

На правах рукописи

М. А. Абделхазиз

АБДЕЛХАФИЗ МОСТАФА АБДАЛЛАХ АХМЕД

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНЫХ
ДВИЖЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ
В ПОРИСТОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ**

Специальность 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

г. Воронеж – 2018 г.

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «Южный Федеральный Университет» на кафедре вычислительной математики и математической физики Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
доцент, Цибулин Вячеслав Георгиевич

Официальные оппоненты: Тарасевич Юрий Юрьевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Астраханский государственный
университет», физико-математический
институт, научная лаборатория «Математическое
моделирование и информационные технологии
в науке и образовании», руководитель

Костин Дмитрий Владимирович,
доктор физико-математических наук,
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
университет», математический факультет,
кафедра математического моделирования, доцент

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Пермский государственный
национальный исследовательский университет»

Защита состоится « 6 » марта 2019 г. в 15:10 на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 при ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1, главный корпус, ауд. 333.

С диссертацией можно ознакомиться в зональной научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте <http://www.science.vsu.ru/dissertations/6812/>
Диссертация_Абделхафиз_М.А..pdf.

Автореферат разослан « 10 » января 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.038.20
доктор физико-математических наук,
доцент

Шабров Сергей Александрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Задачи конвективного переноса в пористых средах возникают в геофизике, теплофизике и различных отраслях техники и медицины, где в настоящее время применяются пористые материалы. Для обеспечения устойчивости технологических процессов требуется учитывать динамику заполняющих поры газа или жидкости при воздействии температуры, примесей, неоднородности пористой среды и т.д. Анизотропия свойств может возникать естественно или появляться вследствие инженерных решений.

Математическое моделирование конвективных движений теплопроводной жидкости с учетом насыщающих ее примесей и неоднородности среды является сложной задачей, требующей применения современных численных методов и разработки соответствующего программного обеспечения. При анализе систем нелинейных уравнений в частных производных важно учитывать имеющиеся дискретные и непрерывные симметрии, косимметричность рассматриваемых задач.

Конвекция в пористой среде интересна также возникающими сценариями мультистабильности – реализацией различных конвективных течений в зависимости от начальных данных. Д.В. Любимов обнаружил нетривиальное ответвление континуального семейства стационарных режимов от механического равновесия. В.И. Юдович объяснил это явление на основе разработанной им теории косимметрии и показал, что образование семейства не является следствием какой-либо непрерывной симметрии. Исследованием изотропных задач фильтрационной конвекции занимались Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий, Д.В. Любимов, Т.П. Любимова, Д.А. Браун, Г.Ф. Путин, В.Н. Говорухин, В.Г. Цибулин, В. Karasözen, L. Storesletten, M. Mamou, P. Vasseur, D.A.S. Rees, A. Mojtabi, S.N. Gaikwad и др. Анизотропные задачи движения жидкости в пористой среде слабо изучены, их анализ с привлечением теории косимметрии прежде не проводился.

Целью диссертационной работы является моделирование и развитие методов анализа анизотропной конвекции теплопроводной жидкости, насыщающей пористую среду, на основе подхода, использующего аппарат теории косимметрии.

Научная задача. В соответствии с поставленной целью в работе решаются следующие научные задачи:

- Исследование математических моделей гравитационной конвекции

теплопроводной жидкости в пористой среде с анизотропией свойств, анализ возникновения конвективных движений.

- Разработка разностных схем расчета конвекции жидкости в пористой среде, построение аппроксимаций уравнений анизотропной фильтрационной конвекции, сохраняющих свойство косимметрии.
- Вычисление семейств стационарных режимов для задачи с анизотропией свойств теплопроводности и проницаемости, исследование селекции стационарных режимов при разрушении косимметрии.
- Разработка программного комплекса для вычислительных экспериментов в задачах гравитационной фильтрационной конвекции с учетом анизотропии жидкости и среды.

Объекты исследования. Математические модели анизотропной фильтрационной конвекции, качественные и численные методы анализа систем с косимметрией.

Методы исследования. Для решения поставленных задач применялись методы математической физики и вычислительной математики, теория динамических систем с косимметрией. Для аппроксимации нелинейных уравнений в частных производных использовалась схема смешенных сеток. Расчет нестационарных и устойчивых стационарных режимов проводился для систем обыкновенных дифференциально-алгебраических уравнений при помощи метода Рунге-Кутты. Континаульные семейства стационарных состояний вычислялись при помощи подхода, основанного на косимметричной версии теоремы о неявной функции. Компьютерный эксперимент проводился в среде пакета MATLAB. **Обоснованность научных положений и достоверность результатов исследований** обусловлена математически корректной постановкой задач, использованием апробированных методов и совпадением в частных случаях с известными экспериментальными и теоретическими результатами других авторов.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Для математических моделей движения теплопроводной жидкости в пористой среде представлен анализ возникновения конвекции с учетом анизотропии жидкости и среды. Установлены соотношения на параметры, при которых соответствующие начально-краевые задачи являются косимметричными. Выведены явные формулы для критических чисел Рэлея в случае монотонной неустойчивости механического равновесия.

