ПОВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ

На правах рукописи

Герасимова Юлия Андреевна

МЕТОДЫ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА КОРРЕЛИРОВАННЫХ ДАННЫХ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Специальность 05.13.18 —
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Блатов Игорь Анатольевич

Самара — 2018

Оглавление

Стр.

Стр.

Введение

Прогресс современных методов построения и анализа коммуникационных сетей требует развития целого ряда разделов вычислительной математики и математического программирования, аппаратов математического моделирования и реализации более эффективных, в том числе с точки зрения быстродействия и использования вычислительных ресурсов, алгоритмов. С течением времени изменяется подход к решению некоторых классов задач, находятся новые способы их решения, разрабатываются новые методики, позволяющие преодолеть множество препятствий. Однако при решении некоторых задач возникают новые, оригинальные проблемы.

В настоящее время есть необходимость проведения анализа математической модели трафика коммуникационной сети с учетом его корреляционных свойств. Классические методы теории массового обслуживания применимы для анализа систем, обрабатывающих только некоррелированный трафик. Но трафик, как случайный процесс, обладает самоподобными свойствами, одним из признаков которых является сильная коррелированность последовательностей данных. Это требует разработки новых высокоэффективных численных методов, позволяющих учитывать корреляционные свойства трафика.

Общий метод решения таких проблем заключается в предварительном выполнении над исходыми данными некоторого обратимого декоррелирующего преобразования, целью которого является снижение коррелированности.

Таким образом, в настоящее время существует **актуальная научно-техническая проблема** развития и обоснования эффективных методик и алгоритмов, решения задач ослабления коррелированности последовательностей сильнокоррелированных случайных величин. Настоящая диссертационная работа направлена на решение этой проблемы путем применения вейвлет-преобразования на базе сплайнов к исходной последовательности данных, характеризующих трафик.

Состояние вопроса характеризуется следующими ключевыми моментами.

Один из наиболее часто используемых методов анализа систем массового обслуживания общего вида основывается на использовании интегрального уравнения Линдли [1; 2]. Однако, это уравнение было выведено в предположе-

нии, что интервалы времени между поступающими пакетами образуют последовательность независимых, т.е. некоррелированных, данных, т.к. до 1990-х годов считалось, что математическая модель трафика описывается классическим Пуассоновским распределением.

Работы отечественных и зарубежных авторов [3—7] показывают, что одним из определяющих свойств современного трафика является его самоподобие. Т.е. медленно затухающая корреляционная функция последовательности интервалов времени между пакетами с «тяжелыми хвостами» для случайных значений этих интервалов.

Вследствии этого, методы классической теории массового обслуживания не применимы к анализу систем, обслуживающих современный, т.е. коррелированный, трафик.

Общий метод решения таких проблем заключается в предварительном выполнении над исходыми данными некоторого обратимого декоррелирующего преобразования, целью которого является снижение коррелированности (Умняшкин С.В., Ахмед Н., Рао К.Р.).

Лучшие результаты можно ожидать от использования преобразования Карунена-Лоэва [8]. В этом случае можно получить полную декорреляцию исходных данных. Однако отсутствие экономичных быстрых алгоритмов и высокая вычислительная сложность отыскания базиса ограничивают практические возможности его применения и вынуждают использовать другие преобразования.

Декоррелирующие преобразования широко исследованы и применены к таким прикладным задачам, как сжатие цифровых изображений и обработка цифровых сигналов [9; 10]. Эффективность применения ортогональных преобразований исследуется в работах С.В. Умняшкина [11].

В качестве примеров таких преобразований можно привести преобразование Фурье, преобразование на базе функции Кронекера, преобразование Габора и другие. В этих примерах базисные функции имеют один серьезный и принципиальный недостаток - они не способны адаптироваться к локальным изменениям сигналов.

Обычное преобразование Фурье

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int f(t) e^{-i\omega t} dt$$

дает представление о частотной характеристике сигнала f, но информация, касающаяся временной локализации, не может быть легко извлечена из $\widehat{f}$. Это

связано с тем, что базисная функция рядов Фурье – синусоида – определена в пространстве от $-\infty$ до ∞ и по своей природе является гладкой и строго периодической функцией. Также бесконечное число членов в ряде Фурье недопустимо и нереально на практике, а их ограничение приводит к возникновению больших погрешностей. Появление временных рядов с явно выраженными локальными особенностями, например, цифровых сигналов, изображения и т.д., все чаще домонстрирует невысокую эффективность и принципиальные недостатки Фурье-разложения.

В этих условиях назрела острая необходимость создания нового математического аппарата, свободного от указаных недостатков. Им стали вейвлет-преобразования.

Очень многие процессы в природе являются нестационарными, т.е. демонстрируют изменения во времени своих статистических свойств. Классические методы обработки экспериментальных данных (спектрально-корреляционный анализ, вычисление моментных функций и т.д.) представляют собой инструменты исследования стационарных случайных процессов, их применение для анализа нестационарных данных зачастую приводит к различным проблемам в интерпретации полученных результатов. Поэтому целесообразно проводить анализ на основе более универсальных методов, которые могут применяться независимо от свойств стационарности случайных процессов. Таких универсальных инструментов существует немного, и наиболее известным среди них является вейвлет-анализ [12].

Большой скачок в развитии теории вейвлет-функций произошел в 80-х годах XX века благодаря ряду таких ученых, как И. Добеши (*I. Daubechies*), Й. Майер (*Y. Meyer*), К. Чуи (*C.K. Chui*), С. Малла (*S.G. Mallat*) и других [13—17]. Термин *вейвлет* (wavelet) на протяжении многих десятилетий использовался в процессе обработки цифровых сигналов и геофизических исследованиях. Эквивалентное французское слово *ondolette*, означающее «маленькая волна» впервые использовали в своих статьях Гроссман (*A. Grossmann*) и Морле (*J. Morlet*) в начале 1980-х годов. В России первые работы были опубликованы в начале 1990-х годов, и с каждым годом интерес к этой теме продолжает расти.

Одними из основных методик, разработанных на базе функций такого рода, стали вейвлет-преобразования, широко применяемые для обработки нестационарных сигналов, изображений и временных рядов.

Вейвлет-преобразования широко распространены в системах компьютерной математики, такаих как MATLAB, Mathcad, Mathematica. Графические программные средства Coral DRAW широко используют вейвлеты для обработки изображений. Все эти факторы подтверждают значимость вейвлет-преобразований.

Вейвлет-преобразования имеют ряд модификаций. В основном они различаются базисами, от свойств которых зависят их характеристики. При обработке разных видов сигналов значимыми являются свойства преобразования, благодаря которым можно получить быстрый алгоритм, сжатие информации, полное восстановление сигнала и т.д. Целесообразным является выбор базиса вейвлет-преобрзаования, адекватного задаче исследования.

Существуют некоторые основные характеристики: ортогональность, гладкость, компактность и симметрия, которые необходимы в рамках решаемой прикладной задачи. Некоторые сочетания свойств не могут быть у вейвлет-преобразований одновременно. Например, ортогональность, симметрия и компактность реализуются только в базисе Хаара, но он непригоден из-за отсутствия гладкости. При этом доказано, что для других базисов эти свойства несовместимы [18]. Поэтому особенности и структура анализируемого сигнала требуют компромисса мужду набором хороших свойств базиса и адекватностью выбора базиса для решаемой задачи.

Наиболее часто используемыми являются следующие виды базисов: базис Мейера, базис Морлета, Мексиканская шляпа, базис Добеши, сплайновые вейвлеты, Хаара, койфлеты, симлеты и т.д. Подробную классификацию вейвлет базисов можно найти в работе А.В. Меркушевой [19]. Как видно из таблицы 1, оптимальным набором свойств, необходимых для решения поставленной задачи, обладают B-сплайны. Данный подход освещался в работах Б.М. Шумилова, И.Я. Новикова, И.А. Блатова, Ю.К. Демьяновича, Е.Е. Тыртышникова, В.А. Желудева, М. Фахмай (*M.F. Fahmy*) и других российских и зарубежных ученых [20—25].

Сплайновые вейвлеты применимы для решения многих прикладных задач, таких как обработка экспериментальных данных, обработка изображений, сжатие данных, цифровая обработка сигналов и др. В настоящее время вейвлеты начинают применять и для прямого численного моделирования как базис, хорошо приспособленный для описания динамики сложных нелинейных процессов.

Таблица 1 — Классификация вейвлет базисов по их основным свойствам

Тип	Явное выражение	Ортогональность	Компактность	Симметричность	Гладкость
Мейера	-	+	-	+	+
Морлета	+	-	-	+	+
Мексаканская шляпа	+	-	+	+	-
Добеши	-	+	+	-	+
Хаара	+	+	+	+	-
B-сплайны	+	-	+	+	+
Баттла-Ламарье	-	+	-	+	+

Довольно долго считалось, что математическая модель трафика описывается классическим Пуассоновским распределением. Но в 1993-1994 гг. стало известно, что в реальных сетях передачи данных трафик является самоподобным (*self-similar*) процессом [3; 26; 27]. Одним из признаков самоподобия является сильная коррелированность последовательностей данных, характеризующих трафик. Поэтому актуальной является задача разработки методов учета самоподобных свойств трафика, оказывающих существенное влияние на характеристики узла обработки пакетов, через декорреляцию данных с использованием дискретного вейвлет-преобразования в пространстве B-сплайновых вейвлетов.

Целью данной работы является разработка и развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования и численных алгоритмов для ослабления коррелированности последовательностей сильнокоррелирован-

ных случайных величин при анализе трафика в рамках решения задач теории массового обслуживания..

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработка и обоснование вычислительных алгоритмов быстрого прямого и обратного вейвлет-пребразований на базе сплайн-функций произвольной степени.
2. Анализ математической модели трафика коммуникативной сети. Исследование возможности и эффективности применения алгоритмов прямого и обратного преобразований на базе сплайновых вейвлетов для декорреляции данных при анализе трафика в рамках задач теории массового обслуживания.
3. Получение оценки коэффициентов корреляции при применении вейвлет-преобразований на базе сплайн-функций для общего случая.
4. Разработка комплекса программ для ЭВМ и проведение численных экспериментов для оценки декорреляционных свойств прямого и обратного вейвлет-преобразований на базе сплайнов в рамках задачи анализа математической модели трафика из теории массового обслуживания.

Объект исследования - трафик коммуникативных сетей, являющийся самоподобным процессом в реальных сетях передачи данных и его корреляционные свойства.

Предмет исследования - математические модели систем коммуникативных сетей, алгоритмы, программные меотды декорреляции данных, численные и аналитические методы построения оценок декоррелирующих свойств преобразований.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:

1. Выполнено оригинальное исследование эффективности применения сплайновых вейвлет-преобразований для декорреляции последовательностей сильнокоррелированных случайных величин.
2. Впервые доказана эффективность применения сплайновых вейвлет-преобразований при анализе математической модели трафика комуникативной сети.
3. Впервые получены оценки корреляционных матриц вейвлет-преобразований на базе сплайн-функций для общего случая.

4. Впервые полуортогональные сплайновые вейвлет-функции были применены к математической модели «тяжелых хвостов» в рамках задачи их ослабления из теории массового обслуживания.
5. Разработаны оригинальные алгоритмы и комплексы программ для выполнения декорреляции трафика при решении задач теории массового обслуживания.

Перейдем к изложению основных результатов диссертации.

В **главе 1** ставится задача декорреляции данных при анализе модели самоподобного трафика, проводится обзор существующих методов декорреляции временных рядов, анализ их недостатков и формулируются требования к разрабатываемому методу.

Рассматривается математическая модель трафика коммуникационной сети, обладающего самоподобными свойствами, т.е. имеется медленно убывающая зависимость между величинами трафика в разные моменты времени, а также трафик сбивается в пачки данных и эти пачки выглядят статистически подобными.

Ставится задача об отыскании метода, позволяющего устранить или ослабить коррелированность входного потока данных, чтобы стал возможным дальнейший ее анализ.

$X = (x_1,x_2,...)$ - стационарный случайный процесс;

$r(k)$ - коэффициент корреляции, который не зависит от времени $t \in N$;

$r(k) = r(-k)$, $k \in Z_+$;

$\mu = M(X)$ - математическое ожидание;

$D = \sigma^2 = D(X)$ - дисперсия процесса X.

Известно [28], что процесс X называется строго самоподобным процессом в широком смысле с параметром H, если его корреляционная функция гиперболически затухает:

$$R(k) = \frac{\sigma^2}{2}\left[(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H}\right], k \neq 0 \tag{0.1}$$

Также известно, что коэффициенты корреляции определяются соотношением

$$r(k) = \frac{R(k)}{R(0)} = \frac{R(k)}{\sigma^2},$$

тогда коэффициент корреляции самоподобного процесса имеет вид:

$$r(k) = \frac{1}{2}\left[(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H}\right] \tag{0.2}$$

Многочисленные измерения сетевого трафика показали, что он лучше всего описывается так называемыми распределениями с «тяжелыми хвостами» (РТХ). Будем говорить, что случайная величина X имеет распределение с «тяжелым хвостом», если

$$P\left(X \geqslant x\right) = 1 - F(x) = x^{-\alpha} L(x),$$

где $L(x)$ – медленно затухающая функция на бесконечности, параметр $0 < \alpha < 2$ называется индексом «хвоста».

Для декорреляции временных рядов принимается решение использовать некоторое ортогональное преобразование, применяемое к исходной последовательности данных, с целью проведения последующего анализа уже над обработанным (декоррелированным) рядом. В параграфе 1.2 рассматриваются и анализируются известные преобразования – Карунена Лоэва, Хаара, Хартли, дискретное косинусное-преобразование и другие.

После формулирования главных требований к разрабатываемому методу в параграфе 1.3, для решения поставленной задачи предлагается алгоритм, суть которого состоит в применении дискретного вейвлет-преобразования (ДВП) на базе сплайновых вейвлетов степени $m-1$ дефекта $k(1 \leqslant k \leqslant m)$. Подробнее этот метод рассмотрен в главе 2.

Таким орбазом, поставлена задача декорреляции данных при анализе модели самоподобного трафика и выдвинуты требования к разрабатываемому методу: выполнение большинства общих требований, предъявляемых к декоррелирующим преобразованиям (ортогональность, гладкость, симметричность и другие); высокая эффективность декорреляционных свойств преобразования (близкая к эффективности преобразования Карунена-Лоэва); наличие быстрых алгоритмов реализации.

В **главе 2** представляется концепция решения проблемы, теоретические и методические обоснования выбранного направления исследования и разрабатывается общая методика решения поставленных задач. Она посвящена сплайновым вейвлет-базисам.

В параграфе 2.1 дается классификация сплайновых вейвлетов по их основным свойствам. Обосновывается выбор полуортогональных B-сплайновых вейвлетов для решения поставленных в настоящей работе задач.

В параграфах 2.2 и 2.3 излагаются некоторые необходимые для дальнейшего факты из теории сплайнов и строятся полуортогональные сплайновые вейвлеты на конечном отрезке.

Пусть $[a,b]$ – произвольный отрезок, m - некоторое натуральное число, n_0 - такое целое, что $2^{n_0} < 2m-1 < 2^{n_0+1}$. Рассмотрим семейство $\Delta = \{\Delta_n, n = n_0,n_0+1,...\}$ разбиений отрезка $[a,b]$ Δ_n: $a = x_0^n < x_1^n < x_{2^n}^n = b$ с постоянным шагом $h = h_n = \frac{b-a}{2^n}$. Пусть $N_{m,k}(x)$ – B-сплайн степени m с носителем $(x_k,...,x_{k+m},t)$.

На каждом разбиении Δ_n рассмотрим пространство сплайнов $L_n = S(\Delta_n,m-1,1)$. Тогда для каждого $k \geqslant n_0$ пространство $S(\Delta_n,m-1,1)$ можно представить в виде прямой суммы $L_k = L_{n_0} \oplus W_{n_0+1} \oplus W_{n_0+2} \oplus ... \oplus W_k$, где через W_k обозначено ортогональное дополнение пространства L_{k-1} до пространства L_k. Искомый вейвлет-базис строится как объединение базиса в L_{n_0} и всех базисов в пространствах $W_n, n_0 \leqslant n \leqslant k$.

Для того, чтобы построить базис в ортогональном дополнении W_n пространства L_{n-1} до L_n, зафиксируем $n \geqslant n_0+1$. Будем считать, что Δ_n продолжено на всю числовую ось с тем же шагом h_n. Обозначим N_m-1,j,n - B-сплайн на разбиении Δ_n.

Зафиксируем некоторое целое $i \geqslant 0$, такое, что открезок $\left[x_i^{n-1},x_{i+2m-1}^{n-1}\right]$ целиком содержится в $[a,b]$. Будем искать функцию $\psi_{i,n}(x) \in W_n$ в виде

$$\psi_{i,n}(x) = \sum_{j=2i}^{2i+3m-2} \alpha_j N_{m-1,j,n} \tag{0.3}$$

Для того, чтобы $\psi_{i,n}(x) \in W_n$ достаточно потребовать выполнения условий

$$(\psi_{i,n},N_{m-1,j,n-1}) = 0, k = i-m+1,i-m+2,...,i+2m-2 \tag{0.4}$$

поскольку остальные условия ортогональности выполняются автоматически в силу дизъюнкции носителей.

Искомый набор масштабирующих коэффициентов α получается из следующего уравнения

$$\sum_{j=2i}^{2i+3m-2} \alpha_j \left(N_{m-1,j,n},N_{m-1,k,n-1}\right) = 0, k = i-m+1,i-m+2,...,i+2m-2 \tag{0.5}$$

Здесь мы подставили (0.3) в (0.4) и получили однородную систему из $3m-2$ уравнений с $3m-1$ неизвестными, которая всегда имеет нетривиальное решение.

Из (0.3) и из свойств B-сплайнов видно, что $supp(\psi_{i,n}) \subset \left[x^n_{2i}, 2^n_{2i+4m-2}\right]$, т.е. содержит $4m-2$ смежных частичных отрезка. Доказано [23], что нельзя построить вейвлет с меньшей длиной носителя.

Справедлива формула

$$\psi_{i,n}(x) = \psi_{0,n}\left(2^{n-n_0}x - i\frac{b-a}{2^{n_0-1}}\right), \tag{0.6}$$

т.е. совокупность вейвлет-функций получается путем сдвига одной единственной функции $\psi_{0,n}(x)$.

Таким образом были построены совокупность центральных полуортогональных линейно независимых вейвлетов $\{\psi_{i,n}\}, i = 0,1,...,2^{n-1} - 2m + 1$. Но размерность ортогонального дополнения W_n равна 2^{n-1}, т.е. до базиса в W_n не хватает ровно $2(m-1)$ функций.

Построим недостающие граничные вейвлет-функции. Для этого рассмотрим $\psi_{i,n}(x)$ при $-2m+2 \leqslant i \leqslant 2^{n-1}-1$ на расширенном разбиении Δ_n. Первую (левостороннюю) группу из $m-1$ недостающих вейвлетов можно найти по формуле

$$\tilde{\psi}_{i,n}(x) = \psi_{i,n}(x) - \sum_{j=-2m+2}^{-m} \alpha_j \psi_{j,n}(x), -m+1 \leqslant i \leqslant -1 \tag{0.7}$$

из условий

$$\left(\tilde{\psi}_{i,n}, N_{m-1,k,n-1}\right) = 0, k = -m+1, -m+2, ..., -1 \tag{0.8}$$

Для того, чтобы определить коэффициенты α, подставляем (0.7) в (0.8) и получаем систему линейных алгебраических уравнений.

Вторую (правостороннюю) группу из $m-1$ недостающих вейвлетов будем искать в виде

$$\tilde{\psi}_{i,n}(x) = \psi_{i,n}(x) - \sum_{j=2^{n-1}-m+1}^{2^{n-1}-1} \alpha_j \psi_{j,n}(x), 2^{n-1} - 2m + 2 \leqslant i \leqslant 2^{n-1} - m \tag{0.9}$$

из условий

$$\left(\tilde{\psi}_{i,n}, N_{m-1,k,n-1}\right) = 0, k = 2^{n-1} - 2m + 1, 2^{n-1} - 2m + 2, ..., 2^{n-1} - 1 \tag{0.10}$$

Для того, чтобы определить коэффициенты α подставляем (0.9) в (0.10).

Итак, совокупность (0.3), (0.7), (0.9) при $n_0 + 1 \leqslant n \leqslant k$ образует вейвлет-базис в пространстве L_k.

Также в этой главе представлены алгоритмы быстрого вейвлет-преобразования для построенной системы вейвлет-функций и его модификацию для испльзования в системах с многопроцессорной (многоядерной) архитектурой.

В параграфе 2.5 описаны алгоритмы прямого и обратного быстрого дискретного вейвлет-преобразования и его модификация для быстрого вычисления элементов матриц СЛАУ. А также представлен вариант распараллеливания этих алгоритмов для возможности их оптимального использоваиня в многопроцессорных системах.

В приложении Б представлены листинги программного кода для реализации описанных выше алгоритмов.

Таким образом, в главе 2 представлен метод и даны алгоритмы решения поставленной задачи. Обоснован выбор базиса вейвлет-функций. Представлены некоторые рассчётные параметры и графики базисных и вейвлет-функций.

Глава 3 посвящена декоррелирующим свойствам B-сплайновых вейвлетов. Здесь приводятся оценки корреляционных матриц сплайновых вейвлет-преобразований.

Определим преобразование случайной последовательности X формулой

$$Y_i = (TPX)_i,\ 0 \leqslant i \leqslant n, \tag{0.11}$$

где T - дискретное вейвлет-преобразование (ДВП) в пространстве $S(\Delta,m-1,1)$.

Поставим задачу оценки элементов ковариационной матрицы $\tilde{K} = \{\tilde{k}_{ij}\}, \tilde{k}_{ij} = cov(Y_i,Y_j), 0 \leqslant i,j \leqslant n$ по заданной ковариационной матрице $K = \{k_{ij}\}$, $k_{ij} = cov(X_i,X_j)$.

Рассматрим матрицу

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} & \cdots & \hat{K}_{1k-n_0+1} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} & \cdots & \hat{K}_{2k-n_0+1} \\ & & \cdots & \\ \hat{K}_{k-n_0+11} & \hat{K}_{k-n_0+12} & \cdots & \hat{K}_{k-n_0+1k-n_0+1} \end{pmatrix}, \quad \hat{K}_{p\nu} = \{\hat{k}_{ij}^{p\nu}\}. \tag{0.12}$$

, где

$$\hat{k}_{ij}^{p\nu} = \int_0^n \int_0^n K(t,\tau)\psi_{i,p}(t)\psi_{j,\nu}(\tau)dtd\tau,\ \ (p \geqslant 2, \nu \geqslant 2), \tag{0.13}$$

$$\hat{k}_{ij}^{1\nu} = \int_0^n \int_0^n K(t,\tau)\varphi_{i,n_0}(t)\psi_{j,\nu}(\tau)dtd\tau, \tag{0.14}$$

$$\hat{k}_{ij}^{p1} = \int_0^n \int_0^n K(t,\tau)\psi_{i,p}(t)\varphi_{j,n_0}(\tau)dtd\tau, \tag{0.15}$$

$$\hat{k}_{ij}^{11} = \int_0^n \int_0^n K(t,\tau)\varphi_{i,n_0}(t)\varphi_{j,n_0}(\tau)dtd\tau. \tag{0.16}$$

Теорема 1. *Для элементов* $\hat{k}_{ij}^{pp+s}$,$\hat{k}_{ij}^{p+sp}$ *матрицы* $\hat{K}_{pp+s}, \hat{K}_{p+sp}$ *справедливы оценки* ($p \geqslant 2$)

$$|\hat{k}_{ij}^{pp+s}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s}.$$

$$\cdot \begin{cases} 1, -4m+2 \leqslant j - i \cdot 2^s \leqslant (4m-2) \cdot 2^s, \\ \frac{1}{(1+2^{-\frac{s}{m+\alpha}}(|j-i\cdot 2^s|-(4m-2)\cdot 2^s))^{m+\alpha}}, j - i \cdot 2^s > (4m-2) \cdot 2^s, \\ \frac{1}{(1+2^{-\frac{s}{m+\alpha}}(|j-i\cdot 2^s|-4m+2))^{m+\alpha}}, j - i \cdot 2^s < -4m+2, \end{cases} \tag{0.17}$$

$$|\hat{k}_{ij}^{p+sp}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s}.$$

$$\cdot \begin{cases} 1, -4n+2 \leqslant i - j \cdot 2^s \leqslant (4m-2) \cdot 2^s, \\ \frac{1}{(1+2^{-\frac{s}{m+\alpha}}(|i-j\cdot 2^s|-(4m-2)\cdot 2^s))^{m+\alpha}}, i - j \cdot 2^s > (4m-2) \cdot 2^s, \\ \frac{1}{(1+2^{-\frac{s}{m+\alpha}}(|i-j\cdot 2^s|-4m+2))^{m+\alpha}}, i - j \cdot 2^s < -4m+2, \end{cases} \tag{0.18}$$

При $p = 1$ *справедливы оценки*

$$|\hat{k}_{ij}^{11+s}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-1)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s}, \tag{0.19}$$

$$|\hat{k}_{ij}^{1+s1}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-1)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s}. \tag{0.20}$$

Из доказанной теоремы вытекает

Теорема 2. *Для элементов матрицы* $\hat{K}$ *справедливы оценки* ($p \geqslant 2$)

$$|\hat{k}_{ij}^{pp+s}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{(1+|i-\frac{j}{2^s}|)^{m+\alpha}}, \tag{0.21}$$

$$|\hat{k}_{ij}^{p+sp}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{(1+|j-\frac{i}{2^s}|)^{m+\alpha}}, \tag{0.22}$$

При $p = 1$ *справедливы оценки аналогичные (0.19), (0.20).*

Следствие 1. *Для элементов диагональных блоков* ($s = 0$,$p \geqslant 2$) *справедливы оценки*

$$|\hat{k}_{ij}^{pp}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot \frac{1}{(1+|i-j|)^{m+\alpha}}, \tag{0.23}$$

Заметим, что в силу финитности и полуортогональности матрица Грама Г будет блочно-диагональной матрицей, причем диагональные блоки - трехдиагональные матрицы, для обратных к которым в силу теоремы Демко [29] справедливы оценки

$$\left|\gamma_{ij,-1}^{pp}\right| \leqslant Cq^{|i-j|}, 0 < q < 1 \tag{0.24}$$

Поэтому из формулы (0.24), теоремы 2 и следствия 1 вытекает

Теорема 3. *Для элементов матрицы $\tilde{K}$ справедливы оценки, аналогичные (0.21)-(0.23).*

Также в параграфах третьей главы сформулированы и выведены соответствующие теоремы для линейного случая и для случая вейвлета Хаара.

Теорема 4. *Для элементов матрицы $\hat{K}$ справедливы оценки ($p \geqslant 2$) для линейного случая*

$$|\hat{k}_{ij}^{pp+s}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{(1+|j-\frac{i}{2^s}|)^{2+\alpha}}, \tag{0.25}$$

$$|\hat{k}_{ij}^{p+sp}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{(1+|i-\frac{j}{2^s}|)^{2+\alpha}}, \tag{0.26}$$

При $p = 1$ справедливы оценки аналогичные (0.19), (0.20).

Теорема 5. *Для элементов матрицы $\hat{K}$ справедливы оценки ($p \geqslant 2$) для случая вейвлетов Хаара*

$$|\hat{k}_{ij}^{pp+s}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{(1+|j-\frac{i}{2^s}|)^{1+\alpha}}, \tag{0.27}$$

$$|\hat{k}_{ij}^{p+sp}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{(1+|i-\frac{j}{2^s}|)^{1+\alpha}}, \tag{0.28}$$

При $p = 1$ справедливы оценки аналогичные (0.19), (0.20).

Таким образом, в третьей главе дано теоретическое обоснование эффективности ослабления коррелированности данных с помощью вейвлет-преобразвоания на базе сплайновых вейвлетов. Оно представлено в виде теорем и следствий.

В **главе 4** представлены выполненные научные исследования и численные эксперименты, проанализированы полученные результаты, а также рассмотрена возможность использования результатов исследований в исследуемой области знаний.

Для проведения численного эксперимента был развернут виртуальный кластер на платформе для организации управления облачной инфраструктурой и виртуальными окружениями. Виртуальный кластер включает в себя также контроллер с сетевой операционной системой и клиентов, генерирующих

трафик. В результате трафик был зафиксирован в виде последовательностей, характеризующих время между соседними полученными пакетами на каждом узле, а также время задержки при передаче пакета между узлами.

Процедура вычисления коэффициентов корреляции (рис. 4.3) интервалов времени между соседними пакетами состоит из следующих этапов:

1. Регистрируется трафик в виде целочисленного случайного процесса на некотором интервале T;
2. Интервал T разбивается на K непересекающихся интервалов таким образом, чтобы на каждом интервале была возможность надежной идентификации распределений $F_k(i)$,$k = 1,2,...,K$;
3. Вычисляются интегралы $\int_0^T p(i,t)dt$,$i = 1,2,3$;
4. Решается система уравнений специального вида, из которой находятся коэффициенты корреляции.

Для сравнения полученных результатов были вычислены суммы модулей коэффициентов корреляции $\sum_{i=0}^{N-1} |r_i|$.

В рамках численного эксперимента получены следующие научно-прикладные результаты:

1. Подтверждно предположение, что преобразования, основанные на линейных и квадратичных сплайновых вейвлетах, позволяют ослабить коррелированность последовательностей сильнокоррелированных случайных величин, характеризующих трафик;
2. При увеличении степени сплайна декоррелирующие свойства преобразования усиливаются;
3. В некоторых случаях использование сплайнового ДВП позволяет получить наилучший результат среди рассматриваемых типов преобразований.

Приложение Б содержит листинги программного кода, который ориентирован на следующую инфраструктуру: язык разработки – C++, среда разработки - Microsoft Visual Studio 15.2, компилятор - Microsoft C/C++ Compiler Version 19.10.25019, процессор – четырехъядерный процессор Intel Core i5-3470 CPU 3.20 GHz. Для расспараллеливания алгоритмов использована библиотека Open Multi-Processing API.

Программа работает по следующему алгоритму. Входными данными служит последовательность чисел, характеризующих трафик. Далее следует определение параметров декорреляции, таких как степень сплайна m, величины

k, n_0 и другие. Перед тем, как применить прямое быстрое ДВП, алгоритм программы отыскивает коэффициенты α и β, а также разбивает входную последователньость на группы по 2^k-элементов в каждой. Далее к каждой группе применяется прямое быстрое ДВП. Результат работы программы выводится в виде новой последовательности, объединяющей все отработанные группы.

Практическая значимость. Разработана методика ослабления коррелированности последовательностей сильнокоррелированных случайных величин при анализе трафика в рамках задач теории массового обслуживания с применением сплайнового вейвлет-преобразования. Представленная программа позволяет получить декоррелированную последовательность данных для её дальнейшего анализа классическими методами теории массового обслуживания. Это может найти применение как для проектирования систем коммуникационных сетей, так и для промышленных систем анализа характеристик трафика.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе используются фундаментальные положения математического моделирования, аппарат целочисленного программирования, в частности, численные методы, методы аппроксимации и интерполяции, теория случайных процессов, теория параллельного программирования и теория разработки программного обеспечения.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Методика декорреляции последовательностей сильнокоррелированных случайных величин при анализе математической модели трафика в рамках решения задач теории массового обслуживания.
2. Оценка корреляционных матриц вейвлет-преобразований на базе сплайн-функций для общего случая.
3. Результаты численного моделирования процесса ослабления коррелированности при анализе математической модели трафика в рамках решения задач теории массового обслуживания.
4. Комплекс пргограммдля ЭВМ для вейвлет-анализа сильнокоррелированных случайных величин и результаты его апробации.

Достоверность полученных результатов основывается на строгих формулировках и доказательствах и подтверждается проведенными вычислительными экспериментами. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами [9; 25; 30].

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях: «Информационные технологии и нанотехнологии» в г. Самара в 2015, 2016, 2017 и 2018 гг. [31—34], «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий» в г. Воронеж в 2016 и 2017 гг. [35; 36], XXII и XXIV Российских НТК профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов в г. Самара [37; 38], РосИнфоКом-2017 «Актуальные вопросы телекоммуникаций» в г. Самара [39] и «Понтрягинские чтения XXVI» г. Воронеж [40].

