^j:

$$\omega_\theta = \{\ (x_i,y_j), \quad i = 0, \cdots, n+1,\ \ j = 0, \cdots, m+1\}. \tag{2.3}$$

Вспомогательные узлы размещаются в серединах интервалов, образованных соседними узлами основной сетки

$$x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}), \quad y_{j+1/2} = \frac{1}{2}(y_j + y_{j+1}) \tag{2.4}$$

В результате получаются три дополнительные сетки, смещенные относительно основной:

$$\begin{aligned}
\omega_u &= \{\ (x_i,y_{j+1/2})\ ,\ i = 0, \cdots, n+1,\ \ j = 0, \cdots, m\ \},\\
\omega_v &= \{\ (x_{i+1/2},y_j)\ ,\ i = 0, \cdots, n,\ \ j = 0, \cdots, m+1\ \},\\
\omega_p &= \{\ (x_{i+1/2},y_{j+1/2})\ ,\ i = 0, \cdots, n,\ \ j = 0, \cdots, m\ \}.
\end{aligned}$$

На этих сетках могут быть построены аппроксимации исходных уравнений с различными способами размещения переменных. Далее на сетках ω_u и ω_v будут вычисляться горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости, а в узлах ω_p – давление. Для сеточных переменных используются следующие обозначения:

$$u_i^{j+1/2} = u(x_i, y_{j+1/2}), \quad v_{i+1/2}^j = u(x_{i+1/2}, y_j),$$
$$p_{i+1/2}^{j+1/2} = u(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}), \quad \theta_i^j = u(x_i - y_j).$$

Шаги сеток по пространственным координатам находятся по формулам:

$$h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}, \qquad h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i,$$
$$g_j = y_{j+1/2} - y_{j-1/2}, \qquad g_{j+1/2} = y_{j+1} - y_j.$$

В случае равномерной сетки шаги постоянны

$$x_i = ih, \qquad h = \frac{a}{n+1}, \qquad i = 0, \cdots, n+1,$$
$$y_j = jg, \qquad g = \frac{b}{m+1}, \qquad j = 0, \cdots, m+1.$$

Для аппроксимации (1.12)–(1.15) используются дискретные аналоги дифференциальных операторов. На двухточечном шаблоне вводятся разностные операторы первого порядка

$$(\delta_x f)_{i+1/2}^{j+1/2} = \frac{f_{i+1}^{j+1/2} - f_i^{j+1/2}}{x_{i+1} - x_i}, \tag{2.5}$$
$$(\delta_y f)_{i+1/2}^{j+1/2} = \frac{f_{i+1/2}^{j+1} - f_{i+1/2}^{j}}{y_{j+1} - y_j}. \tag{2.6}$$

и операторы вычисления взвешенного среднего на интервале

$$(\delta_0^x f)_{i+1/2}^{j+1/2} = \frac{(x_{i+1} - x_{i+1/2}) f_{i+1}^{j+1/2} + (x_{i+1/2} - x_i) f_i^{j+1/2}}{x_{i+1} - x_i}, \tag{2.7}$$
$$(\delta_0^y f)_{i+1/2}^{j+1/2} = \frac{(y_{j+1} - y_{j+1/2}) f_{i+1/2}^{j+1} + (y_{j+1/2} - y_j) f_{i+1/2}^{j}}{y_{j+1} - y_j}. \tag{2.8}$$

Формулы (2.5)–(2.8) справедливы для целых и полуцелых значений индексов i и j. При помощи введенных операторов определяются разностные

отношения на трехточечных шаблонах:

$$(D_x f)_i^j = (\delta_x \delta_0^x f)_i^j \,, \qquad (2.9)$$
$$(D_y f)_i^j = (\delta_y \delta_0^y f)_i^j \,,$$

и разностный аналог лапласиана на пятиточечном шаблоне

$$(\Delta_h f)_i^j = (\delta_x \delta_x f + \delta_y \delta_y f)_i^j \,. \qquad (2.10)$$

Далее вводятся разностные производные первого порядка и операторы вычисления среднего на прямоугольном шаблоне:

$$d_0 = \delta_0^x \delta_0^y \equiv \delta_0^y \delta_0^x, \qquad (2.11)$$
$$d_x = \delta_x \delta_0^y \equiv \delta_0^y \delta_x,$$
$$d_y = \delta_y \delta_0^x \equiv \delta_0^x \delta_y.$$

Из-за неравномерности сетки операторы на прямоугольниках различны для полуцелых и целых значений индексов. Для узлов $(x_{i+1/2}, y_{j+1/2})$ получаются следующие формулы

$$\begin{aligned}
(d_0 f)_{i+1/2}^{j+1/2} &= \frac{1}{4}\left(f_{i+1}^{j+1} + f_i^{j+1} + f_i^j + f_{i+1}^j\right), \\
(d_x f)_{i+1/2}^{j+1/2} &= \frac{1}{2h_{i+1/2}}\left(f_{i+1}^{j+1} - f_i^{j+1} - f_i^j + f_{i+1}^j\right), \\
(d_y f)_{i+1/2}^{j+1/2} &= \frac{1}{2g_{j+1/2}}\left(f_{i+1}^{j+1} + f_i^{j+1} - f_i^j - f_{i+1}^j\right).
\end{aligned}$$

а для узлов (x_i, y_j) соответственно

$$\begin{aligned}
(d_0 f)_i^j &= \frac{y_{j+1/2} - y_j}{h_i g_j}\left[(x_{i+1/2} - x_i) f_{i+1/2}^{j+1/2} + +(x_i - x_{i-1/2}) f_{i-1/2}^{j+1/2}\right] + \\
&+ \frac{y_j - y_{j-1/2}}{h_i g_j}\left[(x_{i+1/2} - x_i) f_{i+1/2}^{j-1/2} + +(x_i - x_{i-1/2}) f_{i-1/2}^{j-1/2}\right], \\
(d_x f)_i^j &= \frac{(y_{j+1/2} - y_j)(f_{i+1/2}^{j+1/2} - f_{i-1/2}^{j+1/2})}{h_i g_j} + \\
&+ \frac{(y_j - y_{j-1/2})(f_{i+1/2}^{j-1/2} - f_{i-1/2}^{j-1/2})}{h_i g_j}, \\
(d_y f)_i^j &= \frac{(x_{i+1/2} - x_i)(f_{i+1/2}^{j+1/2} - f_{i+1/2}^{j-1/2})}{h_i g_j} + \\
&+ \frac{(x_i - x_{i-1/2})(f_{i-1/2}^{j+1/2} - f_{i-1/2}^{j-1/2})}{h_i g_j}.
\end{aligned}$$

В случае равномерной сетки

$$h_{i+1/2} = h_i = h, \quad g_{j+1/2} = g_i = g$$

эти операторы имеют вид

$$(d_0 f) = \frac{1}{4}\left(f_{i+1}^{j+1} + f_i^{j+1} + f_i^j + f_{i+1}^j\right), \tag{2.12}$$

$$(d_x f) = \frac{1}{2h}\left(f_{i+1}^{j+1} - f_i^{j+1} - f_i^j + f_{i+1}^j\right), \tag{2.13}$$

$$(d_y f) = \frac{1}{2g}\left(f_{i+1}^{j+1} + f_i^{j+1} - f_i^j - f_{i+1}^j\right). \tag{2.14}$$

С помощью введенных операторов дифференциальный оператор L_D (1.16) аппроксимируется следующим образом:

$$L_D^h = \delta_x d_{11} \delta_x + d_x d_{12} d_y + d_y d_{21} d_x + \delta_y d_{22} \delta_y, \tag{2.15}$$

В случае коэффициентов d_{ij}, не зависящих от пространственных координат, аппроксимация L_D^h может быть записана в виде:

$$L_D^h = d_{11}\delta_x\delta_x + (d_{12} + d_{21}) D_x D_y + d_{22}\delta_y\delta_y, \tag{2.16}$$

поскольку $d_x d_y = D_x D_y$ и имеется коммутативность операторов d_x, d_y и D_x, D_y. Следует отметить, что для вычисления членов с d_{11} и d_{22} используются операторы на трехточечных шаблонах, а применение операторов $d_x d_x$ и $d_y d_y$ приводит к потере косимметрии для сеточного аналога задачи.

Далее в численном эксперименте будут представлены отличия в спектре устойчивости при использовании не сохраняющих косимметрию аппроксимаций:

$$\tilde{L}_D^h = d_x(d_{11} d_x + d_{12} d_y) + d_y(d_{21} d_x + d_{22} d_y) \tag{2.17}$$

С помощью разностных отношений (2.5)–(2.9) аналогично [32] строятся операторы для нелинейных слагаемых

$$\begin{aligned} J_D &= D_x(\theta\delta_0^y u) + D_y(\theta\delta_0^x v), \\ J_d &= d_x(d_0\theta\delta_0^x u) + d_y(d_0\theta\delta_0^y v). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Аппроксимация уравнений (1.12)–(1.15) по пространственным переменным записывается с помощью введенных операторов в виде системы уравнений

$$0 = (\delta_x p + \mu_{11} u + \mu_{12} \delta_0^y \delta_0^x v)_i^{j+1/2}, \tag{2.19}$$
$$0 = (\delta_y p + \mu_{21} \delta_0^y \delta_0^x u + \mu_{22} v - \lambda \delta_0^x \theta)_{i+1/2}^j, \tag{2.20}$$
$$0 = (\delta_x u + \delta_y v)_{i+1/2}^{j+1/2}, \tag{2.21}$$
$$\dot{\theta}_i^j = (L_D^h \theta + \delta_0^x v - \alpha J_D - (1-\alpha) J_d)_i^j \tag{2.22}$$

Для аппроксимации якобиана используется линейная комбинация двух дискретных аналогов J (2.18). Значение параметра $\alpha = 1/3$ [32, 91] позволяет удовлетворить наибольшему числу законов консервативности.

Уравнения (2.19) – (2.22) записаны для внутренних узлов, на границе получаются дискретные аналоги краевых условий (1.20), (1.21)

$$u_0^{j+1/2} = u_{n+1}^{j+1/2} = 0, \quad j = 0,...,m, \tag{2.23}$$
$$v_{i+1/2}^0 = v_{i+1/2}^{m+1} = 0, \quad i = 0,...,n, \tag{2.24}$$
$$\theta_0^j = \theta_{n+1}^j = 0, \quad j = 0,...,m+1, \tag{2.25}$$
$$\theta_i^0 = \theta_i^{m+1} = 0, \quad i = 1,...,n. \tag{2.26}$$

Аппроксимация начальных условий (1.32) имеет вид

$$\theta_i^j(0) = \theta_0(x_i, y_j), \quad i = 1,...,n, \quad j = 1,...,m. \tag{2.27}$$

2.1.2 Дискретная модель двумерных движений фильтрационной конвекции

Задачу (2.19) – (2.27) можно записать в векторной форме. Введятся векторы узловых переменных

$$P = (p_{1/2}^{1/2}, p_{3/2}^{1/2}, ..., p_{n+1/2}^{m+1/2}),$$
$$\Theta = (\theta_1^1, \theta_2^1, ..., \theta_n^m),$$
$$U = (u_1^{1/2}, u_2^{1/2}, ..., u_n^{m+1/2}),$$
$$V = (v_{1/2}^1, v_{3/2}^1, ..., v_{n+1/2}^m),$$

Размерности векторов Θ, P, U, V соответственно равны

$$N_\theta = (n * m), \quad N_p = (n+1) * (m+1), \tag{2.28}$$

$$N_u = n * (m+1), \quad N_v = (n+1) * m, \tag{2.29}$$

Значения давления, температуры и скоростей в узлах двумерной сетки соответствуют элементам вектора

$$\Theta_k = \theta_i^j, \quad k = i + (j-1)n, \quad i = 1,...,n, \quad j = 1,...,m.$$
$$U_k = u_i^{j+1/2}, \quad k = i + jn, \quad i = 1,...,n, \quad j = 0,...,m.$$
$$V_k = v_{i+1/2}^j, \quad k = i + 1 + (j-1)(n+1), \quad i = 0,...,n, \quad j = 1,...,m.$$
$$P_k = p_{i+1/2}^{j+1/2}, \quad k = i + 1 + j(n+1), \quad i = 0,...,n, \quad j = 0,...,m.$$

Уравнения (2.19)–(2.22) можно записать следующим образом

$$B_3 P + \mu_{11} U + \mu_{12} C_3 V = 0, \tag{2.30}$$

$$B_4 P + \mu_{21} C_4 U + \mu_{22} V - \lambda C_1 \Theta = 0, \tag{2.31}$$

$$B_1 U + B_2 V = 0, \tag{2.32}$$

$$\dot{\Theta} = A\Theta + C_2 V - \Phi(U,V,\Theta), \tag{2.33}$$

здесь матрицы B_k $(k = 1,...,4)$ соответствуют разностным операторам первого порядка, матрицы C_k $(k = 1,...,4)$ — операторам усреднения, матрица A отвечает дискретизации оператора L_D, нелинейные члены представлены вектором $\Phi(U,V,\Theta)$. Размерности матриц в формулах (2.30)–(2.33) определяются по формулам

$$dim(B_1) = N_p * N_u, \quad dim(B_2) = N_p * N_v,$$
$$dim(B_3) = dim(B_1^{'}), \quad dim(B_4) = dim(B_2^{'}),$$
$$dim(C_1) = N_v * N_t, \quad dim(C_3) = N_u * N_v,$$
$$dim(C_2) = dim(C_1^{'}), \quad dim(C_4) = dim(C_3^{'}),$$
$$dim(D_1) = N_t * N_t.$$

В (2.30)–(2.33) и соответствующих матрицах учтены нулевые краевые условия (2.23)–(2.26). Полученная система представляет собой векторное дифференциальное уравнения (2.33) и три алгебраических соотношения

(2.30)–(2.32). Исключая векторы U, V, P, можно получить дифференциальное уравнение относительно вектора узловых значений температуры Θ.

Векторы U, V, P могут быть получены из системы (2.30)–(2.33) следующим образом. Вначале выражается вектор U из уравнения (2.30)

$$U = -\frac{1}{\mu_{11}}[B_3 P + \mu_{12} C_3 V]. \tag{2.34}$$

После подстановки U в (2.31) получается

$$V = H_1^{-1}(-\lambda C_1 \Theta - H_2 P). \tag{2.35}$$

С помощью (2.34) и (2.35) находится уравнение, связывающее векторы P и Θ,

$$BP = -H_3 \Theta. \tag{2.36}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
H_1 &= \mu_{22} E - \frac{\mu_{21}\mu_{12}}{\mu_{11}} C_4 C_3, \\
H_2 &= B_4 - \frac{\mu_{21}}{\mu_{11}} C_4 B_3, \\
H_3 &= \frac{\mu_{12}}{\mu_{11}} B_1 C_3 H_1^{-1} \lambda C_1 - B_2 H_1^{-1} \lambda C_1, \\
B &= \frac{B_1}{\mu_{11}}(-B_3 + \mu_{12} C_3 H_1^{-1} H_2) - B_2 H_1^{-1} H_2.
\end{aligned}$$

и E – единичная матрица размерности $N_v * N_v$,

$$dim(H_1) = N_v * N_v, \quad dim(H_2) = N_v * N_p, \tag{2.37}$$

$$dim(H_3) = N_p * N_t, \quad dim(B) = N_p * N_p. \tag{2.38}$$

Вектор P получается из (2.36), с учетом того, что давление в исходной задаче определяется с точностью до константы. Можно положить заданным один элемент вектора P и преобразовать уравнение (2.36), редуцировав матрицы B и H_3. Далее последовательно находятся векторы U и V, выраженные через значения температуры в узлах сетки.

По найденным U, V, P получается задача относительно вектора Θ

$$\begin{aligned}
&\dot{\Theta} = F(\Theta, \lambda), \\
&\Theta(0) = \Theta_0 = (\theta_0(x_1, y_1), \theta_0(x_2, y_1), \cdots, \theta_0(x_n, y_m)).
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Для анализа устойчивости механического равновесия ($\Theta = 0$) записывается линейная спектральная задача относительно возмущения $\Theta = \exp(\sigma t)V$ (σ – инкремент)

$$\sigma V = AV + C_2 H_1^{-1}[-\lambda C_2 V - H_2(B^{-1} H_2 V)], \tag{2.40}$$

При $\sigma = 0$ из (2.40) следует алгебраическая система для определения критических чисел Рэлея λ

$$Q_1 V = \lambda Q_2 V, \tag{2.41}$$

$$Q_1 = (A - C_2 H_1^{-1} H_2 B^{-1} H_2), \tag{2.42}$$

$$Q_2 = C_2 H_1^{-1} C_2.$$

2.2 Аппроксимация плоских задач конвекции в пористой среде с использованием функции тока

Система уравнений относительно функции тока и температура (1.23)-(1.24) аппроксимируется с помощыо разностных операторов (2.5)-(2.6). В работе [71] использовались регулярная равномерная сетка, а функция тока и температура определялись в общих узлах (x_i,y_j).

2.2.1 Дискретная задача гравитационной конвекции в прямоугольнике

В результате непосредственной аппроксимации правых частей уравнений (1.12)–(1.15) с помощыо операторов (2.5)-(2.6), (2.9) получается система разностных уравнений

$$0 = [\mu_{11}\delta_y\delta_y\psi - (\mu_{12}+\mu_{21})\delta_x\delta_y\psi + \mu_{22}\delta_x\delta_x\psi]_i^j + \lambda(D_x\theta)_i^j, \quad (2.43)$$

$$\dot{\theta}_i^j = \left[L_D^h\theta - D_x\psi - \alpha J_D - (1-\alpha)J_d\right]_i^j. \quad (2.44)$$

Здесь используются две аппроксимации якобиана

$$J_D = D_x(\theta D_y\psi) - D_y(\theta D_x\psi), \quad (2.45)$$

$$J_d = d_x(d_0\theta d_y\psi) - d_y(d_0\theta d_x\psi). \quad (2.46)$$

Разностные аналоги краевых условий (1.26) имеют вид

$$\psi_0^j = \psi_{n+1}^j = 0, \quad \theta_0^j = \theta_{n+1}^j = 0, \quad j = 0,...,m+1, \quad (2.47)$$

$$\psi_i^0 = \psi_i^{m+1} = 0, \quad \theta_i^0 = \theta_i^{m+1} = 0, \quad i = 1,...,n.$$

Начальные условия даются формулой (2.27). Для узловых переменных функции тока и температуры вводятся векторы

$$\Psi = (\psi_1^1,\psi_2^1,....,\psi_n^m), \quad \Theta = (\theta_1^1,\theta_2^1,....,\theta_n^m). \quad (2.48)$$

Уравнения (2.43)–(2.47), (2.25), (2.26) можно записать в следующем виде

$$M_0\Psi + \lambda C_0\Theta = 0, \tag{2.49}$$

$$\dot{\Theta} = A\Theta - C_0\Psi - J(\Theta,\Psi), \tag{2.50}$$

где матрица M_0 отвечает дискретному аналогу оператора $\nabla \cdot (M \cdot \nabla)$:

$$M_0 = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & \cdots & 0 \\ 0 & M_{32} & M_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M_{mm} \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

с диагональными блоками $(i = 1, \cdots, n)$

$$M_{ii} = \begin{pmatrix} \frac{-2\mu_{22}}{h^2} - \frac{2\mu_{11}}{g^2} & \frac{\mu_{22}}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\mu_{22}}{h^2} & \frac{-2\mu_{22}}{h^2} - \frac{2\mu_{11}}{g^2} & \frac{\mu_{22}}{h^2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\mu_{22}}{h^2} & \frac{-2\mu_{22}}{h^2} - \frac{2\mu_{11}}{g^2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-2\mu_{22}}{h^2} - \frac{2\mu_{11}}{g^2} \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

и сопутствующими блоками

$$M_{i,i+1} = M_{i+1,i} = diag\left(\frac{\mu_{11}}{g^2}, \cdots, \frac{\mu_{11}}{g^2}\right), \tag{2.53}$$

$$dim(M_{i,i+1}) = dim(M_{i+1,i}) = n, \quad i = 1, \cdots, n-1.$$

Матрица A соответствует аппроксимации оператора L_D:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & 0 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

где

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} \frac{-2d_{11}}{h^2} - \frac{2d_{22}}{g^2} & \frac{d_{11}}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{d_{11}}{h^2} & \frac{-2d_{11}}{h^2} - \frac{2d_{22}}{g^2} & \frac{d_{11}}{h^2} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{d_{11}}{h^2} & \frac{-2d_{11}}{h^2} - \frac{2d_{22}}{g^2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-2d_{11}}{h^2} - \frac{2d_{22}}{g^2} \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

и

$$\begin{gathered} A_{i,i+1} = A_{i+1,i} = diag\left(\frac{d_{22}}{g^2}, \cdots, \frac{d_{22}}{g^2}\right), \\ dim(A_{i,i+1}) = dim(A_{i+1,i}) = n, \quad i = 1, \cdots, n-1. \end{gathered} \tag{2.56}$$

Матрица C_0 дает разностный аналог производной по x:

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2h} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{-1}{2h} & 0 & \frac{1}{2h} & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2h} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

а вектор $J(\Theta,\Psi)$ соответствует нелинейному слагаемому.

Из (2.49)–(2.50) получается векторное уравнение относительно Θ

$$\dot{\Theta} = A\Theta + \lambda Q\Theta + \lambda J(\Theta, M_0^{-1}C_0\Theta) \equiv \Phi(\Theta, \lambda), \quad Q = C_0 M_0^{-1} C_0. \tag{2.58}$$

Механическому равновесию отвечает решение $\Theta = 0$. Для анализа его устойчивости получается задача относительно возмущения $\Theta = \exp(\sigma t)V$

$$\sigma V = AV + \lambda QV \tag{2.59}$$

Из условия $\sigma = 0$ находится спектральная система для определения критических чисел Рэлея λ:

$$AV = -\lambda QV \tag{2.60}$$

Из (2.60) определяются собственные значения λ. Минимальное собственное значение λ_1 соответствует числу Рэлея, при котором механическое

равновесие теряет устойчивость. Спектр устойчивости механического равновесия находится из (2.59) для требуемого значения λ.