2. Исследовано возникновение конвекции в анизотропной пористой среде, насыщенной теплопроводной жидкостью с примесью. В случае

косимметрии задачи получено соотношение между критическими значениями температурного и концентрационного чисел Рэлея, при которых возникают конвективные движения.

3. Представлены результаты вычисления семейств стационарных режимов для задачи с анизотропией свойств теплопроводности и проницаемости пористой среды, в численном эксперименте изучена селекция стационарных режимов при разрушении косимметрии.

4. Построены конечно-разностные аппроксимации дифференциальных моделей анизотропной фильтрационной конвекции, сохраняющие свойство косимметрии.

5. Разработан комплекс программ, позволяющий проводить численное исследование плоских конвективных режимов теплопроводной жидкости с примесью в пористой анизотропной среде.

Научная новизна.

1. Выделен класс косимметричных задач анизотропной гравитационной конвекции, что позволило получить явные аналитические формулы для критических значений параметров, отвечающих возникновению конвекции.

2. Для построения миметических численных схем, наследующих свойства начально-краевых задач, использован новый подход, основанный на сохранении косимметричности. Анализ систем в случае нарушения косимметрии дал возможность описать мультистабильность в задачах анизотропной фильтрационной конвекции.

3. На основе разработанных численных схем реализован комплекс программ, позволяющий проводить вычисления в интерактивном режиме для плоских задач фильтрационной конвекции, рассмотренных в диссертации.

Теоретическая и практическая ценность работы. Проведенное исследование посвящено математическому исследованию плоских конвективных движений теплопроводной жидкости в пористой анизотропной среде. Полученные результаты могут быть использованы для моделирования конвекции в бинарной жидкости, насыщающей пористую анизотропную среду, а также в микромеханике, биотехнологии, медицине и т. д. Работа вносит теоретический вклад в развитие методов анализа решений нелинейных уравнений в частных производных. Применяемые в диссертации подходы могут быть использованы для исследования систем нелинейных дифференциальных уравнений. Полученный материал будет включен в специальные курсы для студентов и аспирантов физико-

математических специальностей.

Область исследования. Область исследования и содержание диссертации соответствуют формуле специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки), область исследования соответствует п. 2 «Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей», п. 4 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента», п. 5. «Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента».

Реализация результатов работы. Полученные в диссертации результаты являются частью научно-исследовательских работ кафедры вычислительной математики и математической физики института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, в частности, по грантам РФФИ № 14-01-00470 и № 18-01-00453.

Публикации и апробация работы. По теме диссертации опубликовано 11 печатных работ: 2 составляют статьи в реферируемых изданиях из списка ВАК и базы данных Scopus [1–2]. Имеется свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ [11], 8 работ опубликовано в сборниках конференций [3–10].

Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях: Международная конференция «Численное моделирование прибрежных, шельфовых и устьевых процессов» (Ростов-на-Дону, 5–9 октября 2015 г.); XVIII и XIX Международные конференции «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 7–10 ноября 2016 г.; 15–18 октября 2018 г.); XXI и XXII Всероссийские конференции «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики» (Абрау-Дюрсо, 5–11 сентября 2016 г.; 3–8 сентября 2018 г.); Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (Ласпи, 17–29 сентября 2017 г.); Всероссийская школа-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (Дивноморское, 31 мая–3 июня 2018 г.); «Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis VIII» (Ростов-на-Дону, 22–27 апреля 2018 г.). Работа докладывалась на научном семинаре

кафедры вычислительной математики и математической физики ЮФУ (руководитель проф. Жуков М. Ю., 2018 г.).

Личный вклад автора в опубликованных работах

в соавторстве. В публикациях[1–10] автору принадлежит разработка программ, предназначенных для исследования моделей конвекции в пористой среде, и проведение расчетов. В работах [1–2, 4–7, 9] проведение аналитических выкладок, разработка численных схем и анализ результатов расчетов принадлежат авторам в равной степени.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации содержит **121** страниц текста, **21** рисунок и **15** таблиц. Список литературы содержит **131** наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** приведен краткий обзор содержания работы, обоснована актуальность темы, изложены цели работы и методы исследования, сформулированы научная новизна и практическая значимость результатов, представлена структура работы и дан обзор литературы по теме диссертации.