Личный вклад. Автор принимал активное участие в выполнении основного объема теоретических и экспериментальных исследований, изложенных в диссертационной работе, включая разработку теоретических моделей, алгоритмов и комплексов программ, проведение численных экспериментов, анализ и оформление результатов в виде публикаций и научных докладов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 16 печатных изданиях, 3 из которыз изданы в журналах, рекомендованных ВАК РФ, 3 в рецензируемых изданиях, входящих в систему цитирования Scopus, 10 - в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 115 страниц, включая 29 рисунков и 4 таблицы. Список литературы содержит 88 наименований.

Глава 1. Анализ коррелированного трафика при решении задач теории массового обслуживания

1.1 Постановка задачи

Продолжительное время считалось, что трафик описывается классическим Пуассоновским распределением. Но в 1993-1994 гг. стало известно, что трафик в реальных сетях передачи данных является самоподобным (*self-similar*) процессом [3; 26; 27]. Это проявляется в том, что имеется медленно убывающая зависимость между величинами трафика в разные моменты времени, а также в том, что трафик сбивается в пачки данных и эти пачки выглядят статистически подобными. Концепция самоподобия тесно связана с получившим большую известность понятием фракталов. Определение фрактала, данное французским и американским математиком Б. Мандельбротом, звучит так: «Фракталом называется структура, состоящая из частей, которые в каком-то смысле подобны целому» [41]. Самоподобие сетевого трафика исследовано в работах О.И. Шелухина [3; 42] и других современных ученых [6; 7; 28; 43].

Пусть дан стационарный случайный процесс $X = (x_1,x_2,...)$, $r(k)$ – коэффициент корреляции, который не зависит от времени $t \in N$ и $r(k) = r(-k)$, $k \in Z_+$. Пусть $\mu = M(X)$ – математическое ожидание, $D = \sigma^2 = D(X)$ – дисперсия процесса X. Отметим, что все разработанные модели функционирования сетевых устройств в теории массового обслуживания базируется на представлении трафика как последовательности случайных интервалов времени между событиями. На практике случйные процессы сохраняют свойство самоподобия только до определенного предела. Этот предел определяется параметром Херста H (параметр самоподобия). Значение коэффициента $H = 0{,}5$ указывает на отсутствие корреляции, т.е. в этом случае временной ряд является случайным. Чем ближе значение H к 1, тем выше степень зависимости.

Известно [28], что процесс X называется строго самоподобным процессом в широком смысле с параметром H, если его корреляционная функция гиперболически затухает:

$$R(k) = \frac{\sigma^2}{2}\left[(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H}\right], k \neq 0 \tag{1.1}$$

Также известно, что коэффициенты корреляции определяются соотношением

$$r(k) = \frac{R(k)}{R(0)} = \frac{R(k)}{\sigma^2},$$

тогда коэффициент корреляции самоподобного процесса имеет вид:

$$r(k) = \frac{1}{2}\left[(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H}\right]. \tag{1.2}$$

Определим агрегированный процесс с коэффициентом сегментации $m \in N$ следующим образом (см. рис. 1.1):

$$\forall m \left(X^{(m)} = \left\{X_k^{(m)} : k \geqslant 1\right\}\right),$$

где

$$X_k^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{i=(k-1)m+1}^{km} x_i.$$

В полученной агрегированной последовательности $X^{(m)}$ корреляционную функцию обозначим как $R^{(m)}(k)$.

Случайный процесс X является ассимптотически самоподобым процессом в широком смысле, с показателем Херста H, если

$$\lim_{m\to\infty} R^m(k) = \frac{\sigma^2}{2}\left[(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H}\right] \tag{1.3}$$

Выражение (1.3) предполагает, что $R(k) = R^{(m)}(k), \forall m > 1$, т.е. самоподобие сохраняется и при агрегировании исходной временной последовательности.

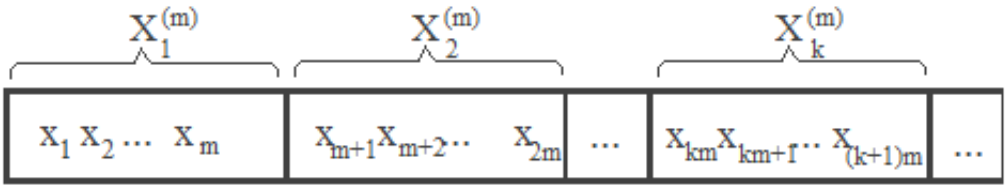


Рисунок 1.1 — Агрегативный процесс с коэффициентом сегментации m

Основными признаками самоподобия являются:

1. Гиперболически затухающая несуммируемая корреляционная функция

$$r(k) = k^{(2H-1)}L(t), k \to \infty$$

$$\sum_k r(k) \to \infty,$$

где 0,5 $\leqslant H < 1$. $L(t)$ – функция, медленно меняющаяся на бесконечности [44], такая что $\forall x > 0$, $\forall \lambda > 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{L(\lambda x)}{L(x)} = 1$

2. Дисперсия выборочного среднего затухает медленнее, чем величина, обратная размеру выборки:

$$\sigma^2\left(X^{(m)}\right) \approx m^{2H-2}, m \to \infty$$

3. В частотной области для спектральной плотности справедливо соотношение

$$S(\omega) = c_f\,|\omega|^{1-2H} + O\left[|\omega|^{min(3-2H,2)}\right], \tag{1.4}$$

где $S(\omega)$ – спектральная плотность процесса, $c_f > 0$ – некоторая постоянная. Тогда существует действительное число $\beta \in (0;1)$, такое что $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \frac{S(\omega)}{c_f|\omega|^{-\beta}} = 1$

Выражение (1.4) используется при оценке параметра Херста в частотной области.

Многочисленные измерения сетевого трафика показали, что он лучше всего описывается так называемыми распределениями с тяжелыми «хвостами» (РТХ). Будем говорить, что случайная величина X имеет распределение с тяжелым «хвостом», если

$$P\left(X \geqslant x\right) = 1 - F(x) = x^{-\alpha}L(x),$$

где $L(x)$ – медленно затухающая функция на бесконечности, параметр $0 < \alpha < 2$ называется индексом хвоста.

Классическими РТХ являются распределения Парето, Вейбулла и логнормальное. Такие распределения имеют высокую степень изменчивости [45] и, таким образом, объясняют причины самоподобия пакетного трафика.

Известно [1], что анализ устройств массового обслуживания может быть выполнен посредством решения интегрального уравнения Винера-Хопфа, полученного Линдли и имеющего вид:

$$W(y) = \int_{-\infty}^{y} W(y-u)dC(u), y \geqslant 0, \tag{1.5}$$

где $W(y)$ – распределение вероятностей времени ожидания требования на обслуживание в очереди; $C(u)$ – ядро интегрального уравенения, определяемое как

$$C(u) = \int_{0}^{\infty} B(u+t)dA(t)$$

Здесь $A(t)$ – функция распределения промежутков времени между поступающими требованиями; $B(x)$ – функция рспределения времени обслуживания поступающих требований.

Под анализом трафика понимается расчет характеристик качества функционирования различных компонентов компьютерных сетей. Это оценки вероятностно-временных характеристик узлов коммутации и маршрутизации; анализ производительности локальных сетей и сетей с множественным доступом; анализ буферной памяти узлов и методов локального и глобального управления потоками; расчета потерь и загрузки линий связи.

Пусть последовательность интервалов времени между пакетами отображается случайным процессом $\xi(t)$ с известной корреляционной функцией $B(\tau)$ и одномерной плотностью $w_\xi(x)$. Величины $w_\xi(x)$ и $B(\tau)$ определяются на некотором наблюдаемом интервале реализации $\xi(t)$.

Метод, основанный на решении интегрального уравнения Линдли (1.5), строго говоря, не применим для анализа систем, обрабатывающих коррелированный трафик. Поэтому в [46] разработана новая методика, позволяющая использовать уравнение Линдли для анализа трафика с тяжелохвостными распределениями. Она заключается в представлении коррелированного трафика последовательностью некоррелированных случайных величин (в частности, некоррелированной последовательностью интервалов времени между требованиями) через аппроксимацию плотностей вероятности затухающими экспонентами [47]. Однако этот метод также не учитывает корреляционные свойства трафика.

Заметим, что к трафику, как к любому случайному процессу $\xi(t)$, можно применить некоторое ортогональное разложение, тем самым декоррелировав его отсчеты.

Итак, постановка задачи заключается в следующем: разработать метод учета самоподобных свойств трафика, оказывающих существенное влияние на характеристики узла обработки пакетов, через декорреляцию данных с использованием некоторого ортогонального преобразования.

1.2 Обзор существующих методов декорреляции временных рядов и анализ их недостатков

1.2.1 Преобразование Карунена-Лоэва

Наилучшие результаты следует ожидать от использования ортогонального разложения Карунена-Лоэва, предложенного независимо финским математиком Каруненом (*Kari Karhunen*) в 1946 году и французским математиком Лоэвом (*Michel Loeve*) в 1955. Также это разложение известно под названием преобразование Хотеллинга (дискретный вариант преобразования Карунена-Лоэва). С формально-математической точки зрения преобразование Карунена-Лоэва представляет собой разложение сигнала по базису ортогональных функций, каждая из которых является собственной функцией интегрального «характеристического» уравнения с симметричным непрерывным ядром.

Тогда случайный процесс $\xi(t)$ на интервале $(-T,T)$ может быть представлен последовательностью некоррелированных отсчетов ξ_k:

$$\xi_k = \sqrt{\lambda_k} \int_{-T}^{T} \xi(t)\varphi_k(t)dt, k = 0,1,2...,$$

где $\varphi_k(t), \lambda_k$ – собственные функции и собственные числа интегрального уравнения

$$\varphi(t) = \lambda \int_{-T}^{T} B(t-y)\varphi(y)dy, |t| \leqslant T \tag{2.6}$$

При известных $\varphi_k(t)$ вычисления, требуемые для реализации этого метода, достаточно сложны. Также при разных k плотности вероятностей ξ_k могут оказаться различными.

Нахождение $\varphi_k(t)$ также представляет собой достаточно сложную задачу, так как для ядра уравнения $B(t)$, представляющего собой корреляционную функцию самоподобного случайного процесса, очень сложно подобрать аппроксимацию, которая позволила бы решить уравнение (1.5) аналитически.

С помощью разложения корреляционной функции в быстро сходящийся ряд задачу можно свести к решению численным методом интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром [48]. В качестве примера рассмотрим

вариант определения $\varphi_K(t)$ при разложении $B(\tau)$ в ряд Фурье

$$B(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-\frac{2\pi i k \tau}{d}}, \tag{2.7}$$

где

$$c_k = \frac{1}{d}\int_{-T}^{T} B(\tau) e^{\frac{2\pi i k \tau}{d}} d\tau, d = 2T.$$

Естественно, что удержать бесконечное число членов разложения в уравнении (2.7) невозможно. Для заданного вида корреляционной функции следует на основе экспериментальной проверки удержать конечное число членов аппроксимирующего ряда при заданном уровне допустимой погрешности.

1.2.2 Преобразование Хаара

Будем полагать плотность вероятности отсчётов трафика $\varphi_k(t)$ известной и принадлежащей семейству распределений с «тяжелыми хвостами». Вейвлет Хаара ψ_{ji} (рис. 1.2) определяется следующим образом при $i = 0$:

$$\psi_{00} = \psi(x) = \begin{cases} 1, x \in [0; 0{,}5) \\ -1, x \in [0{,}5; 1) \\ 0, x \notin [0; 1) \end{cases}, \tag{2.8}$$

а для остальных значений i,j вейвлеты получаются сдвигами и сжатиями этого $\psi(x)$:

$$\psi_{ji}(x) = 2^{\frac{i}{2}}\psi(2^i x - j), j = 0,...,2^i - 1$$

Разделим рассматриваемую последовательность на группы по 2^k элементов в каждой группе. Каждую такую группу будем интерпретировать как кусочно-постоянную функцию, заданную на разбиении отрезка [0,1] на 2^k отрезков длины 2^{-k}. Функция $f = \{f_s\}, 0 \leqslant s \leqslant 2^k - 1$ будет представлена в виде

$$f = d + \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{2^i-1} c_{ij}\psi_{ji}(x)$$

Вейвлет коэффициенты находятся по формулам:

$$d = \int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2^k}\sum_{s=0}^{2^k-1} f_s \tag{2.9}$$

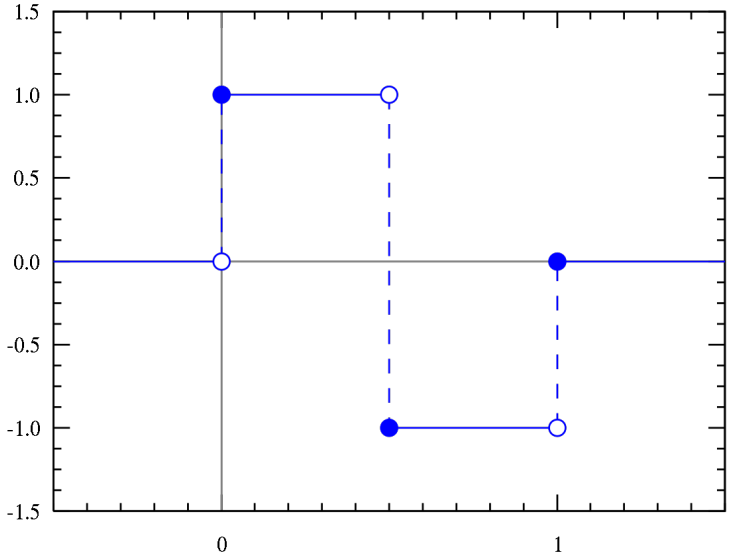


Рисунок 1.2 — Вейвлет Хаара

$$c_{ij} = \int_0^1 f(x)\psi_{ji}(x)dx = \frac{1}{2^k}\sum_{s=0}^{2^k-1} f_s\psi_{ji}(x) \tag{2.10}$$

После этого преобразования статистические свойства «эквивалентного трафика» определяются свойствами коэффициентов (2.9),(2.10).

Преобразование Хаара широко используется для компрессии изображений и сжатия входных сигналов. Но оно имеет серьезный недостаток – отсутствие гладкости. Поэтому необходимо искать преобразования, похожие на Хаара, но обладающие большей гладкостью.

Подробно анализ характеристик коррелированного трафика при использовании преобразования Хаара обсуждается в работе [49].

1.2.3 Другие ортогональные преобразования

Широко известны следующие виды ортогональных преобразований: дискретное косинусное преобразование, слэнт-преобразование [50], дискретное преобразование Хартли, дискретное преобразование Уолша-Адамара [51] и др.

ДКП (*DCT - discrete cosinus transform* - дискретное косинусное преобразование) – ортогональное преобразование, широко применяемое в алгоритмах сжатия информации с потерями, например, JPEG (*Joint Photographic Experts Group* – популярный растровый графический формат). Применение ДКП эк-

вивалентно применению дискретного преобразования Фурье, также существует быстрое ДКП – аналог быстрого преобразования Фурье. На практике одномерное ДКП вычисляется по формуле

$$G_i = \frac{1}{2} C_i \sum_{t=0}^{7} cos\left(\frac{(2t+1)i\pi}{16}\right), \tag{2.11}$$

где

$$C_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, i = 0 \\ 1, i > 0 \end{cases}, i = 0,1,...,7 \tag{2.12}$$

При обратном косинус-преобразовании сигнала исходные величины восстанавливаются с высокой точностью благодаря присутствию избыточности.

СП – слэнт-преобразование (*slant transform*) – преобразование по наклонному базису. По таким критериям, как средняя квадратическая ошибка, СП довольно близок к преобразованию Карунена-Лоэва. Матрицы СП выглядят следующим образом:

$$S_2 = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

$$S_4 = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & b_4 & -a_4 & b_4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -b_4 & a_4 & b_4 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Существует объединенная версия слэнт-преобразования и преобразования Хаара (*SHT - slant-Haar transform*).

ДПХ – дискретное преобразование Хартли – разновидность дискретного ортогонального тригонометрического преобразования. Иногда служит заменой дискретному преобразованию Фурье. Прямое преобразование задается следующей формулой:

$$H_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h_n cas\left(\frac{2\pi}{N} nk\right), k = 0,...,N-1, \tag{2.15}$$

а обратное по формуле

$$h_k = \sum_{k=0}^{N-1} H_k cas\left(\frac{2\pi}{N} nk\right), n = 0,...,N-1, \tag{2.16}$$

где

$$casx = \cos x + \sin x. \tag{2.17}$$

Преобразование Уолша-Адамара – (*BIFORE – BI nary FO urier RE presentation* – двоичное представление Фурье) – частный случай обобщенного преобразования Фурье, в котором базисом выступает система функций Уолша $wal(k,\tau)$ (рис. 1.3). Эти функции зачастую определяют как дискретные последовательности из 2^n элементов и принимающие значения только $+1$ и -1 на всей области определения. Система функций Уолша является ортонормированным базисом. Любую матрицу Адамара порядка $2N$ можно рекурсивно получить из

$$H^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, -H^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.18}$$

тогда

$$H^{2N} = \begin{bmatrix} H^N & H^N \\ H^N & -H^N \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

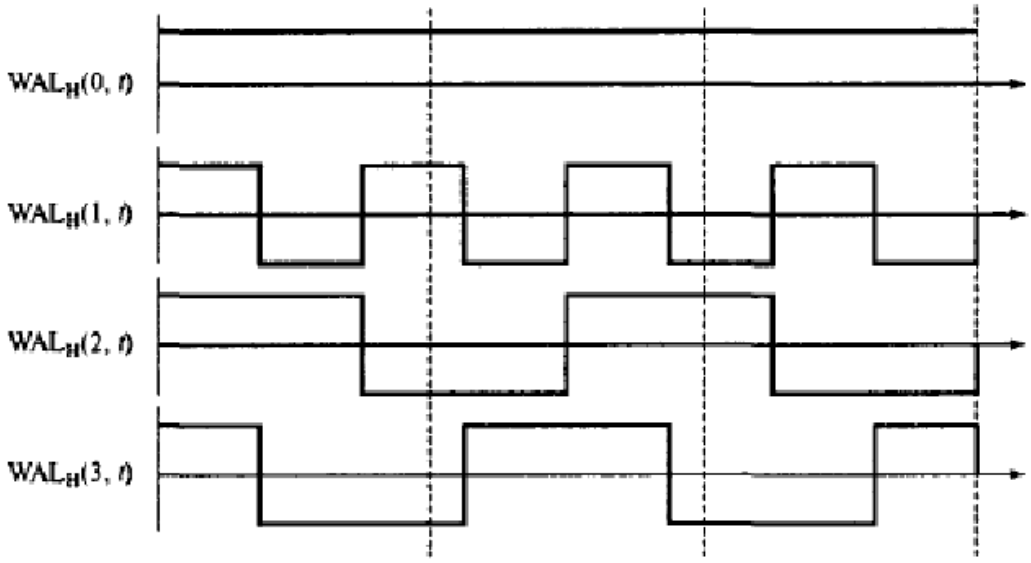


Рисунок 1.3 — Функции Уолша

1.3 Формулирование требований к разрабатываемому методу декорреляции временных рядов

Объект исследования - трафик коммуникативных сетей, являющийся самоподобным процессом в реальных сетях передачи данных и его корреляционные свойства.

Предмет исследования - математические модели систем коммуникативных сетей, алгоритмы, программные меотды декорреляции данных, численные и аналитические методы построения оценок декоррелирующих свойств преобразований.

Сформулируем некоторые общие требования, предъявляемые к преобразованиям, используемым для декорреляции данных:

1. Локализация и во временном пространстве, и по частоте;
2. Ортогональность;
3. Наличие нулевых моментов, способствующих сжатию информации;
4. Гладкость, гарантирующая отсутствие искажений при гладких сигналах;
5. Симметричность, соответствующая сохранению фазовых соотношени при реконструкции сигнала;
6. Наличие быстрых алгоритмов реализации;
7. Полное восстановление сигнала при обратном преобразовании.

Существуют некоторые основные характеристики: ортогональность, гладкость, компактность и симметрия, которые необходимы в рамках решаемой прикладной задачи. Некоторые сочетания свойств не могут быть у вейвлет-преобразований одновременно. Например, ортогональность, симметрия и компактность реализуются только в базисе Хаара, но он непригоден из-за отсутствия гладкости. При этом доказано, что для других базисов эти свойства несовместимы [18]. Поэтому особенности и структура анализируемого сигнала требуют компромисса мужду набором хороших свойств базиса и адекватностью выбора базиса для решаемой задачи.

Перспективным направлением представляется применение вейвлет-преобразований, позволяющих существенно уменьшить число членов аппроксимирующего ряда, по сравнению со случаем использования других ортогональных функций.

Особенности вейвлет-преобразования и его эффективность описаны во многих работах российских и зарубежных ученых [25; 52; 53]. Применение вейвлетов для анализа и моделирования самоподобного трафика также было исследовано в работах [54—56].

Одним из наиболее важных моментов при проведении анализа является выбор конкретного базисного вейвлета. Этот выбор зависит от решаемой задачи и от самого сигнала. Существует множество работ, посвященных описаниям и классификациям базисов [19; 57—59].

Общий принцип выбора подходящего базиса, как правило, заключается в том, что хорошим для сжатия информации является базис, который ведет к декорреляции, т.е. коэффициенты разложения по базису можно считать некоррелированными или слабо коррелированными случайными величинами. Базисы, в которых вектор коэффициентов имеет некоррелированные компоненты, называют базисами Карунена - Лоэва (*Karhunen-Loeve*) [60; 61]. Однако в общем случае отыскание базиса Карунена-Лоэва представляет собой трудную вычислительную задачу, а для самого базиса отсутствует возможность применения экономичных быстрых алгоритмов.

Как известно, вейвлет-анализ действует как математический микроскоп, позволяющий нам увеличить (детализировать) или уменьшить (просмотреть глобальное поведение) сигнал. Когда сигнал проявляет разные уровни самоподобия при разных уровнях агрегации, вейвлеты, естественно, могут выявить его с помощью своих масштабирующих свойств.

Основные требования к разрабатываемому методу:

1. Выполнение большинства общих требований, предъявляемых к преобразованиям, используемым для декорреляции данных, описанных выше;
2. Эффективность декорреляционных свойств преобразования должна быть близка к эффективности преобразования Карунена-Лоэва;
3. Наличие быстрых алгоритмов преобразования.

Выводы

В данной главе

1. Рассмотрена математическая модель трафика коммуникационной сети и методы её анализа.

2. Поставлена задача ослабления коррелированности последовательности сильнокоррелированных случайных величин, характеризующих трафик.
3. Рассмотрены существуюшие методы декорреляции временных рядов (Карунена-Лоэва, Хаара, ДКП, СП, ДПХ и другие).
4. Сформулированы требования к разрабатываемому методу декорреляции временных рядов.

Глава 2. Применение сплайновых вейвлет-функций к декорреляции временных рядов

2.1 Классификация сплайновых вейвлет-функций и обоснование выбранного типа

В отличие от большинства других базисов, сплайны имеют явное представление как во временной, так и в частотной областях, что в значительной степени облегчает их манипуляции. Сплайновые вейвлеты могут быть спроектированы так, чтобы иметь компактный носитель и оптимальную локализацию по частоте.

Старейшим и наиболее известным вейвлетом на базе сплайн-функций является вейвлет Хаара (*Haar*) [62], который соответствует сплайну степени $n = 0$ и был описан в 1910 г. Далее, Стромбергом (*Strömberg*) в 1983 году были сконструированы базисы из односторонних полиномиальных сплайнов степени n [63]. После этого, Баттл (*Battle*) и Лемарье (*Lemarie*) независимо вывели ортогональные сплайновые вейвлеты, использующие симметричные базисные экспоненциально убывающие функции [64; 65].

Можно выделить четыре категории сплайновых вейвлетов:

1. Ортогональные, например Батла-Лемарье (*Battle-Lemarié*);
2. Полуортогональные (B-сплайны);
3. Сдвиг-ортогональные;
4. Биортогональные, например Коэна-Добеши-Фово (*Cohen-Daubechies-Feauveau*)

В таблице 2 описаны основные свойства каждого из видов сплайновых вейвлетов. Подробную классификацию можно найти в статье М. Юнсера (*Michael Unser*) [66].

Наиболее часто используемыми функциями масштабирования являются B-сплайны, которые имеют наилучшие масштабирующие свойства среди всех известных вейвлетов заданного порядка. Другими словами, они являются наилучшим механизмом приближений гладких функций.

Таблица 2 — Классификация сплайновых вейвлетов по их основным свойствам

Тип	Ортого-нальность	Компактный носитель	Ключевые функции
Ортогональные сплайны	Да	Нет	Симметрия и гладкость + Ортогональность
Полуортогноальные сплайны	Да (усл.)	Да	Симметрия и гладкость + Оптимальная частотно--временная локализация
Сдвиг-ортогональные сплайны	Да (усл.)	Нет	Симметрия и гладкость + Квази-ортогональность + Быстро затухающий вейвлет
Биортогональные сплайны	Нет	Да	Симметрия и гладкость + Компактный носитель

Понятие B-сплайна было введено И. Шенбергом (*Schoneberg*) [67]. Возможно, это самые простые функции с малым носителем, которые наиболее эффективны как при их программной, так и при технической реализациии.

Как видно из таблицы 1, B-сплайновые вейвлеты являются гладкими, симметричными вейвлетами с компактным носителем. Также вейвлеты этой категории сохраняют ортогональность, но только на текущем уровне разрешения и не обязательно сохраняют это свойство на разных уровнях. Первыми такой вейвлет независимо построили Чуи-Ванг (*Chui-Wang*) [68] и Юнсер-Альдроби-Иден(*Unser-Aldroubi-Eden*) [69].

В этом случае вейвлет-базис состоит из B-сплайнов m-порядка и из кардинальных сплайнов, т.е. линейных комбинаций B-сплайнов со специальным выбором коэффициентов.

2.2 Элементы теории сплайн-функций

Пусть на вещественной оси $(-\infty, +\infty)$ заданы узлы $x_0,x_1,...,x_n$, $x_i \neq x_j$, в которых определена функций $f(x)$. Разделенными разностями первого порядка называют числа

$$f(x_0,x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, f(x_1,x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},...,$$

$$f(x_{n-1},x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

По ним определяются разделенные разности второго порядка

$$f(x_0,x_1,x_2) = \frac{f(x_1,x_2) - f(x_0,x_1)}{x_2 - x_0}, f(x_1,x_2,x_3) = \frac{f(x_2,x_3) - f(x_1,x_2)}{x_3 - x_1},...$$

Таким же образом определяются разделенные разности третьего порядка и т.д.

$$f(x_0,x_1,x_2,x_3) = \frac{f(x_1,x_2,x_3) - f(x_0,x_1,x_2)}{x_3 - x_0}, ...$$

В [70] доказывается, что

1. Для m раз непрерывно дифференцируемыз функций

$$f(x_0,x_1,...,x_m) = \frac{f^m(\varepsilon)}{m!}$$

, где ε - некоторая средняя точка промежутка $[x_0,x_m]$.

2. Операция взятия разделенной разницы $\forall$ порядка линейна, т.е. если

$$F(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$$

, то

$$F(x_k,...,x_{k+m}) = \alpha \cdot f(x_k,...,x_{k+m}) + \beta \cdot g(x_k,...,x_{k+m}).$$

3. Пусть $\omega_k(x) = (x - x_k) \cdot (x - x_{k+1}) \cdot ... \cdot (x - x_{k+m})$. Тогда справедливо представление

$$f(x_k,...,x_{k+m}) = \sum_{j=k}^{k+m} \frac{f(x_j)}{\omega_k(x_j)} \tag{2.1}$$

Пусть m - произвольное натуральное число. Через ε_+^m будем обозначать следующую функцию

$$\varepsilon_+^m = \begin{cases} \varepsilon^m, \varepsilon > 0 \\ 0, \varepsilon \leqslant 0 \end{cases}$$

Введем в рассмотрение усеченную степенную функцию $g_m(x,t) = (x - t)_+^{m-1}$. Очевидно, что

$$g_m(x,t) = \begin{cases} (x-t)^{m-1}, x > t \\ 0, x \leqslant t \end{cases} \tag{2.2}$$

Пусть на промежутке $[a,b]$ задана сетка

$$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < x_{n+1} = b \tag{2.3}$$

Функцию $S_m = S_{m,k}(x)$ называют полиномиальным сплайном степени m дефекта $k(1 \leqslant k \leqslant m)$ с узлами (2.3), если

1. На каждом отрезке $[x_i,x_{i+}1]$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ $S_m(x)$ является полиномом степени $\leqslant m$;
2. На всем промежутке $[a,b]$ функция $S_m(x)$ $(m-k)$-раз непрерывно дифференцируема.

Под $S_{0,1}(x)$ понимаются кусочно-постоянные функции с точками разрыва $x_1,...,x_n$, непрерывные справа. Простейшим примером сплайна, определенного на (2.3) является ломаная, узлами которой являются точки $x_0,x_1,...,x_{n+1}$. Степень и дефект здесь равны 1.

Функция $g_m(x;t)$ (2.2) является сплайном степени $m-1$ дефекта 1 относительно t. Образуем для этой функции разделенную разность порядка m по узлам $x_k,x_{k+1},...,x_{k+m}, (0 \leqslant k \leqslant k+m \leqslant n)$. Из (2.1) следует

$$g(x_k,...,x_{k+m};t) = \sum_{j=k}^{k+m} \frac{g_m(x_j;t)}{\omega_k(x_j)} \tag{2.4}$$

Функция $g_m(x;t)$ бесконечно дифференцируема по t при $t \neq x_j$. Поэтому функция $g(t)$, чтоящая в правой части (2.4), также есть сплайн степени $m-1$ дефекта 1, для которого уже узлами будут точки $x_k,...,x_{k+m}$.

Обозначим через $S(\Delta_n,m,k)$ совокупность сплайнов степени m дефекта k, определенных на сетке Δ_n. Это пространство будет линейным.

Теорема 6. *Размерность пространства $S(\Delta_n,m,k)$ равна $m+1+n\cdot k$.*

Доказательство см. в [71].

B-сплайнами степени $m-1$ дефекта 1 относительно узлов $x_k,...,x_{k+m}$ называется функция

$$B_{m-1}(t) = B_{m-1}(x_k,...,x_{k+m};t) = m \cdot g_m(x_k,...,x_{k+m};t) \tag{2.5}$$

, где $g_m(x_k,...,x_{k+m};t)$ - Разделенная разность порядка m.

Это понятие было введено И.Шёнбергом (*Isaac Jacob Schoenberg*). B-сплайны широко применяются в численных методах, т.к. в них значительно упращены моменты, связанные с финитностью носителей.

Основные свойства B-сплайнов:

1.
$$B_{m-1} \equiv 0, t \in [x_k,x_{k+m}]\,; \tag{2.6}$$

2.
$$\int_a^b B_{m-1}(t)dt = \int_{x_k}^{x_k+m} B_{m-1}(t)dt = 1; \tag{2.7}$$

3.
$$B_{m-1} > 0, x_k < t < x_{k+m}. \tag{2.8}$$

Если функция $f(x)$ отлична от нуля лишь на некотором компактност множестве, то она является финитной, а само это множество называется <u>носителем</u> функции f. Оно обозначается $suppf$.

Из (2.6) вытекает, что носителем B-сплайна является

$$suppB_{m-1}\,(x_k,...,x_{k+m};t) = (x_k,x_{k+m}) \tag{2.9}$$

Носитель любого ненулевого сплайна S степени $m-1$ дефекта 1 содержит не менее m смежных интервалов разбиения Δ_n.

Пусть на числовой прямой задана строго возрастающая последовательность узлов $\{x_k\}\,(k = 0, \pm 1, \pm 2,...)$. Также пусть концы отрезка $[a,b]$ совпадают с узлами x_p и x_q. Всюду ниже через $\bar{B}_{m-1,k}$ будем обозначать «усеченный» B-сплайн

$$\bar{B}_{m-1,k}(t) = \begin{cases} B_{m-1,k}(t), a \leqslant t \leqslant b \\ 0, t \notin [a,b] \end{cases}$$

Рассмотрим множество σ «усеченных» B-сплайнов $\bar{B}_{m-1,k}$ отличных от нуля на интервале (a,b)

$$\bar{B}_{m-1,p-m+1}, \bar{B}_{m-1,p-m+2},...,\bar{B}_{m-1,q-1}.$$

Теорема 7. *Совокупность* σ *всех «усеченных» B-сплайнов линейно независима.*

Доказательство см. в [71].