Если условия (1.59) нарушены (некосимметричный случай), то при $\lambda = \lambda_1$ получается, что в спектре устойчивости имеется одно нулевое значение, а остальные σ лежат в левой полуплоскости ($Re\sigma < 0$). При $\lambda = \lambda_2$ ($\lambda_2 > \lambda_1$) в спектре имеется одно положительное и одно нулевое значение.

В случае косимметрии получаются кратные критические числа $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4, \ldots$. При $\lambda = \lambda_1$ спектр σ содержит два нулевых значения. При $\lambda_1 < \lambda < \lambda_3$ два значения σ лежат в правой полуплоскости ($Re\sigma > 0$), а остальные находятся в левой полуплоскости.

Для определения спектра устойчивости ненулевого стационарного режима Θ_* в результате замены $\Theta = \Theta_* + V\exp(\sigma t)$ из (2.58) получается следующая задача:

$$\sigma V = JV, \quad J = \nabla_\Theta \Phi(\Theta_*, \lambda) \tag{2.61}$$

Матрица Якоби J находится численно с использованием разностных отношений

$$J_{ik} = \frac{\Phi_i(\Theta_* + \delta \mathbf{e_k}, \lambda) - \Phi_i(\Theta_*, \lambda)}{\delta} \tag{2.62}$$

где J_{ik} — элемент матрицы J, Φ_i — компоненты вектора правой части (2.58), $\mathbf{e_k}$ — вектор размерности nm с одним ненулевым элементом ($e_{ki} = \delta_{ki}, i = 1,2,\ldots,nm$), $\delta = 10^{-7}$ — приращение.

2.2.2 Разностные уравнения конвекции бинарной жидкости в пористой среде

Аппроксимация задачи (1.48)–(1.58) производится методом сеток с использованием формул второго порядка точности аналогично [1, 72]. Вводятся равномерные сетки

$$x_i = ih, \quad i = 0,1,\ldots,n+1, \quad h = a/(n+1),$$

$$y_j = jg, \quad j = 0,1,\ldots,m+1, \quad g = b/(m+1).$$

В узлах (x_i,y_j) определяются функции тока ψ_i^j, температуры θ_i^j и концентрации примеси c_i^j. В результате дискретизации по пространственным координатам получается система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$-\eta\Delta\dot{\psi}_i^j = [M_0^h\psi]_i^j + [D_x\theta]_i^j + [D_x c]_i^j, \tag{2.63}$$
$$\dot{\theta}_i^j = [L_h^T\theta - \lambda^T D_x\psi - \alpha J_D^T - (1-\alpha)J_d^T]_i^j, \tag{2.64}$$
$$\dot{c}_i^j = [L_h^C c - \lambda^C D_x\psi + L^{CT}\theta - \alpha J_D^C - (1-\alpha)J_d^C)]_i^j. \tag{2.65}$$

здесь

$$M_0^h = \mu_{11}\delta_y\delta_y - (\mu_{12}+\mu_{21})D_xD_y + \mu_{22}\delta_x\delta_x, \tag{2.66}$$
$$L_h^T = d_{11}\delta_x\delta_x + (d_{12}+d_{21})D_xD_y + d_{22}\delta_y\delta_y, \tag{2.67}$$
$$L_h^C = d_{11}^C\delta_x\delta_x + (d_{12}^C+d_{21}^C)D_xD_y + d_{22}^C\delta_y\delta_y, \tag{2.68}$$
$$L_h^{CT} = d_{11}^{CT}\delta_x\delta_x + (d_{12}^{CT}+d_{21}^{CT})D_xD_y + d_{22}^{CT}\delta_y\delta_y, \tag{2.69}$$

и используются аппроксимации якобиана (2.45) и (2.46).

Разностные аналоги краевых условий имеют вид

$$\psi_0^j = \psi_{n+1}^j = 0, \quad \theta_0^j = \theta_{n+1}^j = 0, \quad c_0^j = c_{n+1}^j = 0, \quad j = 1,...,m,$$
$$\psi_i^0 = \psi_i^{m+1} = 0,\ \theta_i^0 = \theta_i^{m+1} = 0,\ c_i^0 = c_i^{m+1} = 0,\ i = 1,...,n. \tag{2.70}$$

Дискретная задача (2.63)–(2.70) сохраняет свойство косимметрии. Начальные условия задаются для функции тока, температуры и концентрации

$$\psi_i^j(0) = \psi_0(x_i,y_j), \quad \theta_i^j(0) = \theta_0(x_i,y_j),$$
$$c_i^j(0) = c_0(x_i,y_j), \quad i = 1,...,n, \quad j = 0,...,m. \tag{2.71}$$

Вводятся следующие векторы неизвестных

$$\Psi = (\psi_1^1,\cdots,\psi_n^1,\psi_1^2,\cdots,\psi_n^2,\psi_1^m,\cdots,\psi_n^m),$$
$$\Theta = (\theta_1^1,\cdots,\theta_n^1,\theta_1^2,\cdots,\theta_n^2,\theta_1^m,\cdots,\theta_n^m),$$
$$\mathbf{C} = (c_1^1,\cdots,c_n^1,c_1^2,\cdots,c_n^2,c_1^m,\cdots,c_n^m).$$

Для анализа устойчивости механического равновесия из (2.63)–(2.71) получается система

$$-\sigma\eta A_0\Psi = A_1\Psi + B\Theta + B\mathbf{C}, \tag{2.72}$$
$$\sigma\Theta = A_2\Theta - \lambda^T B\Psi, \tag{2.73}$$
$$\sigma\mathbf{C} = A_3\mathbf{C} - \lambda^C B\Psi + A_4\Theta, \tag{2.74}$$

где матрица A_0 аппроксимирует лапласиан, A_1 отвечает дискретному варианту оператора M_0, матрицы A_2, A_3, A_4 являются аппроксимациями операторов L^T, L^C, L^{CT} соответственно, матрица B дает разностный аналог производной по x.

Для определения критических чисел Рэлея λ^T, λ^C при $\sigma = 0$ получается система

$$0 = A_1\Psi + B\Theta + B\mathbf{C}, \tag{2.75}$$
$$0 = A_2\Theta - \lambda^T B\Psi, \tag{2.76}$$
$$0 = A_3\mathbf{C} - \lambda^C B\Psi + A_4\Theta, \tag{2.77}$$

После исключения Θ и $\mathbf{C}$, выводится задача для Ψ

$$\left[A_1 + \lambda^T A_5 + \lambda^C A_6\right]\Psi = 0, \tag{2.78}$$
$$A_5 = B\left[I - A_3^{-1}A_4\right]A_2^{-1}B, \quad A_6 = BA_3^{-1}B.$$

Для вычисления критического числа λ^T при фиксированном λ^C используется спектральная задача

$$A_7\Psi = -\lambda^T A_5\Psi, \quad A_7 = A_1 + \lambda^C A_6. \tag{2.79}$$

В случае жидкости с градиентом концентрации примеси для вычисления критического числа λ^C при фиксированном λ^T получается

$$\left[A_1 + \lambda^T A_5\right]\Psi = -\lambda^C A_6\Psi. \tag{2.80}$$

Для определения критических чисел Рэлея λ^T выводится также векторная задача, в которой $\Psi, \mathbf{C}$ выражаются через вектор Θ. При фиксированном λ^C задача имеет следующий вид

$$A_2\Theta = -\lambda^T A_9\Theta, \quad A_8 = BA_1^{-1}B, \tag{2.81}$$
$$A_9 = A_8\left[I - (A_3 + \lambda^C A_8)^{-1}(A_4 + \lambda^C A_8)\right].$$

Для определения спектра устойчивости механического равновесия находится решение системы (2.72)–(2.74). Вычисления критических чисел и спектральных характеристик стационарных режимов производится аналогично методу, описанному выше (см. § 2.2.1).

2.2.3 Расчет критических чисел Рэлея, отвечающих возникновению конвекции

Для задачи возникновения гравитационной конвекции теплопроводной жидкости в пористом прямоугольнике проведен эксперимент по анализу разностной дискретизации, позволяющей с заданной точностью находить критические числа Рэлея. Рассматривалась задача для прямоугольника высоты $b = 1$ и длины $a = 1.5$, параметры проницаемости μ_{ij} и теплопроводности d_{ij}^T были фиксированы.

Таблица 1 — Критические числа Рэлея при различных μ_{11}, n, m; $d_{22} = 1.5$, $\mu_{22} = d_{11} = 1$, $\mu_{ij} = d_{ij} = 0$, $i \neq j$, $a = 1.5$, $b = 1$

n	m	μ_{11}	λ_{11}	λ_{21}	λ_{31}	λ_{12}
24	16	1.5	78.521	137.03	243.39	268.19
48	32		77.217	131.33	223.52	258.00
36	18		77.503	132.74	228.48	259.75
72	36		76.952	130.25	219.96	255.78
Точное	(1.95)		76.764	129.40	217.13	254.42
24	16	1.4	76.438	134.57	240.40	259.30
48	32		75.188	129.04	220.92	249.77
36	18		75.462	130.42	225.78	251.37
72	36		74.935	128.00	217.42	247.69

Критические числа Рэлея находились как собственные числа задачи (2.60) при различном числе узлов по координатам x и y (n, m). Вычисления показывали, что первые критические значения λ_{ij} могут быть получены на достаточно грубых сетках.

В табл. 1, представлены критические числа Рэлея, рассчитанные на разных сетках (n, m) при следующих значениях параметров $d_{22} = 1.5$, $\mu_{22} = d_{11} = 1$, $\mu_{ij} = d_{ij} = 0$, $i \neq j$. Видно, что трехпроцентная точность вычислений первого критического значения λ_{11} получается уже на сетке 24×16. При измельчении сетки вдвое λ_{crit} определится с точностью 1%. Для сравнения в табл. 1 приведены результаты вычислений для косимметричного ($\mu_{11} = 1.5$) и некосимметричного ($\mu_{11} = 1.4$) случаев. Выделеная строка содержит рассчитанные по формуле (1.95) критические числа Рэлея.

Таблица 2 — Критические числа Рэлея при различных μ_{11}, n, m; $d_{22} = 1$, $\mu_{22} = d_{11} = 1$, $\mu_{ij} = d_{ij} = 0$, $i \neq j$, $a = 1.5$, $b = 1$.

n	m	μ_{11}	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
18	12	1	58.869	58.869	120.23	120.23
36	24		57.504	57.504	112.31	112.31
; 24	12		57.999	57.999	115.50	115.50
	Точное	(1.95)	57.024	-	109.66	
18	12	1.5	68.579	68.960	128.85	133.15
36	24		66.878	67.142	120.24	123.79

Из табл. 1 следует, что уменьшение шага сетки по координате x приводит к лучшим результатам, чем детализация по y (вычисления на сетках 36×18 и 72×36). Это связано с необходимостью учитывать большее число конвективных валов по горизонтальной координате.

В табл. 2 представлены результаты расчетов критических чисел Рэлея для достаточно грубых сеток в случае изотропной задача ($\mu_{11} = 1$) и с анизотропией проницаемости в одном направлении. Видно, что пятипроцентная точность вычислений первого критического значения λ получается уже на сетке 18x12. При измельчении сетки вдвое λ_1 определятся с точностью 1%.

В случае косимметрии для дискретной задачи двукратность спектра ($\lambda_1 \approx \lambda_2$, $\lambda_3 \approx \lambda_4$) обеспечивается с большой (12 знаков) точностью. При нарушении косимметрии разница между спектральными значениями λ_1 и λ_2 (λ_3 и $\lambda_4, \ldots$) наблюдается в третьем знаке и уменьшается при измельчении сетки.

2.3 Сохранение косимметрии в разностных аппроксимациях уравнений анизотропной конвекции

Для разностных уравнений (2.19)–(2.25) косимметрия дается сеточным аналогом вектор-функции Z (1.60). В изотропном случае ($\mu_{11} = \mu_{22} = 1$, $\mu_{12} = \mu_{21} = 0$, $d_{11} = d_{22} = 1$, $d_{12} = d_{21} = 0$) косимметричность системы разностных уравнений была установлена в [72]. Специфика рассматриваемого случая связана с анизотропией тепловых свойств и характеристик проницаемости, а также наличием смешанных производных.

Вначале устанавливается ортогональность вектора правых частей разностных уравнений (2.19)–(2.22) сеточному аналогу вектор-функции Z:

$$Z^h = [Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] \tag{2.82}$$

где

$$Z_1 = \left[(\delta_y\theta)_1^{1/2}, (\delta_y\theta)_2^{1/2}, \ldots, (\delta_y\theta)_n^{1/2}, (\delta_y\theta)_1^{3/2}, \ldots, (\delta_y\theta)_n^{m+1/2}\right], \tag{2.83}$$

$$Z_2 = \left[-(\delta_y\theta)_{1/2}^1, \ldots, -(\delta_y\theta)_{n+1/2}^1, -(\delta_y\theta)_{1/2}^2, \ldots, -(\delta_y\theta)_{n+1/2}^m\right], \tag{2.84}$$

$$Z_3 = [0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0], \tag{2.85}$$

$$Z_4 = \left[\psi_1^1, \psi_2^1, \ldots, \psi_n^1, \psi_1^2, \ldots, \psi_n^m\right], \tag{2.86}$$

В результате умножения уравнения (2.19) на $(\delta_y\theta)_i^{j+1/2}$, уравнения (2.20) на $(-\delta_x\theta)_{i+1/2}^j$, уравнения (2.22) на $(\psi)_i^j$ и последующего суммирования получается следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\hat{I} = \quad & hg\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}(\delta_x p + \mu_{11}u + \mu_{12}\delta_0^y\delta_0^x v)_i^{j+1/2}(\delta_y\theta)_i^{j+1/2} - \\
- \quad & hg\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\delta_y p + \mu_{21}\delta_0^y\delta_0^x u + \mu_{22}v - \lambda\delta_x\theta)_{i+1/2}^j(-\delta_x\theta)_{i+1/2}^j + \\
+ \quad & hg\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[L_D^h\theta - \alpha J_D - (1-\alpha)J_d + \delta_0^x v_i^j]_i^j\psi_i^j
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Суммы с нелинейными слагаемыми равны нулю при $\alpha = 1/3$ [72]. С использованием сеточных аналогов формул интегрирования по частям (формулы

суммирования [36]) и с учетом краевых условий (2.23)–(2.25) получается

$$\begin{aligned}\hat{I} = \; & h \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \theta_i^j(\mu_{11}u + \mu_{12}\delta_0^y\delta_0^x v)_i^{j-1/2} - \\ & - h\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \theta_i^j(\mu_{11}u + \mu_{12}\delta_0^y\delta_0^x v)_i^{j+1/2} - \\ & - g\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \theta_i^j(\mu_{21}\delta_0^y\delta_0^x u + \mu_{22}v - \lambda\delta_x\theta)_{i-1/2}^j + \\ & + g\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \theta_i^j(\mu_{21}\delta_0^y\delta_0^x u + \mu_{22}v - \lambda\delta_x\theta)_{i+1/2}^j + \\ & + hg\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (L_D^h\theta)_i^j\psi_i^j, \end{aligned} \tag{2.88}$$

После перегруппировки слагаемых выражение $\hat{I}$ примет вид

$$\begin{aligned}\hat{I} = hg\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \; & \Big[\; (d_{22} - \mu_{11})\delta_y\delta_y\theta_i^j\psi_i^j + (d_{11} - \mu_{22})\delta_x\delta_x\theta_i^j\psi_i^j + \\ & + \; (\mu_{12} + d_{12})D_xD_y\theta_i^j\psi_i^j + (\mu_{21} + d_{21})D_xD_y\theta_i^j\psi_i^j\Big] \end{aligned} \tag{2.89}$$

В силу условий косимметрии (1.59) отсюда следует, что $\hat{I} = 0$. Если при аппроксимации уравнения теплопроводности (1.15) вместо оператора L_D^h использовать оператор с разностными производными на четырехточечном шаблоне (2.17), то при подстановке условий косимметрии (1.59) получится

$$\hat{I} = hg\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left[\mu_{11}\psi_i^j[(d_yd_y - \delta_y\delta_y)\theta_i^j] + \mu_{22}\psi_i^j[(d_xd_x - \delta_x\delta_x)\theta_i^j]\right] \tag{2.90}$$

Поскольку $d_yd_y \neq \delta_y\delta_y$ ($d_xd_x \neq \delta_x\delta_x$), то в общем случае произвольных ψ_i^j и θ_i^j, удовлетворяющих краевым условиям, получается $\hat{I} \neq 0$. Таким образом, использование для аппроксимации L_D производных на четырехточечном шаблоне вместо δ_x и δ_y приводит к нарушению косимметрии в разностном аналоге задачи.

В случае задачи конвекции бинарной жидкости в переменных функция тока ψ, девиация температуры θ и концентрация примеси c для системы (1.48)–(1.58) разностным аналогом являются уравнения (2.63)–(2.65). В этом случае косимметрией для дискретной задачи будет вектор

$$Z^h = [Z_1, Z_2, Z_3] \tag{2.91}$$

где

$$Z_1 = \left[(\theta + c)_1^1, (\theta + c)_2^1, \ldots, (\theta + c)_n^1, (\theta + c)_1^2, \ldots, (\theta + c)_n^m\right] \tag{2.92}$$

$$Z_2 = S_1 \left[\psi_1^1, \psi_2^1, \ldots, \psi_n^1, \psi_1^2, \ldots, \psi_n^m\right], \quad S_1 = \mu_{11} \frac{\left[d_{22}^{CT} - d_{22}^{C}\right]}{d_{22}^{T} d_{22}^{C}}, \tag{2.93}$$

$$Z_3 = S_2 \left[\psi_1^1, \psi_2^1, \ldots, \psi_n^1, \psi_1^2, \ldots, \psi_n^m\right], \quad S_2 = -\frac{\mu_{11}}{d_{22}^{C}}. \tag{2.94}$$

В результате аналогичных выщепроведенным преобразованийм, получается

$$\begin{aligned}
\hat{I} \;=\; & hg \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left[\delta_y \delta_y \theta_i^j \psi_i^j \left[\mu_{11} + S_1 d_{22}^{T} + S_2 d_{22}^{CT}\right] + \delta_y \delta_y c_i^j \psi_i^j \left[\mu_{11} + S_2 d_{22}^{C}\right] + \right. \\
+ \; & D_x D_y \theta_i^j \psi_i^j \left[-\mu_{12} + S_1 d_{12}^{T} + S_2 d_{12}^{CT}\right] + D_x D_y c_i^j \psi_i^j \left[-\mu_{12} + S_2 d_{12}^{C}\right] + \\
+ \; & D_x D_y \theta_i^j \psi_i^j \left[-\mu_{21} + S_1 d_{21}^{T} + S_2 d_{21}^{CT}\right] + D_x D_y c_i^j \psi_i^j \left[-\mu_{21} + S_2 d_{21}^{C}\right] + \\
+ \; & \left. \delta_x \delta_x \theta_i^j \psi_i^j \left[\mu_{22} + S_1 d_{11}^{T} + S_2 d_{11}^{CT}\right] + \delta_x \delta_x c_i^j \psi_i^j \left[\mu_{22} + S_2 d_{11}^{C}\right] \right] dxdy.
\end{aligned} \tag{2.95}$$

В силу условий косимметрии (1.72) получается $\hat{I} = 0$.

2.4 Описание программного комплекса численного исследования анизотропных задач фильтрационной конвекции

В численном исследовании фильтрационной конвекции при анизотропии жидкости и среды необходимо учитывать возможную косимметричность начально-краевых задач. В гл. 1 описаны условия, при которых используемые системы уравнений являются косимметричными, а в гл. 2 развиты дискретизации, сохраняющие свойства рассматриваемых систем. Для проведения компьютерных экспериментов и анализа таких задач требуются специализированные программы. В среде MATLAB был разработан комплекс программ Aniso2d для исследования плоских конвективных режимов теплопроводной жидкости в пористой анизотропной среде. С его помощью можно решать задачи в прямоугольнике, определять критические значения параметров, производить прямой расчет конвективных движений, вычислять непрерывные семейства стационарных режимов, изучать эффекты нарушения косимметрии.

Основными функциями комплекса Aniso2d являются: Initia, Rhs, Crit, Spectr, MatPsiT, Point-fd, Fam. Опишем работу с комплексом для задачи гравитационной конвекции (2.49)–(2.50).

Функция Initia формирует вспомогательные массивы M_0, A, которые являются аппроксимациями операторов $\nabla \cdot (M \cdot \nabla)$, L_D соответственно, см. формулы (2.49)–(2.50). Входными параметрами являются геометрические характеристики области (a, b), коэффициенты обратной проницаемости μ_{ij} (массив mm), коэффициенты теплопроводности d_{ij} (массив dd), параметры дискретизации по пространственным переменным (n – число узлов по x, m – число узлов по y).

Функция Rhs предназначена для вычисления правой части уравнений (2.49)–(2.50). Входными параметрами являются массив температур Θ, фильтрационное число Рэлея λ, целые числа n, m, задающие количество узлов по координатам x и y, коэффициент линейной комбинации двух аппроксимаций якобиана α. Параметр γ предсмотреи для последующей модернизации программы, которая позволит проводить расчеты на неравномерной сетке (в текущей версии $\gamma = 0$).

Функция Crit предназначена для вычисления критических значений фильтрационного числа Рэлея λ^T.

Функции Spectr-0 и Spectr вычисляют при заданном значении λ^T спектральные характеристики для механического равновесия и стационарного конвективного режима соответственно.

Функция MatPsiT производит преобразование одномерного массива Theta в двумерные массивы PP (функция тока) и tt (температура).

Имеются также аналоги функций Initia и Rhs для исследования конвекции бинарной жидкости – функции Initia-N, Rhs-N. С помощью Initia-N формируются вспомогательные массивы A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, которые являются аппроксимациями операторов M_0, L^T, L^C, L^{CT}. Функция Rhs-N предназначена для решения задач о конвекции бинарной жидкости.

С помощью функции Point-fd вычисляется точка семейства стационарных решений. Реализованы итерации методом Ньютона, определение сингулярных чисел матрицы линеаризации, расчеты модифицированным методом Ньютона (без пересчета матрицы Якоби), итерационный метод на подпространстве, ортогональном косимметрии. Критерием окончания расчета является достижение сингулярным числом σ_{min} уровня $\varepsilon = 10^{-6}$.