Первая глава посвящена описанию и анализу математических моделей фильтрационной конвекции на основе закона Дарси и приближения Буссинеска. В § 1.1 дана постановка начально-краевой задачи гравитационной анизотропной фильтрационной конвекции в естественных переменных и для системы с функцией тока. Для плоской задачи в области $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ и безразмерных величин получается система относительно скорости $\vec{V} = (u, v)$, давления p и девиации температуры (отклонение от линейного по высоте профиля) θ , зависящих от координат x, y и времени t .

$$\nabla p + M \cdot \vec{V} + \lambda \theta \vec{\gamma} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad \nabla = (\partial_x, \partial_y), \quad (1)$$

$$\dot{\theta} = L_D \theta - \vec{V} \cdot \vec{\gamma} - (\vec{V} \cdot \nabla) \theta, \quad \dot{(\cdot)} = \partial_t (\cdot). \quad (2)$$

Здесь M представляет тензор коэффициентов обратной проницаемости μ_{ij} , λ – фильтрационное число Рэлея, $\gamma = (0, -1)$ – вектор, отвечающий направлению силы тяжести, оператор L_D содержит безразмерные коэффициенты теплопроводности d_{ij} :

$$L_D = \partial_x [d_{11} \partial_x + d_{12} \partial_y] + \partial_y [d_{21} \partial_x + d_{22} \partial_y]. \quad (3)$$

Уравнения (1)–(3) дополняются краевыми условиями непротекания и однородности девиации температуры на границе $\partial\Omega$, (n – нормаль)

$$\vec{V} \cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \quad \theta|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4)$$

и начальными условиями для температуры $\theta(x, y, 0) = \theta_0(x, y)$.

Задача относительно функции тока ψ ($u = \psi_y$, $v = -\psi_x$) имеет вид

$$0 = M_0\psi + \lambda\theta_x, \quad M_0 = \mu_{11}\partial_{yy} - (\mu_{12} + \mu_{21})\partial_{xy} + \mu_{22}\partial_{xx}, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5)$$

$$\dot{\theta} = L_D\theta - \psi_x - J(\psi, \theta), \quad J(\psi, \theta) = \theta_x\psi_y - \theta_y\psi_x, \quad \theta|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6)$$

В § 1.2 выводится система уравнений для исследования конвекции анизотропной жидкости с примесью в пористой среде. Применяются уравнения Буссинеска-Дарси, в результате получается система относительно функции тока ψ , температуры θ и концентрации c :

$$0 = M_0\psi + \theta_x + c_x, \quad \dot{\theta} = L^T\theta - \lambda^T\psi_x - J(\psi, \theta), \quad (7)$$

$$\dot{c} = L^C c - \lambda^C\psi_x + L^{CT}\theta - J(\psi, c), \quad \psi|_{\partial\Omega} = \theta|_{\partial\Omega} = c|_{\partial\Omega} = 0, \quad (8)$$

здесь λ^T и λ^C – температурное и концентрационное числа Рэлея, операторы L^T , L^C и L^{CT} получаются из (3) заменой d_{ij} на d_{ij}^T , d_{ij}^C и d_{ij}^{CT} соответственно. Система (7)–(8) дополняется начальными условиями для девиации температуры и концентрации частиц $\theta(x, y, 0) = \theta_0(x, y)$, $c(x, y, 0) = c_0(x, y)$.

В § 1.3 проводится исследование условий, при которых рассматриваемые системы обладают линейной косимметрией. Аналитически находятся соотношения на параметры теплопроводности, проницаемости, молекулярной диффузии и термодиффузии, обеспечивающие косимметричность соответствующих систем. Существование линейной косимметрии (вектор-функции, ортогональной векторному полю задачи) устанавливают следующие леммы.

Лемма 1. При выполнении условий на параметры

$$\mu_{11}d_{12} = -\mu_{12}d_{22}, \quad \mu_{11}d_{21} = -\mu_{21}d_{22}, \quad \mu_{11}d_{11} = \mu_{22}d_{22} \quad (9)$$

косимметрией задачи (1)–(4) будет вектор-функция

$$Z = (d_{22}\theta_y, -d_{22}\theta_x, 0, \mu_{11}\psi) \quad (10)$$

Лемма 2. Для системы (5)–(6) при условиях (9) косимметрия дается вектор-функцией $Z = (d_{22}\theta, -\mu_{11}\psi)$.

Лемма 3. Для уравнений конвекции жидкости с примесью (7)–(8) при выполнении условий на параметры

$$\mu_{11}d_{12}^C = -\mu_{12}d_{22}^C, [\mu_{12}d_{22}^C + \mu_{11}d_{12}^{CT}] d_{22}^T = [d_{22}^{CT} - d_{22}^C] \mu_{11}d_{12}^T, \quad (11)$$

$$\mu_{11}d_{21}^C = -\mu_{21}d_{22}^C, [\mu_{21}d_{22}^C + \mu_{11}d_{21}^{CT}] d_{22}^T = [d_{22}^{CT} - d_{22}^C] \mu_{11}d_{21}^T, \quad (12)$$

$$\mu_{11}d_{11}^C = \mu_{22}d_{22}^C, [-\mu_{22}d_{22}^C + \mu_{11}d_{11}^{CT}] d_{22}^T = [d_{22}^{CT} - d_{22}^C] \mu_{11}d_{11}^T, \quad (13)$$