Тогда во многих случаях вместо $B_{m-1,k}$ удобно использовать так называемые нормированные B-сплайны

$$N_{m-1,k}(t) = \frac{x_{k+m} - x_k}{m} B_{m-1,k}(t) \tag{2.10}$$

Для нормированных B-сплайнов характерны следующие свойства:

1. Нормированные B-сплайны образуют разложение единицы

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} N_{m-1,k}(t) \equiv 1 \tag{2.11}$$

2. Для нормированных B-сплайнов справедливы следующие рекурентные формулы Кокса-Де Бура (*Cox - de Boor*), выведенные независимо учеными математиками Коксом и Де Буром, позволяющие свести вычисление к сплайнам более низких степеней

$$N_{m-1,k}(t) = \frac{t - x_k}{x_{k+m-1} - x_k} N_{m-2,k}(t) + \frac{x_{k+m} - t}{x_{k+m} - x_{k+1}} N_{m-2,k+1}(t) \tag{2.12}$$

$$\frac{d}{dt} N_{m-1,k}(t) = \frac{m-1}{x_{k+m-1} - x_k} N_{m-2,k}(t) + \frac{m-1}{x_{k+m} - x_{k+1}} N_{m-2,k+1}(t) \tag{2.13}$$

Доказательство этих свойств можно найти, например, в работе [72].

Рассмотрим множество $\bar{\sigma}$ нормированных «усеченных» B-сплайнов $\bar{N}_{m-1,k}$ отличных от нуля на интервале (a,b)

$$\bar{N}_{m-1,p-m+1}, \bar{N}_{m-1,p-m+2}, \ldots, \bar{N}_{m-1,q-1}. \tag{2.14}$$

Норма для них определяется следующим образом $||\bar{N}_{m-1,k}||_2 = 1$, где через $||\ ||_2$ обозначена норма $L_2[a,b]$, т.е. $||u||_2 = \left(\int_a^b |u(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.

Подробную инфомрацию о свойствах и методах построения B-сплайнов можно найти в работах К. Бора (*Carl de Boor*) [73] и других ученых [72; 74—77].

Листинг программного кода для реализации алгоритма вычисления B-сплайна представлен в приложении Б в пункте Б.1.

2.3 Пространство B-сплайновых вейвлет-функций на конечном отрезке

Пусть $[a,b]$ – произвольный отрезок, m - некоторое натуральное число, n_0 – такое целое, что $2^{n_0} < 2m-1 < 2^{n_0+1}$. Рассмотрим семейство $\Delta = \{\Delta_n, n = n_0, n_0+1, ...\}$ разбиений отрезка $[a,b]$ Δ_n: $a = x_0^n < x_1^n < x_{2^n}^n = b$ с постоянным шагом $h = h_n = \frac{b-a}{2^n}$. Пусть $N_{m,k}(x)$ – B-сплайн степени m с носителем $(x_k,...,x_{k+m},t)$.

В классической теории вейвлет-анализа поиск коэффициентов для построения B-сплайн-аппроксимационных формул заключается в применении Z-преобразования (преобразования Лорана) [15; 78]. Построение сплайновых вейвлетов описано в исследованиях некоторых российских и зарубежных авторов [79]. В работах И.А. Блатова [23; 32] дан новый усовершенствованный метод вычисления масштабирующих коэффициентов для построения пространств B-сплайновых вейвлетов. Суть метода заключается в следующем.

На каждом разбиении Δ_n рассмотрим пространство сплайнов $L_n = S(\Delta_n, m-1, 1)$. Тогда для каждого $k \geqslant n_0$ пространство $S(\Delta_n, m-1, 1)$ можно представить в виде прямой суммы $L_k = L_{n_0} \oplus W_{n_0+1} \oplus W_{n_0+2} \oplus ... \oplus W_k$, где через W_k обозначено ортогональное дополнение пространства L_{k-1} до пространства L_k. Искомый вейвлет-базис строится как объединение базиса в L_{n_0} и всех базисов в пространствах $W_n, n_0 \leqslant n \leqslant k$.

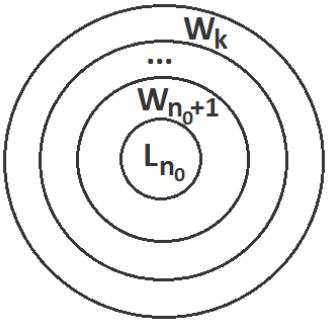


Рисунок 2.1 — Уровни вложенности до пространства L_k

Для того, чтобы построить базис в ортогональном дополнении W_n пространства L_{n-1} до L_n, зафиксируем $n \geqslant n_0 + 1$. Будем считать, что Δ_n продолжено на всю числовую ось с тем же шагом h_n. Обозначим $N_m - 1, j, n$ – B-сплайн на разбиении Δ_n.

Зафиксируем некоторое целое $i \geqslant 0$, такое, что открезок $\left[x_i^{n-1}, x_{i+2m-1}^{n-1}\right]$ целиком содержится в $[a,b]$. Будем искать функцию $\psi_{i,n}(x) \in W_n$ в виде

$$\psi_{i,n}(x) = \sum_{j=2i}^{2i+3m-2} \alpha_j N_{m-1,j,n} \tag{3.15}$$

Для того, чтобы $\psi_{i,n}(x) \in W_n$, достаточно потребовать выполнения условий:

$$(\psi_{i,n}, N_{m-1,j,n-1}) = 0, k = i-m+1, i-m+2, ..., i+2m-2, \tag{3.16}$$

поскольку остальные условия ортогональности выполняются автоматически в силу дизъюнкции носителей.

Искомый набор масштабирующих коэффициентов α получается из следующего уравнения:

$$\sum_{j=2i}^{2i+3m-2} \alpha_j \left(N_{m-1,j,n}, N_{m-1,k,n-1}\right) = 0, k = i-m+1, i-m+2, ..., i+2m-2 \tag{3.17}$$

Здесь мы подставили (3.15) в (3.16) и получили однородную систему из $3m-2$ уравнений с $3m-1$ неизвестными, которая всегда имеет нетривиальное решение.

Из (3.15) и из свойств B-сплайнов видно, что $supp(\psi_{i,n}) \subset \left[x_{2i}^n, 2_{2i+4m-2}^n\right]$, т.е. содержит $4m-2$ смежных частичных отрезка. Доказано, что нельзя построить вейвлет с меньшей длиной носителя [23].

Теорема 8. *Пусть $p < m-1$ и функция $psi_{i,n}(x)$ вида*

$$\psi_{i,n}(x) = \sum_{j=2i}^{2i+m+2p} \alpha_j \cdot N_{m-1,j,n} \tag{3.18}$$

удовлетворяет условиям

$$(\psi_{i,n}, N_{m-1,k,n-1}) = 0, k = i-m+1, i-m+2, ..., i+m+p-1, \tag{3.19}$$

тогда $\psi_{i,n}(x) = 0$.

Очевидно, что теорему достаточно доказать для случая $p = m-2$, т.к. при меньших p функцию всегда можно продолжить нулем на более широкий отрезок. Пусть $p = m-2$, тогда предположим противное - найдется отличная от

тождественного нуля функция (3.18), удовлетворяющая условию (3.19). Тогда для $\forall$ сплайна $X(x) \in S(\Delta_{n-1},m-1,1)$ имеем

$$\int_0^1 \psi_{i,n}(x) \cdot X(x)dx = 0. \tag{3.20}$$

В (3.20) интегрируем по частям $m-1$ раз. Т.к. $\psi_{i,n}^{(j)}(x_{i,n}^n) = \psi_{i,n}^{(j)}(x_{2i+4m-4}^n) = 0$ и получаем, что ненулевая функция $X_0(x) = \psi_{i,n}^{(m-1)}(x) \in S(\Delta_n,0,1)$, ортогональная на отрезке любому сплайну из $S(\Delta_n,2m-2,1)$. Но размерность пространства сплайнов степени $2m-2$ дефекта 1 на отрезке $[x_i^{n-1},x_{i+2m-2}^{n-1}]$ равна $4m-4$ и совпадает с размерностью пространства сплайнов нулевой степени на этом же отрезке с вдвое более мелким разбиением. Поэтому существует ненулевой сплайн $\varphi(x) \in S(\Delta_{n01},2m-2,1)$ ортогональный любой функции из $S(\Delta_n,0,1)$ на отрезке $[x_i^n,x_{i+4m-2}^n]$. Но тогда

$$\int_{x_j^n}^{x_{j+1}^n} \varphi_{i,n}(x)dx = 0, j = 2i,2i+1,...,2i+4m-3 \tag{3.21}$$

Отсюда следует, что внутри каждого отрезка $[x_j^{n-1},x_{j+1}^{n-1}], i \leqslant j \leqslant i+2m-2$ функция $\varphi(x)$ обращается в ноль не менее двух раз. Но тогда в силу теоремы о существовании и единственности интерполяционного сплайна [72], функция $\varphi(x)$ совпадает с интерполяционным сплайном тождественно равной нулю функции по узлам, где она обращается в ноль. Следовательно, $\varphi(x) \equiv 0$. Получаем противоречие, следовательно, теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть* $j \in [0,2^{n-1}], \prod_j = \{\psi_{i,n}(x) : supp\psi_{i,n} \cap [x_j^{n-1},x_{j+m-1}^{n-1} \neq \varnothing$ *Тогда совокупность сужений функций из* $\prod_j$ *на* $[x_j^{n-1},x_{j+m-1}^{n-1}]$, *линейно независима на каждом таком отрезке.*

Доказательство: если нетривиальная линейная комбинация функций $\prod_j$ равна нулю на каком-либо из отрезков $[x_j^{n-1},x_{j+m-1}^{n-1}]$, то получим, что эта линейная комбинация будет отличной от тождественного нуля вейвлет-функцией, носитель которой состоит из двух групп, разделенных отрезком $[x_j^{n-1},x_{j+m-1}^{n-1}]$, каждая из который не более $2m-2$ смежных частичных интервалов разбиения Δ_{n-1}. Но носитель $\forall$ B-сплайна из $S(\Delta_{n-1},m-1,1)$ может иметь непустое пересечение лишь с одной из таких групп. Поэтому отличной от тождественного нуля вейвлет-функцией будет и сужение этой вейвлет-функции на любую из таких групп. Но такой вейвлет-функции не может быть в силу теоремы 8.

Следствие 3. *Совокупность функций из* $\prod_j$*, нормированных на единицу в* $L_2[0,1]$ *обладает СРЛН на* $[x_j^{n-1}, x_{j+m-1}^{n-1}]$.

Доказательство построим от противного. Предположим, что существует последовательность наборов коэффициентов $\{\alpha_S^n\} : \sum_{S:\psi_{s,n}\in\prod_j} |\alpha_S^n|^2 = 1$ такое, что

$$\left\| \sum_{S:\psi_{s,n}\in\prod_j} \alpha_S^n \cdot \psi_{S,n} \right\|_{L_2[x_j^{n-1}, x_{j+m-1}^{n-1}]} \to_{n\to\infty} 0 \tag{3.22}$$

Каждый такой набор является вектором фиксированной размерности, нормированным на единицу в евклидовой норме. Поэтому из последовательности этих наборов можно извлечь последовательность, сходящуюся к предельному набору α_S, причем в силу (3.22) в пределе получаем

$$\sum_{S:\psi_{S,n}\in\prod_j} \alpha_s \cdot \psi_{s,n} = 0, \sum_{S:\psi_{S,n}\in\prod_j} |\alpha_s|^2 = 1,$$

но это противоречит первому следствию. Следствие доказано.

Замечание 1. *Справедлива формула*

$$\psi_{i,n}(x) = \psi_{0,n}\left(2^{n-n_0}x - i\frac{b-a}{2^{n_0-1}}\right), \tag{3.23}$$

т.е. совокупность вейвлет-функций получается путем сдвига одной единственной функции $\psi_{0,n}(x)$.

Таким образом была построена совокупность центральных полуортогональных линейно независимых вейвлетов $\{\psi_{i,n}\}, i = 0,1,...,2^{n-1} - 2m + 1$. Но размерность ортогонального дополнения W_n равна 2^{n-1}, т.е. до базиса в W_n не хватает ровно $2(m-1)$ функций.

Построим недостающие граничные вейвлет-функции. Для этого рассмотрим $\psi_{i,n}(x)$ при $-2m+2 \leqslant i \leqslant 2^{n-1}-1$ на расширенном разбиении Δ_n. Первую (левостороннюю) группу из $m-1$ недостающих вейвлетов можно найти по формуле

$$\tilde{\psi}_{i,n}(x) = \psi_{i,n}(x) - \sum_{j=-2m+2}^{-m} \alpha_j \psi_{j,n}(x), -m+1 \leqslant i \leqslant -1 \tag{3.24}$$

из условий

$$\left(\tilde{\psi}_{i,n},N_{m-1,k,n-1}\right) = 0, k = -m+1, -m+2,..., -1 \qquad (3.25)$$

Для того, чтобы определить коэффициенты α, подставляем (3.24) в (3.25) и получаем систему линейных алгебраических уравнений.

Вторую (правостороннюю) группу из $m-1$ недостающих вейвлетов будем искать в виде

$$\tilde{\psi}_{i,n}(x) = \psi_{i,n}(x) - \sum_{j=2^{n-1}-m+1}^{2^{n-1}-1} \alpha_j \psi_{j,n}(x), 2^{n-1} - 2m + 2 \leqslant i \leqslant 2^{n-1} - m \qquad (3.26)$$

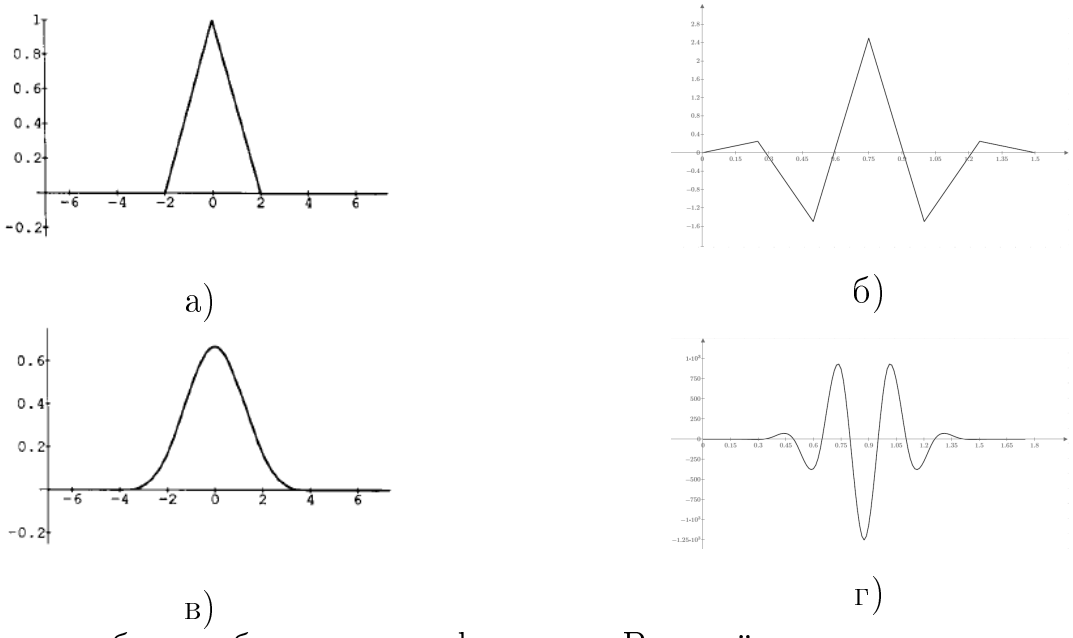
из условий

$$\left(\tilde{\psi}_{i,n},N_{m-1,k,n-1}\right) = 0, k = 2^{n-1} - 2m + 1, 2^{n-1} - 2m + 2,...,2^{n-1} - 1 \qquad (3.27)$$

Для того, чтобы определить коэффициенты α, подставляем (3.26) в (3.27).

Итак, совокупность (3.15), (3.24), (3.26) при $n_0+1 \leqslant n \leqslant k$ (3.28) образует вейвлет-базис в пространстве L_k.

На рис. (2.2) изображены графики центральных вейвлет-функций для случаев $m = 1..3$ и графики соответствующих им B-сплайнов.



В левом столбце отображены графики для B-сплайнов, в правом – графики для соответствующих им вейвлетов.

Рисунок 2.2 — B-сплайн функции и соответствующие им центральные вейвлеты для $m = 2$ и $m = 4$

Графики не только для центральных, но и для граничных частных случаев можно найти в приложении А.

Теорема 9. *Совокупность функций*

$$\{\varphi_{i,m-1}, -m+1 \leqslant i \leqslant 2_{n_0}-1\}\bigcup$$

$$\bigcup\{\bigcup_{p=n_0+1}^{\infty}\{\{\bigcup_{i=0}^{2^{n-1}-2m+1}\psi_{i,p}\}\bigcup\{\bigcup_{i=-m+1}^{-1}\tilde{\psi}_{i,p}\}\bigcup\{\bigcup_{i=2^{p-1}-2m+2}^{2^{p-1}-m}\tilde{\psi}_{i,p}\}\}\} \qquad (3.28)$$

нормированных на единицу в $L_2[0,1]$ *при* $\forall k$ *обладает СРЛН с константой, не зависящей от* k.

В силу СРЛН B-сплайнов и ортогональности функций из (3.28) при разных n достаточно доказать СРЛН группы

$$\{\bigcup_{i=0}^{2^{n-1}-2m+1}\psi_{i,p}\}\bigcup\{\bigcup_{i=-m+1}^{-1}\tilde{\psi}_{i,p}\}\bigcup\{\bigcup_{i=2^{p-1}-2m+2}^{2^{p-1}-m}\tilde{\psi}_{i,p}\}$$

при $\forall$ фиксированном n. Обозначим для краткости эту группу $\left\{\hat{\psi}_{j,n}\right\}_{j=-m+1}^{2^{n-1}-m}$. В силу следствия 2 $\forall$ подгруппа $\prod_j$ такой группы обладает СРЛН на $[x_j^{n-1},x_{j+m-1}^{n-1}]$. Но тогда для любого набора $\{\alpha_s\}_{s=-m+1}^{2^{n-1}-m}$

$$\left\|\sum_{s=-m+1}^{2^{n-1}-m}\alpha_s\cdot\hat{\psi}_{s,n}\right\|^2_{L_2[0,1]} = \left\|\sum_{s=-m+1}^{2^{n-1}-m}\alpha_s\cdot\hat{\psi}_{s,n}\right\|^2_{L_2[x_0^{n-1},x_{m-1}^{n-1}]} +$$

$$+\left\|\sum_{s=-m+1}^{2^{n-1}-m}\alpha_s\cdot\hat{\psi}_{s,n}\right\|^2_{L_2[x_{m-1}^{n-1},x_{2(m-1)}^{n-1}]} + \ldots + \left\|\sum_{s=-m+1}^{2^{n-1}-m}\alpha_s\cdot\hat{\psi}_{s,n}\right\|^2_{L_2[x_{p(m-1)}^{n-1},x_{(p+1)(m-1)}^{n-1}]} =$$

$$= \left\|\sum_{s:\hat{\psi}_{s,n}\in\prod_0}\alpha_s\cdot\hat{\psi}_{s,n}\right\|^2_{L_2[x_0^{n-1},x_{m-1}^{n-1}]} + \left\|\sum_{s:\hat{\psi}_{s,n}\in\prod_1}\alpha_s\cdot\hat{\psi}_{s,n}\right\|^2_{L_2[x_{m-1}^{n-1},x_{2(m-1)}^{n-1}]} +$$

$$+\ldots+\left\|\sum_{s:\hat{\psi}_{s,n}\in\prod_p}\alpha_s\cdot\hat{\psi}_{s,n}\right\|^2_{L_2[x_{p(m-1)}^{n-1},x_{(p-1)(m-1)}^{n-1}]} \geqslant C\cdot\sum_{s:\hat{\psi}_{s,n}\in\cup_{q=0}^{p}\prod_q}|\alpha_s|^2 \qquad (3.29)$$

где p - максимальное из чисел, для которых $[x_{p(m-1)}^{n-1},x_{(p+1)(m-1)}^{n-1}]\subset[0,1]$

Но $supp\hat{\psi}_{s,n}$ содержит $2m-1$ частичный отрезок разбиения Δ_{n-1}, то $\alpha_s\in\cup_{q=0}^{p}\prod_q$ для любого $s\in[-m+1,2^{n-1}-m]$, поэтому из (3.29) следует, что

$$\left\|\sum_{s=-m+1}^{2^{n-1}-m}\alpha_s\cdot\hat{\psi}_{s,n}\right\|^2_{L_2[0,1]} \geqslant C\cdot\sum_{s=-m+1}^{2^{n-1}-m}|\alpha_s|^2.$$

Замечание 2. *Из рассмотренных ранее аппроксимационных свойств сплайнов вытекает, что совокупность функций*

$$\{\varphi_{i,m-1}, -m+1 \leqslant i \leqslant 2_{n_0}-1\} \bigcup$$

$$\bigcup\{\bigcup_{p=n_0+1}^{\infty}\{\{\bigcup_{i=0}^{2^{n-1}-2m+1}\psi_{i,p}\}\bigcup\{\bigcup_{i=-m+1}^{-1}\tilde{\psi}_{i,p}\}\bigcup\{\bigcup_{i=2^{p-1}-2m+2}^{2^{p-1}-m}\tilde{\psi}_{i,p}\}\}\}$$

образует базис в $L_2[a,b]$

Замечание 3. *Для функций (3.24) и (3.26) при i in*$[2^{n-1}-2m+2,2^{n-1}-m]$ *в силу симметрии справедливы формулы*

$$\tilde{\psi}_{i,n}(x) = \tilde{\psi}_{n_0+1,2^{n-1}-2m+1}(2^{n-n_0-1}\cdot(1-x).$$

2.3.1 Алгоритм построения сплайновых вейвлет-базисов

Из результатов, описанных в предыдущей главе, вытекает следующий алгоритм построения вейвлет-базисов.

1. Для $n = n_0+1$ решаем СЛАУ (3.17) при $i = 0$. Для этого вычисляем скалярные произведения $(N_{m-1,j,n}, N_{m-1,k,n-1})$, применяя для вычисления интегралов на каждом частичном отрезке, входящем в носитель B-спалйна, квадратичную формулу Гаусса, точную для многочленов степени $2m-2$. Далее, полагаем $\alpha_{3m-2} = 1$ и находим $\alpha_j, 0 \leqslant j \leqslant 2m-3$, решая систему с квадратичной симметричной матрицей одним из прямых методов.
2. Для $n = n_0+1$ аналогичным образом решаем системы (3.24) при $-m+1 \leqslant i \leqslant -1$.
3. Определяем для $n \in [n_0+1,k]\,, i \in \left[0,2^{n-1}-2m+1\right]$ функции

$$\psi_{i,n}(x) = \psi_{0,n_0+1}(2^{n-n_0-1}x - i\cdot\frac{b-a}{2^{n_0}})$$

для $n \in [n_0+1,k]\,, i \in [-m+1,-1]$ функции

$$\psi_{i,n}(x) = \tilde{\psi}_{i,n_0+1}(2^{n-n_0-1}x)$$

для $n \in [n_0+1,k]\,, i \in \left[2^{n-1}-2m+2,2^{n-1}-m\right]$ функции

$$\psi_{i,n}(x) = \tilde{\psi}_{2^{n-1}-2m-i+1,n_0+1}(2^{n-n_0-1}(b-x))$$

4. Присоединим к построенным функциям $\varphi_{k,n_0}, -m+1 \leqslant k \leqslant 2^{n_0}-1$, где $\varphi_{k,n_0} = N_{m-1,k,n_0}$.

Листинг программного кода для реализации алгоритма представлен в приложении Б в пункте Б.2.

Замечание 4. *Построение вейвлет-функций в данном разделе проводилось в случае* $[a,b] = [0,1]$. *Однако очевидно, что на произвольном отрезке* $[a,b]$ *соответствующую вейвлет-систему можно получить из построенной с помощью линейной замены* $x' = \frac{x-a}{b-a}$, *рассматривая вейвлет-функции переменной* x'. *Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что вейвлет-система построена для произвольного отрезка* $[a,b]$.

2.4 Дискретизация вейвлет-преобразования

В параграфе 2.3 описывались вейвлет-функции непрерывного аргумента. Для проведения непрерывного вейвлет-преобразования требуются большие вычислительные затраты. Также в вычислительных алгоритмах и при обработке сигналов чаще всего приходится иметь дело с дискретно заданной инфомрацией, т.е. с функциями, заданными на сетке. Поэтому для практического применения вейвлет-преобразования необходима его дискретизация.

Все построения параграфа 2.3 переносятся на функции дискретного аргумента следующим образом. Зафиксируем произвольные натуральные $m \geqslant 2, k = 2m-1$. Рассмотрим на отрезке $[x_i^k, x_{i+1}^k]$ некоторую квадратурную формулу численного интегрирования функции одной переменной, точную для многочлена степени $2m-2$

$$\int_{x_i^k}^{x_{i+1}^k} f(x)dx = \sum_{j=1}^{s} c_j f(x_{ij}) + R,$$

например, формулу Ньютона-Котеса с $s = 2m-1$ равноотстоящими узлами или формулу Гаусса с $m-1$ узлами. На каждом отрезке $[x_i^k, x_{i+1}^k] \in \Delta_k, 0 \leqslant i \leqslant 2^k - 1]$ введем дополительные узлы $x_{ij}^k, 1 \leqslant k \leqslant s$, совпадающие с узлами данной квадратурной формулы на этом отрезке. Пусть $\tilde{\Delta}_n$ – разбиение отрезка $[a,b]$, множество узлов которого состоит из узлов $x_{ij}, 0 \leqslant i \leqslant 2^k - 1$. Рассмотрим пространство сеточных функций $L_{2,k}[\tilde{\Delta}_k]$. Введем в нем формулу скалярного

произведения

$$(f,g) = \sum_{i=1}^{2^k-1} \sum_{j=1}^{s} c_j f(x_{ij}) g(x_{ij}) \tag{4.30}$$

В пространстве $L_{2,k}[\tilde{\Delta}_k]$ рассмотрим пространство $\tilde{S}(\Delta_k,m-1,1)$ всех сеточных функций, каждая из которых в узлах $\tilde{\Delta}_k$ совпадает с некоторым сплайном из $S(\Delta_k,m-1,1)$. Поскольку квадратурная формула (4.30) точна для функций из $S(\Delta_k,m-1,1)$, то сеточные функции, совпадающие с функциями $\psi_{i,n}$,$\tilde{\psi}_{i,n}$, построенными в параграфе 2.3, будут образовывать полуортогональный базис пространства $\tilde{S}(\Delta_k,m-1,1)$. Систему этих функций назовем системой дискретных полуортогональных сплайновых вейвлетов в пространстве $L_{2,k}[\tilde{\Delta}_k]$ и, чтобы избежать дополнительных индексов, сохраним за ними прежние обозначения.

Замечание 5. *Число узлов $\tilde{\Delta}_n$ равно $s \cdot 2^k$ и имеет тот же порядок, что и число узлов Δ_k.*

2.5 Концепция вейвлет-преобразований на базе B-сплайн-функций

Основная идея вейвлет-преобразования заключается в представлении временного ряда в виде взвешенной суммы простых составляющих – базисных функций $\psi_{i,n}$, помноженных на коэффициенты c_i:

$$f(t) = \sum_i \psi_{i,n}(t) c_i$$

Существует непрерывное и дискретное вейвлет-преобразование. Во многих практических приложениях используются дискретные вейвлеты, которые позволяют осуществить более точное представление сигнала, особенно в задачах, связанных с его сжатием и последующем восстановлением. Они обеспечивают возможность осуществления процедуры быстрого преобразования наиболее естественно в случае дискретных данных (временных рядов) и применяется на практике, если требуется быстро вычислить те или иные характеристики.

Интегральное вейвлет-преобразование определяется как свертка с учетом растяжения некоторой функции $\tilde{\psi}$, называемой базисным вейвлетом, в то время как вейвлет-ряд выражается через единственную функцию ψ, называемую

вейвлетом с помощью двух очень простых операций: двоичных растяжений и целочисленных сдвигов.

Вейвлет-преобразование переводит сигнал из временного представления в частотно-временное.

Т.к. базисные функции $\psi_{i,n}(x)$ задаются как функции определенного типа, то только коэффициенты c,d содержат информацию о конкретном сигнале. Т.о. можно говорить о возможности представления произвольных сигналов на основе рядов (3.15).

Вейвлет-преобразования широко изучены и описаны многими современными учеными [16; 17; 71; 80; 81].

Прямое вейвлет-преобразование (ПВП) означает разложение произвольного входного сигнала по принципиально новому базису в виде совокупности вейвлетов.

Рассмотрим разложение функции $\varphi_{i,n-1}$ по функциям $\varphi_{j,n}$ для $\forall i$,n, т.е. представление вида

$$\varphi_{i,n-1} = \sum_{j=2i-m+1}^{2i+2m-1} \beta_{ij} \cdot \varphi_{j,n} \tag{5.31}$$

Отсюда видно, что при $\forall i$ набор коэффициентов β будет один и тот же, т.е. $\beta_{ij} = \beta_{0(j-2i)} = \beta_{j-2i}$. Поэтому формулу (5.31) можно представить в виде

$$\varphi_{i,n-1} = \sum_{j=2i-m+1}^{2i+2m-1} \beta_{j-2i} \cdot \varphi_{j,n} \tag{5.32}$$

Также ясно, что $\beta_{-m+1} = \beta_{-m+2} = ... = \beta_{-1} = 0; \beta_{m+1} = \beta_{m+2} = ... = \beta_{2m-1}$=0. т.к. все производные B-сплайна $N_{m-1,i,n-1}$ до $m-2$-го порядка включительно обращаются в ноль в крайних точках его носителя.

Для отыскания коэффициентов β_i рассмотрим СЛАУ

$$\sum_{j=0}^{m} \beta_j \cdot (\varphi_{j,n},\varphi_{l,n}) = (\varphi_{0,n-1},\varphi_{l,n}), l = 0,1,...,m \tag{5.33}$$

Решение системы (5.33) существует в силу вложенности пространств L_n и оно единственно, поскольку ее матрица невырождена. Решая эту систему одним из прямых методов, находим β_0,β_1,...,β_m.