Функция Fam вычисляет семейство стационарных решений и создает файл, в котором сохраняется информация о температурном поле и спектре устойчивости для каждого члена семейства. Вспомогательный массив rr содержит континуальные номера членов семейства, в двумерных массивах pp, ss записываются температура и спектр (первый индекс соответствует номеру на семействе, второй – сеточной информации о решении). Кроме того, сохраняется информация о размерности сетки (n, m), массивах коэффициентов mm, dd, параметр dr определает шаг вычислений для метода Адамса, используемого при расчете кривой семейства.

Комплекс Aniso2d также включает следующие программы: AT-Crit, AT-Point, AT-Fam, AT-Cont, AT-Dest, AT-Plot.

Программа AT-Crit позволяет производить расчет критических значений Рэлея для задачи фильтрационной конвекции однокомпонентной жидкости в прямоугольнике с учетом анизотропии тепловых свойств жидкости и проводимости. Входными параметрами являются геометрические

характеристики области (a, b), коэффициенты обратной проницаемости μ_{ij} (массив mm), коэффициенты теплопроводности d_{ij} (массив dd), параметры дискретизации по пространственным переменным (n – число узлов по x, m – число узлов по y). Все расчетные параметры сгруппированы в отдельной секции кода программы.

Результатом работы программы является текстовый файл, содержащий упорядоченный по возрастанию набор собственных чисел спектральной задачи. Полученные на этом этапе собственные значения использовались для определения минимальной величины градиента температуры (фильтрационного числа Рэлея), приводящего к возникновению конвекции. Эта программа применяется также для определения количества узлов сетки, достаточного для выполнения расчетов с заданной точностью.

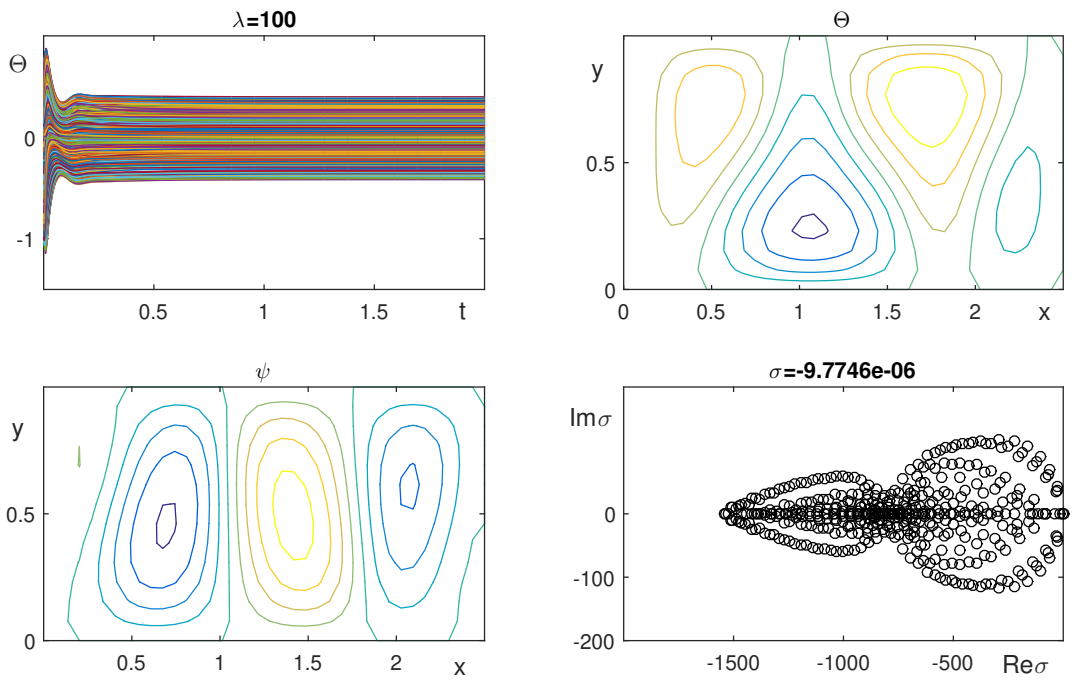

Рисунок 2.1 — Графическое окно программы AT-Point

Программа AT-Point вычисляет стационарный конвективный режим методом установления. Входные параметры назначаются аналогично AT-Crit, расчет проводится при помощи стандартной функции ode15s (или ode45). Для контроля установления информация выдается в графическом виде (рис. 2.1). В левом верхнем окне рис. 2.1 дано изменение во времени температуры во всех точках расчетной сетки для визуального контроля

установления к стационарному режиму. Линии уровня температуры Θ представлены в правом верхнем окне, а функция тока Ψ приведена в левом нижнем окне. Распределение спектра полученного стационарного режима дано в правом нижнем окне, где сверху выведено наиболее приближенное к нулю собственное значение σ (для решений из семейства $\sigma \approx 10^{-6}$). Результат работы AT-Point записываются в текстовый файл, содержащий информация о полученном решении.

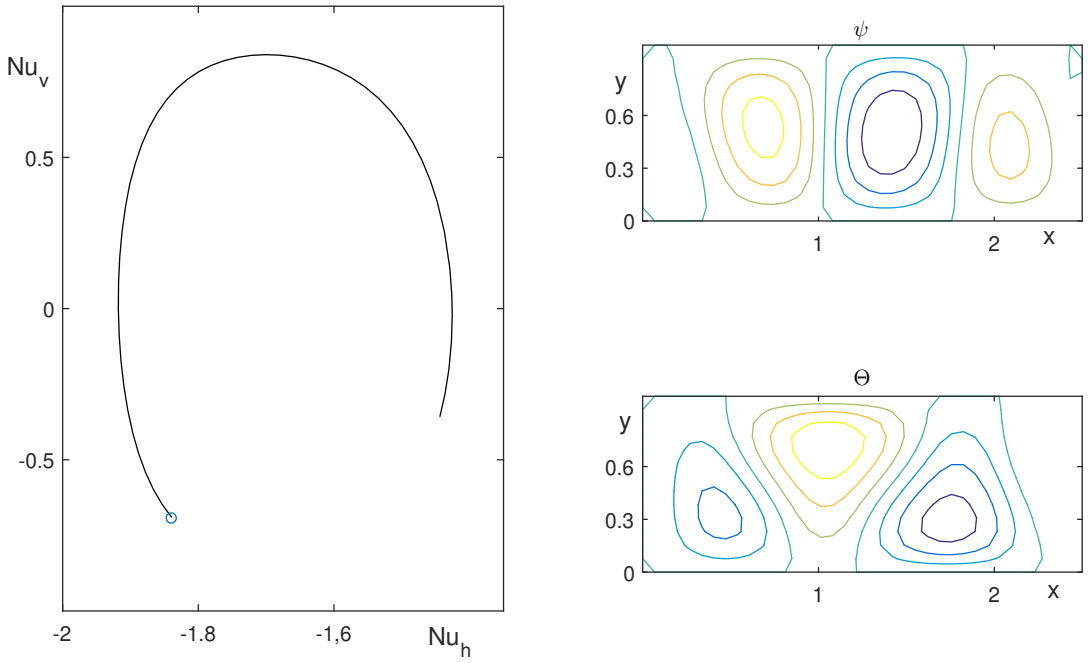

Рисунок 2.2 — Графическое окно программы AT-Fam

Программа AT-Fam предназначена для расчета семейства стационарных конвективных режимов. Входные данные берутся из текстового файла, полученного с помощью AT-Point, в процессе расчета выдается контрольная информация в Command Window и строятся рисунки. Например, на рис. 2.2 приведено служебное окно, где в левой части в координатах Nu_h и Nu_v изображается семейство стационарных режимов, а справа даны распределения функции тока и температуры последнего вычисленного режима.

Число Nu_h соответствует интегральной величине теплового потока для центрального вертикального сечения, а Nu_v – суммарному тепловому потоку через нижнюю кромку прямоугольника:

$$Nu_h = \int_{-b}^{b} \theta_x(0,y,t)dy, \tag{2.96}$$

$$Nu_v = \int_{-a}^{a} \theta_y(x,-b,t)dx. \tag{2.97}$$

При помощи чисел Нюссельта удобно графически представлять семейства стационарных состояний и динамический процесс [21],

Программа AT-Cont предназначена для продолжения по параметрам задачи конвективного режима. Входная информация получается из файла, в котором сохранены данные о семействе или отдельном конвективном режиме. В программе AT-Cont реализовано продолжение стационарного решения при помощи метода Ньютона и расчет на установление при помощи стандартной функции ode15s (или ode45). Для полученного стационарного конвективного режима далее анализируется спектр устойчивости и данные записываются в файл.

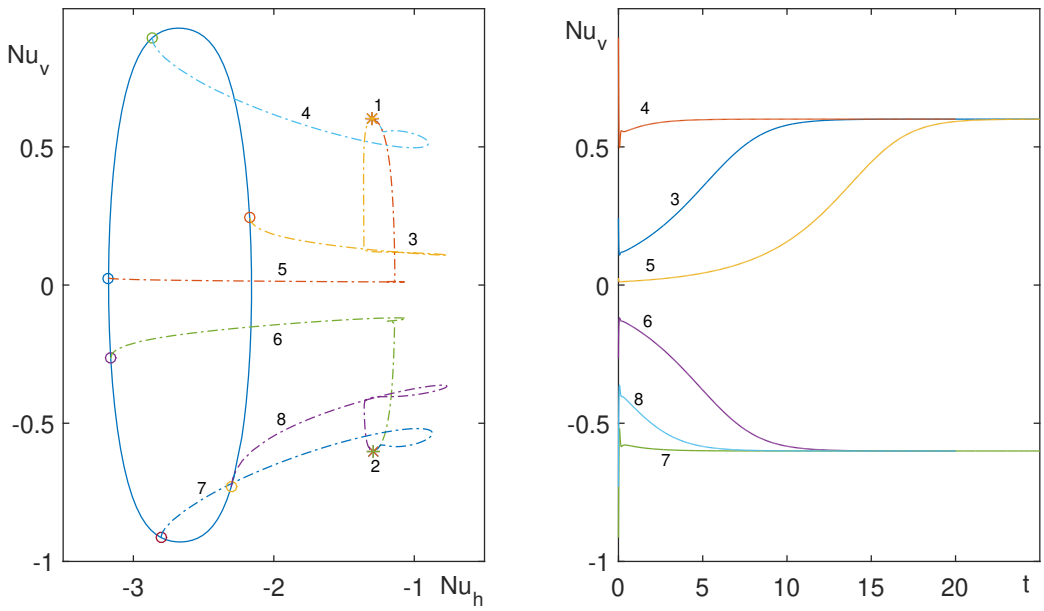

Рисунок 2.3 — Графическое окно программы AT-Dest

Программа AT-Dest предназначена для исследования разрушения семейств при нарушении условий косимметрии. Семейство стационарных конвективных режимов находилось в результате работы программы AT-Fam. Далее выбирались точки из семейства, которые служили в качестве

начальных данных при решении возмущенной задачи. На рис. 2.3 представлено окно с траекториями решений (слева) и графиками зависимости решений от времени (справа).

В программе AT-Plot предусмотрено несколько функций для построения различных графиков. С помощью программы готовятся рисунки для сравнения конвективных режимов (функция тока и температура) при различных числах Рэлея, параметрах теплопроводности и др. Входные данные о семействах и изолированных конвективных режимах берутся из файлов, созданных в результате работы программ AT-Point, AT-Fam, AT-Cont.

В программах комплексы используются стандартные функции MATLAB ode15s и ode45 для решения системы дифференциальных уравнений, eig – для вычисления собственных значений, svd – для сингулярного разложения матрицы Якоби.

Основные итоги второй главы

Для исследования сформулированных в главе 1 двумерных задач конвекции в пористой среде предложены методы с дискретизацие на основе схемы смещенных сеток. Выведены системы алгебраических и обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующие плоскую анизотропную задачу гравитационной конвекции в прямоугольнике для естественных переменных и с использованием функции тока . Полученные системы уравнений записаны в векторной форме, допускающей их преобразование к векторному дифференциальному уравнению относительно температуры. После решения соответствующей задачи методом Рунге-Кутты восстанавливаются распределения компонент скорости и давления во все моменты времени.

Рассмотрены различные варианты аппроксимации диффузионных и нелинейных слагаемых и выбраны операторы, сохраняющие косимметрию исходной задачи.

Для анализа устойчивости механического равновесия выписана разностная спектральная задача и получена система для численного определения критических чисел Рэлея. Аналогичным образом построена система разностных уравнений, аппроксимирующая начально-краевую задачу конвекции жидкости с примесью в анизотропной среде.

Для численного анализа и визуализации результатов разработан программный комплекс Aniso2d. Описаны его структура и возможности для вычисления критических чисел, расчета стационарных и нестационарных конвективных режимов, продолжения решений по параметрам задачи, определения спектральных характеристик стационарных решений.

Глава 3. Численное исследование плоских задач анизотропной конвекции в пористой среде

В данной главе представлены результаты исследования гравитационной конвекции ортотропной жидкости и конвекции бинарной жидкости в пористых прямоугольниках. На основе численных схем и программного обеспечения, описанных в главе 2, проводятся вычисления критических чисел Рэлея, конвективных движений и семейств стационарных режимов.

В § 3.1 анализируется возникновение конвекции в пористом прямоугольнике с учетом анизотропии тепловых характеристик и проницаемости. Представлены результаты вычисления критических чисел Рэлея и расчета нейтральных кривых.

В § 3.2 проводится численное исследование ответвляющихся от механического равновесия стационарных конвективных движений. Исследуется вопрос о расчете стационарных режимов при использовании аппроксимаций, нарушающих косимметрию исходной постановки.

В § 3.3 анализируется проблема разрушения семейства стационарных режимов при нарушении условий косимметрии вследствие изменения значений параметров задачи. Проводятся вычисления селективных функций, и находятся изолированные конвективные режимы при распаде семейства равновесий.

В § 3.4 рассматривается плоская задача о возникновении конвекции в пористом прямоугольнике, насыщенном теплопроводной жидкостью с примесью. На основе уравнений Дарси-Буссинеска и учета эффекта Соре проводится анализ монотонной и колебательной неустойчивости механического равновесия.

3.1 Критические числа Рэлея и возникновение конвекции в пористом прямоугольнике

Рассматривается задача о подогреве прямоугольного контейнера с теплопроводной жидкостью, насыщающей пористую анизотропную среду. Математическая формулировка задачи для функции тока ψ и отклонения температуры θ дается уравнениями (1.23)–(1.24), а ее дискретный аналог – системой (2.49)–(2.50). Далее приводятся уравнения для ортотропного случая, который описывается следующей системой:

$$0 = \mu_{11}\psi_{yy} - (\mu_{12} + \mu_{21})\psi_{xy} + \mu_{22}\psi_{xx} + \lambda\theta_x \tag{3.1}$$

$$\dot{\theta} = d_{11}\theta_{xx} + (d_{12} + d_{21})\theta_{xy} + d_{22}\theta_{yy} - \psi_x - J(\psi, \theta), \tag{3.2}$$

$$[\psi]_{\partial\Omega} = 0, \quad [\theta]_{\partial\Omega} = 0, \quad J = \theta_x\psi_y - \theta_y\psi_x, \tag{3.3}$$

$$\theta(x,y,0) = \theta_0(x,y), \tag{3.4}$$

здесь λ — фильтрационное число Рэлея; μ_{ij} и d_{ij}, $(i,j = 1,2)$ — соответственно коэффициенты обратной проницаемости и теплопроводности, $\Omega = [0,a] \times [0,b]$.

Исследование конвекции начинается с анализа устойчивости механического равновесия, которому отвечают нулевые скорости жидкости и линейный профиль по высоте для температуры. В § 1.4 получены явные формулы для критических чисел Рэлея в случае косимметрии, а в гл. 2 выписаны системы для численного определения критических чисел Рэлея. В § 2.2 представлены результаты вычислительных экспериментов по выбору сетки, обеспечивающей необходимую точность расчета критических чисел Рэлея. Например, на основе этих данных для прямоугольника $\Omega = [0,1.5] \times [0,1]$ расчеты на сетке 24×16 дают достаточно хорошие результаты.

Ниже в основном представлены результаты расчетов критических значений чисел Рэлея и ответвляющихся конвективных режимов для прямоугольников, длина которых больше высоты $(a > b)$.

На рис. 3.1 представлены нейтральные кривые зависимости критических чисел Рэлея λ от длины прямоугольника a (высота $b = 1$),

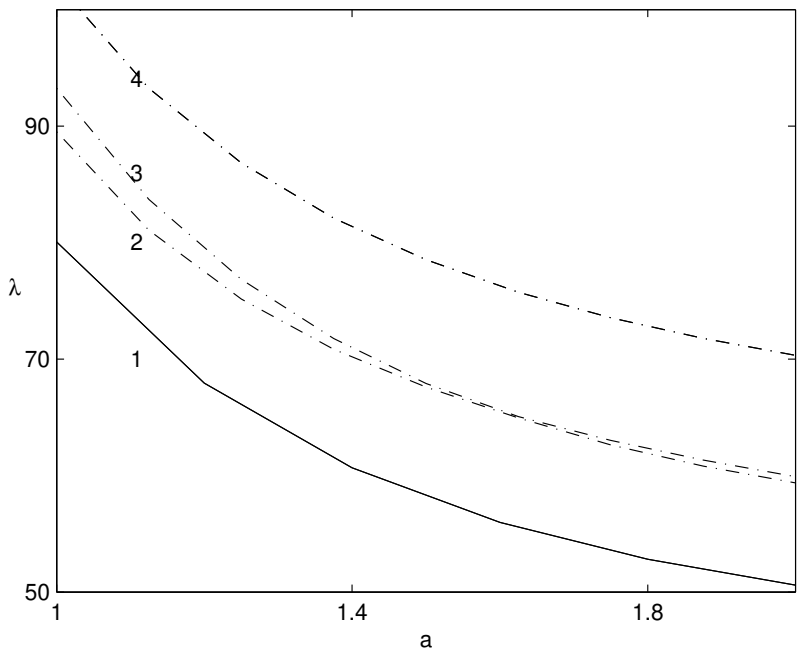

Рисунок 3.1 — Нейтральные кривые для ряда значений безразмерных параметров обратной проницаемости: $\mu_{11} = 1, d_{22} = 1$ (*1*), $\mu_{11} = 1.5, d_{22} = 1$ (*2, 3*), $\mu_{11} = 1{,}5, d_{22} = 1.5$ (*4*).

Таблица 3 — Критические числа Рэлея при различных μ_{ij} и d_{ij}; $a = 1.5$, $b = 1$, $n = 24$, $m = 16$.

μ_{11}	μ_{22}	$\mu_{12} = \mu_{21}$	d_{11}	d_{22}	$d_{12} = d_{21}$	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	кос
1	1	0	1	1	0	58.081	58.081	115.58	115.58	+
1	1.5	0	1	1	0	75.538	77.352	159.26	165.27	-
1	1.5	0	1.5	1	0	100.24	100.24	228.12	228.12	+
1	1.5	0.2	1.5	1	0	99.256	99.269	225.49	225.62	-
1	1.5	0.2	1.5	1	-0.2	97.224	97.224	219.21	219.21	+
1	1.5	-0.2	1.5	1	0.2	97.224	97.224	219.21	219.21	+

рассчитанных для нескольких значений параметров обратной проницаемости и коэффицинетов теплопроводности. Кривые *1, 4* отвечают случаю косимметрии и получены соответственно при $\mu_{11} = d_{22} = 1$ и $\mu_{11} = d_{22} = 1.5$. Остальные параметры были фиксированы: $\mu_{22} = d_{11} = 1, \mu_{12} = \mu_{21} =$

$d_{12} = d_{21} = 0$. Кривые *2* и *3* отвечают двум наименьшим собственным значениям спектральной задачи (2.60), рассчитанным при $\mu_{11} = 1.5, d_{22} = 1$, т.е. в случае нарушения условия косимметрии (1.72). С увеличением $\mu_{11} = d_{22}$ значение критического числа λ_{crit} повышается по сравнению с изотропным случаем (кривая *1*).

Таблица 4 — Критическое число Рэлея λ_{crit} при различных μ_{11} и d_{22}; $a = 1.5$, $b = 1$, $\mu_{22} = d_{11} = 1.5$, $\mu_{ij} = d_{ij} = 0$, $i \neq j$, $n = 24$, $m = 16$

$\mu_{11} \backslash d_{22}$	1	1.5	2	2.5	3
1	100.24	113.31	126.21	138.94	151.50
1.5	113.31	130.68	145.03	159.08	172.51
2	126.21	145.03	161.30	176.10	190.00
2.5	138.94	159.08	176.10	192.09	206.83
3	151.50	172.51	190.00	206.83	223.06

Из рис. 3.1 видно, что с увеличением длины a критические значения чисел Рэлея монотонно уменьшаются, выходя на асимптоту, соответствующую значениям для слоя. Отметим, что при косимметрии первые два критических числа λ_1 и λ_2 равны (см. кривые *1, 4*), а при нарушении косимметрии различны, но с ростом a их отличия уменьшаются. Проведенные расчеты при $d_{12} = d_{21} = 0$ и без учета косимметричности задачи показали хорошее согласие с результатами [100], где для определения критических чисел Рэлея использовалось численное решение спектральной задачи.

В табл. 3 представлены результаты расчетов первых четырех критических чисел Рэлея в зависимости от комбинаций параметров обратной проницаемости μ_{ij} и коэффициентов теплопроводности d_{ij} для прямоугольника с параметрами $a = 1.5$, $b = 1$ и сетке $n = 24$, $m = 16$. В последней колонке «кос» отмечает выполнение условий косимметрии (1.72). Первая строка соответствует изотропному случаю, рассмотренному в работах [19, 71, 26]. Двукратность собственных чисел спектральной задачи (1.82), (1.83) характерна косимметрии.