косимметрией является

$$Z = (\theta + c, S_1\psi, S_2\psi), \quad S_1 = \mu_{11} \frac{[d_{22}^{CT} - d_{22}^C]}{d_{22}^T d_{22}^C}, \quad S_2 = -\frac{\mu_{11}}{d_{22}^C}. \quad (14)$$

В § 1.4 для косимметричных систем анизотропной фильтрационной конвекции выводятся явные выражения критических чисел Рэлея, отвечающих монотонной неустойчивости механического равновесия. Для задачи (5)–(6) критическое число Рэлея дается формулой:

$$\lambda_{crit} = 4\pi^2 d_{11} \left(\frac{d_{11}}{a^2} + \frac{d_{22}}{b^2} \right). \quad (15)$$

Для системы (7)–(8) найдено, что отвечающие монотонной неустойчивости механического равновесия критические числе Рэлея λ^T и λ^C связаны соотношением

$$\lambda_{crit}^T [d_{11}^C - d_{11}^{CT}] + d_{11}^T \lambda_{crit}^C = 4\pi^2 d_{11}^T d_{11}^C \left(\frac{\mu_{22}}{a^2} + \frac{\mu_{11}}{b^2} \right). \quad (16)$$

Вторая глава. Для решения сформулированных в главе 1 задач разрабатывается подход на основе метода прямых, с использованием схемы смешенных сеток по пространственным координатам и метода Рунге-Кутты для интегрирования по времени. Рассматриваются различные варианты аппроксимации диффузионных и нелинейных слагаемых конечными разностями второго порядка точности.

В § 2.1 вводятся смешенные сетки для температуры, давления, скорости, определяются разностные операторы и операторы вычисления среднего. По пространственным координатам задаются равномерные сетки: $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n + 1$, $h = a/(n + 1)$, $y_j = jg$, $j = 0, 1, \dots, m + 1$, $g = b/(m + 1)$. В узлах (x_i, y_j) определяются функции тока ψ_i^j и температура θ_i^j , вспомогательные узлы размещаются в серединах интервалов, образованных соседними узлами основной сетки: $x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$, $y_{j+1/2} = \frac{1}{2}(y_j + y_{j+1})$. На двухточечном шаблоне определяются разностные операторы первого порядка

$$\delta_x f_i^j = \frac{1}{h} (f_{i+1}^{j+1/2} - f_i^{j+1/2}), \quad \delta_y f_i^j = \frac{1}{g} (f_{i+1/2}^{j+1} - f_{i+1/2}^j) \quad (17)$$

и операторы вычисления среднего на интервале

$$\delta_0^x f_i^j = \frac{1}{2}(f_{i+1}^{j+1/2} + f_i^{j+1/2}), \quad \delta_0^y f_i^j = \frac{1}{2}(f_{i+1/2}^{j+1} + f_{i+1/2}^j) \quad (18)$$

При помощи введенных операторов определяются разностные отношения на трехточечных шаблонах: $(D_x f)_i^j = (\delta_x \delta_0^x f)_i^j$, $(D_y f)_i^j = (\delta_y \delta_0^y f)_i^j$, а также разностные производные первого порядка и операторы вычисления среднего на прямоугольном шаблоне: $d_0 = \delta_0^x \delta_0^y \equiv \delta_0^y \delta_0^x$, $d_x = \delta_x \delta_0^y \equiv \delta_0^y \delta_x$, $d_y = \delta_y \delta_0^x \equiv \delta_0^x \delta_y$. Для не зависящих от пространственных координат коэффициентов d_{ij} , применяется следующая аппроксимация L_D (3):

$$L_D^h = d_{11} \delta_x \delta_x + (d_{12} + d_{21}) D_x D_y + d_{22} \delta_y \delta_y. \quad (19)$$

Применение оператора $\tilde{L}_D^h = d_x(d_{11}d_x + d_{12}d_y) + d_y(d_{21}d_x + d_{22}d_y)$ приводит к потере косимметрии для сеточного аналога задачи.