Таким образом, с учетом результатов предыдущих разделов, мы имеем представления вида

$$\varphi_{i,n} = \sum_{j=2i}^{2i+m} \beta_{ij} \cdot \varphi_{j,n+1}, -m+1 \leqslant i \leqslant 2^n - 1 \tag{5.34}$$

$$\psi_{i,n} = \sum_{j=2i}^{2i+3m-2} \alpha_{ij} \cdot \varphi_{j,n}, 0 \leqslant i \leqslant 2^{n-1} - 2m + 1 \tag{5.35}$$

$$\psi_{i,n} = \sum_{j=2i}^{2^n-1} \alpha_{ij} \cdot \varphi_{j,n}, 2^{n-1} - 2m + 2 \leqslant i \leqslant 2^{n-1} - m \tag{5.36}$$

$$\psi_{i,n} = \sum_{j=-m+1}^{2i+3m-2} \alpha_{ij} \cdot \varphi_{j,n}, -m+1 \leqslant i \leqslant -1 \tag{5.37}$$

Для произвольного набора скаляров $\left\{c_{n-n_0}, -m+1 \leqslant i \leqslant 2^{n-1} - m\right\}$ из (5.34)-(5.37)

$$\sum_{i=0}^{2^{n-1}-2m+1} c_{n-n_0,i} \cdot \psi_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^{2^{n-1}-2m+1} \sum_{j=2i}^{2i+3m-2} c_{n-n_0,i} \cdot \alpha_{ij} \cdot \varphi_{j,n}(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{2^n-m} \left(\sum_{i=\frac{j-3m+2}{2}}^{\frac{j}{2}} c_{n-n_0} \cdot \alpha_{ij} \right) \cdot \varphi_{j,n}(x);$$

$$\sum_{i=-m+1}^{-1} c_{n-n_0,i} \cdot \psi_{i,n}(x) = \sum_{i=-m+1}^{-1} \sum_{j=-m+1}^{2i+3m-2} c_{n-n_0,i} \cdot \alpha_{ij} \cdot \varphi_{j,n}(x) =$$

$$= \sum_{j=-m+1}^{3m-4} \left(\sum_{i=\frac{j-3m+2}{2}}^{-m+1} c_{n-n_0,i} \cdot \alpha_{ij} \right) \cdot \varphi_{j,n}(x);$$

$$\sum_{i=2^{n-1}-2m+2}^{2^{n-1}-m} c_{n-n_0,i} \cdot \psi_{i,n}(x) = \sum_{i=2^{n-1}-2v+2}^{2^{n-1}-m} \sum_{j=2i}^{2^n-1} c_{n-n_0,i} \cdot \alpha_{ij} \cdot \varphi_{j,n}(x) =$$

$$= \sum_{j=2^n-4m+4}^{2^n-1} \left(\sum_{i=2^{n-1}-m}^{\frac{j}{2}} c_{n-n_0,i} \cdot \alpha_{ij} \right) \cdot \varphi_{j,n}(x).$$

Отсюда

$$\sum_{i=-m+1}^{2^{n-1}-m} c_{n-n_0,i} \cdot \psi_{i,n}(x) = \sum_{j=-m+1}^{2^n-1} \tilde{c}_{n-n_0,j} \cdot \varphi_{j,n}(x), \tag{5.38}$$

где

$$\tilde{c}_{n-n_0,j} = \begin{cases} \sum_{\frac{j-3m+2}{2} \leqslant i \leqslant \frac{j}{2}} c_{n-n_0,i} \alpha_{ij}, & 3m-3 \leqslant j \leqslant 2^n - 4m + 3 \\ \sum_{\frac{j-3m+2}{2} \leqslant i \leqslant -m+1} c_{n-n_0,i} \alpha_{ij}, & \text{-}m+1 \leqslant j \leqslant 3m-4 \\ \sum_{2^{n-1}-m \leqslant i \leqslant \frac{j}{2}} c_{n-n_0,i} \alpha_{ij}, & 2^n - 4m + 4 \leqslant j \leqslant 2^n - 1 \end{cases} \tag{5.39}$$

Аналогично для произвольного набора скаляров $d_{n-n_0,i}$,$-m+1 \leqslant i \leqslant 2^n-1$ имеем

$$\sum_{-m+1}^{2^n-1} d_{n-n_0,i} \cdot \varphi_{i,n}(x) = \sum_{i=-m+1}^{2^n-1} \sum_{j=2i}^{2i+m} d_{n-n_0,i} \cdot \beta_{ij} \cdot \varphi_{j,n+1}(x) =$$

$$= \sum_{-2m+2}^{2^{n+1}+m-2} \left(\sum_{i=\frac{j-m}{2}}^{\frac{j}{2}} d_{n-n_0,i} \cdot \beta_{ij} \right) \cdot \varphi_{j,n+1}(x) = \sum_{j=-2m+2}^{2^{n+1}+m-2} \tilde{d}_{n-n_0,i} \cdot \varphi_{j,n+1}(x), \tag{5.40}$$

где

$$\tilde{d}_{n-n_0,j} = \sum_{i=\frac{j-m}{2}}^{\frac{j}{2}} d_{n-n_0,i} \cdot \beta_{ij} \tag{5.41}$$

Из (5.38)-(5.41) получаются формулы

$$\sum_{i=-m+1}^{2^n-1} d_{n-n_0,i} \cdot \varphi_{i,n}(x) + \sum_{i=-m+1}^{2^{n-1}-m} c_{n+1-n_0,i} \cdot \varphi_{i,n+1}(x) =$$

$$= \sum_{i=-m+1}^{2^{n+1}-1} d_{n+1-n_0,i} \cdot \varphi_{i,n+1}(x) \tag{5.42}$$

, где

$$d_{n+1-n_0,i} = \tilde{d}_{n-n_0,i} + \tilde{c}_{n-n_0,i} \tag{5.43}$$

Здесь $\tilde{d}_{n-n_0,i}$,$\tilde{c}_{n-n_0,i}$ вычисляются по формулам (5.39), (5.41).

Ниже приведены алгоритмы построения прямого и обратного быстрых B-сплайновых ДВП. Листинги программного кода для реализации алгоритмов представлены в приложении Б в пункте Б.3.

2.5.1 Прямое быстрое дискретное вейвлет-преобразование

Задача прямого быстрого ДВП состоит в отыскании всех коэффициентов разложения (рис. 2.3)

$$\{d_{0j}, -m+1 \leqslant j \leqslant 2^{n_0}-1\} \bigcup \bigcup_{i=1}^{k-n_0} \{c_{ij}, -m+1 \leqslant j \leqslant 2^{n_0+i-1}-m\} \quad (5.44)$$

некоторой заданной функции

$$f = \{f_{ij}\}, 0 \leqslant i \leqslant 2^k-1, 0 \leqslant j \leqslant s \quad (5.45)$$

$$\begin{tikzcd}
\tilde{d}_k \arrow[r] \arrow[dr] & \tilde{d}_{k-1} \arrow[r] \arrow[dr] & \tilde{d}_{k-2} \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r] \arrow[dr] & \tilde{d}_{n_0} \\
& \check{c}_k & \check{c}_{k-1} & \cdots & \check{c}_{n_0+1}
\end{tikzcd}$$

Рисунок 2.3 — Отыскание коэффициентов разложения

Коэффициенты d_{0j},c_{ij} будем искать как решение СЛАУ

$$\left(\sum_{-m+1}^{2^{n_0}-1} d_{0j} \cdot \varphi_{j,n_0} + \sum_{i=1}^{k-n_0} \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+i-1}-m} c_{ij} \cdot \psi_{j,n_0+i}, \varphi_{l,n_0}\right) =$$

$$= (f, \varphi_{l,n_0}, -m+1 \leqslant l \leqslant 2^{n_0}-1;$$

$$\left(\sum_{-m+1}^{2^{n_0}-1} d_{0j} \cdot \varphi_{j,n_0} + \sum_{i=1}^{k-n_0} \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+i-1}-m} c_{ij} \cdot \psi_{j,n_0+i}, \varphi_{l,n_0}\right) =$$

$$= (f, \psi_{l,n}, -m+1 \leqslant l \leqslant 2^{n-1}-m, n_0+1 \leqslant n \leqslant k. \quad (5.46)$$

В силу полуортогональности построенной системы сплайновых вейвлет система (5.46) сведется к $k-n_0+1$ независимой подсистеме

$$\left(\sum_{-m+1}^{2^{n_0}-1} d_{0j} \varphi_{j,n_0}, \varphi_{l,n_0}\right) = (f, \varphi_{l,n_0}), -m+1 \leqslant l \leqslant 2^{n_0}-1 \quad (5.47)$$

$$\left(\sum_{-m+1}^{2^{n_0}+l-m} c_{ij} \psi_{j,n_0+i}, \psi_{l,n_0+i}\right) = (f, \psi_{l,n_0+1}),$$

$$-m+1 \leqslant l \leqslant 2^{n_0+i-1}-m, 1 \leqslant i \leqslant k-n_0 \quad (5.48)$$

В силу финитности вейвлет-функций, каждая из систем (5.47), (5.48) будет СЛАУ с симметричной положительно определенной ленточной матрицей Грама, причем ширина ленты не превосходит $2m+1$. Каждая такая система может быть решена методом квадратного корня для ленточных симметричных матриц, а число операций пропорциональное порядку системы с константой пропорциональности не зависящей от этого порядка. Поэтому для получения алгоритма, осуществляющего обратное вейвлет-преобразование, нам достаточно построить алгоритм быстрого вычисления всех скалярных произведений в правой части СЛАУ (5.46).

Рассмотрим алгоритм прямого быстрого ДВП на базе сплайнов (рис. 2.4). Результатом работы алгоритма является построение вектора вейвлет-коэффициентов, т.е. коэффициентов разложения некоторой функции (5.45).

1. Вычисляем значения $\tilde{d}_{i,k} = (f, \varphi_{i,k}(x)), -m+1 \leqslant i \leqslant 2^k - 1$;
2. Вычисляем значения $\tilde{c}_{i,k}$ по формуле

$$\tilde{c}_{i,k} = (f, \psi_{i,k}(x)) = \begin{cases} \sum_{j=2i}^{2i+3m-2} \alpha_{ij}\tilde{d}_{jk}, & 0 \leqslant i \leqslant 2^{k-1} - 2m + 1 \\ \sum_{j=2i}^{2^n-1} \alpha_{ij}\tilde{d}_{jk}, & 2^{k-1} - 2m + 2 \leqslant i \leqslant 2^{k-1} - m \\ \sum_{j=-m+1}^{2i+3m-2} \alpha_{ij}\tilde{d}_{jk}, & \text{-}m + 1 \leqslant i \leqslant -1 \end{cases}$$

3. Полагаем $n = k - 1$;
4. Вычисляем значение $\tilde{d}_{i,n}, -m+1 \leqslant i \leqslant 2^n - 1$ по формуле

$$\tilde{d}_{i,n} = (f, \varphi_{i,n}(x)) = \sum_{j=2i}^{2i+m} \beta_{ij}\tilde{d}_{j,n+1} \tag{5.49}$$

5. Если $n = n_0$, переходим к шагу 7;
6. Вычисляем значения $\tilde{c}_{i,n}$ по формуле

$$\tilde{c}_{i,n} = (f, \psi_{i,n}(x)) = \begin{cases} \sum_{j=2i}^{2i+3m-2} \alpha_{ij}\tilde{d}_{jn}, & 0 \leqslant i \leqslant 2^{n-1} - 2m + 1 \\ \sum_{j=2i}^{2^n-1} \alpha_{ij}\tilde{d}_{jn}, & 2^{n-1} - 2m + 2 \leqslant i \leqslant 2^{n-1} - m \\ \sum_{j=-m+1}^{2i+3m-2} \alpha_{ij}\tilde{d}_{jn}, & \text{-}m + 1 \leqslant i \leqslant -1 \end{cases}$$

7. Полагаем $n = n - 1$. Если $n \geqslant n_0$, переходим к шагу 4.
8. После вычисления всех вспомогательных коэффициентов, можно найти основные вейвлет-коэффициенты. Для этого нужно решить следующие СЛАУ

$$\left(\sum_{-m+1}^{2^{n_0}-1} d_{0j}\varphi_{j,n_0}, \varphi_{i,n_0} \right) = \tilde{d}_{l,n_0}, -m+1 \leqslant l \leqslant 2^{n_0} - 1 \tag{5.50}$$

$$\left(\sum_{-m+1}^{2^{n_0}+i-1} c_{ij}\psi_{j,n_0+i},\psi_{i,n_0+i}\right) = \tilde{c}_{l,n_0+i},$$

$$-m+1 \leqslant l \leqslant 2^{n_0+i-1}-m, 1 \leqslant i \leqslant k \tag{5.51}$$

В силу финитности вейвлет-функций, каждая из систем будет СЛАУ с симметричной положительной матрицей Грама, причем ширина ленты не превосходит $2m+1$.

Здесь в каждой последующей итерации (п. 4-7) входными данными является вектор коэффициентов $\tilde{d}_{i,n}$, полученный на предыдущей итерации.

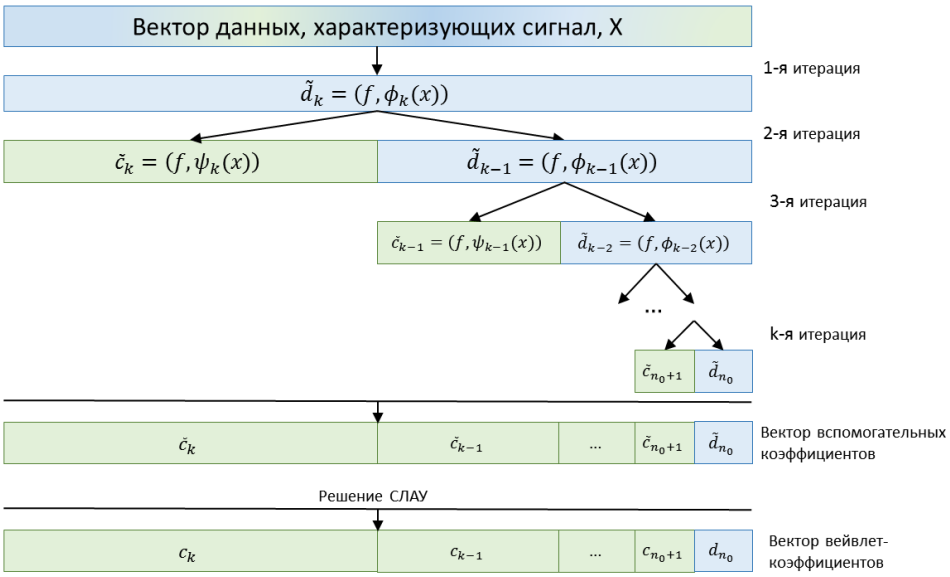


Рисунок 2.4 — Концепция прямого быстрого ДВП на базе сплайнов

В силу финитности функций $\varphi_{i,n},\psi_{i,n}$ отношение числа арифметических операций, необходимых для вычисления всех скалярных произведений, к числу компонент функции f ограничено константой, не зависящей от k.

2.5.2 Обратное быстрое дискретное вейвлет-преобразование

Цель алгоритма - восстановить все значения $f_{ij}, 0 \leqslant i \leqslant 2^k-1, 1 \leqslant j \leqslant s$

$$f = \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0}-1} d_{0j}\varphi_{j,n_0} + \sum_{i=1}^{k-n_0}\sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+i-1}-m} c_{ij}\psi_{j,n_0+i} \tag{5.52}$$

по заданном набору коэффициентов (5.44) (рис. 2.5).

$$\begin{tikzcd}
\tilde{d}_0 \arrow[r] & \hat{d}_1 \arrow[r] & \dots \arrow[r] & \hat{d}_{k-n_0} \\
\check{c}_1 \arrow[ur] & \check{c}_2 \arrow[ur] & \dots \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Рисунок 2.5 — Восстановление значений функции по заданному набору коэффициентов

1. Полагаем $n = n_0$;
2. Находим числа $\hat{d}_{n+1-n_0,i}, -m+1 \leqslant i \leqslant 2^{n+1}-1$ по формулам

$$\hat{d}_{n+1-n_0,i} = \tilde{d}_{n-n_0,i} + \tilde{c}_{n+1-n_0,i}, \tag{5.53}$$

где

$$\tilde{d}_{n-n_0,j} = \sum_{i \in max\{-m+1, \frac{j-m}{2}\}, min\{2^n-1, \frac{j}{2}\}} \beta_{ij} d_{n-n_0,i}$$

$$\tilde{c}_{n+1-n_0,j} = \begin{cases} \sum\limits_{i \in [max\{-m+1, \frac{j-3m+2}{2}\}, min\{2^{n-1}-2m+1, \frac{j}{2}\}]} \alpha_{ij} c_{n+1-n_0,i}, \\ -m+1 \leqslant j \leqslant 3m-4 \\ \sum\limits_{i \in [\frac{j-3m+2}{2}, \frac{j}{2}]} \alpha_{ij} c_{n+1-n_0,i}, 3m-3 \leqslant j \leqslant 2^n - 4m + 3 \\ \sum\limits_{i \in [max\{0, \frac{j-3m+2}{2}\}, min\{2^{n-1}-m, \frac{j}{2}\}]} \alpha_{ij} c_{n+1-n_0,i}, \\ 2^n - 4m + 4 \leqslant j \leqslant 2^n - 1 \end{cases}$$

3. Полагаем $n = n+1$. Если $n < k$, переходим к шагу 2
4. Для всех узлов $x_{ij} \in \Delta_k$ вычисляем значения функции f по формуле

$$f_{ij} = f(x_{ij}) = \sum_{s=-m+1}^{2^k-1} \hat{d}_{k-n_0,s} \varphi_{k,s}(x_{ij}) \tag{5.54}$$

Отношение количества арифметических операций, необходимых для вычисления всех коэффициентов $d_{k-n_0,s}$ к числу этих коэффициентов $2^k + m$, оценивается константой, не зависящей от k. В силу финитности функции $\varphi_{k,s}$ отношение количества арифметических операций, необходимых для вычисления всех значений f_{ij} по формулам (5.54), к числу этих значений также оценивается константой не зависящей от k. В этом смысле рассмотренный алгоритм является асимптотически оптимальным по быстродействию и превосходит алгоритмы ДБПФ, в которых это отношение растет, как $O(k)$.

Таким образом и прямой и обратный алгоритмы быстрого вейвлет-преобразования являются асимптотически оптимальными и превосходят по этому показателю ДБПФ.

2.5.3 Распараллеливание алгоритмов прямого и обратного быстрого дискретного вейвлет-преобразования

Поскольку основное применение алгоритмов декомпозиции и реконструкции последовательностей данных сосредоточено на работе с большими потоками информации, то ключевым становится не только качество, но и скорость обработки этих потоков. В данной главе представлены параллельные алгоритмы для прямого и обратного сплайнового вейвлет-преобразования. Распараллеливание алгоритмов произведено для двухпроцессорной (или двухъядерной) архитектуры. Эффективность применения этих алгоритмов перед последовательными алгоритмами особенно видна на больших объемах данных.

Заметим, что вычисление коэффициентов исходной последовательности данных выполняется независимо для каждого уровня разбиения его на векторы с $(2_k + 1)$ элементами, путём решения СЛАУ (5.50), (5.51). Таким образом, можно выполнять распараллеливание разработанной последовательной реализации алгоритма декомпозиции на более высоком уровне. Т.е. каждому потоку отдавать на обработку набор СЛАУ каждого уровня разбиения, чтобы суммарное количество операций было приблизительно одинаковым (рис. 2.6,2.7). Такой подход обеспечит равномерность распределения нагрузки между потоками.

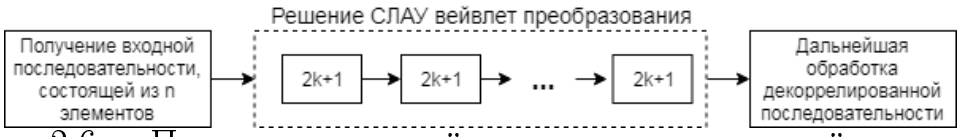


Рисунок 2.6 — Последовательный алгоритм прямого вейвлет-преобразования

Аналогично выполняется распараллеливание алгоритма реконструкции вектора в исходный сигнал. Формула (5.52) применяется к каждому уровню разбиения по $(2_k + 1)$ элемента преобразованной последовательности данных, и каждому потоку на обработку посылается набор сумм с равномерным распределением нагрузки между потоками.

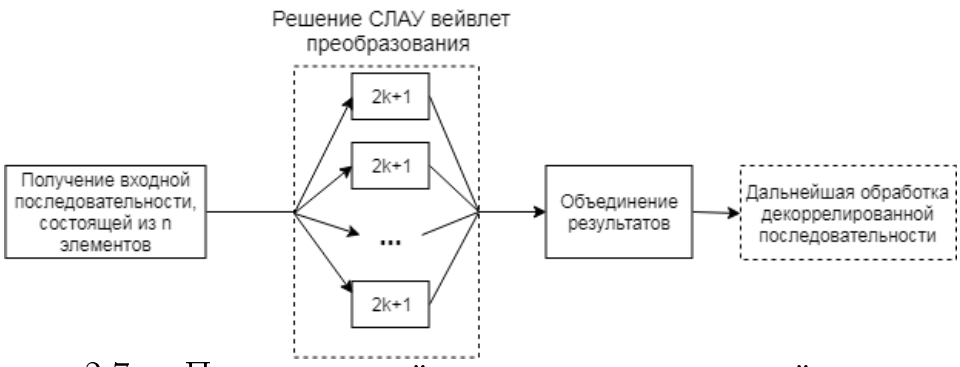


Рисунок 2.7 — Параллельный алгоритм прямого вейвлет-преобразования

Таблица (3) содержит результаты вычислительных экспериментов, проведенных над разработанной последовательной и параллельной реализациями. Инфраструктура, на которой были выполнены эксперименты, описана в приложении Б.

Таблица 3 — Время работы алгоритмов прямого быстрого ДВП

	Размер выборки	Прямой алгоритм (сек.)	Параллельный алгоритм (сек.)	Ускорение
1	10 000	0,016	0,015	0,017
2	100 000	0,055	0,031	1,774
3	300 000	0,148	0,070	2,114

Из представленных результатов видно, что параллельная реализация алгоритма позволила сократить время вычисления коэффициентов в среднем в 1.9 раз. Основные результаты работы представлены в [34].

2.6 Полуортогональные сплайновые вейвлеты на целочисленных разбиениях в случае $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ и $m = 4$

В частных случаях $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ и $m = 4$ получаем систему вейвлетов Хаара, системы полуортогональных линейных, квадратинчых и кубических вейвлетов соответственно.

При $m = 1$ будет $n_0 = 0$ и система нормированных вейвлетов Хаара имеет вид

$$\varphi_{0,1}(t) \equiv 2^{-k/2},\ \psi_{i,p}(t) \equiv 2^{(p-k-1)/2} \begin{cases} 1,\ t \in [t_i^p, t_{i+1}^p), \\ -1,\ t \in [t_{i+1}^p, t_{i+2}^p), \\ 0, t \notin [t_i^p, t_{i+2}^p), \end{cases} \quad 1 \leqslant p \leqslant k, 0 \leqslant i \leqslant 2^{p-1}-1$$

Значения центральных и граничных коэффициентов α и значения коэффициентов β для удобства представим в виде матриц

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & \ddots & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & 1 & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \tag{6.55}$$

Графики кусочно-постоянных B-сплайн масштабирующих функций и вейвлет-функции для $m = 1$ изображены на рис. 2.8.

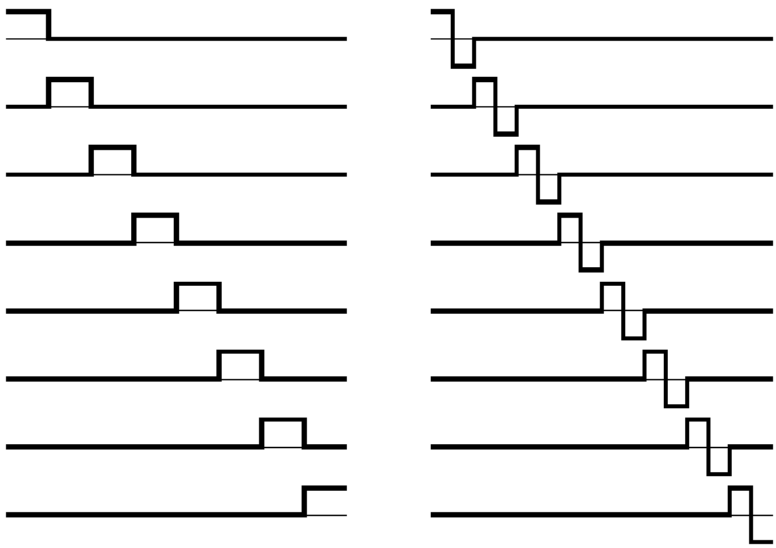


Рисунок 2.8 — Графики кусочно-постоянных B-сплайн масштабирующих функций и вейвлет-функции для $m = 1$

При $m = 2$ будет $n_0 = 1$ и система нормированных линейных вейвлетов имеет вид

$$\{\varphi_{i,1}, -1 \leqslant i \leqslant 1\} \bigcup \{\bigcup_{p=2}^{k} \{\{ \bigcup_{i=0}^{2^{p-1}-3} \psi_{i,p}\} \bigcup \{\psi_{-1,p}\} \bigcup \{\psi_{2^{p-1}-2,p}\}\}\}$$

Значения коэффициентов

$$\alpha = \begin{bmatrix} -11.022704 & & & & & & & & & \\ 10.104145 & 1 & & & & & & & & \\ -5.511352 & -6 & & & & & & & & \\ 0.918559 & 10 & 1 & & & & & & & \\ & -6 & -6 & & & & & & & \\ & 1 & 10 & . & & & & & & \\ & & -6 & & . & 1 & & & & \\ & & 1 & & & . & -6 & & & \\ & & & & & & 10 & 0.918559 & & \\ & & & & & & -6 & -5.511352 & & \\ & & & & & & 1 & 10.104145 & & \\ & & & & & & & -11.022704 & & \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 2 & & & & & & & & & \\ 1 & 1 & & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & & & \\ & 1 & 1 & & & & & & & \\ & & 2 & & & & & & & \\ & & 1 & . & & & & & & \\ & & & & . & 1 & & & & \\ & & & & & . & 2 & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & & & & 2 & & \end{bmatrix} \tag{6.56}$$

Графики линейных B-сплайн масштабирующих функций и вейвлет-функции для $m = 2$ изображены на рис. 2.9.

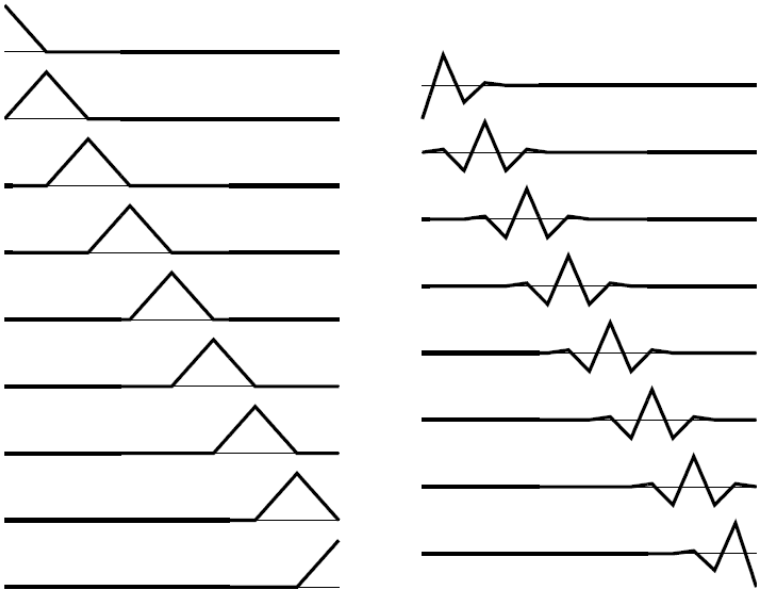


Рисунок 2.9 — Графики линейных B-сплайн масштабирующих функций и вейвлет-функции для $m = 2$

При $m = 3$ будет $n_0 = 2$ и система нормированных квадратичных вейвлетов имеет вид

$$\{\varphi_{i,2}, -2 \leqslant i \leqslant 3\} \bigcup \{\bigcup_{p=3}^{k} \{\{\bigcup_{i=0}^{2^{p-1}-5} \psi_{i,p}\} \bigcup \{\bigcup_{i=-2}^{-1} \tilde{\psi}_{i,p}\} \bigcup \{\bigcup_{i=2^{p-1}-4}^{2^{p-1}-3} \tilde{\psi}_{i,p}\}\}\}$$

Значения коэффициентов

$$\alpha = \begin{bmatrix} -381.8722771 & & & & & & & & & & & \\ 464.322574 & 69.531439 & -1 & & & & & & & & & \\ -276.334798 & -173.739454 & 29 & & & & & & & & & \\ 115.885924 & 310.306330 & -147 & -1 & & & & & & & & \\ -22.587463 & -299.698329 & 303 & 29 & & & & & & & & \\ 0.778878 & 144.233164 & -303 & -147 & & & & & & & & \\ & -28.43676 & 147 & 303 & & & & & & & & \\ & 0.980572 & -29 & -303 & . & -1 & & & & & & \\ & & 1 & 147 & & . & 29 & & & & & \\ & & & -29 & & & . & -147 & -0.980572 & & & \\ & & & 1 & & & & 303 & 28.43676 & & & \\ & & & & & & & -303 & -144.233164 & -0.778878 & & \\ & & & & & & & 147 & 299.698329 & 22.587463 & & \\ & & & & & & & -29 & -310.306330 & -115.885924 & & \\ & & & & & & & 1 & 173.739454 & 276.334798 & & \\ & & & & & & & & -69.531439 & -464.322574 & & \\ & & & & & & & & & 381.8722771 & & \end{bmatrix} \tag{6.57}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 4 & & & & & & & & & & & & & & & \\ 2 & 2 & & & & & & & & & & & & & & \\ & 3 & 1 & & & & & & & & & & & & & \\ & 1 & 3 & & & & & & & & & & & & & \\ & & 3 & 1 & & & & & & & & & & & & \\ & & 1 & 3 & & & & & & & & & & & & \\ & & & 3 & & & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & . & & & & & & & & & & & \\ & & & & . & 1 & & & & & & & & & & \\ & & & & & . & 3 & & & & & & & & & \\ & & & & & & 3 & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & 3 & & & & & & & & \\ & & & & & & & 2 & 2 & & & & & & & \\ & & & & & & & & 4 & & & & & & & \end{bmatrix} \tag{6.58}$$

Графики квадратичных B-сплайн масштабирующих функций и вейвлет-функции для $m = 3$ изображены на рис. 2.10.

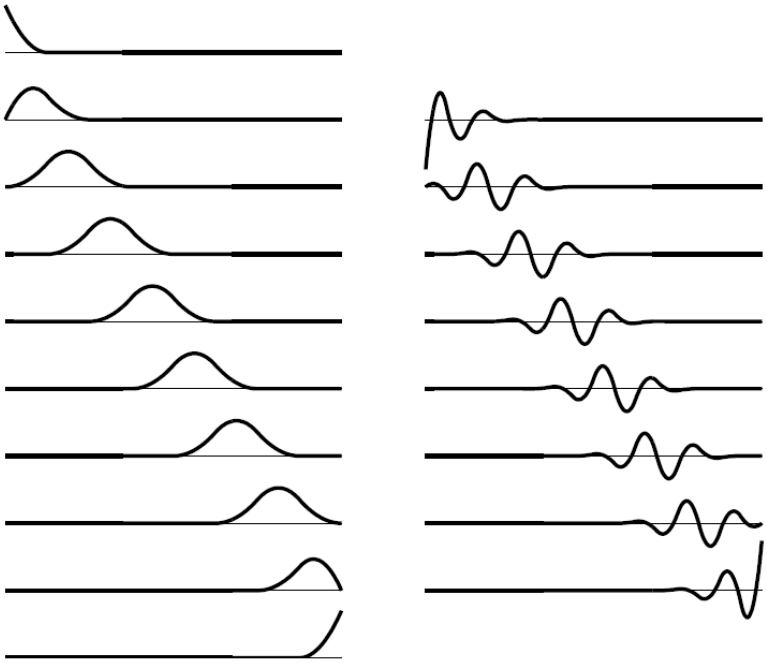


Рисунок 2.10 — Графики квадратичных B-сплайн масштабирующих функций и вейвлет-функции для $m = 3$

При $m = 4$ будет $n_0 = 2$ и система нормированных квадратичных вейвлетов имеет вид

$$\{\varphi_{i,3}, -3 \leqslant i \leqslant 3\} \bigcup \{\bigcup_{p=3}^{k} \{\{ \bigcup_{i=0}^{2^{p-1}-7} \psi_{i,p}\} \bigcup \{\bigcup_{i=-3}^{-1} \tilde{\psi}_{i,p}\} \bigcup \{\bigcup_{i=2^{p-1}-6}^{2^{p-1}-4} \tilde{\psi}_{i,p}\}\}\}$$

Значения коэффициентов

$$\alpha = \begin{bmatrix}
25931.2007 & & & & & & & & & & & & & & & \\
-37755.2717 & -6369.3054 & & & & & & & & & & & & & & \\
30135.0030 & 17429.2660 & 385.7970 & & & & & & & & & & & & & \\
-14439.8696 & -23004.2523 & -2086.5456 & -1 & & & & & & & & & & & & \\
5223.1254 & 24848.4878 & 8349.3734 & 124 & & & & & & & & & & & & \\
-1067.8794 & -17678.8843 & -18743.4730 & -1677 & & & & & & & & & & & & \\
78.8428 & 7394.6853 & 24291.7952 & 7904 & & & & & & & & & & & & \\
-0.6358 & -1561.8685 & -18240.9975 & -18482 & & & & & & & & & & & & \\
 & 115.4463 & 7866.7320 & 24264 & & & & & & & & & & & & \\
 & -0.9311 & -1668.6158 & -18482 & -1 & & & & & & & & & & & \\
 & & 123.3786 & 7904 & 124 & & & & & & & & & & & \\
 & & -0.9949 & -1677 & -1677 & -0.9949 & & & & & & & & & & \\
 & & & 124 & 7904 & 123.3786 & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & -18482 & -1668.6158 & -0.9311 & & & & & & & & & \\
 & & & & 24264 & 7866.7320 & 115.4463 & & & & & & & & & \\
 & & & & -18482 & -18240.9975 & -1561.8685 & -0.6358 & & & & & & & & \\
 & & & & 7904 & 24291.7952 & 7394.6853 & 78.8428 & & & & & & & & \\
 & & & & -1677 & -18743.4730 & -17678.8843 & -1067.8794 & & & & & & & & \\
 & & & & 124 & 8349.3734 & 24848.4878 & 5223.1254 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & -2086.5456 & -23004.2523 & -14439.8696 & & & & & & & & \\
 & & & & & 385.7970 & 17429.2660 & 30135.0030 & & & & & & & & \\
 & & & & & & -6369.3054 & -37755.2717 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 25931.2007 & & & & & & & &
\end{bmatrix},$$

$$\beta = \begin{bmatrix}
16 & & & & & & & & & & & & & & & \\
8 & 8 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 12 & 4 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 3 & 11 & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & 8 & 8 & & & & & & & & & & & & \\
 & & 2 & 12 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 8 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 2 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 2 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 12 & 2 & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & 8 & & & & & & & & & & \\
 & & & & 2 & 11 & 3 & & & & & & & & & \\
 & & & & & 4 & 12 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 8 & 8 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 16 & & & & & & & &
\end{bmatrix} \tag{6.59}$$

Графики кубических B-сплайн масштабирующих функций и вейвлет-функции для $m = 4$ изображены на рис. 2.11.