Из табл. 3 видно, что отвечающие перекрестным эффектам термодиффузии и проницаемости ненулевые коэффициенты, сохраняющие косимметрию (1.72), понижают значения критических чисел Рэлея (пятая

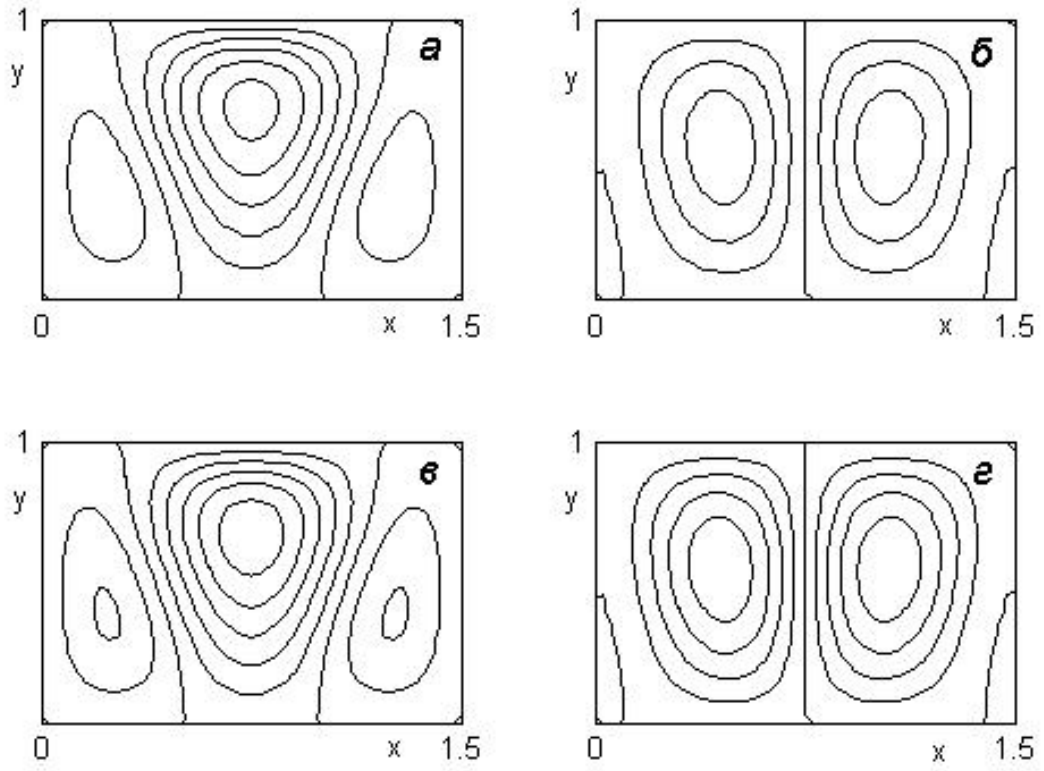

Рисунок 3.2 — Стационарные режимы при $\lambda = 85$ распределение температуры θ (*а, в*), функция тока ψ (*б, г*); $\mu_{11} = 1.5$, $\mu_{22} = 1$, $d_{11} = d_{22} = 1$ (*а, б*); $\mu_{11} = \mu_{22} = 1$, $d_{11} = 1, d_{22} = 1.5$ (*в, г*)

и шестая строки табл. 3). Последние две строки табл. 3 подтверждают установленный формулой (1.100) эффект равных критических чисел для перекрестных коэффициентов разных знаков. Расчеты в таблицах 3 и 4 проведены на сетке 24×16.

Результаты расчетов порогового числа Рэлея λ_{crit} в зависимости от параметров обратной проницаемости и коэффициентов теплопроводности представлены в табл. 4 для $\mu_{22} = d_{11} = 1.5$, $\mu_{ij} = d_{ij} = 0$, $i \neq j$. Видно, что критические числа следуют формуле (1.101): одинаковые отклонения параметров от значений, отвечающих косимметричной ситуации, приводят к одинаковым величинам критических чисел Рэлея. Так при $\mu_{11} = 2.5$ и $d_{22} = 1.5$ получается $\lambda_{crit} = 159.08$, что совпадает с результатом при $\mu_{11} = 1.5$ и $d_{22} = 2.5$. Аналогичные результаты получены также для других прямоугольников и сеток, см. табл. 5 – 7.

Таблица 5 — Критические числа Рэлея λ_{crit} при различных μ_{ij}, d_{ij}; $\mu_{ij} = d_{ij} = 0$, $i \neq j$, $a = 2$, $b = 1$, $n = 24$, $m = 12$.

$\mu_{22} = d_{11}$	$\mu_{11} \backslash d_{22}$	1	1,5	2	2,5
1	1	50.515	60.046	68.966	77.575
	1.5	60.046	71.256	81.226	90.806
	2	68.966	81.226	92.311	102.62
	2.5	77.575	90.806	102.62	113.68
1.5	1	82.94	97.382	110.43	122.79
	1.5	97.382	113.66	128.17	141.90
	2	110.43	128.17	144.69	159.56
	2.5	122.79	141.90	159.56	176.04
2	1	120.35	138.91	157.01	174.37
	1.5	138.91	161.05	180.53	198.6
	2	157.01	180.53	202.06	221.57
	2.5	174.37	198.6	221.57	243.39

На рис. 3.2 приведены результаты вычисления конвективных режимов при $\lambda = 85$ и двух наборах параметров: 1) $\mu_{11} = 1.5$, $d_{22} = 1$ (*а*, *б*); $\mu_{11} = 1$, $d_{22} = 1.5$ (*в*, *г*). Выше показано, что при этих значениях механическое равновесие теряет устойчивость для одного и того же числа Рэлея. Для сетки 24×16 критическим значением, отвечающим возникновению конвекции, является $\lambda_1 = 67.597$. Из рис. 3.2 видно, что оба случая характеризуются распределениями температуры и функциями тока одного типа.

В то же время, имеются отличия в числовых характеристиках конвективных режимов. Для течения, изображенного на рис. 3.2 (*а*, *б*), вычисления дают $\max \psi = 1.8175$, а для представленного на рис. 3.2 (*в*, *г*) – $\max \psi = 2.3457$. Полученные режимы входят в однопараметрическое семейство стационарных решений. Вычисления на основе формул (2.61), (2.62) показывают, что спектр устойчивости этих решений содержит практически нулевое собственное число.

Таблица 6 — Критические числа Рэлея λ_{crit} при различных μ_{ij}, d_{ij}; $\mu_{ij} = d_{ij} = 0$, $i \neq j$, $a = 1.5$, $b = 1$, $n = 24$, $m = 12$.

$\mu_{22} = d_{11}$	$\mu_{11} \backslash d_{22}$	1	1,5	2	2,5
1	1	57.999	67.492	76.554	84.742
	1.5	67.492	78.397	88.076	97.134
	2	76.554	88.076	98.971	108.76
	2.5	84.742	97.134	108.76	119.72
1.5	1	100.12	113.15	126.02	138.72
	1.5	113.15	130.50	144.81	158.83
	2	126.02	144.81	161.05	175.82
	2.5	138.72	158.83	175.82	191.78
2	1	151.11	167.25	183.29	199.23
	1.5	167.25	191.46	209.39	227.11
	2	183.29	209.39	232.00	251.13
	2.5	199.23	227.11	251.13	272.70

В табл. 5, 6, 7 предетавлены результаты расчетов критических чисел Рэлея в зависимости от параметров обратной проницаемости и коэффициентов теплопроводности для разных прямоугольников.

В табл. 5 приведены критические числа Рэлея для области $a = 2$, $b = 1$. Косимметрии отвечают результаты при $\mu_{11} = d_{22}$ (значения на диагоналях). Проведенные на достаточно грубой сетке расчеты демонстрируют хорошее согласование результатов для критических чисел, установленное формулой (1.100). Например, при $\mu_{22} = d_{11} = 2$, $\mu_{11} = d_{22} = 2.5$ точное значений $\lambda_{crit} = 243.39$.

Табл. 6 посвящена расчетам для прямоугольника, длина которого немногим больше высоты ($a = 1.5$, $b = 1$). Результаты для области с обратным соотношением $a = 1$, $b = 1.5$ даны в табл. 7. В этих вычислениях применялись прямоугольные разностные ячейки, высота которах превышала длину. Видно, что для прямоугольника с $a < b$ (табл. 7) критические числа λ_{crit} с увеличением μ_{11} (d_{22}) растут медленнее, чем для прямоугольника, у которого длина больше высоты ($a > b$, см. табл. 6). При этом

Таблица 7 — Критические числа Рэлея λ_{crit} при различных μ_{ij}, d_{ij}; $\mu_{ij} = d_{ij} = 0$, $i \neq j$, $a = 1$, $b = 1.5$, $n = 12$, $m = 12$.

$\mu_{22} = d_{11}$	$\mu_{11} \backslash d_{22}$	1	1,5	2	2,5
1	1	59.709	62.722	65.734	68.744
	1.5	62.722	69.119	72.424	75.726
	2	65.734	72.424	78.589	82.153
	2.5	68.744	75.726	82.153	88.119
1.5	1	120.30	124.50	128.70	132.90
	1.5	124.50	134.35	138.86	143.38
	2	128.70	138.86	148.45	153.26
	2.5	132.90	143.38	153.26	162.61
2	1	201.43	206.80	212.17	217.54
	1.5	206.80	220.11	225.81	231.52
	2	212.17	225.81	238.84	244.86
	2.5	217.54	231.52	244.86	257.63

одинаковые отклонения параметров от значений, отвечающих косимметричной сатуации, приводят к одинаковым величинам критических чисел Рэлея.

3.2 Расчет конвективных режимов

Для задачи гравитационной конвекции теплопроводной жидкости в пористом прямоугольнике в результате потери устойчивости механического равновесия возникают конвективные режимы. В случае косимметрии в зависимости от начального распределения могут быть реализованы различные виды стационарных движений.

Ниже представлены результаты численных экспериментов по расчету режимов, входящих в семейство. Рассматривается задача для жидкости и среды в случае $\mu_{ij} = d_{ij} = 0$, $i \neq j$. Приведены расчеты режимов при аппроксимациях, наследующих свойство косимметрии. Рассматривались прямоугольники высоты $b = 1$ с длиною $a = 1.5$ и $a = 2.5$. Расчеты проводились для различных значений безразмерных параметров обратной проницаемости и теплопроводности μ_{11} и d_{22}, остальные параметры были фиксированы: $\mu_{22} = d_{11} = 1$.

3.2.1 Стационарные конвективные режимы

В табл. 8 представлены результаты вычисления критических чисел Рэлея λ_{kj} для задачи (2.41) на нескольких сетках (число узлов n, m) в случае косимметрии. Дано сравнение со значениями, получаемыми по явной формуле (1.95).

Из таблицы видно, что трехпроцентная точность вычисления первого критического значения $\lambda_{crit} = \lambda_{11}$ достигается уже на сетке 24×16. При измельчении сетки вдвое λ_{crit} определятся с точностью 1%. Получено также, что для вычисления критических значений детальная сетка по x (число узлов n больше) оказывается важнее, чем уменьшение шага по y (число узлов m). Из табл. 8 видно, что для прямоугольника с $a = 1.5, b = 1$ характерен следующий порядок возрастания критических чисел: λ_{11}, λ_{21}, λ_{31}, λ_{12}.

Таблица 8 — Критические числа Рэлея при различных n, m;
$\mu_{11} = d_{22} = 1.5$, $\mu_{22} = d_{11} = 1$, $\mu_{ij} = d_{ij} = 0$, $i \neq j$, $a = 1.5$, $b = 1$.

n	m	λ_{11}	λ_{21}	λ_{31}	λ_{12}
18	12	79.832	143.02	265.89	278.24
24	16	78.521	137.03	243.39	268.19
30	20	77.902	134.29	233.67	263.38
54	36	77.123	130.93	222.18	257.26
72	36	76.952	130.25	219.96	255.78
	(1.95)	76.764	129.40	217.13	254.42

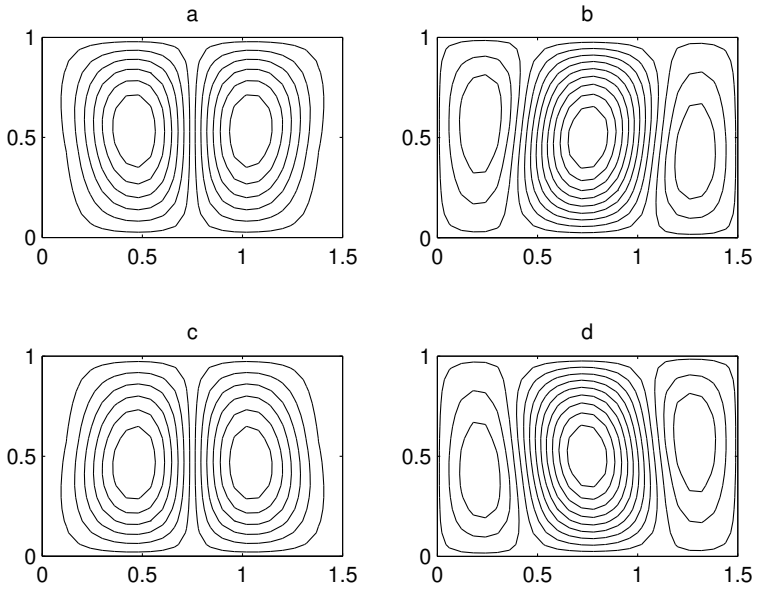

Рисунок 3.3 — Линии тока для четырех конвективных режимов из семейства; $\lambda = 90$, $\mu_{11} = d_{22} = 1.5$, $a = 1.5$.

При превышении числом Рэлея λ критической величины λ_{crit} происходит формирование стационарных конвективных режимов. На рис. 3.3 представлены линии тока для нескольких конвективных режимов из однопараметрического семейства. В спектре устойчивости каждого решения имеется практически нулевое число, что подтверждает принадлежность полученных решений семейству стационарных конвективных режимов. При вычислении стационарных режимов итерационный процесс уточнения проводился до достижение точности 10^{-6}. При этом были получены следующие

главные собственные числа режимов: $\sigma \approx 2 \times 10^{-7}$ (a), $\sigma \approx 4 \times 10^{-8}$ (b), $\sigma \approx -2 \times 10^{-7}$ (c), $\sigma \approx -3 \times 10^{-8}$ (d).

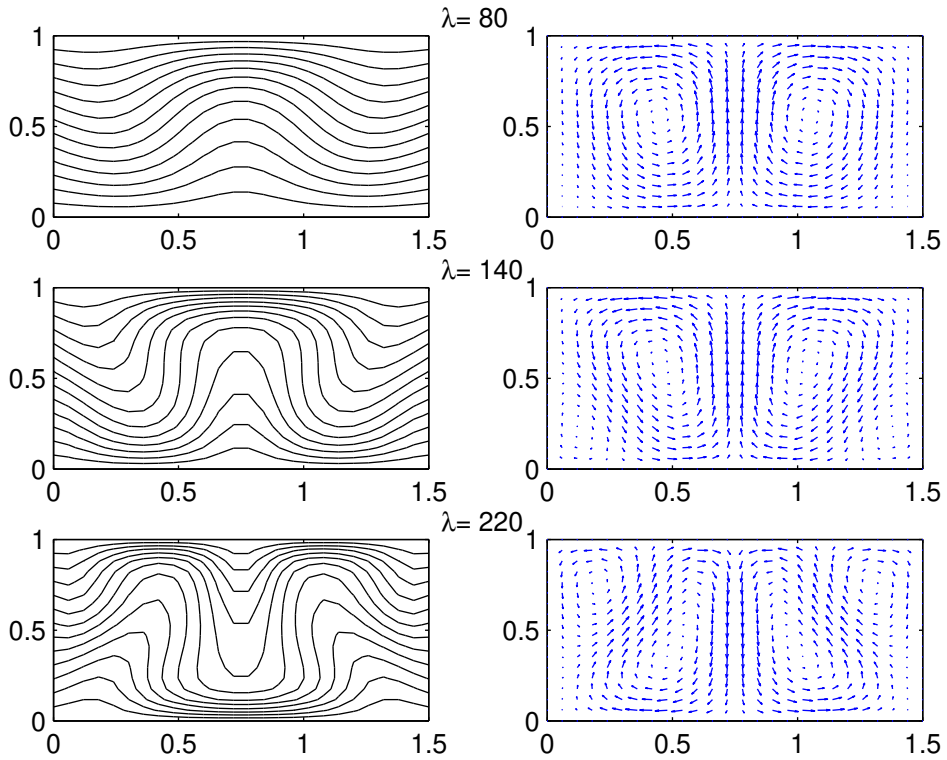

Рисунок 3.4 — Распределение температуры и векторное поле скорости для различных чисел Рэлея λ; $\mu_{11} = d_{22} = 1.2$.

С увеличением числа Рэлея λ происходит деформация конвективных режимов. На рис. 3.4 даны распределения температуры и векторного поля скорости для ряда значений фильтрационного числа Рэлея λ при $\mu_{11} = d_{22} = 1.2$. Расчеты конвективных режимов проведены для прямоугольника длины $a = 1.5$ на сетке 36×24. Полученные решения входят в семейство стационарных движений, на это указывает имеющееся в спектре практически нулевое собственное число.

Для прямоугольника с $a = 2.5$ и нескольких значений параметра μ_{11} критические числа Рэлея $\lambda_{crit} = \lambda_{11}$ представлены в табл. 9. Видно, что критическое значение фильтрационного числа Рэлея с точностью 3% получается уже на сетке 30×12. Отметим, что случай $\mu_{11} \neq d_{22}$ не является косимметричным, с ростом коэффициента обратной проницаемости μ_{11} критическое число Рэлея λ_{crit} повышается.

Таблица 9 — Критическое число Рэлея λ_{crit} при различных n, m, μ_{11}; $d_{22} = 1.2$, $a = 2.5$.

μ_{11}	30×12	40×16	60×24	80×32	(1.95)
1	50.644	50.200	49.878	49.763	-
1.2	54.904	54.381	54.001	53.866	53.691
1.5	60.923	60.280	59.814	59.649	-

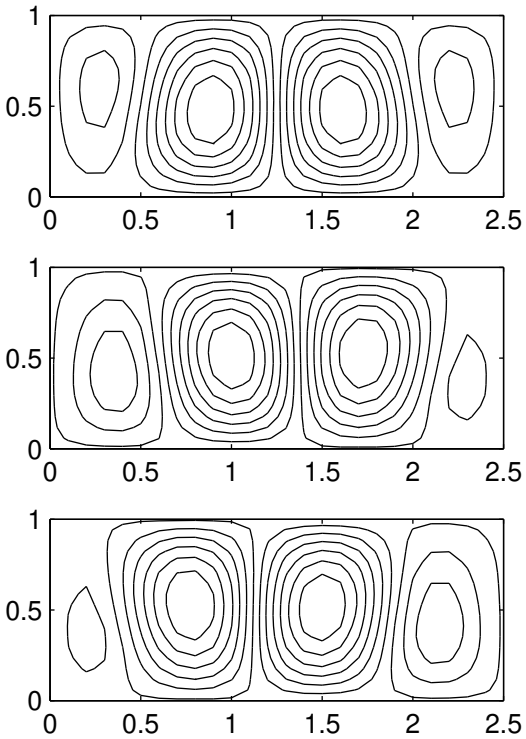

Рисунок 3.5 — Линии тока для трех конвективных режимов из семейства; $\lambda = 90$, $\mu_{11} = d_{22} = 1.5$, $a = 2.5$.

Для прямоугольника с увеличением отношения a/b вырастает число конвективных валов, см. рис. 3.5. По сравнению с рис. 3.3 центральные валы при обходе семейства меняются мало, в основном происходит деформация приграничных валов.

3.2.2 Нарушение косимметрии при аппроксимации и разрушение семейства стационарных состояний

Выше представлены результаты расчетов при использовании схемы, сохраняющей косимметрию если вместо формул (2.16) использовать формулы (2.17), то семейство стационарных движений разрушается. При этом получается конечное число изолированных решений. Далее представлены результаты расчетов, в которых для иллюстрации нарушения косимметрии использовался оператор, полученный линейной комбинацией формул (2.16) и (2.17):

$$\hat{L}_D^h = (1-\gamma)L_D^h + \gamma\tilde{L}_D^h. \tag{3.5}$$

Оба оператора L_D^h и $\tilde{L}_D^h$ обеспечивают аппроксимацию второго порядка точности, но только при $\gamma = 0$ из (3.5) получается формула, сохраняющая косимметрию.

Таблица 10 — Спектр устойчивости при различных γ, d_{22} ; $\lambda = 100$, $\mu_{11} = 1.2$, $n = 24$, $m = 16$.

γ	d_{22}	σ_1	σ_2
0	1.2	6.887e-007	-12.30
1/8	1.2	-5.323e-003	-12.23
1/4	1.2	-1.073e-002	-12.16
0	1	8.309e-002	-10.89
1/8	1	8.208e-002	-10.82
1/4	1	8.091e-002	-10.75

В случае $d_{22} = \mu_{11} = 1.2$ исходная задача косимметрична и численная схема при $\gamma = 0$ также удовлетворяет условию косимметрии. В табл. 10 представлено сравнение результатов расчета спектра на основе формулы (3.5) при $\gamma = 0$ и $\gamma \neq 0$. Наличие собственного значения $\sigma \approx 10^{-7}$ при $\gamma = 0$ означает принадлежность полученного решения семейству стационарных конвективных режимов. При аппроксимации с $\gamma \neq 0$ вместо семейства получаются изолированные стационарные режимы. На это указывает резкое изменение главного собственного числа матрицы линеаризации

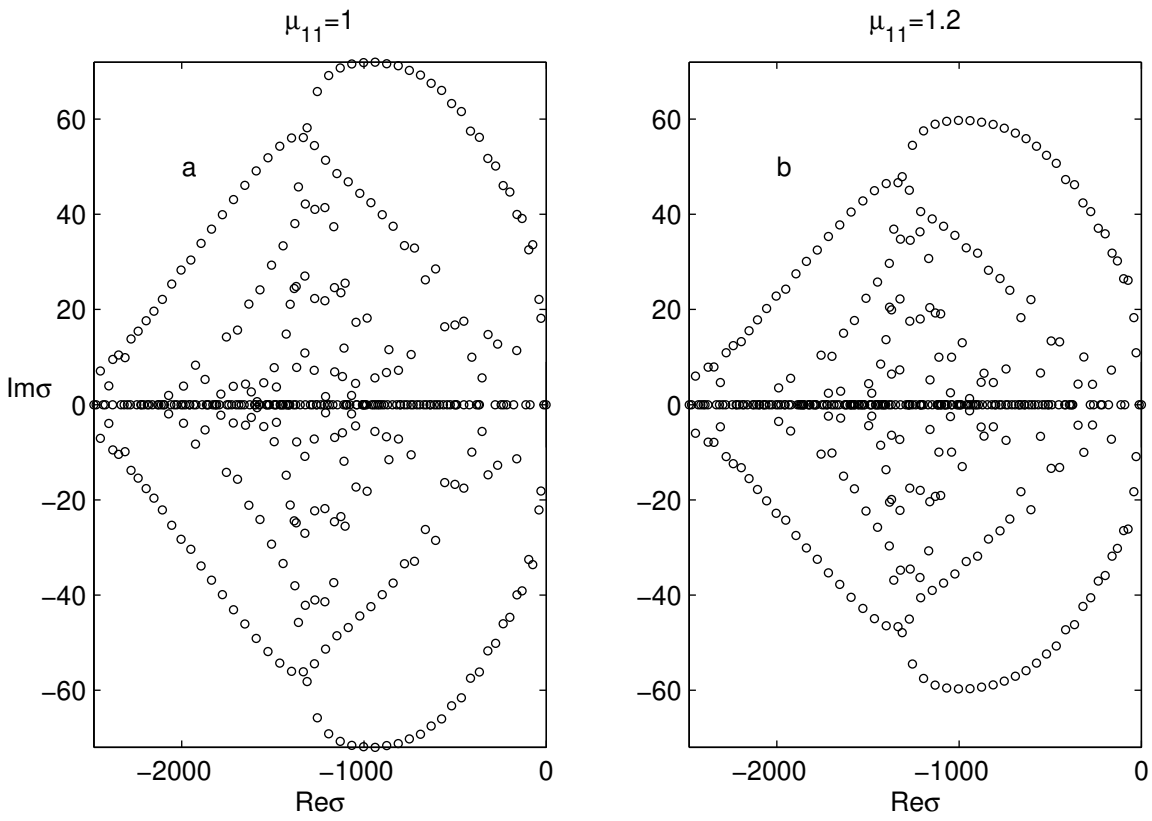

Рисунок 3.6 — Распределение спектра устойчивости стационарного режима при различных μ_{11}; $\gamma = 0$, $d_{22} = 1.2$, $\lambda = 80$.