На основе введенных операторов получены аппроксимации уравнений в естественных переменных (1)–(2) для внутренних узлов сетки

$$0 = (\delta_x p + \mu_{11} u + \mu_{12} \delta_0^y \delta_0^x v)_i^{j+1/2}, \quad 0 = (\delta_x u + \delta_y v)_{i+1/2}^{j+1/2}, \quad (20)$$

$$0 = (\delta_y p + \mu_{21} \delta_0^y \delta_0^x u + \mu_{22} v - \lambda \delta_0^x \theta)_{i+1/2}^j, \quad (21)$$

$$\dot{\theta}_i^j = (L_D^h \theta + \delta_0^x v - \alpha \tilde{J}_D - (1 - \alpha) \tilde{J}_d)_i^j \quad (22)$$

здесь \tilde{J}_D и \tilde{J}_d – аппроксимации адвективных членов. На границе получаются дискретные аналоги краевых условий (4)

$$u_0^{j+1/2} = u_{n+1}^{j+1/2} = 0, \quad \theta_0^j = \theta_{n+1}^j = 0, \quad j = 0, \dots, m, \quad (23)$$

$$v_{i+1/2}^0 = v_{i+1/2}^{m+1} = 0, \quad \theta_i^0 = \theta_i^{m+1} = 0, \quad i = 0, \dots, n. \quad (24)$$

В § 2.2 проводится дискретизация задачи фильтрационной конвекции в переменных функция тока и девиация температуры. Для анализа устойчивости механического равновесия записывается спектральная задача и получается система для численного определения критических чисел Рэлея. Аналогичным образом выводится система разностных уравнений, аппроксимирующая начально-краевую задачу анизотропной конвекции жидкости с примесью.

В результате аппроксимации правых частей уравнений (5)–(6) с помощью разностных операторов получается система разностных уравнений:

$$0 = [M_0^h \psi + \lambda D_x \theta]_i^j, \quad M_0^h = \mu_{11} \delta_y \delta_y - (\mu_{12} + \mu_{21}) D_x D_y + \mu_{22} \delta_x \delta_x,$$

$$\dot{\theta}_i^j = [L_D^h \theta - D_x \psi - \alpha J_D - (1 - \alpha) J_d]_i^j, \quad (i = 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, m).$$

Значение параметра $\alpha = 1/3$ позволяет удовлетворить наибольшему числу законов консервативности. Для аппроксимации якобиана используется линейная комбинация двух дискретных аналогов J

$$J_D = D_x(\theta D_y \psi) - D_y(\theta D_x \psi), \quad J_d = d_x(d_0 \theta d_y \psi) - d_y(d_0 \theta d_x \psi). \quad (25)$$

Разностные аналоги краевых условий из (5)–(6) имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_0^j &= \psi_{n+1}^j = 0, & \theta_0^j &= \theta_{n+1}^j = 0, & j &= 0, \dots, m, \\ \psi_i^0 &= \psi_i^{m+1} = 0, & \theta_i^0 &= \theta_i^{m+1} = 0, & i &= 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (26)$$

и для начальных условий получается $\theta_i^j(x, y, 0) = \theta_0(x_i, y_j)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$.

В результате дискретизации по пространственным координатам задачи (7)–(8) (конвекция бинарной жидкости) получается система обыкновенных дифференциально-алгебраических уравнений:

$$0 = [M_0^h \psi]_i^j + [D_x \theta]_i^j + [D_x c]_i^j, \quad (27)$$

$$\dot{\theta}_i^j = [L_h^T \theta - \lambda^T D_x \psi - \alpha J_D^T - (1 - \alpha) J_d^T]_i^j, \quad (28)$$

$$\dot{c}_i^j = [L_h^C c - \lambda^C D_x \psi + L^{CT} \theta - \alpha J_D^C - (1 - \alpha) J_d^C]_i^j, \quad (29)$$

здесь J_D^C и J_d^C обозначают аппроксимации якобиана (25) заменой θ на c . Выражения для L_h^T , L_h^C , L_h^{CT} получаются из (19) заменой коэффициентов d_{ij} на d_{ij}^T , d_{ij}^C , d_{ij}^{CT} . Разностные краевые условия (26) дополняются нулевыми значениями для концентрации c на границе. Данная дискретная задача сохраняет свойство косимметрии. Начальные условия задаются для температуры и концентрации $\theta_i^j(0) = \theta_0(x_i, y_j)$, $c_i^j(0) = c_0(x_i, y_j)$. $i = 1, \dots, n$, $j = 0, \dots, m$.

В § 2.3 рассматривается вопрос о сохранении косимметрии в разностных аппроксимациях задачи анизотропной фильтрационной конвекции. Устанавливается ортогональность вектора правых частей разностных уравнений сеточному аналогу вектор-функции $Z^h = [Z_1, Z_2, Z_3, Z_4]$:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \left[(\delta_y \theta)_1^{1/2}, (\delta_y \theta)_2^{1/2}, \dots, (\delta_y \theta)_n^{m+1/2} \right], & Z_3 &= [0, 0, \dots, 0], \\ Z_2 &= \left[-(\delta_y \theta)_{1/2}^1, -(\delta_y \theta)_{3/2}^1, \dots, -(\delta_y \theta)_{n+1/2}^m \right], & Z_4 &= [\psi_1^1, \psi_2^1, \dots, \psi_n^m]. \end{aligned}$$

Показано, что при использовании вместо L_D^h (19) оператора \tilde{L}_D^h пропадает ортогональность Z^h и правой части уравнений (20)–(22).