2.7 Общая методика решения задачи декорерляции временных рядов с применением B-сплайновых вейвлетов

Пусть имеется некоторый дискретный сигнал $x = (x_0,x_1,...,x_{n-1})^T$, у которого соседние отсчеты имеют близкие значения, т.е. имеется ярко выраженная статистическая зависимость между компонентами вектора X.

Разделим рассматриваемую последовательность на группы по 2^k элементов в каждой группе. Каждую такую группу будем интерпретировать как кусочно-постоянную функцию, заданную на разбиении отрезка [0,1] на 2^k отрезков длины 2^{-k}. Таким образом получим функцию

Пусть T - матрица прямого быстрого дискретного вейвлет преобразования на базе B-сплайнов, тогда T^{-1} - матрица обратного ДВП.

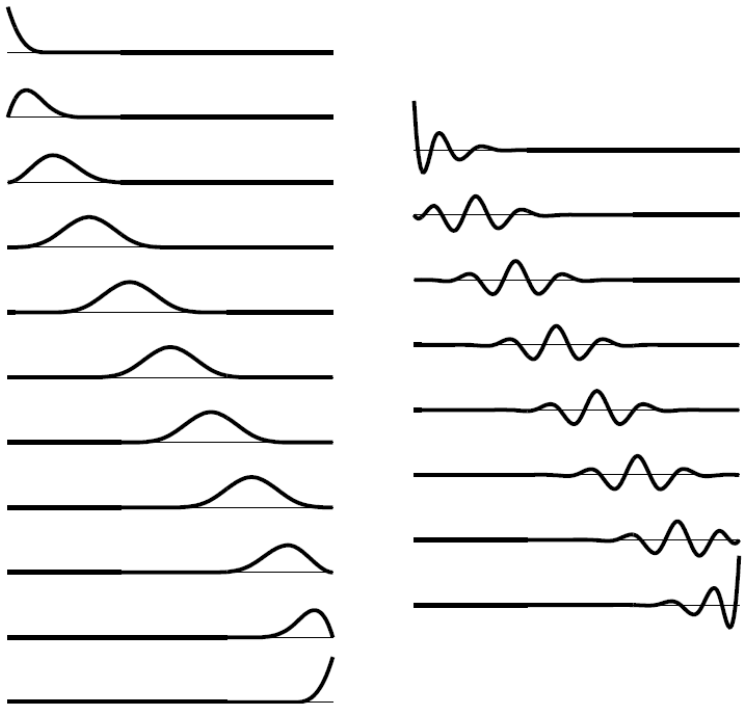


Рисунок 2.11 — Графики кубических B-сплайн масштабирующих функций и вейвлет-функции для $m = 4$

Для того, чтобы снизить корреляцию исходных данных, нужно

1. Получить последовательность, характерезующую трафик, размером 2^n элементов;
2. Выбирать степень сплайна, на основе которого будет произведено разложение;
3. Разбить входящую последовательность на группы по 2^k элементов в каждой;
4. Путём применения прямого быстрого ДВП переведем вектор X_k, отождествляющий группу из 2^k элементов, в некоторый вектор $Y_k = TX_k$, в котором зависимость между компонентами будет ослаблена.
5. Запись результирующей последовательности.
6. Анализ вектора Y (собранного из всех векторов Y_k), а не вектора X будет более эффективным, т.к. будут учтены корреляционные свойства сигнала.

Блок схема разрабатываемой программы представлена на рис. 2.12.

Выводы

В данной главе

1. Исследованы сплайновые вейвлет-функции и дана их классификация.

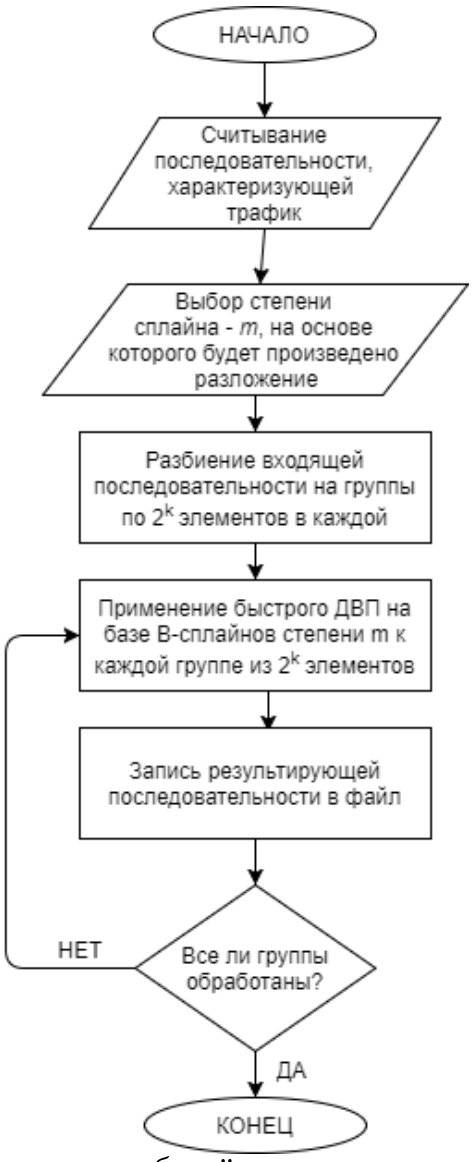


Рисунок 2.12 — Блок-схема общей методики решения задачи декорреляции последовательности, характеризующей самоподобный трафик

2. Представлены элементы теории сплайн-функций.
3. Разработаны принципы построения пространства B-сплайновых вейвлет-функций на конечном отрезке. Представлен алгоритм построение сплайновых вейвлет-базисов.
4. Выведена концепция вейвлет-преобразования на базе B-сплайновых вейвлет-функций. Разработаны алгоритмы прямого и обратного дискретного вейвлет-преобразований. Описан способ распараллеливания этих алгоритмов.
5. Выведена общая методика решения поставленной задачи.

Глава 3. Оценка декоррелирующих свойств B-сплайновых вейвлетов

Будем говорить, что семейство M обладает свойством равномерной линейной независимовсти (СРЛН) в $L_2[a,b]$, если найдется такая контсанта $C > 0$, что для $\forall$ натуральных $p,q : p < q$ и для $\forall$ набора чисел $\alpha_{p-m+1},...,\alpha_{q-1}$ справедливо равенство

$$\left\| \sum_{k=p-m+1}^{q-1} \alpha_k \cdot \bar{N}_{m-1,k} \right\|_2^2 \geqslant C \cdot \sum_{k=p-m+1}^{q-1} |\alpha_k|^2 \tag{0.1}$$

Теорема 10. *Пусть Δ - семейство разбиений с равноотстоящими узлами. Тогда при $\forall$ фиксированном m совокупность соответствующих базисов M обладает СРЛН в $L_2[a,b]$.*

Доказательство см. в [71].

Пусть $\|u\|_C = max_{x\in[a,b]}|u(x)|$ - норма в пространстве непрерывных функций. Тогда

Теорема 11. *Найдутся такие константы $C_1 > 0, C_2 > 0$, зависящие лишь от m и независящие от шага разбиения h, что для функций*

$$\bar{N}_{m-1,p-m+1},\bar{N}_{m-1,p-m+2},...,\bar{N}_{m-1,q-1}. \tag{0.2}$$

справедливы оценки

$$0 < C_1 \cdot h^{-\frac{1}{2}} \leqslant \|\bar{N}_{m-1,k}\|_C \leqslant C_2 \cdot h^{-\frac{1}{2}} \tag{0.3}$$

Доказательство см. в [71].

Зафиксируем отрезок $[a,b]$ и рассмотрим семейство разбиений с равноотстоящими узлами $M = \{\Delta_n\}$ этого отрезка, где каждое разбиение имеет вид $\Delta_n : a = x_0 < x_1 < ... < x_{2^n} = b$. Обозначим через $h_n = \frac{b-a}{2^n}$ шаг этого разбиения. Пусть $\left\{\bar{N}_{m-1,k}, -m+1 < k < 2^n - 1\right\}$ - совокупность функций (0.2) на разбиении Δ_n. Введем в рассмотрение матрицу Грама

$$A = \{a_{ij}\},$$

где $a_{ij} = \left(\bar{N}^{(n)}_{m-1,i}, \bar{N}^{(n)}_{m-1,j},\right)$. Здесь $(u,v) = \int_a^b u(x) \cdot v(x)dx$ - скалярное произведение в $L_2[a,b]$.

Матрица A является $2m-1$ диагональной, т.е. $a_{ij}=0$ при $|i-j|>m-1$. Это вытекает из финитности B-сплайнов, поскольку при $|i-j|>m-1$ носители соответствующих B-сплайнов имеют пустое пересечение.

Лемма 1. *Спектральные нормы матрицы A ограничены равномерно по n, т.е. найдется такая константа $C>0$, зависящая только от m, что для $\forall n$ справедлива оценка*

$$||A^{-1}||_2 \leqslant C \tag{0.4}$$

Доказательство следует из определения матрицы Грама. Пусть $\alpha = \alpha_i, -m+1 \leqslant i \leqslant 2^n-1$ - произвольный 2^n+m-2-мерный вектор. Тогда из

$$(A\cdot\alpha,\alpha) = \left\| \sum_{j=-m+1}^{2^n-1} \alpha_j \cdot \bar{N}_{m-1,j} \right\|_2^2 \tag{0.5}$$

Скалярное произведение здесь понимается в смысле $(\alpha,\beta)=\sum_{i=-m+1}^{2^n-1}\alpha_i\cdot\beta_i$. Из (0.1) и (0.5) следует, что для $\forall\alpha:(A\cdot\alpha,\alpha)\geqslant C\cdot(\alpha,\alpha)$. Отсюда вытекает, что $||A_{-1}||_2\leqslant\frac{1}{C}$.

Обозначим $C_1=\frac{1}{C}$. Тогда получим (0.4). Лемма доказана.

Лемма 2. *Для элементов $a_{ij,-1}$ матрицы A^{-1} справедливы оценки*

$$|a_{ij,-1}| \leqslant C\cdot q^{|i-j|}, \tag{0.6}$$

где константы $C>0$ и $q\in(0,1)$ зависят лишь от m и не зависят от n.

Доказательство следует из теоремы Демко об оценках элементов матриц, обратных к ленточным и леммы 1.

Пусть $||u||_{C[a,b]} = max_{C\in[a,b]}|u(x)|$ - норма в пространстве непрерывных $C[a,b]$ на $[a,b]$ функций. Рассмотрим также специальные весовые нормы. Зафиксируем натуральное $n, h=\frac{b-a}{2^n}$ и $r\ in(0,1]$. Пусть

$$||u||_{h,r,i} = ||r^{|x-x_i|/h}\cdot(x)||_{C[a,b]} \tag{0.7}$$

Замечание 6. *При $r=1$ норма (0.7) совпадает с обычной $C[a,b]$ нормой, а при $r<1$ и малых $h>0$ «срезает» функцию $u(x)$ вне малой окрестности точки x_i.*

Пусть $P = \{P_n, n = 1,2,...\}$ - семейство ортогональных в $L_2[a,b]$ проекторов на пространстве $S(\Delta_{p,q}, m-1,1)$. Через $||P_n||_{h,r,i}$ обозначим нормы операторов P_n, как линейных операторов, действующих в пространстве непрерывных функций с нормой $|| \ ||_{h,r,i}$.

Теорема 12. *Для $\forall r \in (q,1]$, где q - константа из (0.6), найдется такая константа $C > 0$, зависящая лишь от r,m, что для $\forall n,i \in [0,2^n]$ справедливы оценки*

$$||P_n||_{h,r,i} \leqslant C \tag{0.8}$$

Доказательство следует из следующих соображений - пусть $u(x)$ - произвольная непрерывная на отрезке $[a,b]$ функций. Будем искать ее проекцию в виде разложения по B-сплайнам

$$P_n \cdot u(x) = \sum_{j=-m+1}^{2^n-1} \alpha_j \cdot \bar{N}_{m-1,j}. \tag{0.9}$$

Из условий ортогональности для вектора α получаем СЛАУ с матрицей Грама A

$$A \cdot \alpha = U, \tag{0.10}$$

где компоненты вектора $U = \{u_{-m+1},...,u_{2^n-1}\}$ вычисляются по формулам

$$u_j = (u, \bar{N}_{m-1,j}). \tag{0.11}$$

Из (0.3) и свойства B-сплайнов $B_{m-1} \equiv 0, t \notin [x_k, x_{k+m}]$ следует, что

$$|u_j| \leqslant C_2 \cdot m^{1/2} \cdot h^{1/2} \cdot ||u||_{C[x_j, x_{j+m}]}. \tag{0.12}$$

Далее через C_i будем обозначать положительные константы, не зависящие от n. Из (**??**), (**??**) получаем

$$|\alpha_k| \leqslant C_3 \cdot \sum_{j=-m+1}^{2^n-1} q^{|k-j|} \cdot |u_j| \leqslant C_4 \cdot h^{1/2} \cdot \sum_{j=-m+1}^{2^n-1} q^{|k-j|} \cdot ||u||_{C[x_j, x_{j+m}]} \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \cdot h^{|1/2|} \cdot \sum_{j=-m+1}^{2^n-1} q^{k-j} \cdot r^{|x-x_i|/h} \cdot ||r^{|x-x_i|/h} \cdot u(x)||_{C[x_j, x_{j+m}]} \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \cdot h^{|1/2|} \cdot ||u||_{h,r,i} \cdot \sum_{j=-m+1}^{2^n-1} q^{k-j} \cdot r^{-|i-j|} \leqslant C_6 \cdot h^{1/2} \cdot r^{-|i-k|} \cdot ||u||_{h,r,i}.$$

для произвольного k.

Поэтому в силу (0.6), (0.9) при $\forall k$ будет

$$||r^{|x-x_i|/h} \cdot P_n \cdot u(x)||_{C[x_k,x_{k+1}]} \leqslant C_7 \cdot r^{|x_k-x_i|/h} \cdot h_{1/2} \cdot \max_{k-m\leqslant s\leqslant k} |\alpha_s| \leqslant$$

$$\leqslant C_8 \cdot r^{|i-k|} \cdot h^{-1/2} \cdot h^{1/2} \cdot r^{-|i-k|} \cdot ||u||_{h,r,i} \leqslant C_9 \cdot ||u||_{h,r,i}.$$

3.1 Сплайновые аппроксимации в теоремах Карла де Бор

Теорема 13. *Существует такая константа $C_3 = C_3(m)$, что для $\forall g \in C[a,b]$ и для $\forall$ разбиения Δ_n отрезка $[a,b]$ найдется такая функция $g_\Delta \in S(\Delta_n,m-1,1)$, что для любого частичного отрезка $I_i = [x_i,x_{i=1}] \subset [a,b]$*

$$\|g - g_\Delta\|_{C[x_i,x_{i+1}]} \leqslant C_3 \cdot dist_{C[x_{i-m+1},x_{i+m}]}(g,P_{m-1}), \tag{1.13}$$

где P_{m-1} - пространство полиномов степени $\leqslant m-1$.

Теорема 14. *Пусть Δ_n - произвольное разбиение отрезка $[a,b]$, удовлетворяющее условию $C_1 \leqslant \frac{h_i}{h_{i+1}} \leqslant C_2$. Тогда существует такая константа $C_3 > 0$, что для $\forall$ функции $g \in C^{(l+1)}[a,b], 0 \leqslant l \leqslant m-1$ можно указать такой сплайн $g_\Delta \in S(\Delta_n,m-1,1)$, что для любого частичного отрезка $[x_j,x_{j+1}]$ и любого $i \in [0,l]$ будет справедлива оценка*

$$\left\| \frac{d^i}{dt^i}(g - g_\Delta) \right\|_{C[x_j,x_{j+1}]} \leqslant C_3 \cdot h_j^{l+1-i} \cdot \|g^{(l+1)}\|_{C[x_{j-m+1},x_{j+m}]} \tag{1.14}$$

Приводимые выше результаты опубликованы Карлом де Бор (*Carl de Boor*) в [73].

3.2 Оценка элементов корреляционных матриц

3.2.1 Общий случай оценки элементов корреляционных матриц

Пусть $X = \{X_i\}, 0 \leqslant i \leqslant n, n = 2^k$ – последовательность случайных величин. Для каждой реализации последовательности X обозначим через

$PX(t) \in S(\Delta,m-1,1),t \in [0,n]$ интерполяционный сплайн $(m-1)$-ой степени, построенный по точкам $(t_i,X_i),0 \leqslant i \leqslant n$, где $t_i = i$. Рассмотрим $PX(t)$ как случайный процесс при $t \in [0,n]$. Через $K(t,\tau),t,\tau \in [0,n]$ обозначим его корреляционную функцию, а через $K = \{k_{ij}\}$ корреляционную матрицу последовательности X. Через $h = 1$ обозначим шаг разбиения.

Замечание 7. *Предположим, что корреляционная матрица имеет вид, характерный для самоподобного процесса*

$$k_{ij} = \frac{\sigma^2}{2}((2+|i-j|)^{2H} - 2\cdot(1+|i-j|)^{2H} + (|i-j|)^{2H}),i \neq j, \;\; k_{ii} = \frac{\sigma^2}{2} \quad (2.15)$$

где $H \in [0.5,1]$ – показатель Херста.

Можно представить интерполяционный сплайн в виде

$$PX(t) = \frac{t-t_i}{t_{i+m-1}-t_i}X_i + \frac{t_{i+m}-t}{t_{i+m}-t_{i+1}}X_{i+1} \quad (2.16)$$

Тогда для $K(t,\tau)$ справедлива формула:

$$K(t,\tau) = cov\,(PX(t),PX(\tau)) =$$

$$= cov\left(\frac{t-t_i}{t_{i+m-1}-t_i}X_i + \frac{t_{i+m}-t}{t_{i+m}-t_{i+1}}X_{i+1},\frac{\tau-t_j}{t_{j+m-1}-t_j}X_j + \frac{t_{j+m}-\tau}{t_{j+m}-t_{j+1}}X_{j+1}\right) \quad (2.17)$$

Согласно определению ковариации:

$$cov(X,Y) = \mathsf{M}\left[(X-\mathsf{M}X)(Y-\mathsf{M}Y)\right],$$

свойству линейности математического ожидания

$$cov(X,Y) = \mathsf{M}\left[(X-\mathsf{M}X)(Y-\mathsf{M}Y)\right] =$$

$$= \mathsf{M}\left[XY - X\mathsf{M}Y - Y\mathsf{M}X + \mathsf{M}X\mathsf{M}Y\right] = \mathsf{M}\left[XY\right] - \mathsf{M}X\mathsf{M}Y$$

и свойству линейности опрератора ковариации:

$$cov(X+Z,Y) = \mathsf{M}[(X+Z)Y] - \mathsf{M}[X+Z]\mathsf{M}[Y] = \mathsf{M}[XY] + \mathsf{M}[ZY] -$$

$$-(\mathsf{M}[X] - \mathsf{M}[Z])\mathsf{M}[Y] = \mathsf{M}[XY] - \mathsf{M}[X]\mathsf{M}[Y] + \mathsf{M}[ZY] -$$

$$-\mathsf{M}[Z]\mathsf{M}[Y] = cov(X,Y) + cov(Z,Y),$$

получаем

$$K(t,\tau) =$$

$$= cov\left(\frac{t-t_i}{t_{i+m-1}-t_i}X_i,\frac{\tau-t_j}{t_{j+m-1}-t_j}X_j\right) + cov\left(\frac{t-t_i}{t_{i+m-1}-t_i}X_i,\frac{t_{j+m}-\tau}{t_{j+m}-t_{j+1}}X_{j+1}\right) +$$

$$+cov\left(\frac{t_{i+m}-t}{t_{i+m}-t_{i+1}}X_{i+1},\frac{\tau-t_j}{t_{j+m-1}-t_j}X_j\right)+cov\left(\frac{t_{i+m}-t}{t_{i+m}-t_{i+1}}X_{i+1},\frac{t_{j+m}-\tau}{t_{j+m}-t_{j+1}}X_{j+1}\right) =$$

$$= \frac{(t_{i+m}-t)(\tau-t_j)}{(t_{i+m}-t_{i+1})(t_{j+m-1}-t_j)}cov(X_i,X_j)+\frac{(t-t_i)(t_{j+m}-\tau)}{(t_{i+m-1}-t_i)(t_{j+m}-t_{j+1})}cov(X_i,X_{j+1})+$$

$$+\frac{(t_{i+m}-t)(\tau-t_j)}{(t_{i+m}-t_{i+1})(t_{j+m-1}-t_j)}cov(X_{i+1},X_j)+\frac{(t_{i+m}-t)(t_{j+m}-\tau)}{(t_{i+m}-t_{i+1})(t_{j+m}-t_{j+1})}cov(X_{i+1},X_{j+1})$$

Отсюда следует

Лемма 3. *При* $t \in [t_i,t_{i+1}],\tau \in [t_j,t_{j+1}],0 \leqslant i,j \leqslant n$ *справедливы формулы*

$$K(t,\tau) = \frac{(t_{i+m}-t)(\tau-t_j)}{(t_{i+m}-t_{i+1})(t_{j+m-1}-t_j)}k_{ij} + \frac{(t-t_i)(t_{j+m}-\tau)}{(t_{i+m-1}-t_i)(t_{j+m}-t_{j+1})}k_{ij+1} +$$

$$+ \frac{(t_{i+m}-t)(\tau-t_j)}{(t_{i+m}-t_{i+1})(t_{j+m-1}-t_j)}k_{i+1j} + \frac{(t_{i+m}-t)(t_{j+m}-\tau)}{(t_{i+m}-t_{i+1})(t_{j+m}-t_{j+1})}k_{i+1j+1}, \qquad (2.18)$$

$$K(t_i,t_j) = k_{ij},\ 0 \leqslant i,j \leqslant n,$$

т.е. $K(t,\tau)$ *есть би-m-мерный интерполянт* $K = \{k_{ij}\}$ *по узлам разбиения* $\Delta \times \Delta$.

Определим преобразование случайной последовательности X формулой

$$Y_i = (TPX)_i,\ 0 \leqslant i \leqslant n, \qquad (2.19)$$

где T - дискретное вейвлет-преобразование (ДВП) в пространстве $S(\Delta,m-1,1)$.

Поставим задачу оценки элементов ковариационной матрицы $\tilde{K} = \{\tilde{k}_{ij}\},\tilde{k}_{ij} = cov(Y_i,Y_j),0 \leqslant i,j \leqslant n$ по заданной ковариационной матрице $K = \{k_{ij}\}$, $k_{ij} = cov(X_i,X_j)$.

Обозначим через $\chi_0(t),\chi_1(t),\cdots,\chi_n(t)$ набор базисных функций $\varphi_{-1,n_0},\varphi_{0,n_0},\cdots$, $\psi_{-1,n_0+1},\cdots,\psi_{2^{n_0}-1,n_0+1}\cdots$, $\psi_{-1,k},\cdots,\psi_{2^{k-1}-1,k}$, перенумерованный одним индексом. Пусть $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_2[0,n]$, $\Gamma = \{(\chi_i,\chi_j)\}$ – матрица Грама базисных функций в этом скалярном произведении. Через $\Gamma^{-1} = \{\gamma_{ij}\}$ обозначим обратную матрицу. Тогда, согласно (2.19), будем иметь

$$Y = TPX = \Gamma^{-1}((PX,\chi_0),\cdots,(PX,\chi_n))^T$$

Тогда, согласно свойствам оператора ковариации

$$cov(\sum_{i=1}^{n} x_i,y) = \sum_{i=1}^{n} cov(x_i,y),$$

и

$$cov(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{j=1}^{m} y_j) = \sum_{i=1}^{n} cov(x_i, \sum_{j=1}^{m} y_j) = \sum_{i=1}^{n} cov(\sum_{j=1}^{m} y_j,x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} cov(x_i,y_j)$$

получаем

$$\tilde{k}_{ij} = cov(Y_i,Y_j) = cov((TPX)_i,(TPX)_j) =$$

$$= cov((\Gamma^{-1}((PX,\chi_0),\cdots,(PX,\chi_n))^T)_i,(\Gamma^{-1}((PX,\chi_0),\cdots,(PX,\chi_n))^T)_j) =$$

$$= cov(\sum_{s=0}^{n}\gamma_{is}(PX,\chi_s), \sum_{\nu=0}^{n}\gamma_{j\nu}(PX,\chi_\nu)) =$$

$$= \sum_{s=0}^{n}\sum_{\nu=0}^{n}\gamma_{is}\gamma_{j\nu}cov((PX,\chi_s),(PX,\chi_\nu)) \tag{2.20}$$

Введем в рассмотрение матрицу $\hat{K} = \{\hat{k}_{ij}, 0 \leqslant i,j \leqslant n\}$, такую что

$$\hat{k}_{ij} = cov((PX,\chi_i),(PX,\chi_j)) = \int_0^n\int_0^n K(t,\tau)\chi_i(t)\chi_j(\tau)dtd\tau, \tag{2.21}$$

где $K(t,\tau) = cov(PX(t),PX(\tau))$ – корреляционная функция (2.18). Обозначим через γ_i i-й столбец матрицы Γ^{-1}, а через e_i i-й столбец единичной матрицы. Тогда из (2.20),(2.21) получаем

$$\tilde{k}_{ij} = (\hat{K}\gamma_i,\gamma_j) = (\hat{K}\Gamma^{-1}e_i,\Gamma^{-1}e_j) = (\Gamma^{-1}\hat{K}\Gamma^{-1}e_i,e_j).$$

Тем самым доказана

Лемма 4. *Корреляционная матрица последовательности случайных величин Y имеет вид*

$$\tilde{K} = \Gamma^{-1}\hat{K}\Gamma^{-1}, \tag{2.22}$$

где Γ – матрица Грама вейвлет-базиса, $\hat{K}$ – матрица (2.21).

Оценим элементы $\tilde{K}$. Вначале получим оценки элементов матрицы $\hat{K}$. Представим ее в блочном виде:

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} \hat{K}_{11} & \hat{K}_{12} & \cdots & \hat{K}_{1k-n_0+1} \\ \hat{K}_{21} & \hat{K}_{22} & \cdots & \hat{K}_{2k-n_0+1} \\ & & \cdots & \\ \hat{K}_{k-n_0+11} & \hat{K}_{k-n_0+12} & \cdots & \hat{K}_{k-n_0+1k-n_0+1} \end{pmatrix}, \quad \hat{K}_{p\nu} = \{\hat{k}_{ij}^{p\nu}\}, \tag{2.23}$$

где

$$\hat{k}_{ij}^{p\nu} = \int_0^n \int_0^n K(t,\tau)\psi_{i,p}(t)\psi_{j,\nu}(\tau)dtd\tau, \ \ (p \geqslant 2,\nu \geqslant 2), \tag{2.24}$$

$$\hat{k}_{ij}^{1\nu} = \int_0^n \int_0^n K(t,\tau)\varphi_{i,n_0}(t)\psi_{j,\nu}(\tau)dtd\tau, \tag{2.25}$$

$$\hat{k}_{ij}^{p1} = \int_0^n \int_0^n K(t,\tau)\psi_{i,p}(t)\varphi_{j,n_0}(\tau)dtd\tau, \tag{2.26}$$

$$\hat{k}_{ij}^{11} = \int_0^n \int_0^n K(t,\tau)\varphi_{i,n_0}(t)\varphi_{j,n_0}(\tau)dtd\tau. \tag{2.27}$$

Оценим элементы (2.24). Положим $\nu = p + s, s \geqslant 0$. Тогда

$$\hat{k}_{ij}^{pp+s} = \int_0^n \int_0^n K(t,\tau)\psi_{i,p}(t)\psi_{j,p+s}(\tau)dtd\tau, \tag{2.28}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\mu_{j,p+s}(t) = \int_0^n K(t,\tau)\psi_{j,p+s}(\tau)d\tau. \tag{2.29}$$

Тогда для любой $\nu(\tau) \in S(\Delta_{p+s-1}, m-1, 1)$ имеем

$$\mu_{j,p+s}(t) = \int_0^n (K(t,\tau) - \nu(\tau))\psi_{j,p+s}(\tau)d\tau \tag{2.30}$$

в силу ортогональности $\psi_{j,p+s}$ пространству $S(\Delta_{p+s-1}, m-1, 1)$.

В силу оценок погрешности $(m-1)$-ой интерполяции существует такая $\nu(\tau) \in S(\Delta_{p+s-1}, m-1, 1)$, что

$$\max_{\tau \in supp\psi_{j,p+s}} |K(t,\tau) - \nu(\tau)| \leqslant Ch_{p+s}^m \max_{\tau \in supp\psi_{j,p+s}} |\frac{\partial^{(m)} K(t,\tau)}{\partial \tau^{(m)}}|. \tag{2.31}$$

В силу $supp\psi_{j,p+s} \cap supp\psi_{i,p} = \varnothing$ и оценок ядра $K(t,\tau)$ имеем

$$|\frac{\partial^{(m)} K(t,\tau)}{\partial \tau^{(m)}}| \leqslant \frac{C}{(1 + |t-\tau|)^{m+\alpha}}, \ \alpha = 2 - 2H \in (0,1)$$

Отсюда и из (2.30) имеем

$$\max_{\tau\in supp\psi_{j,p+s}} |K(t,\tau)-\nu(\tau)| \leqslant Ch^m_{p+s} \max_{\tau\in supp\psi_{j,p+s}} \frac{1}{(1+|t-\tau|)^{m+\alpha}}. \tag{2.32}$$

Далее рассмотрим два случая.

1. $t\in[t^{p+s}_l,t^{p+s}_{l+1}],\rho\{t\in[t^{p+s}_l,t^{p+s}_{l+1}],supp\psi_{j,p+s}\}\geqslant h_{p+s}$.
2. $t\in[t^{p+s}_l,t^{p+s}_{l+1}],\rho\{t\in[t^{p+s}_l,t^{p+s}_{l+1}],supp\psi_{j,p+s}\}< h_{p+s}$.