$\sigma_1 \approx 10^{-2}$. Отметим, что следующее собственное значение меняется незначительно ($\sigma_2 \approx -12$).

При $d_{22} \neq \mu_{11}$ исходная задача не обладает косимметрией. В этом случае главное и последующие значения спектра незначительно меняются с ростом γ. Малость главного собственного значение ($\sigma_1 \approx 0.08$) указывает на то, что система «помнит» об исчезнувшей косимметрии.

На рис. 3.6 и 3.7 приведены распределения спектра устойчивости для двух стационарных конвективных режимов при выполнении условия косимметрии ($d_{22} = \mu_{11}$) и при его нарушении ($d_{22} \neq \mu_{11}$). Представлены расчеты на основе сохраняющих ($\gamma = 0$, рис. 3.6) и нарушающих косимметрию аппроксимаций ($\gamma > 0$, рис. 3.7) для симметричного режиме (см. рис. 3.4, $\lambda = 80$). Нарушение косимметрии за счет $d_{22} \neq \mu_{11}$ приводит к исчезновению семейства, но это почти не сказывается на распределении спектра устойчивости (рис. 3.6). Использование аппроксимации, не сохраняющей косимметрию, радикально меняет картину распределения спектра

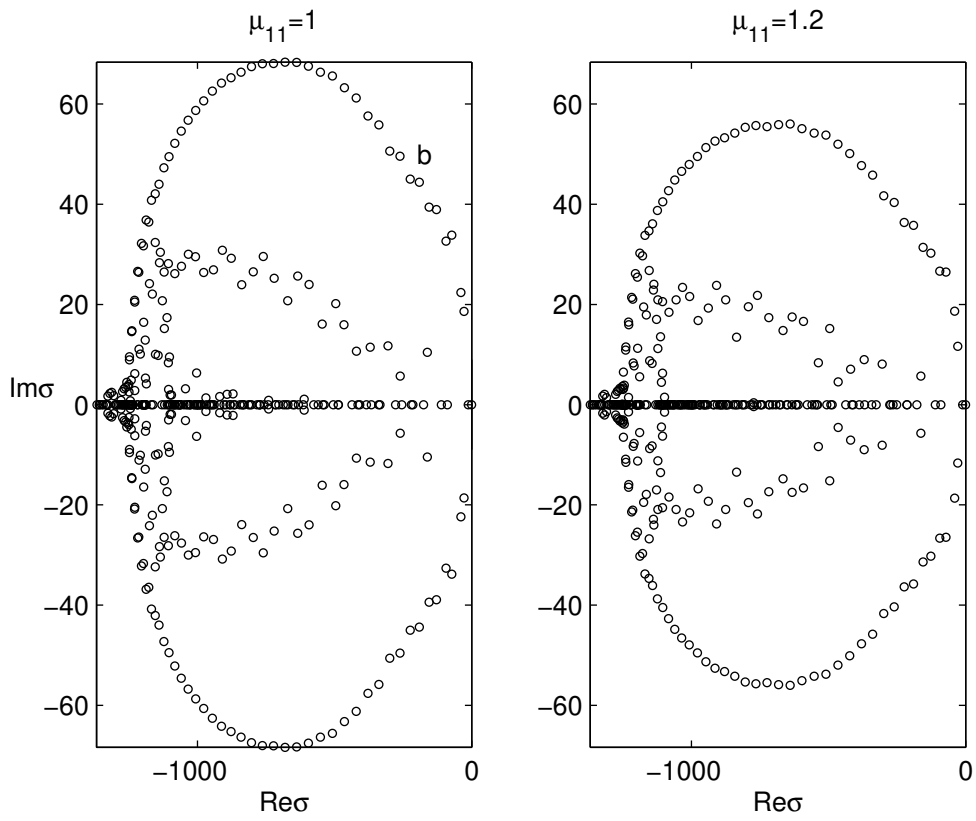

Рисунок 3.7 — Распределение спектра устойчивости стационарного режима при различных μ_{11}; $\gamma = 1/8$, $d_{22} = 1.2$, $\lambda = 80$

устойчивости. При разностном нарушении косимметрии помимо разрушения семейства происходит искажение всего спектрального портрета см. рис 3.7.

3.3 Вычисление семейств стационарных движений и изолированных режимов

Для анизотропной задачи конвекции Дарси в § 3.1 представлен анализ возникновения стационарных конвективных режимов, ответвляющихся от теряющего устойчивость механического равновесия. В § 1.4 аналитически были определены условия на коэффициенты системы, при которых задача имеет косимметрию и происходит ответвление непрерывного семейства стационарных режимов. В этом параграфе представлены результаты вычисления самих семейств и проведено исследование их разрушения при нарушении условий косимметрии.

Для аппроксимации задачи (1.33)–(1.38) по пространственным переменным применяется подход, развитый в [1, 2]. Используется равномерная сетка и операторы второго порядка точности со специальной аппроксимацей конвективных членов, сохраняющие свойство косимметрии исходной задачи. В случае косимметрии при расчетах с хорошей точностью получаются кратные критические числа $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4, \ldots$. При $\lambda = \lambda_1$ спектр устойчивости механического равновесия содержит два нулевых значения. Для $\lambda_1 < \lambda < \lambda_3$ два значения σ лежат в правой полуплоскости ($Re\sigma > 0$), а остальные находятся в левой полуплоскости.

Семейства стационарных решений вычисляются при помощи алгоритма [21, 71], основанного на косимметрической версии теоремы о неявной функции [40]. Вначале методом установления находится некоторое устойчивое равновесие на семействе. Прогнозное значение для следующей точки вычисляется при помощи экстраполяционного метода Адамса, а уточнение равновесия производится методом Ньютона. При этом матрица линеаризации находится численно, а для определения ее ядра применяется SVD-разложение. Для проведения компьютерного эксперимента разработана программа в MATLAB [38], позволяющая находить нестационарные режимы фильтрационной конвекции и вычислять семейства стационарных решений.

3.3.1 Случай косимметрии

Ниже приведены расчеты для прямоугольников, длина которых больше высоты $a > b$. Состояние покоя $\theta = \psi = 0$ $(\Theta = \Psi = 0)$ глобально устойчиво при малых значениях параметра Рэлея $\lambda < \lambda_{11}$ $(\lambda < \lambda_1^h)$, а при превышении критического значения возникает непрерывное семейство стационарных конвективных режимов, наследующее устойчивость нулевого равновесия [40, 129]. В спектре каждого режима содержится нулевое значение, что соответствует нейтральному направлению вдоль семейства, а устойчивость или неустойчивость определяется из анализа устойчивости на трансверсальном к семейству многообразии.

Таблица 11 — Критические числа Рэлея при различных μ_{11}, μ_{22} и d_{22}; $d_{11} = 1$, $a = 2.5$, $b = 1$

μ_{11}	μ_{22}	d_{22}	λ_{11}	λ_{21}	λ_1^h	λ_2^h	λ_3^h	λ_4^h	кос
1	1	1	45.795	64.745	46.121	46.121	65.770	65.770	+
1.2	1	1.2	53.691	72.640	54.135	54.135	73.876	73.876	+
1.2	0.8	1.5	52.427	67.587	52.953	52.953	68.856	68.856	+
1.21	1.1	1.1	54.717	75.562	55.139	55.139	76.803	76.803	+
1.1	0.8	1.5	–	–	50.909	50.928	66.719	66.879	-
1.3	0.8	1.5	–	–	54.932	54.961	70.810	70.935	-

В табл. 11 представлены результаты вычислений критических чисел Рэлея в зависимости от комбинаций параметров обратной проницаемости μ_{ij} и коэффициентов теплопроводности d_{22} при $d_{11} = 1$, $a = 2.5$, $b = 1$. Значения λ_{11}, λ_{21} посчитаны по формуле (1.49), а величины λ_1^h, λ_2^h, λ_3^h отвечают первым трем критическим значениям на сетке 50×20. В последней колонке «кос» отмечает выполнение условий косимметрии (1.59).

Первая строка табл. 11 отвечает изотропной задаче [118, 71], следующие три строки – косимметрии в анизотропном случае. Вторая строка соответствует условиям, приведенным в [1], третья и четвертая – условиям (1.59). Эти числа характеризуют возникновение конвекции в результате

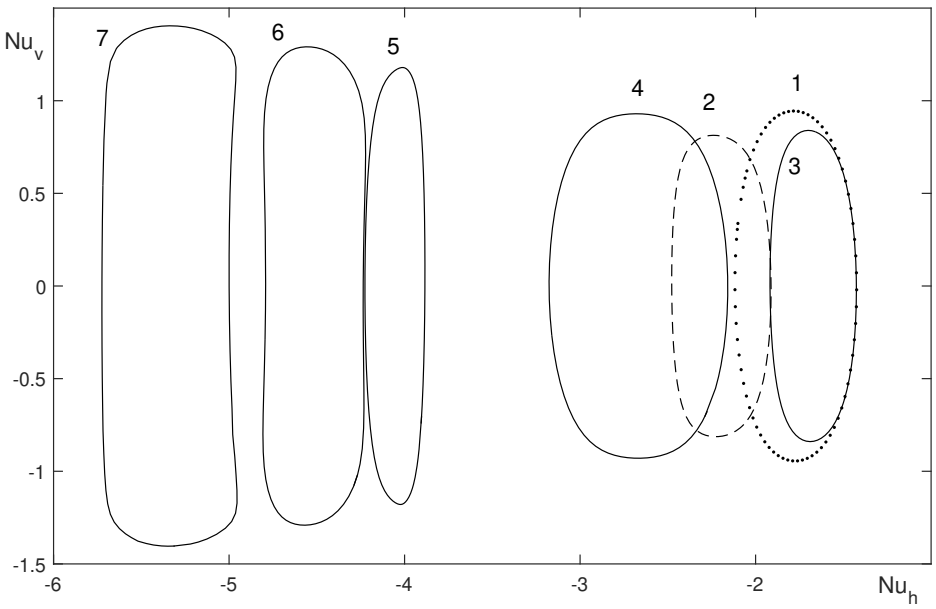

Рисунок 3.8 — Семейства стационарных режимов при косимметрии: изотропный случай ($\lambda = 90$, кривая 1); $\mu_{11} = 1.2$, $\mu_{22} = 0.8$, $d_{22} = 1.5$, $\lambda = 90$ (2); $\mu_{11} = d_{22} = 1.2$, $\mu_{22} = 1$, $\lambda = 90$ (3), $\lambda = 120$ (4), $\lambda = 180$ (5), $\lambda = 210$ (6), $\lambda = 270$ (7); $d_{11} = 1$.

монотонной потери устойчивости механического равновесия. В последних двух строках табл. 11 представлены результаты вычисления критических чисел для конечномерного аналога задачи при нарушении условия существования косимметрии. Видно, что двукратность собственных чисел соответствующей спектральной задачи пропадает. Сравнение численных результатов и вычислений по формуле (1.49) показывает, что дискретизация на сетке 50×20 обеспечивает приемлемую точность.

При малых надкритичностях, т. е. при значениях числа Рэлея λ, незначительно превышающих критическое значение λ_{11}, первичное семейство полностью устойчиво. С увеличением параметра λ происходит рост семейства и усложнение режимов. Неустойчивость на семействе в случае $a > b$ наступает при достаточно больших числах Рэлея, для изотропной задачи Дарси соответствующие расчеты приведены в [56].

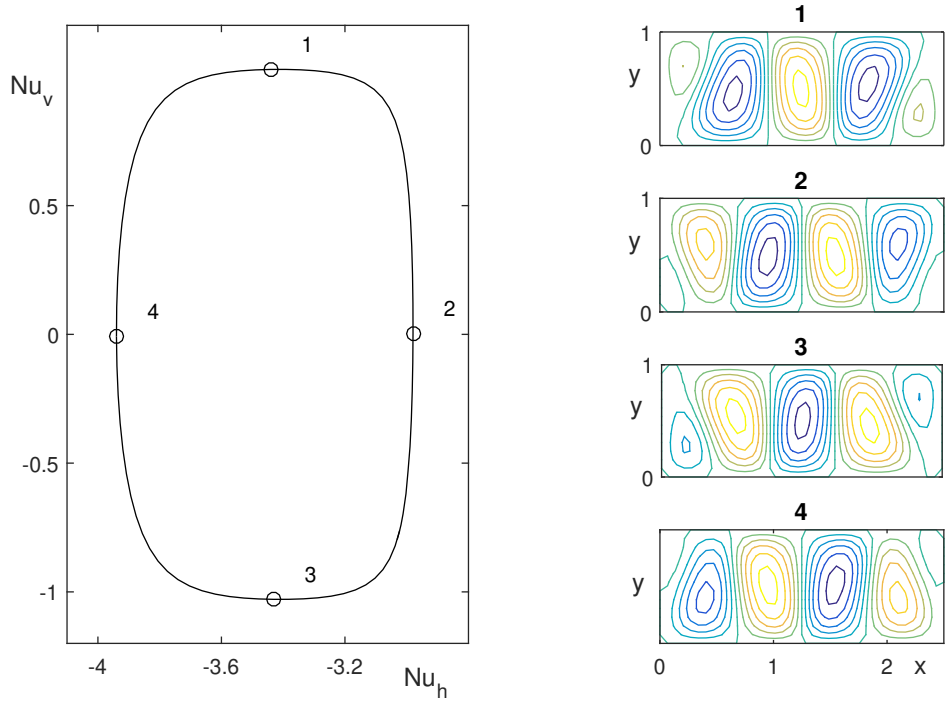

Рисунок 3.9 — Семейство (слева) и функции тока ψ для стационарных режимов из семейства: $\lambda = 150$, $\mu_{11} = d_{22} = 1.2$, $\mu_{22} = d_{11} = 1$.

Далее рассчитанные семейства стационарных режимов представлены в координатах Nu_h и Nu_v:

$$Nu_h = \int_0^b \theta_x\big|_{x=a/2} dy, \quad Nu_v = \int_0^a \theta_y|_{y=0} dx. \tag{3.6}$$

На рис. 3.8 изотропному случаю отвечает кривая (1). С изменением параметров μ_{11}, d_{22}, μ_{22} согласно формуле (1.59), косимметрия сохраняется, при этом семейство смещается, см. кривые (2) и (3). С ростом числа Рэлея λ семейство увеличивается в размере и смещается в сторону отрицательных значений Nu_h.

На рис. 3.9 приведена кривая семейства (слева), рассчитанного при $\lambda = 150$. Точками отмечены стационарные режимы, функции тока которых даны справа. В зависимости от положения точки на семействе получающийся режим состоит из четырех валов (точки 2, 4) или трех основных валов и двух угловых (1, 3). Видно, что соответствующие точкам 1 и 3 движения имеют разный наклон валов, а режимы 2 и 4 являются симметричными относительно центрального вертикального сечения прямоугольника.

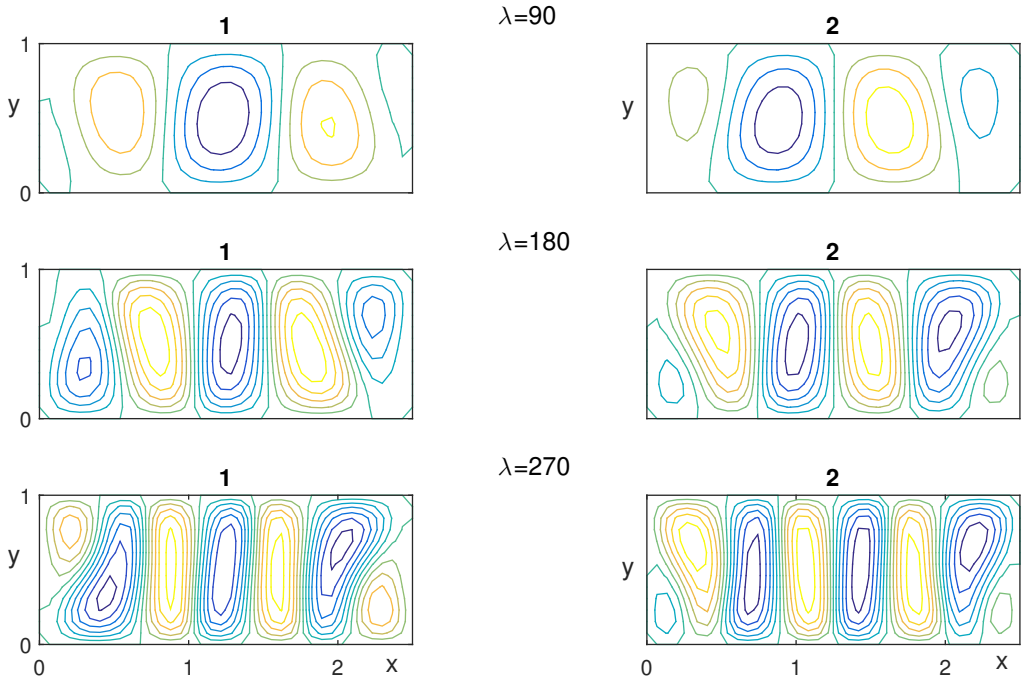

Рисунок 3.10 — Функции тока ψ для двух стационарных режимов из семейств при $\lambda = 90$ (верх), $\lambda = 180$ (центр), $\lambda = 270$ (низ); $\mu_{11} = d_{22} = 1.2$, $\mu_{22} = d_{11} = 1.0$.

С ростом параметра Рэлея λ происходит увеличение количества конвективных ячеек по длине прямоугольной области (координата x). Так, при $\lambda = 90$ типичными являются конвективные режимы с тремя ячейками. При $\lambda = 180$ происходит сжатие ячеек в горизонтальном направлении и вырастает их количество. При дальнейшем увеличении числа Рэлея достигается еще большее сжатие, при $\lambda = 270$ в области длины $a = 2.5$ помещаются шесть–семь ячеек, см. рис. 3.10.

На рис. 3.11 представлены распределения спектра устойчивости семейства ($Re\sigma$) при $\lambda = 90$ (слева) и $\lambda = 180$ (справа), рассчитанные при $\mu_{11} = d_{22} = 1.2$, $\mu_{22} = d_{11} = 1.0$. По оси абсцисс отложен континуальный номер режима на семействе $\nu \in [0,1]$. Данный рисунок демонстрирует характерную для косимметрии переменность спектра устойчивости при движении вдоль семейства. Видно, что все режимы, составляющие семейство, являются устойчивыми.

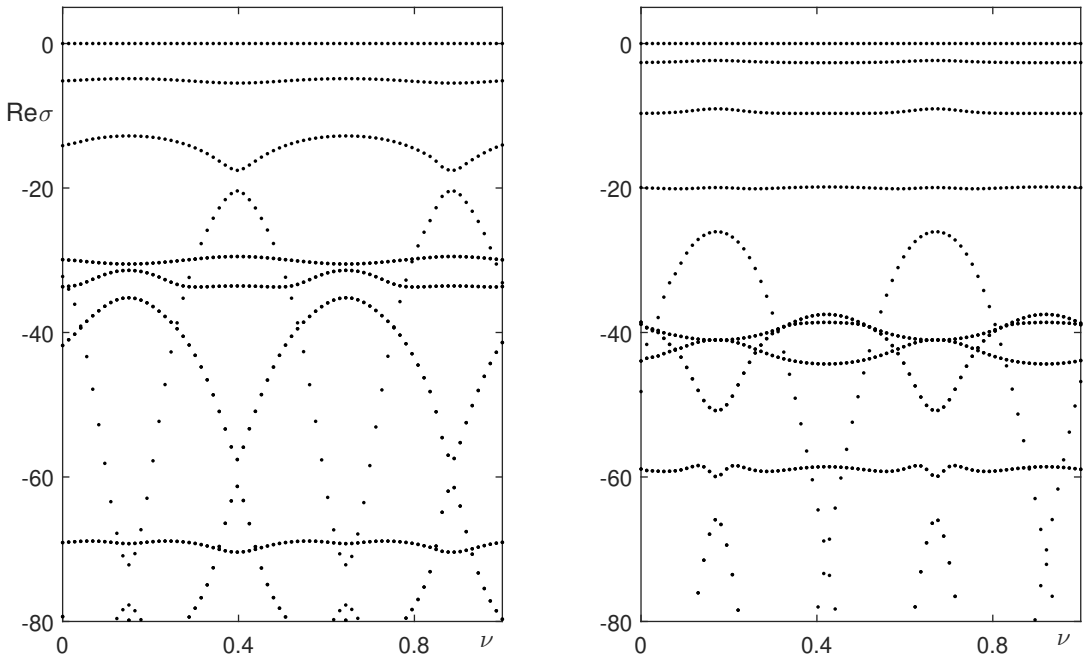

Рисунок 3.11 — Распределение спектра устойчивости равновесий семейства при $\lambda = 90$ (слева), $\lambda = 180$ (справа); $\mu_{11} = d_{22} = 1.2$, $\mu_{22} = d_{11} = 1.0$

3.3.2 Нарушение косимметрии

При нарушении какых–небудь условий косимметрии § 1.3 происходит разрушение семейства стационарных режимов. Для рассматриваемой задачи вместо однопараметрического семейства остается четное число изолированных режимов. Половина из них являются устойчивыми.