Параграф § 2.4 посвящен программной реализации численных методов исследования моделей анизотропной конвекции в пористой среде.

Описывается структура и возможности разработанного в среде MATLAB программного комплекса Aniso2d [12], предназначенного для численного анализа возникновения конвекции, расчета конвективных движений и визуализации результатов. С помощью Aniso2d можно решать задачи в прямоугольнике, определять критические значения параметров, производить прямой расчет конвективных движений, вычислять непрерывные семейства стационарных режимов, изучать эффекты нарушения косимметрии.

В третьей главе представлены результаты исследования гравитационной анизотропной конвекции в пористой прямоугольной области. На основе разработанных численных схем и программного обеспечения проводятся вычисления критических чисел Рэлея, конвективных движений и семейств стационарных режимов.

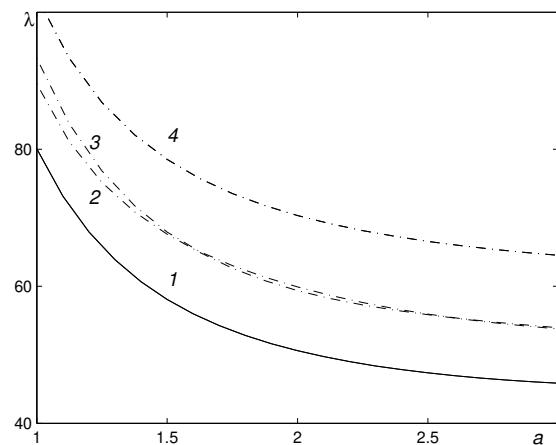
В § 3.1 анализируется возникновение конвекции в пористом прямоугольнике с учетом анизотропии тепловых характеристик и проницаемости. Вычисления проведены для систем (1)–(4) и (5)–(6). Результаты расчета критических чисел Рэлея и нейтральных кривых представлены для прямоугольников, длина которых больше высоты ($a > b$).

На рис. 1 даны нейтральные кривые зависимости критических чисел Рэлея λ от длины прямоугольника a (высота $b = 1$), рассчитанных для нескольких значений параметров обратной проницаемости и коэффициентов теплопроводности. Кривые 1, 4 отвечают случаю косимметрии и получены соответственно при $\mu_{11} = d_{22} = 1$ и $\mu_{11} = d_{22} = 1.5$.

Остальные параметры были фиксированы: $\mu_{22} = d_{11} = 1$, $\mu_{12} = \mu_{21} = d_{12} = d_{21} = 0$. Кривые 2 и 3 отвечают двум наименьшим собственным значениям спектральной задачи, рассчитанным при $\mu_{11} = 1.5$, $d_{22} = 1$, т.е. в случае нарушения условия косимметрии. С увеличением $\mu_{11} = d_{22}$ значение критического числа λ_{crit} повышается по сравнению с изотропным случаем (кривая 1).

Результаты расчетов порогового числа Рэлея λ в зависимости от параметров обратной проницаемости и коэффициентов теплопроводности показали, что одинаковые отклонения параметров от значений, отве-

Рис.1



чающих косимметричной ситуации $d_{22} = \mu_{11}$ ($\mu_{22} = d_{11} = 1.5$, $\mu_{ij} = d_{ij} = 0$), приводят к одинаковым величинам критических чисел Рэлея $\lambda_{crit}(\mu_{11}, d_{22}) = \lambda_{crit}(d_{22}, \mu_{11})$.

В § 3.2 проводится численное исследование ответвляющихся от механического равновесия конвективных движений. Представлены результаты вычисления критических чисел Рэлея λ_{kj} на различных сетках и дано сравнение со значениями, получаемыми по явной формуле (15). Найдено, что для вычисления критических значений детальная сетка по x оказывается важнее, чем уменьшение шага по y . Если вместо аппроксимации L_D^h , сохраняющей косимметрию, использовать \tilde{L}_D^h то семейство стационарных движений разрушается. При этом получается конечное число изолированных решений.

В § 3.3 представлены результаты вычисления семейств стационарных режимов. На рис. 2 приведена кривая семейства (слева), рассчитанного