В первом случае для определенности предположим, что правый конец $[t^{p+s}_l,t^{p+s}_{l+1}]$ левее левого конца $supp\psi_{j,p+s}$, т.е. $l+1<j$. Тогда в силу (2.28),(2.29),(2.32) имеем

$$|\mu_{j,p+s}(t)| \leqslant \int_{supp\psi_{j,p+s}} |(K(t,\tau)-\nu(\tau))|\cdot|\psi_{j,p+s}(\tau)|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant Ch^m_{p+s}h^{-1/2}_{p+s}\int_{supp\psi_{j,p+s}} \max_{\tau\in supp\psi_{j,p+s}} \frac{1}{(1+|t-\tau|)^{m+\alpha}}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant Ch^m_{p+s}h^{-1/2}_{p+s}\int_{supp\psi_{j,p+s}} \max_{\tau\in supp\psi_{j,p+s}} \frac{1}{(1+|t^{p+s}_{l+1}-t^{p+s}_j|)^{m+\alpha}}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant Ch^m_{p+s}h^{-1/2}_{p+s}\frac{h_{p+s}}{|(l+1)h_{p+s}-jh_{p+s}|^{m+\alpha}} = Ch^{1/2-\alpha}_{p+s}\frac{1}{|l+1-j|^{m+\alpha}} =$$

$$= Ch^{1/2-\alpha}_{p+s}\frac{1}{(1+|j-l|)^{m+\alpha}}. \tag{2.33}$$

Аналогично получается оценка, когда левый конец $[t^{p+s}_l,t^{p+s}_{l+1}]$ правее правого конца $supp\psi_{j,p+s}$, т.е. $l>j+4m-2$:

$$|\mu_{j,p+s}(t)| \leqslant \int_{supp\psi_{j,p+s}} |(K(t,\tau)-\nu(\tau))|\cdot|\psi_{j,p+s}(\tau)|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant Ch^m_{p+s}h^{-1/2}_{p+s}\int_{supp\psi_{j,p+s}} \max_{\tau\in supp\psi_{j,p+s}} \frac{1}{(1+|t-\tau|)^{m+\alpha}}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant Ch^m_{p+s}h^{-1/2}_{p+s}\int_{supp\psi_{j,p+s}} \max_{\tau\in supp\psi_{j,p+s}} \frac{1}{(1+|t^{p+s}_{l}-t^{p+s}_{j+4m-2}|)^{m+\alpha}}d\tau \leqslant$$

$$\leqslant Ch^m_{p+s}h^{-1/2}_{p+s}\frac{h_{p+s}}{|lh_{p+s}-(j+4m-2)h_{p+s}|^{m+\alpha}} = Ch^{1/2-\alpha}_{p+s}\frac{1}{|l+2-4m-j|^{m+\alpha}} =$$

$$= Ch^{1/2-\alpha}_{p+s}\frac{1}{(2-4m+|j-l|)^{m+\alpha}}. \tag{2.34}$$

Во втором случае имеем при $\nu(y)\equiv 0$ аналогично (2.33)

$$|\mu_{j,p+s}(t)| \leqslant \int_{supp\psi_{j,p+s}} |(K(t,\tau))|\cdot|\psi_{j,p+s}(\tau)|d\tau \leqslant Ch^{1/2-\alpha}_{p+s}. \tag{2.35}$$

Для дальнейших оценок вначале рассмотрим случай $\rho\{supp\psi_{j,p+s},\psi_{i,p}\} \geqslant h_{p+s}$. Рассмотрим два подслучая:
а) $t_j^{p+s} > t_{i+4m-2}^p$, т.е. $\frac{j}{2^{p+s}} \geqslant \frac{i+4m-2}{2^p}$ или $j - i\cdot 2^s > (4m-2)\cdot 2^s$;
б) $t_{j+4m-2}^{p+s} < t_i^p$, т.е. $\frac{j+4m-2}{2^{p+s}} < \frac{i}{2^p}$ или $i\cdot 2^s - j > (4m-2)\cdot 2^s$.

В подслучае а) имеем в силу (2.28),(2.29),(2.33),(2.35)

$$|\hat{k}_{ij}^{pp+s}| \leqslant \int_{supp\psi_{i,p}} |\mu_{j,p+s}(t)|\cdot|\psi_{i,p}(t)|dt = \sum_{l=i\cdot 2^s}^{(i+4m-2)\cdot 2^s} \int_{t_l^{p+s}}^{t_{l+1}^{p+s}} |\mu_{j,p+s}(t)|\cdot|\psi_{i,p}(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant C h_p^{-1/2} h_{p+s}^{1/2-\alpha} \sum_{l=i\cdot 2^s}^{(i+4m-2)\cdot 2^s} \frac{h_{p+s}}{(1+|j-l|)^{m+\alpha}} =$$

$$= C\cdot 2^{(p-k)/2}\cdot 2^{(3/2-\alpha)(k-p-s)}\cdot \sum_{l=i\cdot 2^s}^{(i+4m-2)\cdot 2^s} \frac{1}{(1+|j-l|)^{m+\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant C\cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)}\cdot 2^{-(3/2-\alpha)s}\cdot$$

$$\cdot \begin{cases} \frac{C_1}{(j-i\cdot 2^s-(4m-2)\cdot 2^s+1)^{m-1+\alpha}}, i\cdot 2^s + (4m-2)\cdot 2^s < j < i\cdot 2^s + 2\cdot(4m-2), \\ 2^s\cdot \frac{1}{(j-i\cdot 2^s-(4m-2)\cdot 2^s+1)^{m+\alpha}}, j \geqslant i\cdot 2^s + 2\cdot(4m-2)\cdot 2^s. \end{cases} \tag{2.36}$$

Далее, так как знаменатель в первой строке (2.36) есть $O(2^{s(m-1+\alpha)})$, то с учетом неравенства $\min\{\frac{1}{a^m},\frac{1}{b^m}\} \leqslant \frac{2^m}{(a+b)^m}$ при $a>0, b>0, m>0$, имеем

$$\frac{1}{2^s(j-i\cdot 2^s-(4m-2)\cdot 2^s+1)^{m-1+\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \min\{\frac{1}{(j-i\cdot 2^s-(4m-2)\cdot 2^s+1)^{m+\alpha}}, \frac{1}{(2^{s/(m+\alpha)})^{m+\alpha}}\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2\cdot 2^{m+\alpha}}{(2^{\frac{s}{m+\alpha}}+j-i\cdot 2^s-(4m-2)\cdot 2^s+1)^{m+\alpha}}. \tag{2.37}$$

Из (2.36),(2.37), с учетом того, что добавление $2^{\frac{s}{m+\alpha}}$ во второй строке (2.36) не меняет порядка знаменателя, получаем в подслучае а)

$$|\hat{k}_{ij}^{pp+s}| \leqslant C_3\cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)}\cdot 2^{-(1/2-\alpha)s} \frac{1}{(2^{\frac{s}{m+\alpha}}+j-i\cdot 2^s-(4m-2)\cdot 2^s+1)^{m+\alpha}} =$$

$$\leqslant C_3\cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)}\cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{(1+2^{-\frac{s}{m+\alpha}}(j-i\cdot 2^s-(4m-2)\cdot 2^s))^{m+\alpha}},$$

$$j - i\cdot 2^s > (4m-2)\cdot 2^s. \tag{2.38}$$

В случае б) аналогичным образом получаем

$$|\hat{k}_{ij}^{pp+s}| \leqslant C_3 \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{(1+2^{-\frac{s}{m+\alpha}}(i \cdot 2^s - j - 4m + 2))^{m+\alpha}},$$

$$j - i \cdot 2^s < -4m + 2. \tag{2.39}$$

Пусть, наконец, $\rho\{supp\psi_{j,p+s}, \psi_{i,p}\} < h_{p+s}$. В этом случае аналогично (2.38) получаем

$$|\hat{k}_{ij}^{pp+s}| \leqslant \int_{supp\psi_{i,p}} |\mu_{j,p+s}(t)| \cdot |\psi_{i,p}(t)| dt \leqslant C h_p^{-1/2} h_{p+s}^{1/2-\alpha} \sum_{l=i\cdot 2^s}^{(i+4m-2)\cdot 2^s} \frac{h_{p+s}}{(1+|j-l|)^{m+\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s}, \quad -4m+2 \leqslant j - i \cdot 2^s \leqslant (4m-2) \cdot 2^s. \tag{2.40}$$

В случае $p = 1$ оценки $\hat{k}_{ij}^{pp+s}$ проводятся аналогично:

$$|\hat{k}_{ij}^{11+s}| \leqslant \int_{supp\psi_{i,1}} |\mu_{j,1+s}(t)| \cdot |\psi_{i,1}(t)| dt \leqslant C h_1^{-1/2} h_{1+s}^{1/2-\alpha} \sum_{l=i\cdot 2^s}^{(i+4m-2)\cdot 2^s} \frac{h_{1+s}}{(1+|j-l|)^{m+\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \cdot 2^{(1-\alpha)(k-1)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s}, \quad -4m+2 \leqslant j - i \cdot 2^s \leqslant (4m-2) \cdot 2^s. \tag{2.41}$$

Тем самым доказана

Теорема 15. *Для элементов $\hat{k}_{ij}^{pp+s}, \hat{k}_{ij}^{p+sp}$ матрицы $\hat{K}_{pp+s}, \hat{K}_{p+sp}$ справедливы оценки ($p \geqslant 2$)*

$$|\hat{k}_{ij}^{pp+s}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s}.$$

$$\cdot \begin{cases} 1, -4m+2 \leqslant j - i \cdot 2^s \leqslant (4m-2) \cdot 2^s, \\ \frac{1}{(1+2^{-\frac{s}{m+\alpha}}(|j-i\cdot 2^s| - (4m-2)\cdot 2^s))^{m+\alpha}}, j - i \cdot 2^s > (4m-2) \cdot 2^s, \\ \frac{1}{(1+2^{-\frac{s}{m+\alpha}}(|j-i\cdot 2^s| - 4m+2))^{m+\alpha}}, j - i \cdot 2^s < -4m+2, \end{cases} \tag{2.42}$$

$$|\hat{k}_{ij}^{p+sp}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s}.$$

$$\cdot \begin{cases} 1, -4n+2 \leqslant i - j \cdot 2^s \leqslant (4m-2) \cdot 2^s, \\ \frac{1}{(1+2^{-\frac{s}{m+\alpha}}(|i-j\cdot 2^s| - (4m-2)\cdot 2^s))^{m+\alpha}}, i - j \cdot 2^s > (4m-2) \cdot 2^s, \\ \frac{1}{(1+2^{-\frac{s}{m+\alpha}}(|i-j\cdot 2^s| - 4m+2))^{m+\alpha}}, i - j \cdot 2^s < -4m+2, \end{cases} \tag{2.43}$$

При $p = 1$ справедливы оценки

$$|\hat{k}_{ij}^{11+s}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-1)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s}, \tag{2.44}$$

$$|\hat{k}_{ij}^{1+s1}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-1)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s}. \tag{2.45}$$

Из доказанной теоремы вытекает

Теорема 16. *Для элементов матрицы $\hat{K}$ справедливы оценки ($p \geqslant 2$)*

$$|\hat{k}_{ij}^{pp+s}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{(1+|i-\frac{j}{2^s}|)^{m+\alpha}}, \tag{2.46}$$

$$|\hat{k}_{ij}^{p+sp}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{(1+|j-\frac{i}{2^s}|)^{m+\alpha}}, \tag{2.47}$$

При $p=1$ справедливы оценки аналогичные (2.44), (2.45).

Докажем это для $\hat{k}_{ij}^{pp+s}$, т.к. для $\hat{k}_{ij}^{p+ps}$ доказательство осуществляется аналогично. Из оценки (2.42) следует, что

$$|\hat{k}_{ij}^{pp+s}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s}.$$

$$\cdot \begin{cases} 1, -\frac{4m-2}{2^s} \leqslant \left|i-\frac{j}{2^s}\right| \leqslant 4m-2 \\ \frac{1}{(1+2^{-\frac{s}{m+\alpha}}(|j-i\cdot 2^s|-(4m-2)\cdot 2^s))^{m+\alpha}}, i-\frac{j}{2^s} < -4m+2 \\ \frac{1}{(1+2^{-\frac{s}{m+\alpha}}(|j-i\cdot 2^s|-4m+2))^{m+\alpha}}, i-\frac{j}{2^s} > \frac{4m-2}{2^s} \end{cases} \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s}.$$

$$\cdot \begin{cases} 1, -\frac{4m-2}{2^s} \leqslant \left|i-\frac{j}{2^s}\right| \leqslant 4m-2 \\ \frac{1}{(1+2^{s\frac{m+\alpha-1}{m+\alpha}}(|i-\frac{j}{2^s}|-(4m-2)))^{m+\alpha}}, i-\frac{j}{2^s} < -4m+2 \\ \frac{1}{(1+2^{s\frac{m+\alpha-1}{m+\alpha}}(|i-\frac{j}{2^s}|-\frac{4m-2}{2^s}))^{m+\alpha}}, i-\frac{j}{2^s} > \frac{4m-2}{2^s} \end{cases} \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s}.$$

$$\cdot \begin{cases} 1, -\frac{4m-2}{2^s} \leqslant \left|i-\frac{j}{2^s}\right| \leqslant 4m-2 \\ \frac{1}{(1+|i-\frac{j}{2^s}|-(4m-2))^{m+\alpha}}, i-\frac{j}{2^s} < -4m+2 \\ \frac{1}{(1+|j-i\cdot 2^s|-4m+2)^{m+\alpha}}, i-\frac{j}{2^s} > \frac{4m-2}{2^s} \end{cases} \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot C_1 \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s}.$$

$$\cdot \begin{cases} 1, -\frac{4m-2}{2^s} \leqslant \left|i-\frac{j}{2^s}\right| \leqslant 4m-2 \\ \frac{1}{(1+|i-\frac{j}{2^s}|)^{m+\alpha}}, i-\frac{j}{2^s} < -4m+2 \\ \frac{1}{(1+|j-i\cdot 2^s|)^{m+\alpha}}, i-\frac{j}{2^s} > \frac{4m-2}{2^s} \end{cases} \leqslant$$

$$\leqslant C \cdot C_1 \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s}.$$

$$\cdot \begin{cases} 1, -\frac{4m-2}{2^s} \leqslant \left|i-\frac{j}{2^s}\right| \leqslant 4m-2 \\ \frac{1}{(1+|i-\frac{j}{2^s}|)^{m+\alpha}}, \left|i-\frac{j}{2^s}\right| > 4m-2 \end{cases} \tag{2.48}$$

Обоснуем последний переход:

$$\frac{1}{(1+\left|i-\frac{j}{2^s}\right|-(4m+2))^{m+\alpha}} \leqslant \frac{C_1}{(1+\left|i-\frac{j}{2^s}\right|)^{m+\alpha}} <=>$$

$$<=> \frac{(1+\left|i-\frac{j}{2^s}\right|)^{m+\alpha}}{(1+\left|i-\frac{j}{2^s}\right|-(4m+2))^{m+\alpha}} \leqslant C_1 <=>$$

$$<=> \frac{1+\left|i-\frac{j}{2^s}\right|}{1+\left|i-\frac{j}{2^s}\right|-(4m+2)} \leqslant C_1^{\frac{1}{m+\alpha}} \tag{2.49}$$

Но при $4m-2 < \left|i-\frac{j}{2^s}\right| < 2(4m-2)$ неравенство (2.49) верно с константой $C_1^{\frac{1}{m+\alpha}} = 1+2(4m-2)$, а при $\left|i-\frac{j}{2^s}\right| > 2(4m-2)$ имеем

$$\frac{1+\left|i-\frac{j}{2^s}\right|}{1+\left|i-\frac{j}{2^s}\right|-(4m-2)} = 1+\frac{4m-2}{1+\left|i-\frac{j}{2^s}\right|-(4m-2)} \leqslant 1+(4m-2),$$

т.е. в обоих случаях (2.49) справедливо при $C_1^{m+\alpha} = 1+2(4m-2)$. Тем самым неравентсво (2.48) доказано. Из (2.48) вытекает (2.46), т.к. при $\left|i-\frac{j}{2^s}\right| \leqslant 4m-2$ имеем $1 \leqslant \frac{(1+(4m-2))^{m+\alpha}}{(1+\left|i-\frac{j}{2^s}\right|)^{m+\alpha}} = \frac{C(m+\alpha)}{(1+\left|i-\frac{j}{2^s}\right|)^{m+\alpha}}$. Теорема доказана.

Следствие 4. *Для элементов диагональных блоков* ($s=0$,$p \geqslant 2$) *справедливы оценки*

$$|\hat{k}_{ij}^{pp}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot \frac{1}{(1+|i-j|)^{m+\alpha}}, \tag{2.50}$$

Заметим, что в силу финитности и полуортогональности матрица Грама Г будет блочно-диагональной матрицей, причем диагональные блоки - трехдиагональные матрицы, для обратных к которым в силу теоремы Демко [29] справедливы оценки

$$\left|\gamma_{ij,-1}^{pp}\right| \leqslant Cq^{|i-j|}, 0<q<1 \tag{2.51}$$

Поэтому из формулы (2.51), теоремы 16 и следствия 4 вытекает

Теорема 17. *Для элементов матрицы $\tilde{K}$ справедливы оценки, аналогичные (2.46)-(2.50).*

3.2.2 Оценка элементов корреляционных матриц для линейного случая

Пусть $X = \{X_i\}, 0 \leqslant i \leqslant n, n = 2^k$ – последовательность случайных величин. Для каждой реализации последовательности X обозначим через $PX(t) \in S(\Delta,1,1), t \in [0,n]$ интерполяционный сплайн первой степени (непрерывную ломаную), построенный по точкам $(t_i,X_i), 0 \leqslant i \leqslant n$, где $t_i = i$.

Все обозначения предыдущего параграфа сохраняются: $PX(t)$ - случайный процесс при $t \in [0,n]$, $K(t,\tau), t,\tau \in [0,n]$ его корреляционная функция, $K = \{k_{ij}\}$ корреляционная матрица последовательности X имеющая вид (2.15), $h = 1$ - шаг разбиения.

Линейный интерполяционный сплайн можно представить в виде разделенной разности 2-го порядка:

$$PX(t) = X_i + \frac{X_{i+1} - X_i}{t_{i+1} - t_i}(t - t_i) = \frac{X_i(t_{i+1} - t_i) + (X_{i+1} - X_i)(t - t_i)}{t_{i+1} - t_i} =$$

$$= \frac{X_i(t_{i+1} - t) + X_{i+1}(t - t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

, умноженной на $(t_{i+1} - t_i)$:

$$PX(t) = \frac{X_i(t_{i+1} - t) + X_{i+1}(t - t_i)}{t_{i+1} - t_i} \cdot (t_{i+1} - t_i) = X_i(t_{i+1} - t) + X_{i+1}(t - t_i) \tag{2.52}$$

Тогда для $K(t,\tau)$ справедлива формула:

$$K(t,\tau) = cov\,(PX(t),PX(\tau)) =$$

$$= cov\,(X_i(t_{i+1} - t) + X_{i+1}(t - t_i), X_j(t_{j+1} - \tau) + X_{j+1}(\tau - t_j)) \tag{2.53}$$

Согласно определению ковариации, свойству линейности математического ожидания и свойству линейности опрератора ковариации получаем:

$$K(t,\tau) = cov\,((t - t_i)X_{i+1},(\tau - t_j)X_{j+1}) + cov\,((t - t_i)X_{i+1},(t_{j+1} - \tau)X_j)$$

$$+ cov\,((t_{i+1} - t)X_i,(\tau - t_j)X_{j+1}) + cov\,((t_{i+1} - t)X_i,(t_{j+1} - \tau)X_j) =$$

$$= (t - t_i)(\tau - t_j)cov(X_{i+1},X_{j+1}) + (t - t_i)(t_{j+1} - \tau)cov(X_{i+1},X_j) +$$

$$+ (t_{i+1} - t)(\tau - t_j)cov(X_i,X_{j+1}) + (t_{i+1} - t)(t_{j+1} - \tau)cov(X_i,X_j)$$

Отсюда следует

Лемма 5. *При* $t \in [t_i,t_{i+1}],\tau \in [t_j,t_{j+1}],0 \leqslant i,j \leqslant n$ *справедливы формулы*

$$K(t,\tau) = (t_{i+1} - t)(t_{j+1} - \tau)k_{ij} + (t_{i+1} - t)(\tau - t_j)k_{ij+1} +$$

$$+ (t - t_i)(t_{j+1} - \tau)k_{i+1j} + (t - t_i)(\tau - t_j)k_{i+1j+1}, \tag{2.54}$$

$$K(t_i,t_j) = k_{ij},\ 0 \leqslant i,j \leqslant n,$$

т.е. $K(t,\tau)$ *есть билинейный интерполянт* $K = \{k_{ij}\}$ *по узлам разбиения* $\Delta \times \Delta$.

Преобразование случайной последовательности X определяется формулой (2.19), где T – дискретное вейвлет-преобразование (ДВП) в пространстве $S(\Delta,1,1)$.

Задача оценки элементов ковариационной матрицы $\tilde{K} = \{\tilde{k}_{ij}\}, \tilde{k}_{ij} = cov(Y_i,Y_j),0 \leqslant i,j \leqslant n$ по заданной ковариационной матрице $K = \{k_{ij}\}$, $k_{ij} = cov(X_i,X_j)$ сводится к оценке элементов матрицы (2.23).

В силу оценок погрешности кусочно-линейной интерполяции существует такая $\nu(\tau) \in S(\Delta_{p+s-1},1,1)$, что

$$\max_{\tau \in supp\psi_{j,p+s}} |K(t,\tau) - \nu(\tau)| \leqslant Ch^2_{p+s} \max_{\tau \in supp\psi_{j,p+s}} |\frac{\partial^2 K(t,\tau)}{\partial \tau^2}|. \tag{2.55}$$

В силу $supp\psi_{j,p+s} \cap supp\psi_{i,p} = \varnothing$ и оценок ядра $K(t,\tau)$ имеем

$$|\frac{\partial^2 K(t,\tau)}{\partial \tau^2}| \leqslant \frac{C}{(1 + |t - \tau|)^{2+\alpha}},\ \alpha = 2 + 2H \in (0,1)$$

Отсюда и из (2.55) имеем

$$\max_{\tau \in supp\psi_{j,p+s}} |K(t,\tau) - \nu(\tau)| \leqslant Ch^2_{p+s} \max_{\tau \in supp\psi_{j,p+s}} \frac{1}{(1 + |t - \tau|)^{2+\alpha}}. \tag{2.56}$$

Далее рассмотрим два случая.

1. $t \in [t_l^{p+s},t_{l+1}^{p+s}],\rho\{t \in [t_l^{p+s},t_{l+1}^{p+s}],supp\psi_{j,p+s}\} \geqslant h_{p+s}$.
2. $t \in [t_l^{p+s},t_{l+1}^{p+s}],\rho\{t \in [t_l^{p+s},t_{l+1}^{p+s}],supp\psi_{j,p+s}\} < h_{p+s}$.

В первом случае для определенности предположим, что правый конец $[t_l^{p+s},t_{l+1}^{p+s}]$ левее левого конца $supp\psi_{j,p+s}$, т.е. $l + 1 < j$. Тогда в силу (2.28),(2.29),(2.56) имеем

$$|\mu_{j,p+s}(t)| \leqslant \int_{supp\psi_{j,p+s}} |(K(t,\tau) - \nu(\tau))| \cdot |\psi_{j,p+s}(\tau)| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant Ch_{p+s}^2 h_{p+s}^{-1/2} \int_{supp\psi_{j,p+s}} \max_{\tau\in supp\psi_{j,p+s}} \frac{1}{(1+|t-\tau|)^{2+\alpha}} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant Ch_{p+s}^2 h_{p+s}^{-1/2} \int_{supp\psi_{j,p+s}} \max_{\tau\in supp\psi_{j,p+s}} \frac{1}{(1+|t_{l+1}^{p+s}-t_j^{p+s}|)^{2+\alpha}} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant Ch_{p+s}^2 h_{p+s}^{-1/2} \frac{h_{p+s}}{|(l+1)h_{p+s}-jh_{p+s}|^{2+\alpha}} = Ch_{p+s}^{1/2-\alpha} \frac{1}{|l+1-j|^{2+\alpha}} =$$

$$= Ch_{p+s}^{1/2-\alpha} \frac{1}{(1+|j-l|)^{2+\alpha}}. \tag{2.57}$$

Аналогично получается оценка, когда левый конец $[t_l^{p+s},t_{l+1}^{p+s}]$ правее правого конца $supp\psi_{j,p+s}$, т.е. $l > j+6$:

$$|\mu_{j,p+s}(t)| \leqslant \int_{supp\psi_{j,p+s}} |(K(t,\tau)-\nu(\tau))| \cdot |\psi_{j,p+s}(\tau)| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant Ch_{p+s}^2 h_{p+s}^{-1/2} \int_{supp\psi_{j,p+s}} \max_{\tau\in supp\psi_{j,p+s}} \frac{1}{(1+|t-\tau|)^{2+\alpha}} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant Ch_{p+s}^2 h_{p+s}^{-1/2} \int_{supp\psi_{j,p+s}} \max_{\tau\in supp\psi_{j,p+s}} \frac{1}{(1+|t_l^{p+s}-t_{j+6}^{p+s}|)^{2+\alpha}} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant Ch_{p+s}^2 h_{p+s}^{-1/2} \frac{h_{p+s}}{|lh_{p+s}-(j+6)h_{p+s}|^{2+\alpha}} = Ch_{p+s}^{1/2-\alpha} \frac{1}{|l-6-j|^{2+\alpha}} =$$

$$= Ch_{p+s}^{1/2-\alpha} \frac{1}{(-6+|j-l|)^{2+\alpha}}. \tag{2.58}$$

Во втором случае имеем при $\nu(y) \equiv 0$ аналогично (2.57)

$$|\mu_{j,p+s}(t)| \leqslant \int_{supp\psi_{j,p+s}} |(K(t,\tau))| \cdot |\psi_{j,p+s}(\tau)| d\tau \leqslant Ch_{p+s}^{1/2-\alpha}. \tag{2.59}$$

Для дальнейших оценок вначале рассмотрим случай $\rho\{supp\psi_{j,p+s},\psi_{i,p}\} \geqslant h_{p+s}$. Рассмотрим два подслучая:

а) $t_j^{p+s} > t_{i+6}^p$, т.е. $\frac{j}{2^{p+s}} \geqslant \frac{i+6}{2^p}$ или $j - i\cdot 2^s > 6\cdot 2^s$;

б) $t_{j+6}^{p+s} < t_i^p$, т.е. $\frac{j+6}{2^{p+s}} < \frac{i}{2^p}$ или $i\cdot 2^s - j > 6\cdot 2^s$.

В подслучае а) имеем в силу (2.28),(2.29),(2.57),(2.59) аналогично с (2.36)

$$|\hat{k}_{ij}^{pp+s}| \leqslant \int_{supp\psi_{i,p}} |\mu_{j,p+s}(t)| \cdot |\psi_{i,p}(t)| dt = \sum_{l=i\cdot 2^s}^{(i+6)\cdot 2^s} \int_{t_l^{p+s}}^{t_{l+1}^{p+s}} |\mu_{j,p+s}(t)| \cdot |\psi_{i,p}(t)| dt \leqslant$$

$$\leqslant Ch_p^{-1/2} h_{p+s}^{1/2-\alpha} \sum_{l=i\cdot 2^s}^{(i+6)\cdot 2^s} \frac{h_{p+s}}{(1+|j-l|)^{2+\alpha}} =$$

$$= C2^{(p-k)/2} \cdot 2^{(3/2-\alpha)(k-p-s)} \cdot \sum_{l=i\cdot 2^s}^{(i+6)\cdot 2^s} \frac{1}{(1+|j-l|)^{2+\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant C2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \cdot \begin{cases} \frac{C_1}{(j-i\cdot 2^s-6\cdot 2^s+1)^{1+\alpha}}, i\cdot 2^s+6\cdot 2^s < j < i\cdot 2^s+2\cdot 6, \\ 2^s \cdot \frac{1}{(j-i\cdot 2^s-6\cdot 2^s+1)^{2+\alpha}}, j \geqslant i\cdot 2^s+2\cdot 6\cdot 2^s. \end{cases} \tag{2.60}$$

Далее, так как знаменатель в первой строке (2.60) есть $O(2^{s(1+\alpha)})$, то с учетом неравенства $\min\{\frac{1}{a^m},\frac{1}{b^m}\} \leqslant \frac{2^m}{(a+b)^m}$ при $a>0$,$b>0$,$m>0$, имеем

$$\frac{1}{2^s(j-i\cdot 2^s-6\cdot 2^s+1)^{1+\alpha}} \leqslant C_2 \min\{\frac{1}{(j-i\cdot 2^s-6\cdot 2^s+1)^{2+\alpha}}, \frac{1}{(2^{s/(2+\alpha)})^{2+\alpha}}\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2\cdot 2^{2+\alpha}}{(2^{\frac{s}{2+\alpha}}+j-i\cdot 2^s-6\cdot 2^s+1)^{2+\alpha}}. \tag{2.61}$$

Из (2.60),(2.61) с учетом того, что добавление $2^{\frac{s}{2+\alpha}}$ во второй строке (2.60) не меняет порядка знаменателя, получаем в подслучае а)

$$|\hat{k}_{ij}^{pp+s}| \leqslant C_3 \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(1/2-\alpha)s} \frac{1}{(2^{\frac{s}{2+\alpha}}+j-i\cdot 2^s-6\cdot 2^s+1)^{2+\alpha}} =$$

$$\leqslant C_3 \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{(1+2^{-\frac{s}{2+\alpha}}(j-i\cdot 2^s-6\cdot 2^s))^{2+\alpha}}, j-i\cdot 2^s > 6\cdot 2^s. \tag{2.62}$$

В случае б) аналогичным образом получаем

$$|\hat{k}_{ij}^{pp+s}| \leqslant C_3 \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{(1+2^{-\frac{s}{2+\alpha}}(i\cdot 2^s-j-6))^{2+\alpha}}, j-i\cdot 2^s < -6. \tag{2.63}$$

Пусть, наконец, $\rho\{supp\psi_{j,p+s},\psi_{i,p}\} < h_{p+s}$. В этом случае аналогично (2.62) получаем

$$|\hat{k}_{ij}^{pp+s}| \leqslant \int_{supp\psi_{i,p}} |\mu_{j,p+s}(t)| \cdot |\psi_{i,p}(t)|dt \leqslant Ch_p^{-1/2}h_{p+s}^{1/2-\alpha} \sum_{l=i\cdot 2^s}^{(i+6)\cdot 2^s} \frac{h_{p+s}}{(1+|j-l|)^{2+\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s}, \quad -6 \leqslant j-i\cdot 2^s \leqslant 6\cdot 2^s. \tag{2.64}$$

В случае $p=1$ оценки $\hat{k}_{ij}^{pp+s}$ проводятся аналогично:

$$|\hat{k}_{ij}^{11+s}| \leqslant \int_{supp\psi_{i,1}} |\mu_{j,1+s}(t)| \cdot |\psi_{i,1}(t)|dt \leqslant Ch_1^{-1/2}h_{1+s}^{1/2-\alpha} \sum_{l=i\cdot 2^s}^{(i+6)\cdot 2^s} \frac{h_{1+s}}{(1+|j-l|)^{2+\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \cdot 2^{(1-\alpha)(k-1)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s}, \quad -6 \leqslant j - i \cdot 2^s \leqslant 6 \cdot 2^s. \tag{2.65}$$

Тем самым доказана

Теорема 18. *Для элементов матрицы $\hat{K}$ справедливы оценки ($p \geqslant 2$)*

$$|\hat{k}_{ij}^{pp+s}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \begin{cases} 1, -6 \leqslant j - i \cdot 2^s \leqslant 6 \cdot 2^s, \\ \frac{1}{(1+2^{-\frac{s}{2+\alpha}}(|j-i\cdot 2^s|-6\cdot 2^s))^{2+\alpha}}, j - i \cdot 2^s > 6 \cdot 2^s, \\ \frac{1}{(1+2^{-\frac{s}{2+\alpha}}(|j-i\cdot 2^s|-6))^{2+\alpha}}, j - i \cdot 2^s < -6, \end{cases}, \tag{2.66}$$

$$|\hat{k}_{ij}^{p+sp}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \begin{cases} 1, -6 \leqslant i - j \cdot 2^s \leqslant 6 \cdot 2^s, \\ \frac{1}{(1+2^{-\frac{s}{2+\alpha}}(|i-j\cdot 2^s|-6\cdot 2^s))^{2+\alpha}}, i - j \cdot 2^s > 6 \cdot 2^s, \\ \frac{1}{(1+2^{-\frac{s}{2+\alpha}}(|i-j\cdot 2^s|-6))^{2+\alpha}}, i - j \cdot 2^s < -6, \end{cases} \tag{2.67}$$

При $p = 1$ справедливы оценки аналогичные (2.44), (2.45).