На рис. 3.12 представлены графики дискретного аналога селективной функции (1.75) для $\mu_{11} = d_{22} = 1.2$, $\mu_{22} = 1.0$ и различных значений d_{11}. При возмущении параметра $\tilde{d_{11}} = d_{11} + \varepsilon$ сеточный аналог селективного уравнения (1.75) имеет следующий вид

$$S(\nu) = \varepsilon\mu_{11}\frac{g}{h}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left(\psi_{i+1}^{j}(\nu) - \psi_{i}^{j}(\nu)\right)\left(\theta_{i+1}^{j}(\nu) - \theta_{i}^{j}(\nu)\right). \qquad (3.7)$$

Здесь через $\psi_i^j(\nu), \theta_i^j(\nu)$ обозначены температура и функция тока, отвечающие точке семейства стационарных режимов с номером ν.

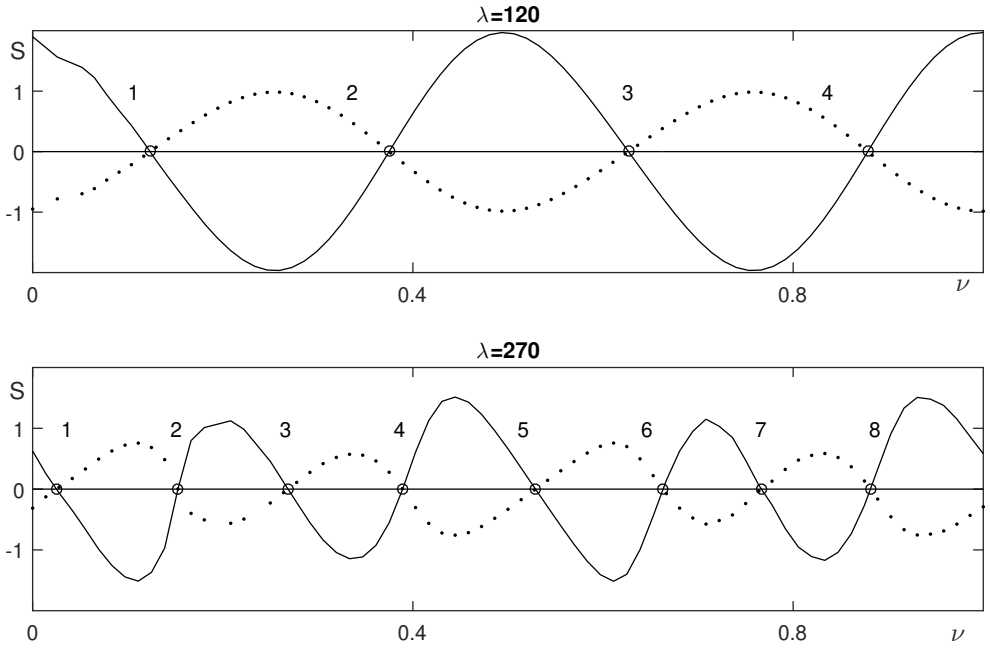

Рисунок 3.12 — Графики селективной функции для $d_{11} = 0.95$ (пунктирная кривая), $d_{11} = 1.1$ (сплошная кривая) при различных значениях λ; $\mu_{11} = d_{22} = 1.2$, $\mu_{22} = 1.0$

Вычисления селективной функции для $\lambda = 120$ и различных значений d_{11} показали, что при малом возмущении параметра d_{11} семейство разрушается, и получаются четыре изолированных стационарных режима (отмечены кружками) с нулевыми значениями S, см. рис. 3.12. Цифры 1, 3 (2, 4) соответствуют тем равновесиям, из которых получаются устойчивые (неустойчивые) изолированные стационарные конвективные режимы. В случае $\lambda = 270$ получается восемь нулей селективной функции.

Вычислительный эксперимент при фиксированном значении $d_{11} \neq 1$ демонстрирует сходимость из различных начальных данных (точек семейства) к изолированным устойчивым стационарным режимам, см. рис. 3.13. Например, при $\lambda = 120$ и $d_{11} = 1.5$ устойчивыми являются конвективные режимы с симметричным расположение валов, см. функции тока в верхней части рис. 3.13. С увеличением d_{11} эти движения становятся неустойчивыми и реализуются режимы с тремя наклонными валами, см. нижнюю часть рис. 3.13, где приведены функции тока, вычисленные при $d_{11} = 2$.

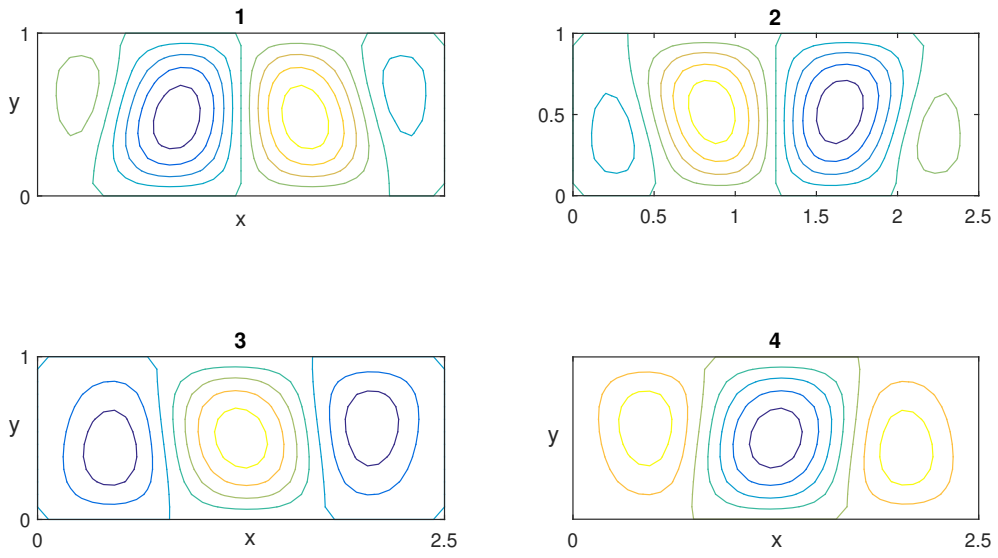

Рисунок 3.13 — Функции тока ψ для изолированных устойчивых стационарных режимов, получающихся при разрушении семейства: $d_{11} = 1.5$ (верх), $d_{11} = 2$ (низ); $\lambda = 120$, $\mu_{11} = d_{22} = 1{,}2$, $\mu_{22} = 1$.

На рис. 3.14 представлены результаты сходимости к изолированным равновесиям при нарушении косимметрии. В качестве начальных точек были выбраны координаты, отвечающие равновесиям семейства при $d_{11} = 1$. Расчеты проводились при $d_{11} = 1.1$ и $d_{11} = 2$; $\mu_{11} = d_{22} = 1.2$, $\mu_{22} = 1.0$, $\lambda = 120$. В левой части рисунка в координатах Nu_h и Nu_v даны кривые семейства (сплошная линия) и траектории (пунктир), выпущенные из точек косимметричного семейства. В правой части рис. 3.14 приведены графики $Nu_v(t)$. Например, в случае $d_{11} = 2$ траектории 3–5 ведут к изолированному режиму 1, а траектории 6–8 соответственно к изолированному режиму 2. Видно, что зависимости от начальной точки процесс установления может потребовать значительного времени, см. траекторию 5 на рис. 3.14 (внизу справа).

На рис. 3.15 приведено семейство стационарных режимов (сплошная линия), ромбами и треугольниками помечены точки, соответствующие устойчивым симметричным конвективным режимам (цифры 1 и 3 на рис. 3.13) при различных значениях параметра d_{11}, кружками обозначены устойчивые изолированные стационарные решения (цифры 2 и 4 на

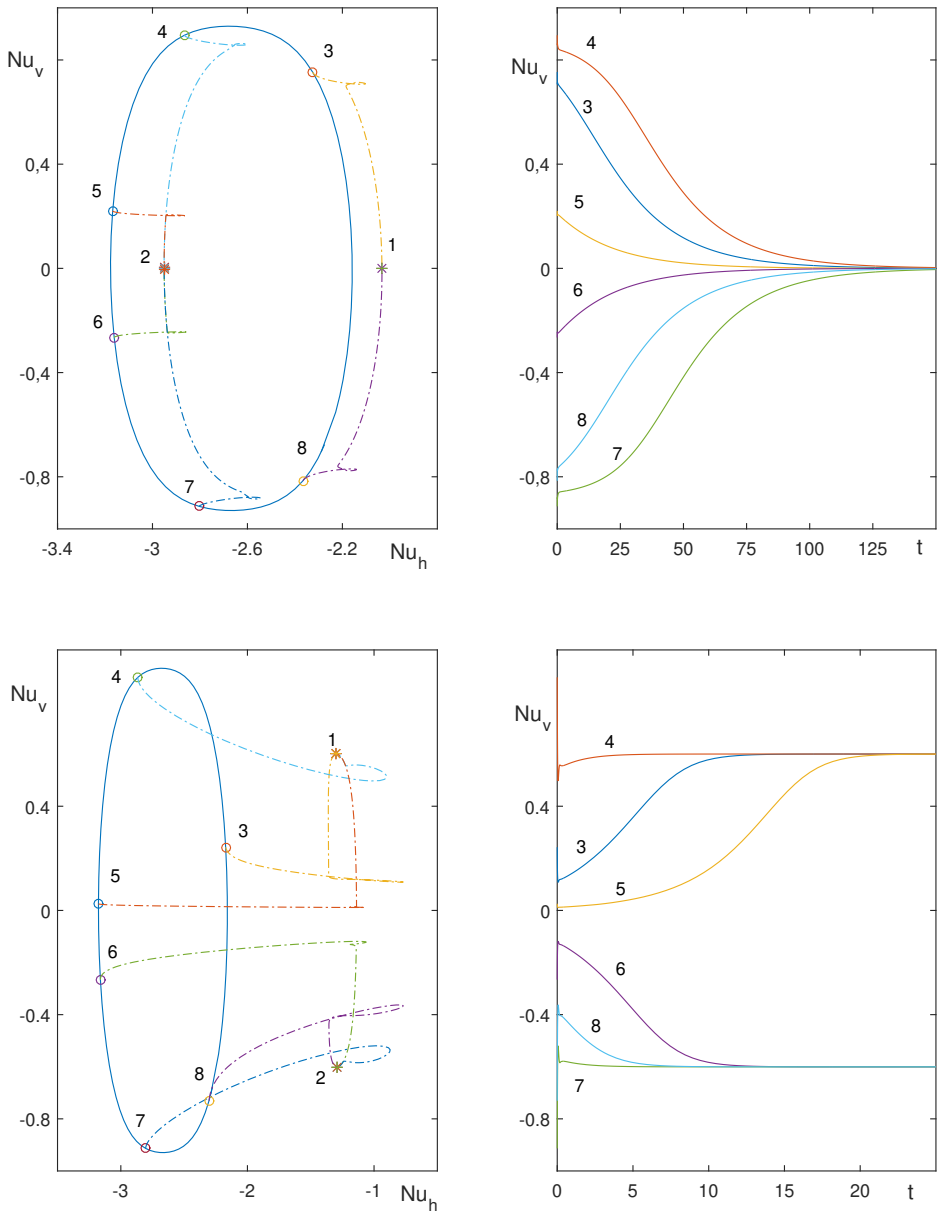

Рисунок 3.14 — Разрушение семейства стационарных режимов (сплошная кривая) при нарушении косимметрии, $d_{11} = 1.1$ (верх), $d_{11} = 2$ (низ): слева — траектории установления 3–8 к устойчивым изолированным режимам (1,2); справа — графики установления по времени; $\mu_{11} = d_{22} = 1.2$, $\mu_{22} = 1.0$, $\lambda = 120$.

рис 3.13). Неустойчивые стационарные решения отмечены точками. Расчеты проведены для $d_{11} \in [0.8, 2.0]$ и $\lambda = 120$, $\mu_{11} = d_{22} = 1.2$, $\mu_{22} = 1$, косимметрии и семейству стационарных режимов отвечает случай $d_{11} = 1.0$.

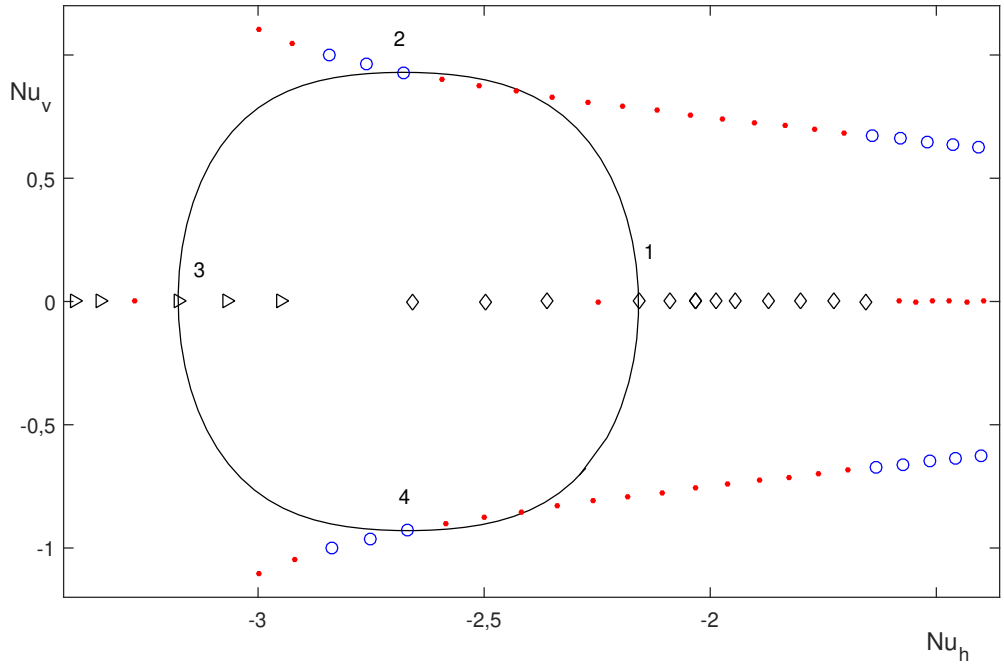

Рисунок 3.15 — Семейство стационарных режимов (сплошная кривая) и изолированные равновесия при $d_{11} \in [0.8,2]$; $\lambda = 120$, $\mu_{11} = d_{22} = 1.2$, $\mu_{22} = 1$.

Из рис. 3.15 видно, что при отклонении d_{11} от значения $d_{11} = 1.0$ происходит распад семейства и деформация остающихся режимов. Соответствующие точке смещаются относительно семейства на плоскости Nu_h, Nu_v. Так, при $1 < d_{11} < 1.65$ устойчивы режимы с симметричными валами, которые характеризуются нулевым значением Nu_v (часть треугольников опущена, чтобы предупредить смешение с ромбами). При превышении значения $d_{11} = 1.65$ эти режимы теряют устойчивость и ее наследуют режимы с тремя валами. При уменьшении d_{11} вначале ($d_{11} = 0.95$) устойчивы режимы с тремя валами, а затем – стационарные движения с симметрией относительно центрального вертикального сечения.

В вычислениях обнаружен небольшой диапазон значений параметра $d_{11} \approx 0.9$, когда при распаде семейства возникают четыре устойчивых изолированных стационарных движения.

Аналогичные результаты получаются и при других отношениях $a/b > 1$. Например, при $a = 3.5$, $b = 1$ критические числа, отвечающие

Таблица 12 — Критические числа Рэлея при различных μ_{11}, μ_{22} и d_{22}; $d_{11} = 1$, $a = 3.5$, $b = 1$

μ_{11}	μ_{22}	d_{22}	λ_{11}	λ_{21}	λ_1^h	λ_3^h	кос
1	1	1	42.701	52.369	43.244	53.496	+
1.2	1	1.2	50.597	60.265	51.357	61.702	+
1.2	0.8	1.5	49.952	57.687	50.876	59.264	+
1.1	0.8	1.5	–	–	48.802	57.140	-
1.3	0.8	1.5	–	–	52.896	61.292	-

неустойчивости механического равновесия, понижаются по сравнению с вычислениями при $a = 2.5$, см. табл. 12. При этом происходит относительное сближение λ_{11} и λ_{21}. Вследствие увеличения длины a при этом возрастает число конвективных валов для режимов, составляющих семейство.

3.4 Неустойчивость механического равновесия для плоской задачи фильтрационной конвекции бинарной жидкости

В § 1.2 сформулирована задача о конвекции бинарной жидкости в прямоугольнике $\Omega = [0,a] \times [0,b]$ при линейном по высоте распределении температуры и концентрации примеси на границе. Для функции тока $\psi(x,y,t)$, отклонений температуры $\theta(x,y,t)$ и концентрации $c(x,y,t)$ ставится начально–краевая задача в случае $\mu_{ij} = d^T_{ij} = d^C_{ij} = d^{CT}_{ij} = 0, \quad i \neq j$:

$$
\begin{aligned}
&0 = \mu_{11}\psi_{yy} + \mu_{22}\psi_{xx} + \theta_x + c_x,\\
&\dot{\theta} = d^T_{11}\theta_{xx} + d^T_{22}\theta_{yy} - \lambda^T\psi_x - J(\psi,\theta), \quad J(\psi,\theta) = \theta_x\psi_y - \theta_y\psi_x,\\
&\dot{c} = d^C_{11}c_{xx} + d^C_{22}c_{yy} - \lambda^C\psi_x + d^{CT}_{11}\theta_{xx} + d^{CT}_{22}\theta_{yy} - J(\psi,c).\\
&[\psi,\theta,c]_{\partial\Omega} = 0, \quad \theta(x,y,0) = \theta_0(x,y), \quad c(x,y,0) = c_0(x,y).
\end{aligned}
$$

Здесь λ^T — температурное число Рэлея, λ^C — концентрационное число Рэлея; μ_{ii}, d^T_{ii}, d^C_{ii}, d^{CT}_{ii}, $(i = 1,2)$ — коэффициенты обратной проницаемости, теплопроводиности, молекулярной диффузии и термодиффузии (эффект Соре).

Проводится анализ возникновения конвекции в бинарной жидкости, насыщающей пористую анизотропную среду. Для этого применяется метод, основанный на анализе условий, при которах задача является косимметричной. В § 1.4 выведены явные формулы для критических чисел Рэлея в случае монотонной неустойчивости механического равновесия. Для анализа колебательной неустойчивости применяется расчет с помощью программного комплекса Aniso2d на основе метода конечных разностей, сохраняющего косимметрию.

Далее предполагается, что $d^{CT}_{ii} = \gamma d^C_{ii}$, $i = 1,2$ $(\gamma \neq 1)$, тогда условия (3.7) запишутся в виде

$$
\frac{d^T_{22}}{d^T_{11}} = \frac{\mu_{11}}{\mu_{22}} = \frac{d^C_{22}}{d^C_{11}} \tag{3.8}
$$

При наличии примеси $(\lambda^C \neq 0)$ формулы (1.129) позволяют проанализировать влияние коэффициентов диффузии d^C_{ij} и коэффициентов Соре d^{CT}_{ij} на величину критического числе Рэлея λ^T, отвечающего монотонной

Таблица 13 — Критические числа Рэлея при различных d_{11}^C, d_{22}^C, d_{11}^{CT}, d_{22}^{CT}; $\mu_{11} = 1.43$, $\mu_{22} = 1.1$, $d_{11}^T = 1.0$, $d_{22}^T = 1.3$, $\lambda^C = 2$, $a = 1.5$, $b = 1$.

d_{11}^C	d_{22}^C	d_{11}^{CT}	d_{22}^{CT}	λ_{crit}^T
1.0	1.3	0.1	0.13	83.7291
1.0	1.3	0.2	0.26	94.1952
1.0	1.3	0.3	0.39	107.6517
1.0	1.3	0.4	0.52	125.5936
0.5	0.65	0.05	0.065	81.5069
0.5	0.65	0.1	0.13	91.6952
0.5	0.65	0.15	0.195	104.7945
0.5	0.65	0.2	0.26	122.2603

неустойчивости механического равновесия. Для значений параметров, удовлетворяющих условиям косимметрии, было проведено сравнение точного значения λ_{crit}^T при заданном λ^C и рассчитанного для различных сеток. Например при $\lambda^C = -5$, $\mu_{11} = 1.43$, $\mu_{22} = 1.1$, $d_{11}^T = d_{11}^C = 1.0$, $d_{22}^T = d_{22}^C = 1.3$, $d_{11}^{CT} = 0.3$, $d_{22}^{CT} = 0.39$ формула (1.129) дает $\lambda_{crit}^T = 115.36$, а вычисления на сетках 24×12 и 36×18 дали соответственно следующие значения: $\lambda_{crit}^T = 117.48$ и 116.32.

В табл. 13 приведены результаты вычислений λ_{crit}^T для различных комбинаций физических параметров. Видно, что снижение d_{ii}^C приводят к уменьшению λ_{crit}^T, а рост параметров Соре дает увеличенние числа Рэлея λ_{crit}^T. С ростом положительного градиенти концентрации примеси ($\lambda^C > 0$) критические числа Рэлея снижаются. При отрицательных λ^C возможна колебательная потеря устойчивости механического равновесия.