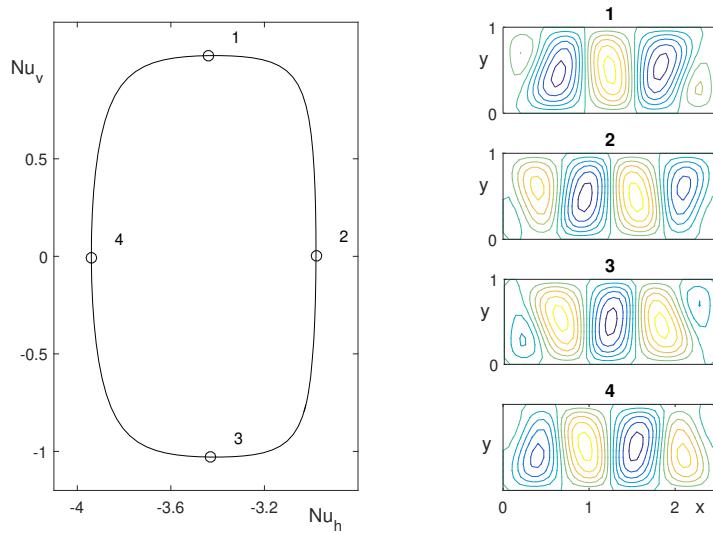


Рис. 2

при $\lambda = 150$, $a = 2.5$, $b = 1$, $\mu_{11} = d_{22} = 1.2$, $\mu_{22} = d_{11} = 1$. Точками отмечены стационарные режимы, функции тока которых даны справа. В зависимости от положения точки на семействе получающийся режим состоит из четырех валов (точки 2, 4) или трех основных и двух угловых валов (точки 1, 3).

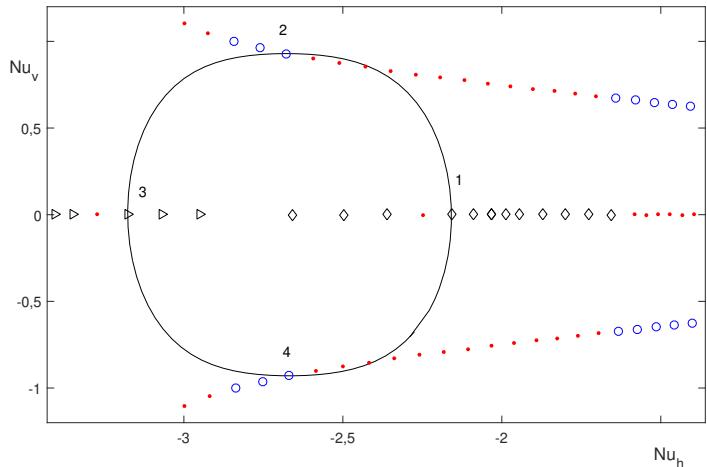


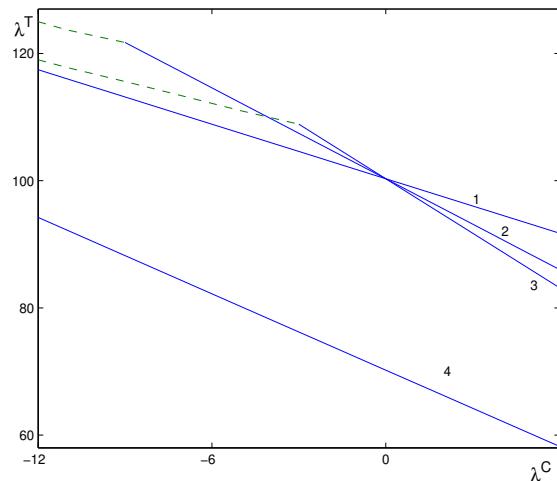
Рис. 3

Численно проанализировано разрушение семейства стационарных режимов при нарушении условий косимметрии вследствие изменения значений параметров задачи. На рис. 3 приведено семейство стационарных режимов (сплошная линия), рассчитанное при $d_{11} = 1.0$, $\lambda = 120$, $\mu_{11} = d_{22} = 1.2$, $\mu_{22} = 1$. При нарушении косимметрии ($d_{11} \neq 1.0$) происходит разрушение семейства. Ромбами, треугольниками и кружками обозначены устойчивые изолированные стационарные решения при различных значениях параметра $d_{11} \in [0.8, 2.0]$. Неустойчивые стационарные решения отмечены точками. Ромбы и треугольники соответствуют конвективным режимам с симметричным расположением валов, а кружки – с асимметричным.

Рис. 4

Таблица 3.

кривая	d_{11}^C	d_{22}^C	d_{11}^{CT}	d_{22}^{CT}
1	1.0	1.3	0.3	0.39
2	0.6	0.78	0.18	0.234
3	0.5	0.65	0.15	0.195
4	0.5	0.65	0.0	0.0



В § 3.4 рассматривается плоская задача о возникновении конвекции в пористом прямоугольнике, насыщенном теплопроводной жидкостью с примесью. На основе уравнений (7)–(8) проводится анализ монотонной и колебательной неустойчивости механического равновесия. На рис. 4 приведены нейтральные кривые устойчивости $\lambda_{crit}^T = F(\lambda^C)$, полученные для

различных наборов диффузионных параметров d_{ij}^C , d_{ij}^{CT} , см. таблица 3.