Из доказанной теоремы вытекает

Теорема 19. *Для элементов матрицы $\hat{K}$ справедливы оценки ($p \geqslant 2$)*

$$|\hat{k}_{ij}^{pp+s}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{(1 + |j - \frac{i}{2^s}|)^{2+\alpha}}, \tag{2.68}$$

$$|\hat{k}_{ij}^{p+sp}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{(1 + |i - \frac{j}{2^s}|)^{2+\alpha}}, \tag{2.69}$$

При $p = 1$ справедливы оценки аналогичные (2.44), (2.45).

Следствие 5. *Для элементов диагональных блоков ($s = 0$,$p \geqslant 2$) справедливы оценки*

$$|\hat{k}_{ij}^{pp}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot \frac{1}{(1 + |i - j|)^{2+\alpha}}, \tag{2.70}$$

3.2.3 Оценка элементов в случае вейвлетов Хаара

Замечание 8. *В случае вейвлетов Хаара справедливы точно такие же теоремы с заменой в оценках показателя степени $2 + \alpha$ на $1 + \alpha$.*

Теорема 20. *Для элементов матрицы* $\hat{K}$ *справедливы оценки* ($p \geqslant 2$)

$$|\hat{k}_{ij}^{pp+s}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{(1+|j-\frac{i}{2^s}|)^{1+\alpha}}, \tag{2.71}$$

$$|\hat{k}_{ij}^{p+sp}| \leqslant C \cdot 2^{(1-\alpha)(k-p)} \cdot 2^{-(3/2-\alpha)s} \frac{1}{(1+|i-\frac{j}{2^s}|)^{1+\alpha}}, \tag{2.72}$$

При $p = 1$ *справедливы оценки аналогичные (2.44), (2.45).*

Глава 4. Экспериментальные исследования декоррелирующих свойств сплайновых вейвлет-преобразований

Для подтверждения теоретических результатов был проведен комплекс численных эксперименов. Работа была разделена на следующие этапы:

1. Создание программы, реализующей алгоритмы построения вейвлет-базисов, а также алгоритмы прямого и обратного быстрого дискретного вейвлет-преобразования на базе сплайнов разной степени;
2. Регистрация трафика в виде последовательностей сильнокоррелированных случайных величин;
3. Вычисление коэффициентов корреляции исходной последовательности;
4. Применение прямого сплайнового ДВП или других декоррелирующих преобразований (Фурье, Добеши и т.д.);
5. Вычисление коэффициентов корреляции полученной последовательности;
6. Сравнение результатов и формирование соответствующих выводов.

В приложении Б приведены листинги программного кода, ориентированного на язык разработки C++, для основных алгоритмов: вычисление B-сплайнов (Б.1), вычисление α коэффициентов для построения центральных вейвлетов (Б.2), вычисление α коэффициентов для построения граничных вейвлетов (Б.3), вычисление нулевой вейвлет-функции (Б.4), вычисление центральных и граничных вейвлет-функций (Б.5) и др.

4.1 Описание численного эксперимента

Для проведения численного эксперимента был развернут виртуальный кластер на платформе для организации управления облачной инфраструктурой и виртуальными окружениями (рис. 4.1). Виртуальный кластер включает в себя также контроллер с сетевой операционной системой и клиентов, генерирующих трафик.

В результате был зафиксирован генерируемый трафик в виде последовательностей, характеризующих время между соседними полученными пакетами

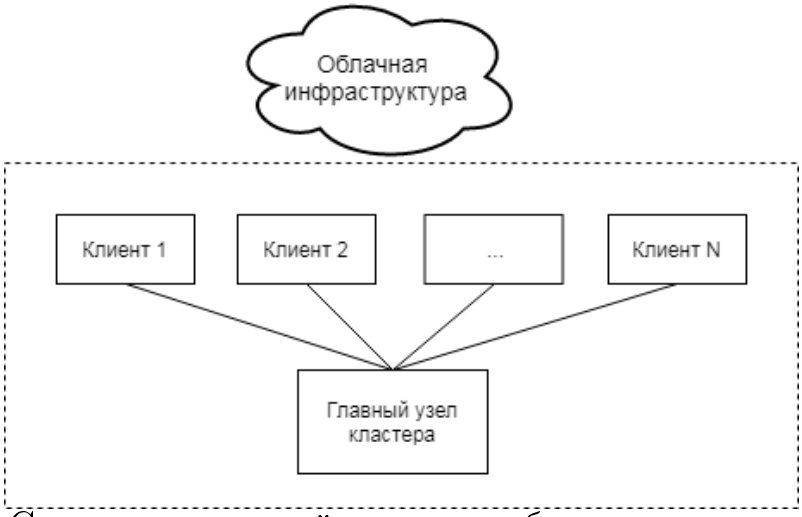


Рисунок 4.1 — Схема виртуальной среды по сбору данных для эксперимента

на каждом узле, а также время задержки при передаче пакета между узлами (рис. 4.2).

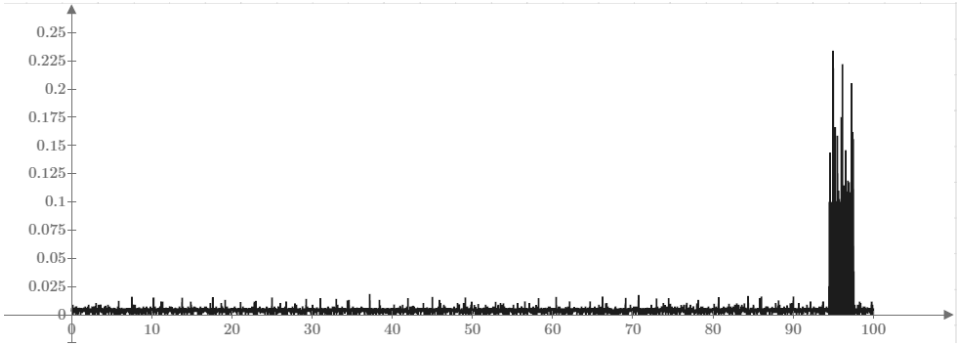


Рисунок 4.2 — Исходная последовательность данных

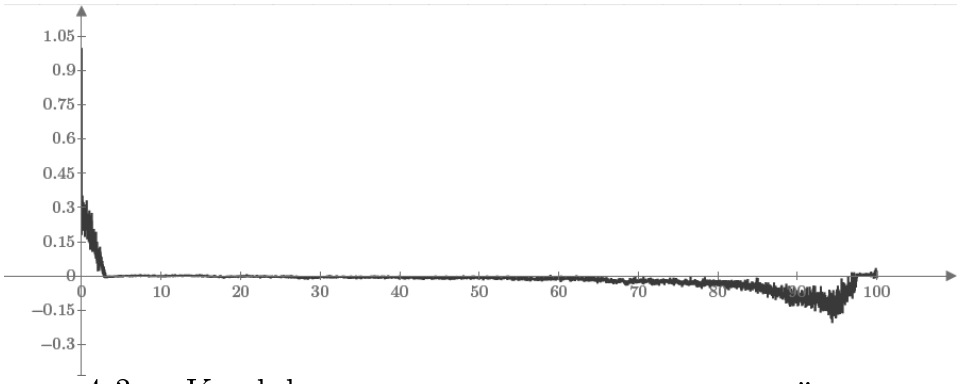


Рисунок 4.3 — Коэффициенты корреляции исходной последовательности данных

Процедура вычисления коэффициентов корреляции (рис. 4.3) интервалов времени между соседними пакетами состоит из следующих этапов [82]:

1. Регистрируется трафик в виде целочисленного случайного процесса на некотором интервале T;

2. Интервал T разбивается на K непересекающихся интервалов таким образом, чтобы на каждом интервале была возможность надежной идентификации распределений $F_k(i), k = 1,2,...,K$;
3. Вычисляются интегралы $\int_0^T p(i,t)dt, i = 1,2,3$;
4. Решается система уравнений специального вида, из которой находятся коэффициенты корреляции.

После применения к исходной последовательности прямого преобразования, получаем новые последовательности (рис. 4.3). На графике наглядно отображено ослабление коррелированности последовательности случайных величин

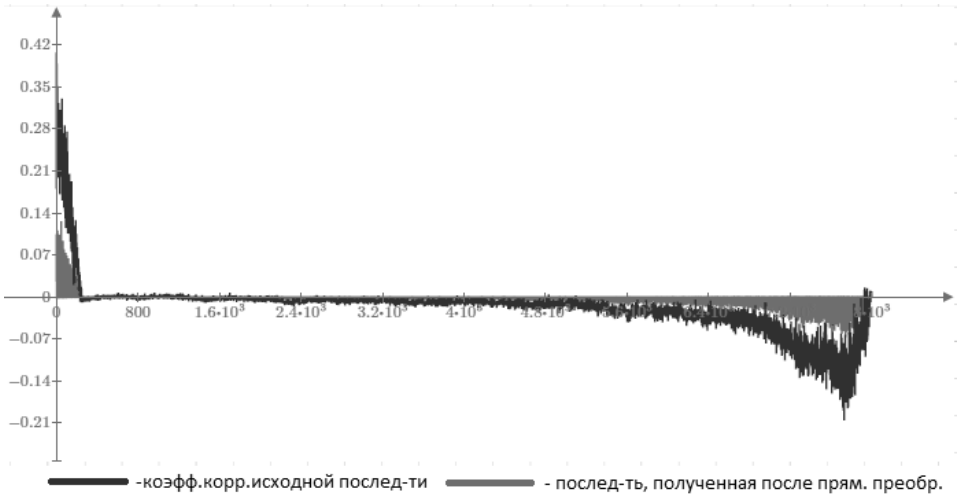


Рисунок 4.4 — Последовательность данных, полученная после прямого сплайнового линейного вейвлет-преобразования

Перечень декоррелирующих преобразований, используемых в эксперименте для сравнения их декоррелирующих свойств:

1. Сплайновое дискретное вейвлет-преобразование для $m = 2$;
2. Сплайновое дискретное вейвлет-преобразование для $m = 3$;
3. Дискретное преобразование Фурье;
4. Преобразование Добеши (d4).

В качестве метрики декорреляции использовалась сумма модулей коэффициентов корреляции, которая была вычислена для исходной последовательности и для полученной последовательности, после примненения к ней декоррелирующего преобразования.

4.1.1 Результаты численных экспериментов

В рамках численного эксперимента по его резльтатам (см. табл. 4) получены следующие научно-прикладные результаты:

1. Подтверждно предположение, что преобразования, основанные на линейных и квадратичных сплайновых вейвлетах, позволяют ослабить коррелированность последовательностей сильнокоррелированных случайных величин, характеризующих трафик;
2. При увеличении степени сплайна декоррелирующие свойства преобразования усиливаются;
3. В некоторых случаях использование сплайнового ДВП позволяет получить наилучший результат среди рассматриваемых типов преобразований.

Результаты численных экспериментов изложены в публикациях автора [49; 83—86].

Таблица 4 — Результаты численных экспериментов

Тип преобразования	$\sum_{i=0}^{N-1} \lvert r_i \rvert$ **Номер выборки**					
	1	2	3	4	5	6
Исходная выборка	208,277	420,396	17,751	35,882	34,863	16,007
Преобразование Фурье	22,619	24,799	5,044	8,497	4,473	3,805
Преобразование Добеши (d4)	22,490	18,204	5,455	7,351	6,712	5,532
Преобразование Хаара	183,000	378,904	11,591	26,649	18,219	6,393
Сплайновый вейвлет (m=2)	20,640	30,468	2,377	4,124	6,660	3,147
Сплайновый вейвлет (m=3)	18,707	30,811	2,110	4,009	5,963	3,025

4.2 Сопоставление полученных результатов с результатами исследований предшественников с целью подтверждения достоверности и новизны выполненных исследований. Анализ полноты решения поставленных задач и цели исследования.

Были изучены исследования, проведенные учеными и группами ученых за последнее десятилетие. Ниже представлены осовные результаты, полученные предшественниками.

В работах [30; 87] исследуются сплайновые вейвлеты и возможность представления уровней детализации сигналов и изображений с их помощью. Во второй части статьи приводятся коэффициенты, используемые для прямого и обратного сплайнового вейвлет-преобразования, а также графики сплайновых вейвлет-функций до третьей степени включительно. Аналогичные результаты при построение вейвлетов на базе сплайнов, но другим методом (см. парараф 2.3), были получены в настоящей работе (см. параграф 2.6).

В статье [9], авторы исследуют характеристики декоррелирующих преобразований для задачи сжатия изорбажения. Рассматриваются преобразования, основаные на вейвлетах Хаара, биортогональных вейвлетах, базисе Карунена-Лоэва, а также сингулярное преобразование и дискретное косинусное преобразвание. Численный эксперимент был построен по следующему принципу - к исходному преобразованию применялось дискртеное декоррелирующее преобразование, из полученных коэффициентов оставлялись те, что имеют наибольшее абсолютное значение, а затем выполнялось обратное преобразование. В качестве метрики используется коэффициент пикового отношение сигнал/шум (ПОСШ, PSNR). Из приведенных в статье результатах видно, что лучшими характеристиками среди рассмотренных методов обладают те, что основаны на дискретном вейвлет-преобразовании. Визуальное реконструирование изображений подтверждает преимущество ДВП перед остальными рассмотренными преобразованиями.

Проведем анализ с настоящей работой. В результате численного эксперимента, описанного в параграфе 4.1, видно, что ДВП (в нашем случае сплайновре) обладает наилушими декоррелирующими свойствами среди рассматриваемых преобразований. Это полностью соответствует результатам исследования [9].

В [25] разрабатывается методика для декомпозиции сигналов и изображений на базе B-сплайновых вейвлет-функций. Также в этом исследовании представляются результаты по снижению коррелированности исходных данных. В статье рассматривается подход, в котором вычисление коэффициентов преобразования основано на матрице Теплица, которая позволяет проводить параллельные вычисления для ускорения процесса орбаботки данных. Этот подход аналогичен тому, что описан в настоящей работе (параграф 2.5). Также в [25] отмечено, что для повышение производительности сжатия лучше всего использовать кубические сплайновые вейвлеты. Аналогичный результат получен в численном эксперименте, описанным таблицей 4.

Теоретически выведенные оценки корреляционных матриц в главе 3 подтверждают экспериментальные исследования, проведенные другими авторами. Это обеспечивает новизну выполненной работы. А сопоставление результатов настоящей работы с результатами исследований предшественников подтверждает их достоверность.

4.3 Предложения по возможности практического и научного использования результатов решения проблемы

Полученные в настоящей работе результаты говорят о том, что применение сплайновых вейвлет-преобразований позволяет занчительно снизить коррелированность последовательностей сильнокоррелированных случайных величин. В сравнении с некоторыми ортогональными преобразованиями, описанный метод дает наилучший результат. А возможность использовать паралллельный алгоритм ДВП на многопроцессорных ЭВМ позволяет значительно увеличить скорость этого преобразования.

Полученый результат может быть использован в тех прикладных областях анализа данных, которые требуют их предварительной декоррелиции. В частности, при решении задач теории массового обслуживания, невозможно использовать классические методы анализа трафика для коррелированных последовательностей. Применение ДВП позволит снизить коррелированность, а значит применить эти классические методы к анализу новой, декоррелированной последовательности, сохранившей все свойства исходной.

Также результаты работы могут быть использованы для сжатия изображений. В настоящее время, в основе этого процесса лежит некоторое ортогональное преобразование. Это позволяет предположить, что в результате применения сплайнового ДВП скорость и качество алгоритмов сжатия улучшатся.

В качестве перспективного исследования, можно рассмотреть задачу шумопоглащения сигнала и изображения, в основе которого также лежит применение некоторого ортогонального преобразования.

Программа, реализующая алгоритм быстрого вейвлет-преобразования в пространстве сплайновых вейвлетов на конечном отрезке, была зарегистрирована в Фонде алгоритмов и программ СО РАН 13.05.2015 под регистрационным номером PR15002. И может быть использована в качестве основы для дальнейших исследований.

Заключение

В рамках диссертационной работы получены следующие научные и научно-прикладные результаты:

1. Методы декорреляции последовательностей сильнокоррелированных случайных величин при анализе трафика в рамках решения задач теории массового обслуживания.
2. Теоремы об оценке корреляционных матриц вейвлет-преобразований на базе сплайн-функций для общего и частного случаев.
3. Алгоритмы расчета и результаты численных экспериментов по определению декоррелирующих свойств сплайновых вейвлетов.
4. На основе разработанных алгоритмов создан комплекс прикладных программ, защищенных свидетельством о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Основные результаты диссертационного исследования изложены в публикациях автора [31—40; 49; 83—86; 88] и в зарегистрированной в ФАП СО РАН программе от 13.05.2015 под регистрационным номером PR15002.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю И.А Блатову. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Также автор благодарит И.В. Карташевского за помощь в предоставление данных для проведения численных экспериментов.

Список сокращений и условных обозначений

ВП	*wavelet transform*, вейвлет-преобразование
ДВТ	*discrete wavelet transform*, дискретное вейвлет-преобразование
ДКП	*discrete cosinus transform*, дискретное косинус-преобразование
КМА	*multiresolution analysis*, кратномасштабный анализ
ОВП	обратное вейвлет-преобразование
ОДВП	обратное дискретное вейвлет-преобразование
ОПВП	прямое дискретное вейвлет-преобразование
ПВП	прямое вейвлет-преобразование
РСТ	распределение с «тяжелым хвостом»
СЛАУ	система линейных алгебраических уравнений
ТМО	*queueing theory*, теория массового обслуживния
$\psi(t)$	детализирующая вейвлет-функция
$\varphi(t)$	функция аппроксимации вейвлетов
$N_m(t)$	B-сплайн степени m
(a,b)	скалярное произведение, которое понимается в смысле L_2

Список литературы

1. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. Пер. с англ. / Л. Клейнрок. — М. : Машиностроение, 1979.
2. Решение уравнения Линдли спектральным методом для систем массового обслуживания общего вида / И. Блатов [и др.] // Электросвязь. — 2014. — № 11. — С. 32—35.
3. *Шелухин О.* Экспериментальное исследование самоподобия GPRS-трафика в сотовой сети связи стандарта GSM / О. Шелухин, С. Матвеев, А. Пастухов // Электротехнические и информационные комплексы и системы. — 2007. — № 2. — С. 49—55.
4. *Шелухин О.* Фрактальные процессы в телекоммуникациях / О. Шелухин, А. Тенякшев, А. Осин. — М. : Радиотехника, 2003.
5. *Цыбаков Б.* Модель телетрафика на основе самоподобного процесса / Б. Цыбаков // Радиотехника. — 1999. — № 5. — С. 24—31.
6. *Park K.* Self-Similar Network Traffic and Performance Evaluation / K. Park, W. Willinger. — New York, NY, USA : John Wiley, Sons, 2000.
7. On the self-similar nature of ethernet traffic (extended version) / E. Leland [et al.] // IEEE/ACM Transactions on Networking. — 1994. — Vol. 2, no. 1. — P. 1–15.
8. *Hotelling H.* Analysis of a Complex of Statistical Variables into Principal Components / H. Hotelling // J. Educ. Psych. — 1933. — No. 24. — P. 417–441.
9. Характеристика декоррелирующих свойств преобразований для задачи сжатия изображений / А. Бумагин [и др.] // Компоненты и технологии. — 2010. — № 4. — С. 113—116.
10. *Ахмед Н.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов / Н. Ахмед, К. Рао. — М. : Наука, 1980.

11. *Умняшкин С.* Анализ эффективности использования ортогональных преобразований для цифрового кодирования коррелированных данных / С. Умняшкин, М. Кочетков // Известия вузов. Электроника. — 1998. — С. 79—84.

12. *Павлов А.* Методы анализа сложных сигналов / А. Павлов. — Саратов : Научная книга, 2008.

13. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. — Ижевск : НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001.

14. *Meyer Y.* Ondolettes et operateurs / Y. Meyer. — Paris : Hermann, 1990.

15. *Чуи К.* Введение в теорию вейвлетов / К. Чуи. — М. : Мир, 2001.

16. *Малла С.* Вейвлеты в обработке сигналов / С. Малла. — М. : Мир, 2005.

17. *Burrus C.* Introduction to Wavelets and Wavelet Transform / C. Burrus, R. Gopinath, G. Haitao. — New Jersey : Prentice Hall, 1998.

18. *Daubechies I.* Painless Nonorthogonal Expansions / I. Daubechies // Journal of Mathematical. Physics. — 1986. — Vol. 27. — P. 1271–1283.

19. *Меркушева А.* Классы преобразований нестационарного сигнала в инфомрационно-измерительных системах. III. Время-масштабные (вейвлет-) преобразования для спектрально-временного анализа / А. Меркушева // Научное приборостроение. — 2002. — Т. 12, № 3. — С. 68—82.

20. *Шумилов Б.* О сплайн-вейвлетах, полуортогональных с производными, и алгоритме с расщеплением / Б. Шумилов // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2017. — Т. 20, № 1. — С. 107—120.

21. *Dem'yanovich Y.* Spline-wavelet decomposition on an interval / Y. Dem'yanovich, B. Vager // Journal of Mathematical Sciences. — 2015. — Vol. 207, no. 5. — P. 736–752.

22. *Новиков И.* О построении биортогональных систем для подпространств, порожденных целочисленными сдвигами одной функции / И. Новиков, Е. Кисилев, Л. Минин // Математические заметки. — 2014. — Т. 96, № 3. — С. 470—472.

23. *Блатов И. А.* Полуортогональные сплайновые вейвлеты и метод Галеркина численного моделирования тонкопроволочных антенн / И. А. Блатов, Н. Рогова // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — Т. 53, № 5. — С. 727—736.

24. *Zheludev V.* Wavelet transforms generated by splines / V. Zheludev, A. Averbuch // International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing. — 2007. — Vol. 5, no. 2. — P. 257–291.

25. *Fahmy M.* B-spline wavelets for signal denoising and image compression / M. Fahmy, G. Fahmy, O. Fahmy // SLViP. — 2011. — No. 5. — P. 141–153.

26. *Beran J.* Statistics for Long-Memory Processes / J. Beran. — New York : Chapman, Hall, 1994.

27. On the Self-Similar Nature of Ethernet Traffic / W. Leland [et al.] // Proc. ACM SIGCOMM'93, San Fransisco, CA. — 1993. — P. 183–193.

28. *Tsybakov B.* Self-similar processes in communications networks / B. Tsybakov, N. Georganas // IEEE Transactions on Information Theory. — 1998. — Vol. 44, no. 5. — P. 1713–1725.

29. *Demko S.* Inverses of band matrices and local convergence of spline projections / S. Demko // SIAM J. on Numer. Anal. — 1997. — Vol. 14, no. 4. — P. 616–619.

30. *Stollnitz E.* Wavelets for Computer Graphics: A Primer, Part 2 / E. Stollnitz, T. DeRose, D. Salesin // IEEE Computer Graphics and Applications. — 1995. — Vol. 15, no. 3. — P. 76–84.

31. *Герасимова Ю. А.* Применение быстрого дискретного вейвлет-преобразования на базе сплайновых вейвлетов для ослабления коррелированности последовательностей данных при решении задач теории массового обслуживания / Ю. А. Герасимова, И. Блатов, И. Карташевский // Информационные технологии и нанотехнологии. Материалы Международной конференции и молодежной школы. Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (Национальный исследовательский университет)». — 2015. — С. 20—22.

32. *Герасимова Ю. А.* Применение финитных полуортогональных сплайновых вейвлетов к декорреляции временных рядов / Ю. А. Герасимова, И. Блатов // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2016). Материалы Международной конференции и молодёжной школы. Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет)»; Институт систем обработки изображений РАН. — 2016. — С. 905—910.

33. *Герасимова Ю. А.* Характеристика декоррелирующих свойств сплайнового вейвлет-преобразования / Ю. А. Герасимова // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2017). Сборник трудов III международной конференции и молодежной школы. Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева. — 2017. — С. 988—990.

34. *Gerasimova Y. A.* Parallel algorithm of spline-based wavelet transform / Y. A. Gerasimova // Информационные технологии и нанотехнологии. Сборник трудов ИТНТ-2018. Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева. — 2018. — С. 2018—2021.

35. *Герасимова Ю. А.* Оценка эффективности применения быстрого дискретного вейвлет-преобразования на базе сплайновых вейвлетов для ослабления коррелированности последовательностей данных / Ю. А. Герасимова, И. Блатов // Современные методы пиркладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2015). Сборник трудов VIII международной конференции. — 2015. — С. 64—66.

36. *Герасимова Ю. А.* Об оценках элементов корреляционных матриц самоподобных процессов в вейвлет-базисах / Ю. А. Герасимова, И. Блатов // Современные методы пиркладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2016). Сборник трудов IX международной конференции. — 2016. — С. 54—56.

37. *Герасимова Ю. А.* Сравнительный анализ алгоритмов быстрого дискретного wavelet-преобразования / Ю. А. Герасимова // XXII Российская научно-техническая конференция профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов. — 2015. — С. 366.

38. *Герасимова Ю. А.* Анализ декоррелирующих свойств сплайновых вейвлет-преобразований / Ю. А. Герасимова // Материалы конференции XXIV Российская научно-техническая конференция профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов. — 2017. — С. 417.

39. *Герасимова Ю. А.* Характеристика декоррелирующих свойств вейвлет-преобразований для анализа сигнала при решении задач теории массового обслуживания / Ю. А. Герасимова // Материалы научно-технической конференции РосИнфоКом-2017 «Актуальные вопросы телекоммуникаций». — 2017. — С. 160—161.

40. *Герасимова Ю. А.* Применение сплайновых вейвлетов к ослаблению коррелированности последовательностей сильнокоррелированных случайных величин / Ю. А. Герасимова // Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXVI». — 2015. — С. 58—60.

41. *Mandelbrot B.* Long-Run Linearity, Locally Gaussian Processes, H-spectra, and Infinite Variancies / B. Mandelbrot // Int. Econ. Rev. — 1969. — Vol. 10. — P. 82–113.

42. *Шелухин О.* Самоподобие и фракталы. Телекоммуникационные приложения / О. Шелухин, А. Осин, С. Смольский. — М. : Физматлит, 2008.

43. *Каташевский И.* Исследования реального трафика в телекоммуникационных и компьютерных сетях / И. Каташевский, В. Тарасов // Инфокоммуникационные технологии. — 2010. — Т. 8, № 4. — С. 25—29.

44. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. Пер. с англ. / Под ред. В.М. Золотарева / Е. Сенета. — М. : Наука, 1985.

45. *Crovella M.* Long-lasting transient, conditions in simulations with heavy-tailed workloads / M. Crovella, L. Lipsky. — Proc 1997 Winter Simulation Conference., 1997.

46. *Карташевский И.* Использование уравнения Линдли для решения задач обработки коррелированного трафика / И. Карташевский // Журнал «Электросвязь». — 2014. — № 12. — С. 41—42.

47. Аппроксимация произвольной плотности распределения суммами экспонент / И. Блатов [и др.] // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии. — 2013. — Т. 2. — С. 53—57.

48. *Васильева А.* Интегральные уравнения, 2-е изд. / А. Васильева, Н. Тихонов. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002.

49. *Герасимова Ю. А.* Анализ характеристик коррелированного трафика при использовании вейвлет-преобразования / Ю. А. Герасимова, И. Блатов, И. Карташевский // Радиотехника. — 2017. — Т. 1, № 5. — С. 123—130.

50. *Pratt K.* Slant transform image coding / K. Pratt, W.-H. Chen, L. Welch // IEEE Transactions on communications. — 1974. — Vol. 22, no. 8. — P. 1075–1093.

51. *Eliott D.* Fast transforms: algorithms, analyses, applications / D. Eliott, K. Rao. — London : Academic Press inc., 1982.

52. Spline Wavelets for System Identification / S. Mukhopadhyay [et al.] // DYCOPS 2010. — 2010. — P. 335–340.

53. *Tian J.* Wavelet folding and decorrelation across the scale / J. Tian, R. Baraniuk, R. Wells // Acoustics, Speech, and Signal Processing. — 2000. — P. 335–340.

54. Wavelets for the analysis, estimation and synthesis of scaling data, to be published as a chapter to «Self Similar Network Traffic Analysis and Performance Evaluation» / P. Abry [et al.]. — Eds. : Wiley, 1999.

55. A Multifractal Wavelet Model with Application to Network Traffic / R. Riedi [et al.] // IEEE Transactions on Information Theory. — 1999. — Vol. 45, no. 3. — P. 992–1019.

56. *Шелухин О.* Оценка самоподобности речевого трафика вейвлет-методом с автоматическим определением границ масштабирования / О. Шелухин, А. Осин, Р. Ахметшин // Электротехнические и информационные комплексы и системы. — 2007. — Т. 1. — С. 25—29.

57. *Петухов А.* Введение в теорию базисов всплесков / А. Петухов. — СПб, 1999.

58. *Unser M.* A family of polynomial spline wavelet transforms / M. Unser, A. Aldroubi, M. Eden // Signal Processing. — 1993. — Vol. 30. — P. 141–162.

59. *Daniel T.* Wavelet Analysis: Theory and Applications / T. Daniel, A. Yamamoto // Hewlett-Packard Journal. — 1994. — P. 44–52.

60. *Karhunen K.* Uber lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung / K. Karhunen // Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. I. Math.-Phys. — 1947. — No. 37. — P. 1–79.

61. *Лоэв М.* Теория вероятностей / М. Лоэв. — М. : ИЛ, 1962.

62. *Haar A.* Zur Theorie der orthogonal Funktionensystem / A. Haar // Math. Ann. — 1910. — Vol. 69. — P. 331–371.

63. *Stromberg J.* A modified Franklin system and higher-order spline system of Rn as unconditional bases for Hardy spaces / J. Stromberg // Proc. Conf. Harmonic Analisys in Honor of Antoni Zygmund. — 1983. — P. 475–493.

64. *Battle G.* A block spin construction of ondelettes. Part 1: Lemarie functions / G. Battle // Commun. Math. Phys. — 1987. — Vol. 110. — P. 601–615.

65. *Lemarie P.* Ondolettes a localization exponentielles / P. Lemarie // J. Math. Pures Appl. — 1988. — Vol. 67, no. 3. — P. 227–236.

66. *Unser M.* Ten good reasons for using spline wavelets / M. Unser // Wavelets Applications in Signal and Image Processing. — 1997. — Vol. 3169. — P. 422–431.

67. *Schoneberg I.* Contribution to the problem of approximation of equidistant date by analytic functions / I. Schoneberg // Quart. Appl. Math. — 1964. — No. 4. — P. 45–46.

68. *Chui C.* On compactly supported spline wavelets and a duality principle / C. Chui, J. Wang // Trans. Amer. Math. Soc. — 1992. — Vol. 330, no. 2. — P. 903–915.

69. *Unser M.* On the asymptotic convergence of B-spline wavelets to Gabor functions / M. Unser, A. Aldroubi, M. Eden // IEEE Trans. Information Theory. — 1992. — Vol. 38, no. 2. — P. 864–872.

70. *Бахвалов Н.* Численные методы / Н. Бахвалов, Н. Жидков, Г. Кобельков. — М. : Наука, 1987.

71. *Дьяконов В.* Вейвлеты от теории к практике / В. Дьяконов. — М. : СОЛОН-Пресс, 2010.

72. *Завьялов Ю.* Методы сплайн-функций / Ю. Завьялов, Б. Квасов, В. Мирошниченко. — М. : Наука, 1980.

73. *Бор К.* Практическое руководство по сплайнам / К. Бор. — М. : Радио и связь, 1985.

74. *Lee E.* A Simplified B-Spline Computation Routine / E. Lee // Computing. Springer-Verlag. — 1982. — Vol. 29, no. 4. — P. 365–371.

75. *Eilers P.* Flexible smoothing with B-splines and penalties (with comments and rejoinder) / P. Eilers, B. Marx // Statistical Science. — 1996. — Vol. 11, no. 2. — P. 89–121.

76. *Стечкин С.* Сплайны в вычислительной математике / С. Стечкин, Ю. Субботин. — М. : Наука, 1976.

77. *Волков Ю.* О построении интерполяционных полиномиальных сплайнов / Ю. Волков // Вычисл. системы.Вып. 159: Сплайн-функции и их приложения. — 1997. — С. 3—18.

78. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования / Г. Дёч. — Физико-математическая библиотека инженера, 1971.

79. *Plonka G.* On the construction of wavelets on a bounded interval / G. Plonka, K. Selig, M. Tasche. — Germany : Universitat Rostoc, 2016.

80. *Chun-Lin L.* A Tutorial of the Wavelet Transform / L. Chun-Lin. — Taiwan : Taipei, 2010.