На рис. 3.16 приведены нейтральные кривые устойчивости $\lambda_{crit}^T = F(\lambda^C)$, полученные для различных наборов диффузионных параметров d_{ij}^C, d_{ij}^{CT}. Коэффициенты проницаемости μ_{ij} и теплопроводности d_{ij}^T были фиксированы: $\mu_{11} = 1.3$, $\mu_{22} = 1$, $d_{11}^T = 1$, $d_{22}^T = 1.3$. Сплошной линией даны участки монотонной потери устойчивости и пунктиром – колебательной. Видно, что с уменьшением параметров d_{ij}^C потеря устойчивости

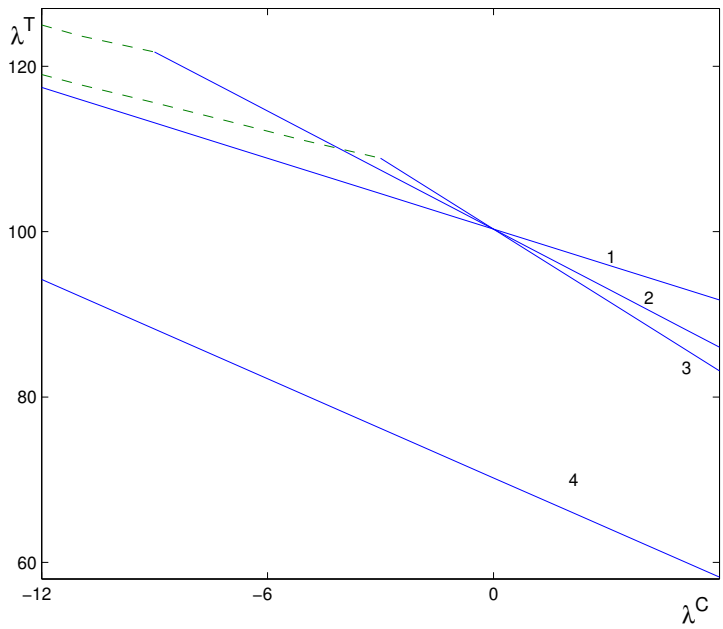

Рисунок 3.16 — Нейтральные кривые монотонной (сплошная линия) и колебательной (пунктир) неустойчивости, 1 — $d_{11}^{C} = 1.0$, $d_{22}^{C} = 1.3$, $d_{11}^{CT} = 0.3$, $d_{22}^{CT} = 0.39$, 2 — $d_{11}^{C} = 0.6$, $d_{22}^{C} = 0.78$, $d_{11}^{CT} = 0.18$, $d_{22}^{CT} = 0.234$, 3 — $d_{11}^{C} = 0.5$, $d_{22}^{C} = 0.65$, $d_{11}^{CT} = 0.15$, $d_{22}^{CT} = 0.195$, 4 — $d_{11}^{C} = 0.5$, $d_{22}^{C} = 0.65$, $d_{11}^{CT} = 0.0$, $d_{22}^{CT} = 0.0$; $\mu_{11} = 1.3, \mu_{22} = 1, d_{11}^{T} = 1, d_{22}^{T} = 1.3$

механического равновесия в результате колебательной неустойчивостей наступает при меньших значениях λ^C.

На рис. 3.17 представлена нейтральная кривая, состоящая из участков колебательной (пунктир) и монотонной (сплошная) неустойчивости, рассчитанная для $\mu_{11} = 1.3$, $\mu_{22} = 1$, $d_{11}^{T} = 1$, $d_{22}^{T} = 1.3$, $d_{11}^{C} = 0.5$, $d_{22}^{C} = 0.65$, $d_{11}^{CT} = 0.1$, $d_{22}^{CT} = 0.13$. Буквами A, B, C, D обозначены комбинации параметров, для которых на рис. 3.18 приведены фрагменты распределений спектральных величин. Случай D отвечает устойчивости механического равновесия, при этом наибольшие спектральные значения расположены на вещественной оси. При увеличении λ^T происходит переход двух наибольших значений в правую полуплоскость, при этом ответвляется однопараметрическое семейство стационарных конвективных режимов в результате монотонной неустойчивости (точка B на рис. 3.17). Отметим, что выбранные параметры отвечают условиям косимметрии. Поэтому в случае

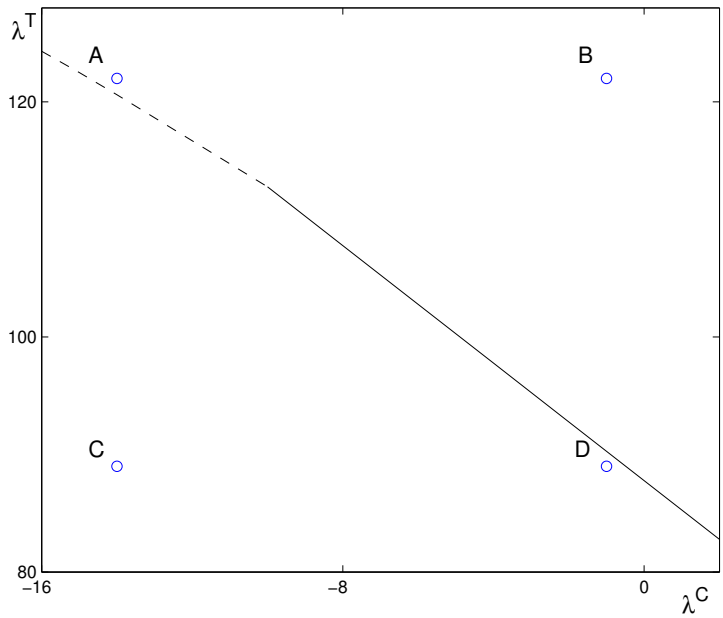

Рисунок 3.17 — Нейтральная кривая, граница монотонной (сплошная линия) и колебательной (пунктир) неустойчивости; $d_{11}^{C} = 0.5$, $d_{22}^{C} = 0.65$, $d_{11}^{CT} = 0.1$, $d_{22}^{CT} = 0.13$, $\mu_{11} = 1.3, \mu_{22} = 1, d_{11}^{T} = 1, d_{22}^{T} = 1.3$

монотонной неустойчивости при критическом значении λ^T две спектральные величины равны нулю.

Таблица 14 — Критические значения температурного числа Рэлея при различных μ_{11}; $d_{11}^{C} = 0.5$, $d_{22}^{C} = 0.65$, $d_{11}^{CT} = 0.1$, $d_{22}^{CT} = 0.13$, $\mu_{22} = 1.0$, $d_{11}^{T} = 1.0$, $d_{22}^{T} = 1.3$, $\lambda^C = 5$, $a = 1.5$, $b = 1$.

μ_{11}	расчет	(1.118)
1.2	72.6609	–
1.3	75.2704	73.5849
1.4	77.7936	–

На рисунках 3.17, 3.18 случай C отвечает паре сопряженных спектральных величин, наиболее приближенных к мнимой оси. При увеличении λ^T происходит переход комплексной пары в правую полуплоскость и возникает автоколебательный конвективный режим (точка A на рис. 3.17).

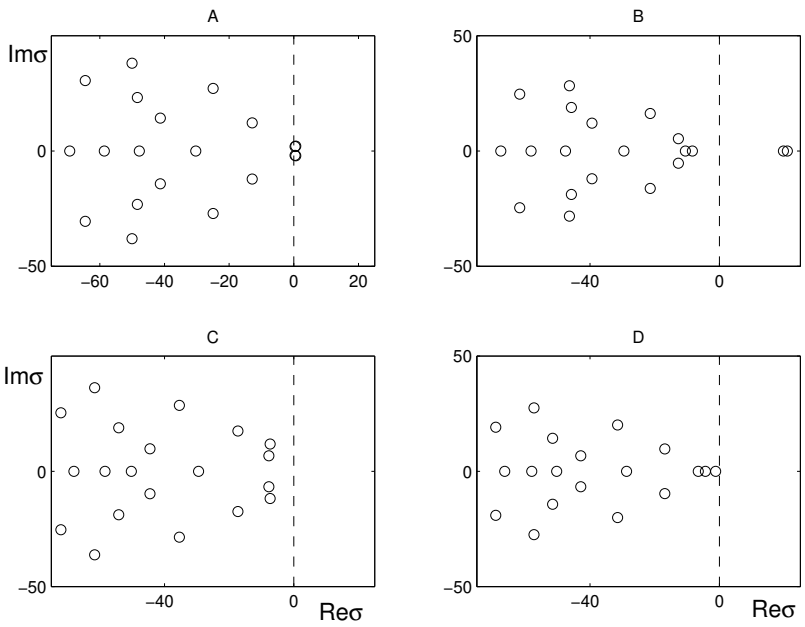

Рисунок 3.18 — Распределение спектра устойчивости механического равновесия: A — $\lambda^T = 122$, $\lambda^C = -14$, B — $\lambda^T = 122$, $\lambda^C = -1$, C — $\lambda^T = 89$, $\lambda^C = -14$, D — $\lambda^T = 89$, $\lambda^C = -1$, $d_{11}^C = 0.5$, $d_{22}^C = 0.65$, $d_{11}^{CT} = 0.1$, $d_{22}^{CT} = 0.13$; $\mu_{11} = 1.3, \mu_{22} = 1, d_{11}^T = 1, d_{22}^T = 1.3$

Таблица 15 — Критические значения температурного числа Рэлея при различных λ^Cи d_{22}^{CT}; $\mu_{11} = 1.3$, $d_{11}^C = 0.5$, $d_{22}^C = 0.65$, $d_{11}^{CT} = 0.1$, $\mu_{22} = 1.0$, $d_{11}^T = 1.0$, $d_{22}^T = 1.3$, $a = 1.5$, $b = 1$.

λ^C	d_{22}^{CT}	расчет	(1.118)
5	0.1	73.6482	–
	0.13	75.2704	73.5849
	0.16	76.9339	–
-10	0.1	110.3366	–
	0.13	112.7704	111.0849
	0.16	115.2610	–

Результаты вычислений критических чисел при нарушении условий косимметрии и их сопоставление со значениями параметров, удовлетворяющих условиям (1.74), (1.75) представлены в табл. 14 и 15. Расчеты

проводились при зафиксированных значениях параметров $\mu_{22} = 1$, $d_{11}^T = 1$, $d_{22}^T = 1.3$, $d_{11}^C = 0.5$, $d_{22}^C = 0.65$, $d_{11}^{CT} = 0.1$ и сетке 24×12.

В табл. 14 даны критические значения температурного числа Рэлея λ_{crit}^T при различных μ_{11} и $\lambda^C = 5$, $d_{11}^{CT} = 0.13$. Видно, что даже при заметных отклонениях от «косимметричного» значения $\mu_{11} = 1.3$ формула (1.118) дает неплохие оценки критических чисел.

В табл. 15 представлены результаты вычислений λ_{crit}^T при изменении λ^C и d_{22}^{CT} для $\mu_{11} = 1.3$. В этом случае нарушается условие косимметрии (1.75). Для $\lambda^C = 5$ механическое равновесие теряет устойчивость в результате монотонной неустойчивости, а для $\lambda^C = -10$ – вследствне колебательной неустойчивости. Полученные значения достаточно близки к вычислениям по формуле (1.118), дающей оценку критического числа λ^T в случае монотонной неустойчивости.

Основные итоги третьей главы

В данной главе представлены результаты исследование гравитационной конвекции в пористых областях с учетом анизотропии жидкости и среды. Проанализировано возникновение конвекции, приведены расчеты критических чисел Рэлея и построены нейтральные кривые для задач в прямоугольных областях. Проведено численное исследование ответвляющихся от механического равновесия стационарных конвективных движений.

Для плоской задачи анизотропной фильтрационной конвекции представлены результаты разрушения семейств при нарушении условий косимметрии. Для этого эффективно применялся аппарат селективных функций. В численном эксперименте зафиксирован распад семейства на конечное число изолированных стационарных режимов. Представлены результаты вычисления семейств стационарных режимов для задачи с анизотропией свойств теплопроводности и проницаемости пористой среды. В численном эксперименте изучена селекция стационарных режимов при разрушении косимметрии.

Проведено исследование ответвления конвективных режимов для задачи конвекции бинарной жидкости при линейном распределении температуры и примеси на границе прямоугольника. На плоскости температурного и концентрационного чисел Рэлея представлены нейтральные кривые устойчивости механического равновесия и рассчитаны участки колебательной неустойчивости. Установлена зависимость от параметров термодиффузии концентрационного числа Рэлея, при котором колебательная неустойчивость предшествует монотонной.

Заключение

В диссертации проведен анализ математических моделей, описывающих гравитационную конвекцию в пористой среде с учетом анизотропии. На основе модели Дарси и приближения Буссинеска изучаются плоские конвективные течения теплопроводной жидкости и бинарной смеси при подогреве снизу. Выписаны системы уравнений в естественных переменных и сформулированы начально-краевые задачи в переменных функция тока, температура и концентрация.

Для исследования рассматриваемых двумерных задач фильтрационной конвекции предложены методы дискретизацни на основе схемы смещенных сеток и метода прямых. Представлены результаты численного исследования гравитационной конвекции в пористых прямоугольных областях с учетом анизотропии жидкости и среды. Проанализировано возникновение конвекции, проведены расчеты критических чисел Рэлея, численно исследованы ответвляющиеся от механического равновесия конвективные движения, рассчитаны семейства стационарных состояний при выполнении условий косимметрии.

Основные результаты диссертационного исследования заключаются в следующем:

1. Для математических моделей конвекции теплопроводной жидкости в пористой среде представлен анализ с учетом анизотропии жидкости и среды. Установлены соотношения на параметры, при которых начально-краевые задачи являются косимметричными. Выведены явные формулы критических чисел Рэлея, отвечающих монотонной неустойчивости механического равновесия.
2. Проведен анализ возникновения конвекции в анизотропной пористой среде, насыщенной теплопроводной жидкостью с примесью. Найдена косимметрия задачи и получены соотношения между критическими значениям температурного и концентрационного чисел Рэлея, при которых возникают конвективные движения.
3. Развита схема расчета конвективных движений жидкости в пористой среде с учетом анизотропии, построены конечно-разностные

аппроксимации уравнений фильтрационной конвекции, сохраняющие свойство косимметрии.

4. Разработан программный комплекс для проведения вычислительного эксперимента в задачах гравитационной конвекции бинарных жидкостей в пористой среде с учетом анизотропии.
5. Рассчитаны семейства стационарных режимов для задачи с анизотропией свойств теплопроводности и проницаемости пористой среды, изучена селекция стационарных режимов при разрушении косимметрии.

В заключение автор выражает большую признательность профессору Цибулину В. Г. за научное руководство и поддержку. Автор благодарен преподавателям и сотрудникам КБГУ и ЮФУ за помощь и доброе отношение.

Список литературы

[1] Абделхафиз М.А. Влияние анизотропии на конвекцию теплопроводной жидкости в пористой среде и косимметрия задачи Дарси / М.А. Абделхафиз, В.Г. Цибулин // Изв. РАН, МЖГ, 2017. Т. 52, №. 1. С. 53–61.

[2] Абделхафиз М.А. Численное моделирование конвективных движений в анизотропной пористой среде и сохранение косимметрии / М.А. Абделхафиз, В.Г. Цибулин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2017. Т. 57. № 10. С. 1734–1747.

[3] Абделхафиз М.А. Численное моделирование анизотропной фильтрационной конвекциии сохранение косимметрии / М.А. Абделхафиз, В.Г. Цибулин // Тр. XVIII Междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», 2016. Ростов-на-Дону, 7-10 ноября, С. 6-10.

[4] Абделхафиз М.А. Численный анализ конвективных движений в пористой анизотропной среде / М.А. Абделхафиз, В.Г. Цибулин // XXI Всерос. конф. и молодежная школа-конференция «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики», 2016. Новороссийск, Абрау-Дюрсо, 05-11 сентября, С. 123-124.

[5] Абделхафиз М.А. Моделирование конвективных движений наножидкости в пористой среде: эффекты анизотропии и косимметрии / М.А. Абделхафиз, В.Г. Цибулин // XVIII Крымская осенняя математ. школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (кромш), 2017. Симферополь, 17-29 сентября, С. 64-66.

[6] Абделхафиз М.А. Анализ возникновения конвекции наножидкости в анизотропном пористом прямоугольнике / М.А. Абделхафиз // XII всероссийская школа-семинар математическое моделирование и биомеханика в современном университете, 2018. Ростов-на-Дону, ЮФУ, С. 4.

[7] Абделхафиз М.А. Косимметрия и моделирование анизотропной конвекции наножидкости в пористой среде / М.А. Абделхафиз, В.Г. Цибулин

// Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis VIII, 2018. Rostov-on-Don, 22 - 27 April, С. 136.

[8] Абделхафиз М.А. Численная схема, сохраняющая косимметрию задачи анизотропной фильтрационной конвекции жидкости с наночастицами / М.А. Абделхафиз, В.Г. Цибулин // Тез. докл. XXII Всерос. конф. «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики», 2018. Новороссийск, Абрау-Дюрсо, 3–8 сентября, С. 92.

[9] Абделхафиз М.А. Мультистабильность стационарных движений в анизотропной задаче конвекции Дарси для прямоугольника / М.А. Абделхафиз // Тр. XIX Междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды», 2018. Rostov-on-Don, 15–18 октября, С. 6–10.

[10] Андреев В.К. Современные математические модели конвекции / В.К. Андреев, Ю.А. Гапоненко, О.Н. Гончарова, В.В. Пухначев. — Москва: Физматлит, 2008. 368 с.

[11] Бедриковецкий П.Г. Анализ конвективной неустойчивости бинарной смеси в пористой среде / П.Г. Бедриковецкий, Д.Г. Полонский, А.А. Шапиро // Изв. РАН, МЖГ. 1993. № 1. С. 110–119.

[12] Гершуни Г.З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий. – Москва: Наука, 1972. 392 с.

[13] Гершуни Г.З. О термоконцентрационной неустойчивости смеси в пористом слое / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, Д.В. Любимов // Докл. АН СССР. 1976. Т. 229. № 3. С. 575–578.

[14] Гершуни Г.З. Об устойчивости конвективного течения бинарной смеси с термодиффузией / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, Л.Е. Сорокин // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 66–71.

[15] Гершуни Г.З. Об устойчивости стационарной конвективной фильтрации смеси в вертикальном пористом слое / Г.З. Гершуни,

Е.М. Жуховицкий, Д.В. Любимов // Изв. РАН, МЖГ. 1980. № 1. С. 150–157.

[16] Гершуни Г.З. Устойчивость конвективных течений / Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, А.А. Непомнящий. – Москва: Наука, 1989. 325 с.

[17] Глухов А.Ф. Конвективные движения в пористой среде вблизи порога неустойчивости / А.Ф. Глухов, Д.В. Любимов, Г.Ф. Путин // Докл. АН СССР, 1978. Т. 236, № 3.— С. 549—551.

[18] Глухов А.Ф. Экспериментальное исследование конвективных структур в насыщенной жидкостью пористой среде вблизи порога неустойчивости механического равновесия / А.Ф. Глухов, Г.Ф. Путин // Гидродинамика, 1999. № 12. С. 104–119.

[19] Говорухин В.Н. Анализ семейств вторичных стационарных режимов в задаче плоской фильтрационной конвекции в прямоугольном контейнере / В.Н. Говорухин // Изв. РАН, МЖГ, 1999. № 5. С. 53–62.

[20] Говорухин В.Н. О воздействии внутренних источников тепла на конвективные движения в пористой среде, подогреваемой снизу / В.Н. Говорухин // ПМТФ, 2014. Т. 55. № 2. С. 43–52.

[21] Говорухин В.Н. Численное исследование потери устойчивости вторичными стационарными режимами в задаче плоской конвекции Дарси / В.Н. Говорухин // Докл. РАН, 1998. Т. 363, № 6. С. 772–774.

[22] Дорняк О.Р. Тепломассоперенос в ненасыщенных коллоидных капиллярно-пористых анизотропных материалах / О.Р. Дорняк. автореф. дис. ...д-ра техн. наук : 01.04.14 / Воронеж, 2007. 32 с.

[23] Жуков М.Ю. Использование пакета конечных элементов freefem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии / М.Ю. Жуков, Е.В. Ширяева. Ростов-на-Дону, Изд-во ЮФУ, 2008. 256 С.

[24] Жуков М.Ю. Массоперенос электрическим полем / М.Ю. Жуков. Ростов-на-Дону, Изд-во ЮФУ, 2005. 216 С.

[25] Загвозкин Т.Н. Численное исследование адвективного вымывания локализованных конвективных структур в пористой среде / Т.Н. Загвозкин, Т.П Любимова // В сборнике: Неравновесные процессы в сплошных средах Материалы международного симпозиума, 2017. С 175-177.

[26] Кантур О.Ю. Расчет семейств стационарных режимов фильтрационной конвекции в узком контейнере / О.Ю. Кантур, В.Г. Цибулин // ПМТФ, 2003. Vol. 44, №. 2. С. 92–100.

[27] Кантур О.Ю. Спектрально-разностный метод расчета конвективных движений жидкости в пористой среде и сохранение косимметрии / О.Ю. Кантур, В.Г. Цибулин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2002. Т. 42. № 6. С. 913–923.

[28] Кантур О.Ю. Численное исследование плоской задачи конвекции многокомпонентной жидкости в пористой среде / О.Ю. Кантур, В.Г. Цибулин // Изв. РАН, МЖГ, 2004. №. 3. С. 123–134.

[29] Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // — Москва: Наука, 1986. С. 736.

[30] Любимов Д.В. О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу / Д.В. Любимов // ПМТФ, 1975. № 2. С. 131–137.

[31] Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде / М. Маскет. Институт компьютерных исследований, – Москва-Ижевск, 2004. 628 С. (перевод с англ. Muskat M. The flow of homogeneous fluids through porous media, 1946).

[32] Моисеенко Б.Д. Полностью нейтральная схема для уравнений Навье-Стокса / Б.Д. Моисеенко, И.В. Фрязинов // Изучение гидродинамич. неустойчивости числ. методами. М., 1980. С. 186–209.

[33] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред / Р.И. Нигматулин. — Москва: Наука, 1987. 464 с.

[34] Рудяк В.Я. Современные проблемы микро- и нанофлюидики / В.Я. Рудяк, А.В. Минаков. – Новосибирский (Сибстрин): науки, 2016. 292 С.

[35] Рыжков И.И. Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость / И.И. Рыжков. – Москва: Красноярск: Институт вычислительного моделирования СО РАН, 2012. 215 с.

[36] Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – Москва: Наука, 1989. 616 с.