Коэффициенты проницаемости μ_{ij} и теплопроводности d_{ij}^T были фиксированы: $\mu_{11} = 1.3$, $\mu_{22} = 1$, $d_{11}^T = 1$, $d_{22}^T = 1.3$. Сплошной линией даны участки монотонной потери устойчивости и пунктиром – колебательной.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

1. Для математических моделей конвекции теплопроводной жидкости в пористой среде представлен анализ с учетом анизотропии жидкости и среды. Установлены соотношения на параметры, при которых начально-краевые задачи являются косимметричными. Выведены явные формулы критических чисел Рэлея, отвечающих монотонной неустойчивости механического равновесия.

2. Проведен анализ возникновения конвекции в анизотропной пористой среде, насыщенной теплопроводной жидкостью с примесью. Найдена косимметрия задачи и получены соотношения между критическими значениями температурного и концентрационного чисел Рэлея, при которых возникают конвективные движения.

3. Развита схема расчета конвективных движений жидкости в пористой среде с учетом анизотропии, построены конечно-разностные аппроксимации уравнений фильтрационной конвекции, сохраняющие свойство косимметрии.

4. Разработан программный комплекс для проведения вычислительного эксперимента в задачах гравитационной конвекции бинарных жидкостей в пористой среде с учетом анизотропии.

5. Рассчитаны семейства стационарных режимов для задачи с анизотропией свойств теплопроводности и проницаемости пористой среды, изучена селекция стационарных режимов при разрушении косимметрии.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. *Абделхафиз М.А.* Влияние анизотропии на конвекцию теплопроводной жидкости в пористой среде и косимметрия задачи Дарси / М.А. Абделхафиз, В.Г. Цибулин // Изв. РАН. МЖГ. 2017, № 1, С. 53–61; англ. пер. Fluid Dynamics, 2017, Vol. 52, № 1, P. 49–57.

2. *Абделхафиз М.А.* Численное моделирование конвективных движений в анизотропной пористой среде и сохранение косимметрии / М.А. Абделхафиз, В.Г. Цибулин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017, Т. 57, № 10, С. 1734–1747; англ. пер. Comput. Mathem. and Mathem. Phys., 2017, Vol. 57, № 10, P. 1706–1719.

Публикации в других изданиях и тезисы научных конференций

3. *Abdelhafez M.A.* Natural convection and boundary-layer flow of a non-newtonian nanofluid

over a vertical cone embedded in a porous medium / M.A. Abdelhafez (Mostafa A. Ahmed) // Тез. докл. Междунар. конф. «Численное моделирование прибрежных, шельфовых и устьевых процессов», Ростов-на-Дону, 2015. С. 5.

4. *Абделхафиз М.А.* Численное моделирование анизотропной фильтрационной конвекции сохранение косимметрии / М.А. Абделхафиз, В.Г. Цибулин // Тр. XVIII Междунар. конф. «Современ. проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 2016. С. 6-10.

5. *Абделхафиз М. А.* Численный анализ конвективных движений в пористой анизотропной среде / М.А. Абделхафиз, В.Г. Цибулин // Тез. докл. XXI Всерос. конф. "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики". Новороссийск, Абрау-Дюрсо, 2016. С. 123-124.

6. *Абделхафиз М.А.* Моделирование конвективных движений наножидкости в пористой среде: эффекты анизотропии и косимметрии / М.А. Абделхафиз, В.Г. Цибулин // Тр. XVIII Крымской осенней математ. школы-симпозиума по спектральным и эволюционным задачам. Симферополь, 2017. С. 64-66.

7. *Абделхафиз М.А.* Косимметрия и моделирование анизотропной конвекции наножидкости в пористой среде / М.А. Абделхафиз, В.Г. Цибулин // Book of abstracts. "Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis VIII". Rostov-on-Don, 2018. Р. 136.

8. *Абделхафиз М.А.* Анализ возникновения конвекции наножидкости в анизотропном пористом прямоугольнике / М.А. Абделхафиз // Тез. докл. XII Всерос. школа-семинар "Математическое моделирование и биомеханика в современном университете." Дивноморское, 2018. С. 4.

9. *Абделхафиз М. А.* Численная схема, сохраняющая косимметрию задачи анизотропной фильтрационной конвекции жидкости с наночастицами / М.А. Абделхафиз, В.Г. Цибулин // Тез. докл. XXII Всерос. конф. "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики". Новороссийск, Абрау-Дюрсо, 2018. С.92.

10. *Абделхафиз М.А.* Мультистабильность стационарных движений в анизотропной задаче конвекции Дарси для прямоугольника / М.А. Абделхафиз // Тр. XIX Междунар. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 2018. С.6–10.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ:

11. Свидетельство о регистрации программ для ЭВМ «Aniso2d» для исследования плоской анизотропной конвекции в пористой среде / В.Г. Цибулин, М.А. Абделхафиз // Реестр программ для ЭВМ. № 2018618614, 16/7/2018.