81. *Воробьев В.* Теория и практика вейвлет-преобразования / В. Воробьев, В. Грибунин. — СПб. : Изд-во ВУС, 1999.

82. *Карташевский И.* Расчет коэффициентов корреляции временных интервалов в последовательности событий / И. Карташевский // Журнал «Электросвязь». — 2012. — № 10. — С. 37—39.

83. *Герасимова Ю. А.* Оценка эффективности применения быстрого дискретного сплайнового вейвлет-преобразования для ослабления коррелированности дискретно заданных данных / Ю. А. Герасимова, И. Блатов // Вестник ВГТУ. — 2015. — Т. 11, № 5. — С. 64—66.

84. *Герасимова Ю. А.* Применение сплайновых вейвлетов к декорреляции временных рядов / Ю. А. Герасимова, И. Блатов, И. Карташевский // Математическое моделирование. — 2018. — Т. 30, № 6. — С. 60—75.

85. *Gerasimova Y.* Characteristic of decorrelation properties of spline wavelet transformation / Y. Gerasimova // Procedia Engineering 3. 3rd International Conference "Information Technology and Nanotechnology", ITNT 2017. — 2017. — Vol. 201. — P. 463–467.

86. *Gerasimova Y.* Decreasing correlation in strongly correlated sequence using wavelets / Y. Gerasimova, I. Blatov, I. Kartashevskiy // 2nd International Scientific-Practical Conference Problems of Infocommunications Science and Technology, PIC S and T 2015 - Conference Proceedings. — 2015. — P. 18–20.

87. *Stollnitz E.* Wavelets for Computer Graphics: A Primer, Part 1 / E. Stollnitz, T. DeRose, D. Salesin // IEEE Computer Graphics and Applications. — 1995. — Vol. 15, no. 3. — P. 76–84.

88. *Gerasimova U.* Application of fast discrete wavelet transformation on the basis of spline wavelet for loosening correlation of sequence of data in mass service theory / U. Gerasimova, I. Blatov, I. Kartashevskiy // CEUR Workshop Proceedings "Proceedings of International Conference Information Technology and Nanotechnology, ITNT 2015". — 2015. — P. 242–245. — URL: http://ceur-ws.org/Vol-1490/paper28.pdf.

Список рисунков

Список таблиц

Приложение А

Графики для частных случаев B-сплайновых вейвлет-функций

А.1 Полуортогональные сплайновые вейвлеты в случае m=2

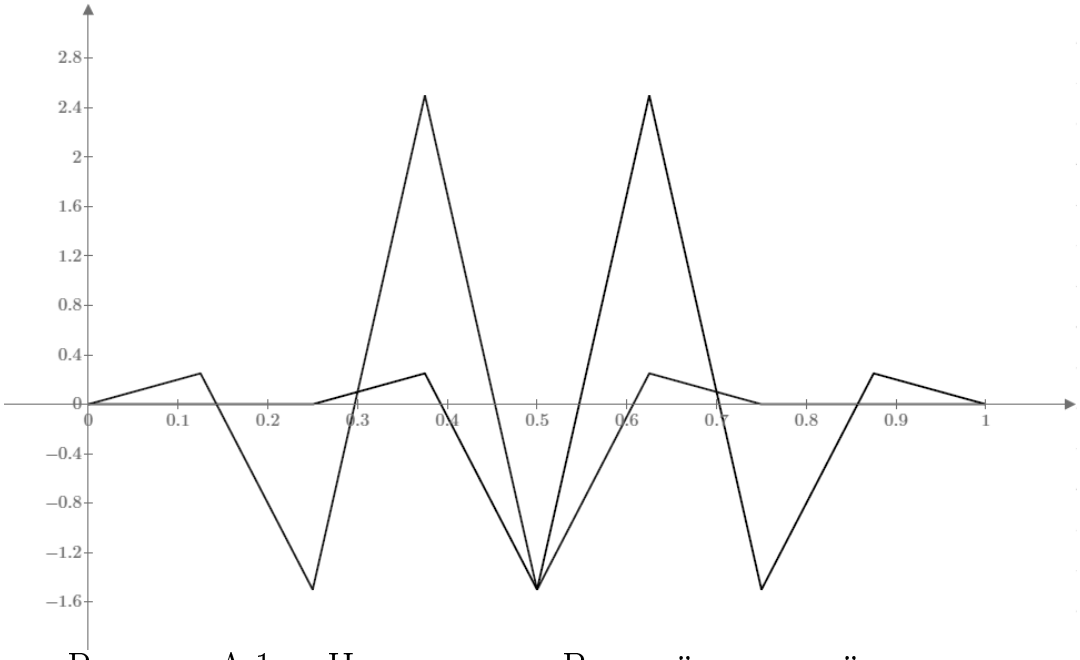


Рисунок А.1 — Центральные B-сплайновые вейвлеты для $m = 2$

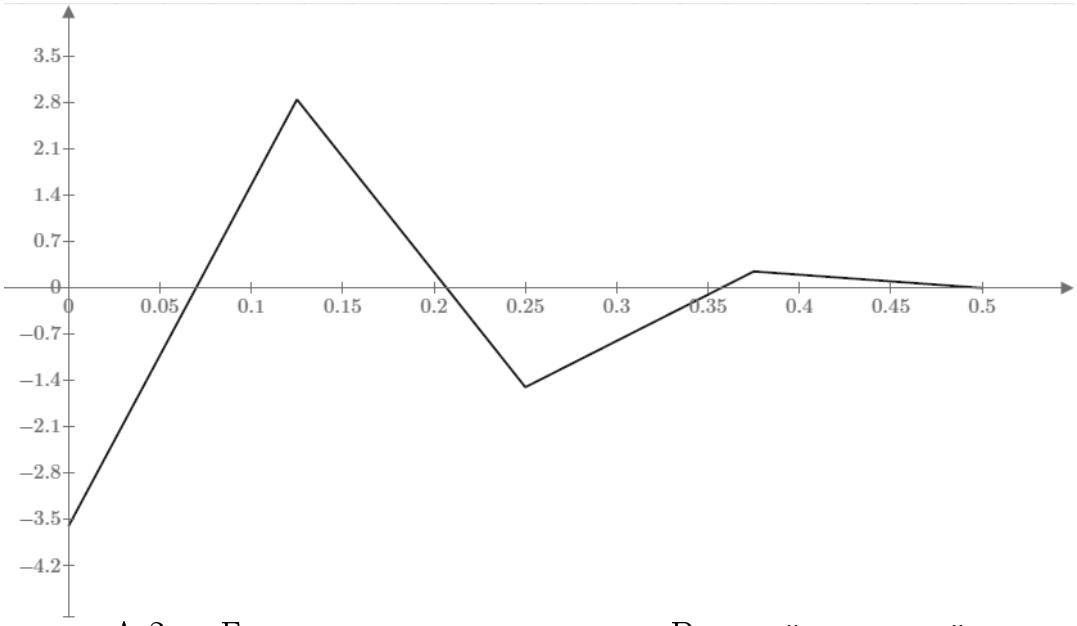


Рисунок А.2 — Граничные левосторонние B-сплайновые вейвлеты для $m = 2$

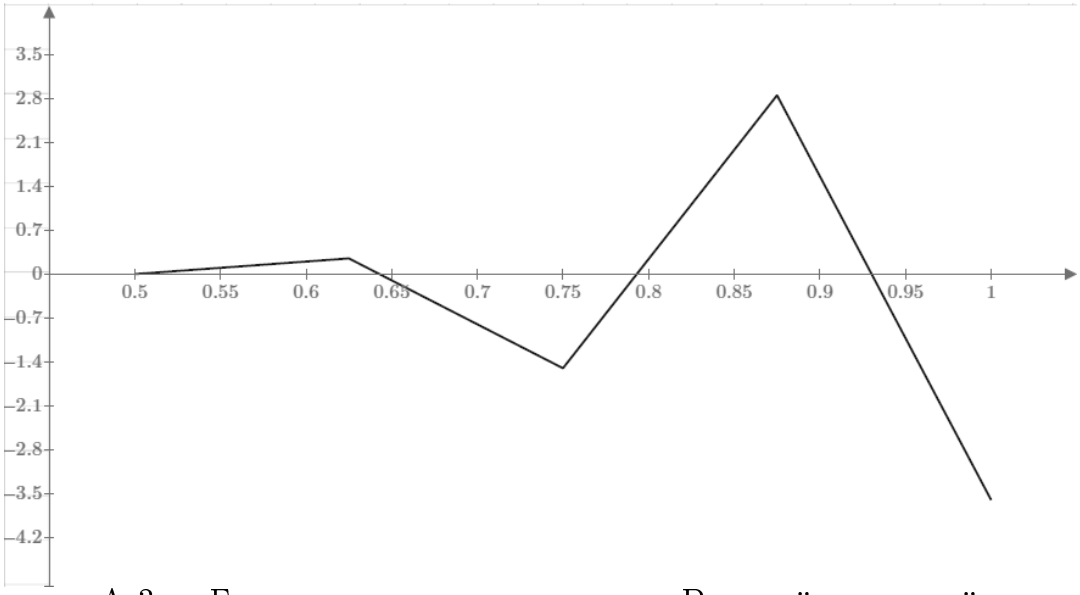


Рисунок А.3 — Граничные правосторонние B-сплайновые вейвлеты для $m = 2$

А.2 Полуортогональные сплайновые вейвлеты в случае m=3

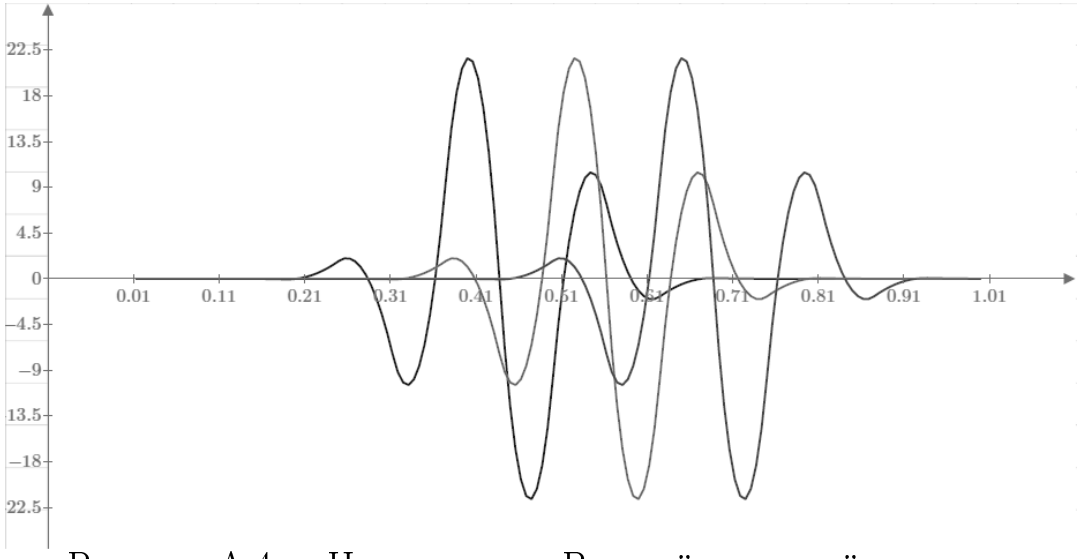


Рисунок А.4 — Центральные B-сплайновые вейвлеты для $m = 3$

А.3 Полуортогональные сплайновые вейвлеты в случае m=4

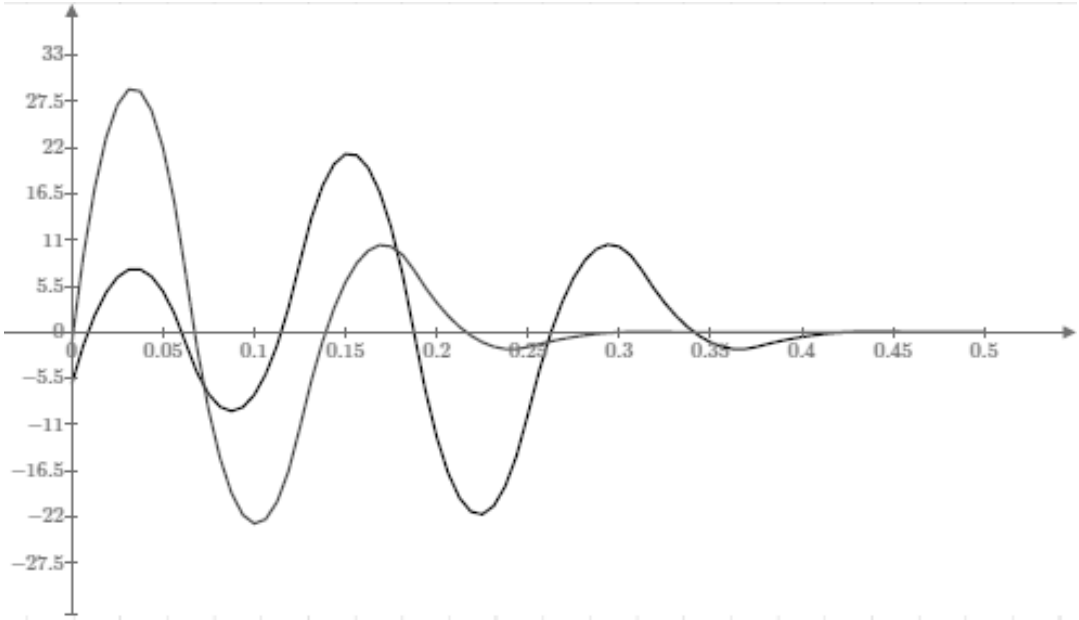


Рисунок А.5 — Граничные левосторонние B-сплайновые вейвлеты для $m = 3$

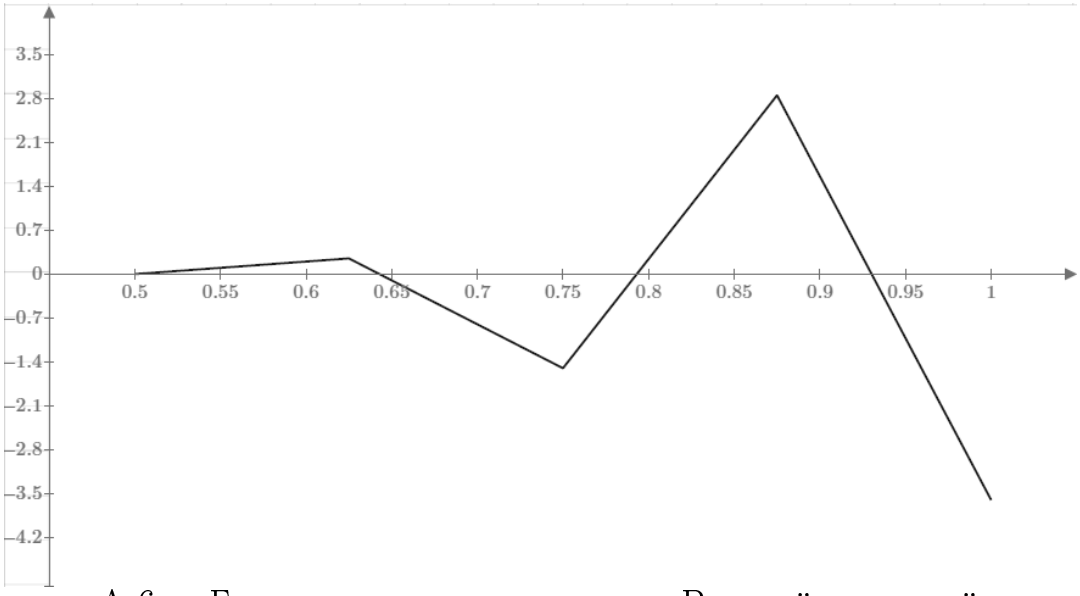


Рисунок А.6 — Граничные правосторонние B-сплайновые вейвлеты для $m = 3$

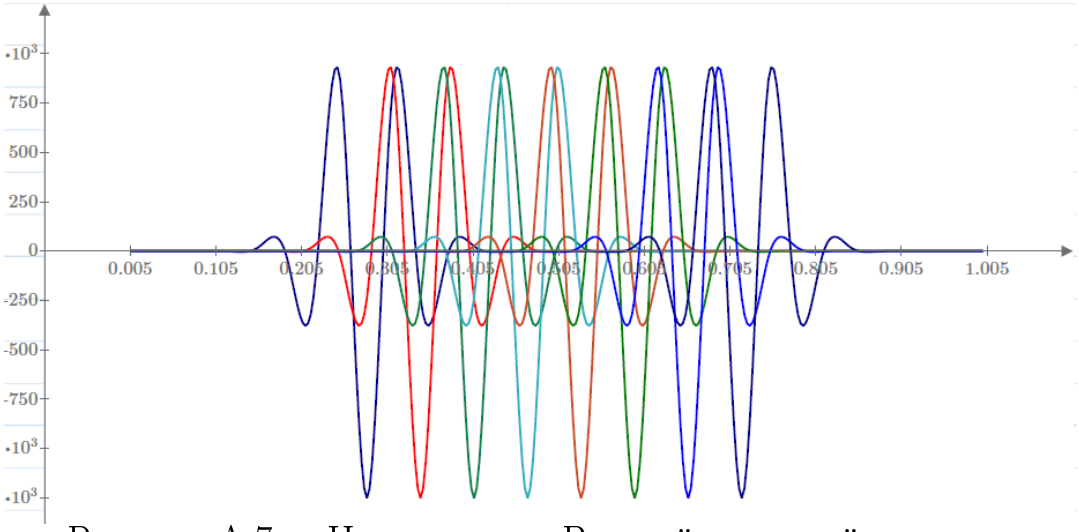


Рисунок А.7 — Центральные B-сплайновые вейвлеты для $m = 4$

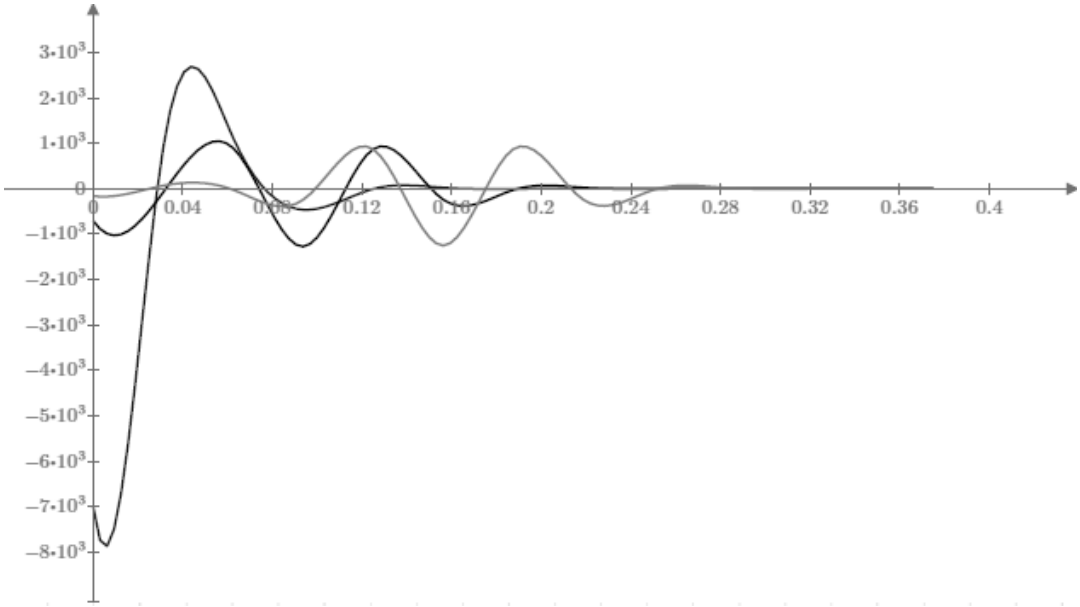


Рисунок А.8 — Граничные левосторонние B-сплайновые вейвлеты для $m = 4$

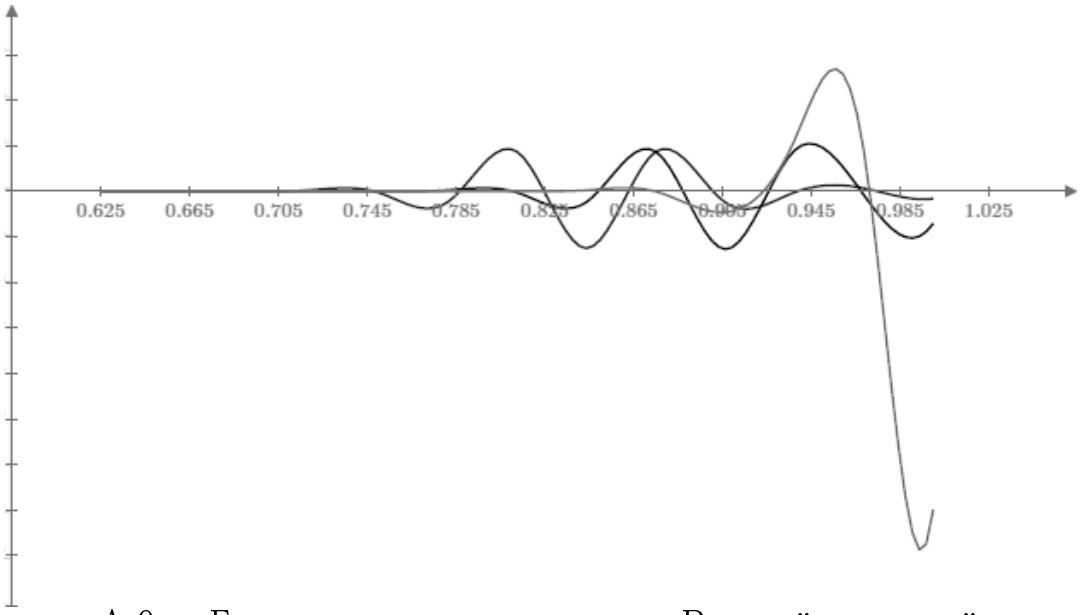


Рисунок А.9 — Граничные правосторонние B-сплайновые вейвлеты для $m = 4$

Приложение Б

Листинги программного кода

Программный код ориентирован на следующую инфраструктуру: язык разработки – C++, среда разработки - Microsoft Visual Studio 15.2, компилятор - Microsoft C/C++ Compiler Version 19.10.25019, процессор – четырехъядерный процессор Intel Core i5-3470 CPU 3.20 GHz. Для расспараллеливания алгоритмов использована библиотека Open Multi-Processing API.

Б.1 Алгоритм построения сплайн-функций

Листинг Б.1 Вычисление B-сплайнов на C++

```
double MathFuncs::GetBSpline(int m, int j, int n, double x)
{
  double BSpline;
  if (m == 1)
  {
    if ((a + j*h <= x) && (x < a + (j + 1)*h))
    {
      BSpline = x - (a + j * h);
    }
    else
    {
      if ((a + (j + 1)*h <= x) && (x < a + (j + 2)*h))
      {
        BSpline = a + (j + 2)*h - x;
      }
      else
        BSpline = 0;
    }
  }
  else
  {
```

```
    BSpline = ((x - a + j*h) / m*h)*GetBSpline(m - 1, j, n, x) +
        (((a + (j + m + 1)*h) - x) / m*h)*GetBSpline(m - 1, j +
      1, n, x);
  }
  return BSpline;
}
```

Б.2 Алгоритм построения вейвлет-базисов

Листинг Б.2 Вычисление α коэффициентов для построения центральных вейвлетов на C++

```
double* MathFuncs::GetAlphaCoeff(int m, double h, double* t,
   double* A)
{
  //здесь t - корни полинома Лежандра, A - коэффициенты квадрати
     чной формулы Гаусса

  double a_h, b_h;

  double* alpha = new double[3 * m - 1];
  alpha[3 * m - 2] = 1;

  double** x = new double*[3 * m - 1];
  for (int i = 0; i < 3 * m - 1; i++)
    x[i] = new double[3 * m - 2];

  int i = 0;
  int k_tmp;
  double sum,sum_tmp;
  for (int j = 0; j < 3 * m - 1; j++)
  {
    k_tmp = 0;
    for (int k = i - m + 1; k <= i + 2 * m - 2; k++)
    {
      sum = 0;
      for (int s = 2 * i; s <= 2 * i + 4 * m - 2; s++)
      {
        a_h = (a + s*h) + h / 2;
        b_h = h / 2;
        sum_tmp = 0;
        for (int v = 0; v < 2 * m - 2; v++)
```

```
30          {
              sum_tmp += A[v] * GetBSpline(m-1,j,n,a_h+b_h*t[v]) *
                 GetBSpline(m-1, k, n-1, a_h + b_h*t[v]);
          }
          sum += b_h*sum_tmp;
        }
35      x[k_tmp][j] = sum;
        k_tmp++;
      }
    }

40  double* y = new double[3 * m - 2];
    for (int j = 0; j < 3 * m - 2; j++)
      y[j] = -x[j][3 * m - 2];

    double** x_SLQ = new double*[3 * m - 2];
45  for (int i = 0; i < 3 * m - 2; i++)
      x_SLQ[i] = new double[3 * m - 2];

    for (int i = 0; i < 3 * m - 2; i++)
      for (int j = 0; j < 3 * m - 2; j++)
50      x_SLQ[i][j] = x[i][j];

    double* answer = MethodGaussSLQ(x_SLQ, y, 3 * m - 2); //здесь
       MethodGaussSLQ - функция, реализующая метод Гаусса для реше
       ния СЛАУ

    for (int i = 0; i < 3 * m - 2; i++)
55  {
      alpha[i] = answer[i];
    }

    return alpha;
60 }
```

Листинг Б.3 Вычисление α коэффициентов для построения граничных вейвлетов на C++

```
double* MathFuncs::GetAlphaBCoeff(int m, double h, double* t,
   double* A, double* alpha)
{
  //здесь t - корни полинома Лежандра, A - коэффициенты квадрати
     чной формулы Гаусса
5
```

```
double a_h, b_h;

double** x = new double*[m - 1];
for (int i = 0; i < m - 1; i++)
  x[i] = new double[m - 1];

int j_tmp,k_tmp;
double sum, sum_tmp;
for (int i = -m + 1; i <= -1; i++)
{
  j_tmp = 0;
  for (int j = -2 * m + 2; j <= -m; j++)
  {
    k_tmp = 0;
    for (int k = -m + 1; k <= -1; k++)
    {
      sum = 0;
      for (int s = 3 * k; s <= 3 * k + 5 * m; s++)
      {
        a_h = (a + s*h) + h / 2;
        b_h = h / 2;
        sum_tmp = 0;
        for (int v = 0; v < 2 * m - 2; v++)
        {
          sum_tmp += A[v] * GetWaveletF(m,n,j,a_h+b_h*t[v],
             alpha) * GetBSpline(m - 1, k, n - 1, a_h + b_h*t[
             v]);
        }
        sum += b_h*sum_tmp;
      }
    x[k_tmp][j_tmp] = sum;
    k_tmp++;
    }
    j_tmp++;
  }
}

double* y = new double[m - 1];
for (int i = -m + 1; i <= -1; i++)
{
  k_tmp = 0;
  for (int k = -m + 1; k <= -1; k++)
  {
```

```
      sum = 0;
      for (int s = 2 * i; s <= 2 * i + 4 * m - 2; s++)
      {
        a_h = (a + s*h) + h / 2;
        b_h = h / 2;
        sum_tmp = 0;
        for (int v = 0; v <= 2 * m - 3; v++)
        {
          sum_tmp += A[v] * GetWaveletF(m, n, i, a_h + b_h*t[v],
              alpha) * GetBSpline(m - 1, k, n - 1, a_h + b_h*t[v
            ]);
        }
        sum += b_h*sum_tmp;
      }
      y[k_tmp] = sum;
      k_tmp++;
    }
  }

  double* res = MethodGaussSLQ(x, y, m - 1);

  return res;
}
```

Листинг Б.4 Вычисление нулевой вейвлет-функции (3.15) на C++

```
double MathFuncs::GetWaveletF(int m, int n, int i, double x,
   double* alpha)
{
  double sum = 0;
  for (int j = 2 * i; j <= 2 * i + 3 * m - 2; j++)
  {
    sum += alpha[j - 2 * i] * GetBSpline(m - 1, j, n, x);
  }
  return sum;
}
```

Листинг Б.5 Вычисление центральных и граничных вейвлет-функций (3.15), (3.24),(3.26) на C++

```
double MathFuncs::GetWaveletFB(int m, int n, int i, double x,
   double* alpha, double* alpha_b)
{
  if ((i >= 0) && (i <= pow(2, n - 1) - 2 * m + 1))
  {
```

```
    return GetWaveletF(m, n - 1, 0, pow(2, n - n_0 - 1)*x - i*(b
        - a) / pow(2, n_0), alpha);
  }
  else if ((i >= -m + 1) && (i <= -1))
  {
    x = pow(2, n - n_0 - 1) * x;
    double sum = 0;
    for (int j = -2 * m + 2; j <= -m; j++)
    {
      sum += alpha_b[j + 2 * m - 2] * GetWaveletF(m, n_0 + 1, j,
          x, alpha);
    }
    return GetWaveletF(m, n_0 + 1, i, x, alpha) - sum;
  }
  else if ((i > pow(2, n - 1) - 2 * m + 1) && (i <= pow(2, n -
     1) - m))
  {
    x = pow(2, n - n_0 - 1) * (b - x);
    i = pow(2, n - 1) - 2 * m + 1 - i;
    double sum = 0;
    for (int j = -2 * m + 2; j <= -m; j++)
    {
      sum += alpha_b[j + 2 * m - 2] * GetWaveletF(m, n_0 + 1, j,
          x, alpha);
    }
    return GetWaveletF(m, n_0 + 1, i, x, alpha) - sum;
  }
}
```

Б.3 Алгоритмы прямого и обратного быстрого сплайнового ДВП

Листинг Б.6 Вычисление betta-коэффициентов на C++

```
double* MathFuncs::GetBettaCoeff(int m, int n, double h, double*
    t, double* A)
{
  //здесь t - корни полинома Лежандра, A - коэффициенты квадрати
     чной формулы Гаусса

  double a_h, b_h;
  double sum, sum_tmp;
  double* betta = new double[m+1];
  double* y = new double[m + 1];
```

```
10  double** x = new double*[m + 1];
    for (int i = 0; i < m + 1; i++)
      x[i] = new double[m + 1];

    for (int j = 0; j <= m; j++)
15  {
      for (int l = 0; l <= m; l++)
      {
        sum = 0;
        for (int i = 0; i <= pow(2, n) - 1; i++)
20      {
          a_h = (a + i*h) + h / 2;
          b_h = h / 2;
          sum_tmp = 0;
          for (int s = 0; s <= 2 * m - 3; s++)
25        {
            sum_tmp += A[s] * GetBSpline(m - 1, j, n, a_h + b_h*t[
               s]) * GetBSpline(m - 1, l, n, a_h + b_h*t[s]);
          }
        sum += b_h*sum_tmp;
        }
30      x[j][l] = sum;
      }
    }

    for (int l = 0; l <= m; l++)
35  {
      sum = 0;
      for (int i = 0; i <= pow(2,n)-1; i++)
      {
        a_h = (a + i*h) + h / 2;
40      b_h = h / 2;
        sum_tmp = 0;
        for (int s = 0; s <= 2 * m - 3; s++)
        {
          sum_tmp += A[s] * GetBSpline(m - 1, 0, n-1, a_h + b_h*t[
             s]) * GetBSpline(m - 1, l, n, a_h + b_h*t[s]);
45      }
        sum += b_h*sum_tmp;
      }
      y[l] = sum;
    }
50
```

```
  double* res = MethodGaussSLQ(x, y, m + 1);
  return res;
}
```

Приложение В

Свидетельство о регистрации программы

Российская Академия Наук
Сибирское Отделение
Фонд алгоритмов и программ

ФАП СО РАН

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о регистрации программы

№ PR15002

Быстрое вейвлет-преобразование
в пространстве сплайновых вейвлетов
на конечном отрезке

Разработчики: Герасимова Юлия Андреевна

Заявители: Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики

Дата регистрации: 2015-05-13

член-корр. РАН Кабанихин С. И.
ИВМиМГ СО РАН

ФАП СО РАН учрежден постановлением Президиума СО РАН № 894 от 20.10.2010
Базовый институт Фонда - ИВМиМГ СО РАН

Рисунок В.1 — Свидетельство о регистрации программы в РАН СО Фонд алгоритмов и программ