[37] Трофимова А.В. Фильтрационная конвекция в кольцевой области и ответвление семейства стационарных режимов / А.В. Трофимова, В.Г. Цибулин // Изв. РАН, МЖГ, 2014. № 4. С. 73–83.

[38] Цибулин В.Г. Программный комплекс «Aniso2d» для исследования плоской анизотропной конвекции в пористой среде / В.Г. Цибулин, М.А. Абделхафиз // Объединенный фонд электронных ресурсов «Наука и образование», 2018. № 2018618614.

[39] Юдович В.И. Косимметрия и конвекция многокомпонентной жидкости в пористой среде / В.И. Юдович // Изв. вузов. Северо-кавказский регион, Естествен. науки, Спецвыпуск, 2001. С. 174–178.

[40] Юдович В.И. Косимметрия, вырождение решений операторных уравнений, возникновение фильтрационной конвекции / В.И. Юдович // Мат. заметки, 1991. Т. 49, № 5. С. 142–148.

[41] Юдович В.И. О бифуркациях при возмущениях, нарушающих косимметрию / В.И. Юдович // Докл. РАН., 2004. Т. 398. № 1. С. 57–61.

[42] Agarwal S. Non-linear Convective Transport in a Binary Nanofluid Saturated Porous Layer / S. Agarwal, N. C. Sacheti, P. Chandran, B. S. Bhadauria, A. K. Singh // Transp Porous Med, 2012. Vol. 93. P. 29–49.

[43] Arakawa. A. Computational Design for Long-Term Numerical Integration of the Equations of Fluid Motion: Two-Dimensional Incompressible. Flow. Part 1 / A. Arakawa. // J. Comput. Physics, 1966. Vol. 1. No. 1. P. 119–143.

[44] Bratsun D.A. Co-symmetry breakdown in problems of thermal convection in porous medium / D.A. Bratsun, D.V. Lyubimov, B. Roux // Physica D, 1995. Vol. 82, No. 4. P. 398–417.

[45] Capone F. Penetrative convection via internal heating in anisotropic porous media / F. Capone, M. Gentile, A.A. Hill // Mechanics Research Communications, 2010. Vol. 37. No. 5. P. 441-444.

[46] Capone F. Double-diffusive penetrative convection simulated via internal heating in an anisotropic porous layer with throughflow / F. Capone, M. Gentile, A.A. Hill // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2011. Vol. 54. No. 7-8. P. 1622-1626.

[47] Capone F. Penetrative convection in anisotropic porous media with variable permeability / F. Capone, M. Gentile, A.A. Hill // Acta Mechanica, 2011. Vol. 216. No. 1-4. P. 49-58.

[48] Castinel G. Critère d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope horizontale / G. Castinel, M. Combarnous // C.R. Acad. Sci. B, 1974. Vol. 278. P. 701-704.

[49] Charrier-Mojtabi M.C. Onset of a double-diffusive convection regime in a rectangular porous cavity / M.C. Charrier-Mojtabi, M. Karimi-Fard, A. Mejdi, M. Azeiez, A. Mojtabi // J. Porous Media. 1998. Vol. 1, P. 107–121.

[50] Chen C.F. Double diffusive convection instability problem in a vertical porous enclosure / C.F. Chen, F. Chen // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 368. P. 263-289.

[51] Cheng P. Effect of permeability anisotropy on buoyancy-driven flow for CO2 sequestration in saline aquifers / P. Cheng, M. Bestehorn, A. Firoozabadi // Water Resour. Res., 2012. Vol. 48, No. 9. P. 1–16.

[52] Das S.K. Nanofluids: science and technology / S.K. Das, S.U.S Choi, W. Yu, T. Pradeep. Hoboken, New Jersey: Wiley-Interscience, 2008. 416 P.

[53] Ennis-King J. Onset of convection in anisotropic porous media subject to a rapid change in boundary conditions / J. Ennis-King, I. Preston, L. Paterson // Physica Fluids, 2005. Vol. 17, No. 8. P. 084107.

[54] Epherre J. F. Apparition Criteria for Natural Convection in Porous Anisotropic Layer [Critere d'apparition de la convection naturelle dans une couche poreuse anisotrope] / J. F. Epherre // International Journal of Thermal Sciences, 1975. Vol. 14. No. 168. P. 949-950.

[55] Gaikwad S.N. Linear and Non-linear Double Diffusive Convection in a Fluid-Saturated Anisotropic Porous Layer with Cross-Diffusion Effects / S.N. Gaikwad, M.S. Malashetty, P.K. Rama // Transp Porous Med., 2009. Vol. 80. P. 537–560.

[56] Govorukhin V.N. Multiple equilibria, bifurcations and selection scenarios in cosymmetric problem of thermal convection in porous medium / V.N. Govorukhin, I.V. Shevchenko // Physica D., 2017. Vol. 361. P. 42–58.

[57] Graham M.D. Plume formation and resonant bifurcations in porous-media convection / M.D. Graham, P.H. Steen // J. Fluid Mech., 1994. Vol. 272. P. 67–90.

[58] Green C.P. Steady dissolution rate due to convective mixing in anisotropic porous media / C.P. Green, J. Ennis-King // Adv.Water Resour., 2014. Vol. 73. P. 65–73.

[59] Harfash A.J. Simulation of three dimensional double-diffusive throughflow in internally heated anisotropic porous media / A.J. Harfash, A.A. Hill // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2014. Vol. 72. P. 609-615.

[60] Harfash A.J. Three-Dimensional Simulations for Convection Problem in Anisotropic Porous Media with Nonhomogeneous Porosity, Thermal Diffusivity, and Variable Gravity Effects / A.J. Harfash // Transport in Porous Media, 2014. Vol. 102. No. 1. P. 43-57.

[61] Harlow F.H. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface / F.H. Harlow, J.E. Welch // Physica Fluids, 1965. Vol. 8, No. 12. P. 2182–2189.

[62] Henry D. Three–dimensional numerical study of convection in a cylindrical thermal diffusion cell: Its influence on the separation of constituents / D. Henry, B. Roux // Physica Fluids, 1986. Vol. 29. P. 3562.

[63] Hewitt D.R. Convective shutdown in a porous medium at high Rayleigh number / D.R. Hewitt, J.A. Neufeld, J.R. Lister // J. Fluid Mech., 2013. Vol. 719. P. 551–586.

[64] Hewitt D.R. Stability of columnar convection in a porous medium / D.R. Hewitt, J.A. Neufeld, J.R. Lister // J. Fluid Mech., 2013. Vol. 737. P. 205–231.

[65] Hewitt D.R. Ultimate regime of high Rayleigh number convection in a porous medium / D.R. Hewitt, J.A. Neufeld, J.R. Lister // Physica Rev. Lett., 2012. Vol. 108, No. 22. P. 224503.

[66] Hidalgo J.J. Scaling of convective mixing in porous media / J.J. Hidalgo, J. Fe, L. Cueto-Felgueroso, R. Juanes // Physica Rev. Lett., 2012. Vol. 109, No. 26. P. 264503.

[67] Hill A.A. Convective stability of carbon sequestration in anisotropic porous media / A.A. Hill, M.R. Morad // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2014. Vol. 470. No. 2170.

[68] Horton C.W. Convection currents in a porous medium / C.W. Horton, Jr.F.T. Rogers // J. Appl. Physica, 1945. Vol. 16, No. 6. P. 367–370.

[69] Jacono D. L. Complex convective structures in threedimensional binary fluid convection in a porous medium / D. Lo Jacono , A. Bergeon, E. Knobloch // Fluid Dyn. Res., 2017. Vol. 49. P. 061402(22pp).

[70] Kalla L. Multiple solutions for double diffusive convection in a shallow porous cavity with vertical fluxes of heat and mass / L. Kalla, M. Mamou,

P.R Vasseu, L. Robillard // Inter. J. Heat and Mass Transfer. 2001. Vol. 44. P. 4493–4504.

[71] Karasözen B. Finite-difference approximation and cosymmetry conservation in filtration convection problem / B. Karasözen, V.G. Tsybulin // Physics Letters A., 1999. Vol. 262. P. 321–329.

[72] Karasözen B. Mimetic discretization of two-dimensional Darcy convection / B. Karasözen, V.G. Tsybulin // Comput. Physica Comm., 2005. Vol. 167. P. 203–213.

[73] Karimi-Fard M. Non-Darcian effects on double-diffusive convection wihin a porous medium / M. Karimi-Fard, M.C. Charrier-Mojtabi, K. Vafai // Numer. Heat Transfer A. 1997. Vol. 31. P. 837–852.

[74] Karimi-Fard F. Onset of stationary and oscillatory convection in a tilted porous cavity saturated with a binary fluid: Linear stability analysis / F. Karimi-Fard, M.C. Charrier-Mojtabi, A. Mojtabi // Physica Fluids. 1999. Vol. 11, No. 6. P. 1346-1358.

[75] Karmakar T. A note on flow reversal in a wavy channel fled with anisotropic porous material / T. Karmakar, G.P. Raja Sekhar // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2017. Vol. 473. No. 2203.

[76] Katto Y. Criterion for onset of convective flow in a fluid in a porous medium / Y. Katto, T. Matsuoka // Inter. J. of Heat Mass Transfer, 1967. Vol. 10, No. 3. P. 297–309.

[77] Köhler W. Convection in binary fluid mixtures with modulated heating / W. Köhler, K. Morozov // J. Non-Equilib. Thermodyn, 2016. Vol. 41. P. 151.

[78] Köhler W. Thermal nonequilibrium phenomena in fluid mixtures / W. Köhler, S. Wiegand // Berlin : Springer, 2002. 470 P.

[79] Kvernvold O. Nonlinear thermal convection in anisotropic porous media / O. Kvernvold, P.A. Tyvand // Journal of Fluid Mechanics, 1979. Vol. 90. No. 4. P. 609-624.

[80] Landman A.J. Heat and brine transport in porous media: The Oberbeck-Boussinesq approximation revisited / A.J. Landman, R.J. Schotting // Transp. Porous Media , 2007 . Vol. 70, No. 3. P. 355–373.

[81] Lapwood E.R. Convection of a fluid in a porous medium / E.R. Lapwood // Proc. Cambridge, 1948. Vol. 44, No. 4. P. 508–521.

[82] Larre J.P. Soret effects in ternary systems heated from below / J.P. Larre, J.K. Platten, G. Chavepeyer // Int. J. Heat Mass Transfer, 1997. Vol. 40, No. 3. P. 545-555.

[83] Legros J.C. On the two-component Benard problem a numerical solution / J.C. Legros, D. Longree, G. Chavepeyer, J.K. Platten // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 1975. Vol. 80, No 1. P. 76-88.

[84] Lucke M. Pattern formation in binary fluid convection and in system with throughflow / M. Lucke, W. Barten, P. Buchel, C. Futterer, St. Hollenger, Ch. Jung // Lecture Notes in Physics, 1998. Vol. 55. P. 127-196.

[85] Mamou M. A Galerkin finite-element study of the onset of double–diffusive convection in an inclined porous enclosure / M. Mamou, P. Vasseur, E. Bilgen // Int. J. Heat Mass Transfer. 1998. Vol. 41, No. 11. P. 1513-1529.

[86] Mamou M. Double diffusive convection instability problem in a vertical porous enclosure / M. Mamou, P. Vasseur, E. Bilgen // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 368, P. 263–288.

[87] Mamou M. Multiple solutions for double diffusive convection in a vertical porous enclosure / M. Mamou, P. Vasseur, E. Bilgen // Int. J. Heat Mass Transfer. 1995. Vol. 38, No. 10. P. 1787-1798.

[88] Mamou M. On numerical stability analysis of double–diffusive convection in confined enclosures / M. Mamou, P. Vasseur, M. Hasnaoui // J. Fluid Mech., 2001. Vol. 433. P. 209–250.

[89] Mamou M. Stability analysis of thermosolutal convection in a vertical packed porous enclosure / M. Mamou // Physics of Fluids. 2002. Vol. 14. № 12. P. 4302–4314.

[90] Mojtabi A. Double-diffusive convection in porous media / A. Mojtabi, M. Charrier-Mojtabi // in "Handbook of Porous Media". Marcel Dekker. New York. 2000. P. 559-603.

[91] Morinishi Y. Fully conservative higher order finite difference schemes for incompressible flow / Y. Morinishi, T.S. Lund, O.V. Vasilyev, P. Moin // J. Comput. Physica, 1998. Vol. 143, No. 1. P. 90–124.

[92] Mostafa A. Ahmed Natural convection and boundary-layer flow of a non-newtonian nanofluid over a vertical cone embedded in a porous medium / Абделхафиз М.А. (Mostafa A. Ahmed) // Тез. докл. Междунар. конф. «Численное моделирование прибрежных, шельфовых и устьевых процессов», 2015. Ростов-на-Дону, 5–9 октября, С. 5.

[93] Neufeld J.A. Convective dissolution of carbon dioxide in saline aquifers / J.A. Neufeld, M.A. Hesse, A. Riaz, M.A. Hallworth, H.A. Tchelepi, H.E. Huppert // Geophys. Res. Lett., 2010. Vol. 37, No. 22. P. 1–5.

[94] Nield D.A. A Note on the Modelling of Bidisperse Porous Media / D.A. Nield // Transport in Porous Media, 2016. Vol. 111, No. 2. P. 517-520.

[95] Nield D.A. Convection in Porous Media / D.A. Nield, A. Bejan. Springer, New York, 2013. 778 P.

[96] Nield D.A. Natural convection about a vertical plate embedded in a bidisperse porous medium / D.A. Nield, A.V. Kuznetsov // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2008. Vol. 51, No. 7-8. P. 1658-1664.

[97] Nield D.A. The effect of combined vertical and horizontal heterogeneity on the onset of convection in a bidisperse porous medium / D.A. Nield, A.V. Kuznetsov // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2007. Vol. 50, No. 17-18. P. 3329-3339.

[98] Nield D.A. The onset of convection in a bidisperse porous medium / D.A. Nield, A.V. Kuznetsov // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2006. Vol. 49, No. 17-18. P. 3068-3074.

[99] Nield D.A. The onset of double-diffusive convection in a nanofluid layer / D.A. Nield, A.V. Kuznetsov // Int. J. Heat and Fluid Flow, 2011. Vol. 32, No. 4. P. 771–776.

[100] Nilsen T. An analytical study on natural convection in isotropic and anisotropic porous channels / T. Nilsen, L. Storesletten // Journal of Heat Transfer, 1990. Vol. 112. No. 2. P. 396-401.

[101] Platten J.K. Convection in Fluids/ J.K. Platten, J.C. Legros. Springer, Verlag, 1984. 680 P.

[102] Rebhi R. Bistability and hysteresis induced by form drag in nonlinear subcritical and supercritical double-diffusive Lapwood convection in shallow porous enclosures / R. Rebhi, M. Mamou, P. Vasseur // J. Fluid Mech., 2017. Vol. 812. P. 463-500.

[103] Rees D.A.S. Convective plume paths in anisotropic porous media / D.A.S. Rees, L. Storesletten, A.P. Bassom // Transport in Porous Media, 2002. Vol. 49. No. 1. P. 9-25.

[104] Rees D.A.S. The onset of convection in an inclined anisotropic porous layer with oblique principle axes / D.A.S. Rees, L. Storesletten, A. Postelnicu // Transport in Porous Media, 2006. Vol. 62. No. 2. P. 139-156.

[105] Riaz A. Onset of convection in a gravitationally unstable diffusive boundary layer in porous media / A. Riaz, M. Hesse, H.A. Tchelepi, F.M. Orr // J. Fluid Mech., 2006. Vol. 548. P. 87–111.

[106] Shliomis M.I. Self-oscillatory convection caused by the Soret effect / M.I. Shliomis, M. Souhar // Europhysics Letters, 2000. Vol. 49, No. 1. P. 55-61.

[107] Slim A.C. Dissolution-driven convection in a Hele–Shaw cell / A.C. Slim, M.M. Bandi, J.C. Miller, L. Mahadevan // Physica Fluids, 2013. Vol. 25, No. 2. P. 024101.

[108] Slim A.C. Solutal-convection regimes in a two-dimensional porous medium / A.C. Slim // J. Fluid Mech., 2014. Vol. 741. P. 461–491.

[109] Soret C. Sur l'état d'équilibre que prend au point de vue de sa concentration une dissolution saline primitivement homohéne dont deux parties sont portées a des températures différentes / C. Soret // Arch. Sci. Physica Nat., 1879. Vol. 2. P. 48-61.

[110] Storesletten L. Effects of anisotropy on convective flow through porous media. In: Ingham, D.B., Pop, I. (eds.) / L. Storesletten // Transp. Phenom. Porous Med., 1998. P. 261–283.

[111] Storesletten L. Effects of anisotropy on convection in horizontal and inclined porous layers. In: Ingham, D.B.,et al. (eds.) / L. Storesletten // Emerging Technologies and Techniques in Porous Med., 2004. P. 285–306.

[112] Storesletten L. Natural convection in a horizontal porous layer with anisotropic thermal diffusivity / L. Storesletten // Transp Porous Med., 1993. № 12. P. 19–29.

[113] Straughan B. Anisotropie porous penetrative convection / B. Straughan, D.W. Walker // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1996. Vol. 452. No. 1944. P. 97-115.

[114] Straughan B. Convection with local thermal non-equilibrium and microfluidic effects / B. Straughan. Advances in Mechanics and Applied Mathematics, 2015. Vol. 32, Springer, Heidelberg.

[115] Straughan B. Horizontally isotropic bidispersive thermal convection / B. Straughan // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2018. Vol. 474. No. 2213.

[116] Straughan B. Mathematical aspects of multi-porosity continua / B. Straughan. Advances in Mechanics and Applied Mathematics,2017. Vol. 38, Springer, Heidelberg.

[117] Trevisan O. V. Combined heat and masstransfer by natural convection in a porous media / O. V. Trevisan, A. Bejan // Adv. Heat Transfer. 1990. Vol. 20. P. 315-352.

[118] Tsybulin V. Destruction of the family of steady states in the planar problem of Darcy convection / V. Tsybulin, B. Karasözen // Physica Lett. A, 2008. Vol. 372. No. 35. P. 5639–5643.

[119] Tsybulin V.G. Influence of Anisotropy on Convection of the Heat-conducting Fluid in a Porous Medium / V.G. Tsybulin, Mostafa A. Ahmed // Book of abstracts. Int. Conf. "Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications", 2016. Surabaya, Indonesia, July 19-22, P. 282.

[120] Turner J.S. Multicomponent convection / J.S. Turner // Annual Rev. Fluid Mech. 1985. Vol. 17. P. 11–44.

[121] Tyvand A.P. Onset of convection in an anisotropic porous layer with vertical principal axes / A.P. Tyvand, L. Storesletten // Transp Porous Med., 2015. No. 108. P. 581–593.

[122] Tyvand A.P. Onset of convection in an anisotropic porous medium with oblique principal axes / A.P. Tyvand, L. Storesletten // J. Fluid Mech., 1991. Vol. 226. P. 371–382.

[123] Umavathi J.C. The onset of double-diffusive convection in a nanofluid saturated porous layer: Cross-diffusion effects / J.C. Umavathi, M.A. Sheremet, O. Ojjela, G.J. Reddy // Eur. J. Mechanics, B/Fluids, 2017. Vol. 65. P. 70–87.

[124] Vajravelu K. Mixed convection heat transfer in an anisotropic porous medium with oblique principal axes / K. TVajravelu, K.V. Prasad // Journal of Mechanics, 2014. Vol. 30. No. 4. P. 327-338.

[125] Weir G.J. Reservoir storage and containment of greenhouse gases / G.J. Weir, S.P. White, W.M.‘Kissling // Transp. Porous Media, 1996. Vol. 23, No. 1. P. 37–60.

[126] Wen B. Computational approaches to aspect-ratio-dependent upper bounds and heat flux in porous medium convection / B. Wen, G.P. Chini, N. Dianati, C.R. Doering // Physica Lett. A, 2013. Vol. 377, No. 41. P. 2931–2938.

[127] Xu X. Convective stability analysis of the long-term storage of carbon dioxide in deep saline aquifers / X. Xu, S. Chen, D. Zhang // Adv. Water Res., 2006. Vol. 29, No. 3. P. 397–407.

[128] Yacine L. Soret-driven convection and separation of binary mixtures in a horizontal porous cavity submitted to cross heat fluxes / L. Yacine, A. Mojtabi, R. Bennacer, A. Khouzam // International Journal of Thermal Sciences, 2016. Vol. 104. P. 29-38.

[129] Yudovich V.I. Secondary cycle of equilibria in a system with cosymmetry, its creation by bifurcation and impossibility of symmetric treatment of it / V.I. Yudovich // Chaos, 1995. Vol. 5. No. 2. P. 402–411.

[130] Zonta F. Effect of temperature dependent fluid properties on heat transfer in turbulent mixed convection / F. Zonta, A. Soldati // J. Heat Transfer, 2014. Vol. 136, No. 2. P. 022501.

[131] Zonta F. Modulation of turbulence in forced convection by temperature-dependent viscosity / F. Zonta, C. Marchioli, A. Soldati // J. Fluid Mech., 2012. Vol. 697. P. 150–174.

Приложение А

Программный комплекс Aniso2d для исследования плоской анизотропной конвекции в пористой среде

В среде MATLAB разработан программный комплекс Aniso2d [38] для проведения следующих исследований:

- расчет критических значений Рэлея для задачи фильтрационной конвекции однокомпонентной жидкости в прямоугольнике с учетом анизотропии проводимости и тепловых свойств жидкости (программа AT-Crit);
- вычисление стационарного конвективного режима методом установления (программа AT-Point);
- продолжение конвективного режима по параметрам задачи (программа AT-Cont);
- расчет семейство стационарных режимов (программа AT-Fam);
- анализ разрушения семейств при нарушении условий косимметрии (программа AT-Dest).

Описание основных программ и функций Aniso2d даны в § 2.4.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018618614

Программа Aniso2d для исследования плоской анизотропной конвекции в пористой среде

Правообладатель: ***федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южный федеральный университет» (Южный федеральный университет) (RU)***

Авторы: ***Цибулин Вячеслав Георгиевич (RU), Абделхафиз Мостафа Абдаллах Ахмед (RU)***

Заявка № **2018616292**

Дата поступления **14 июня 2018 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***16 июля 2018 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев