

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
”Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова”

На правах рукописи

Гермидер Оксана Владимировна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА В РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗАХ
В МИКРО- И НАНОКАНАЛАХ С РАЗЛИЧНОЙ
КОНФИГУРАЦИЕЙ СЕЧЕНИЯ**

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Попов В. Н.

Архангельск 2018

Содержание

Введение	4
Глава 1. Модельные кинетические уравнения течений разреженного газа в каналах	10
1.1 Анализ основных подходов моделирования течений разреженного газа в каналах	10
1.2 Основные параметры при моделировании течений разреженного газа в каналах	15
1.3 Синтез математических моделей процессов	16
1.4 Линеаризация нелинейного релаксационного кинетического уравнения Вильямса	19
1.5 Выводы из главы 1	23
Глава 2. Математическое моделирование течений разреженного газа в длинных каналах с использованием диффузной модели отражения	25
2.1 Постановка задачи о тепловом крипе	25
2.2 Тепловой крип в прямоугольном канале в промежуточном режиме течения	26
2.3 Тепловой крип в круговом цилиндре в промежуточном режиме течения	35
2.4 Тепловой крип в эллиптическом цилиндре в промежуточном режиме течения	41
2.5 Тепловой крип в пространстве между двумя коаксиальными цилиндрами в промежуточном режиме течения	49
2.6 Тепловой крип в пространстве между двумя цилиндрическими поверхностями в промежуточном режиме течения	56
2.7 Тепловой крип в прямоугольном канале с внутренним цилиндром в промежуточном режиме течения	63
2.8 Математическое моделирование теплопереноса в задаче о течении Пуазейля в промежуточном режиме	70

2.9	Тепловой крип и течение Пуазейля в свободномолекулярном режиме	71
2.10	Выводы из главы 2	75
Глава 3. Математическое моделирование течений разреженного газа в каналах в рамках зеркально-диффузной модели отражения		77
3.1	Тепловой крип в круговом цилиндре в промежуточном режиме течения	77
3.2	Тепловой крип в пространстве между двумя коаксиальными цилиндрами в промежуточном режиме течения	82
3.3	Тепловой крип в прямоугольном канале в промежуточном режиме течения	87
3.4	Тепловой крип в эллиптическом цилиндре в промежуточном режиме течения	97
3.5	Математическое моделирование теплопереноса в задаче о течении Пуазейля в промежуточном режиме. Свободномолекулярный режим течения	102
3.6	Выводы из главы 3	103
Глава 4. Программный комплекс для расчета макропараметров газа в длинных каналах		105
4.1	Численное интегрирование с использованием полиномов Чебышёва	105
4.2	Реализация алгоритмов расчета	113
4.3	Описание программного комплекса	120
4.4	Выводы из главы 4	124
Заключение		125
Список литературы		127
Приложение А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ		138
Приложение В. Листинг программы ”Вычисление значений потоков тепла и массы разреженного газа в длинном прямоугольном канале с внутренним круговым цилиндрическим элементом”		139

Введение

Актуальность темы исследования. Математическое моделирование процессов тепло- и массопереноса в микро- и наноканалах с различной конфигурацией поперечного сечения в силу большого числа их практических применений является одной из наиболее значимых в прикладном аспекте областей динамики разреженного газа [1]. Данное обстоятельство приводит к необходимости проведения исследований процессов переноса в микро- и наносистемах (MEMS, NEMS), разработка которых осуществляется для внедрения в промышленность нанотехнологий [2], [3]. В качестве примеров таких систем можно привести установки для создания высокоскоростных молекулярных пучков импульсного типа [4], исследования травления кремневых пластин [5], оценки утечки газа через компрессорные клапаны [6], наноподшипники [6], высоковакуумные молекулярные насосы Кнудсена [7] и Холвека [8], используемые в оптических и масс-спектрометрах, вакуумные датчики Pirani [9], [10] и т.д. Для практического применения указанных выше технологий необходимо описание процессов переноса массы газа и тепла через каналы, имеющие различные формы поперечного сечения. Стоит отметить, что в наноканалах, размеры поперечного сечения которых сопоставимы со средней длиной свободного пробега, нарушается основное предположение гидродинамики о локальном равновесии [1]. В этом случае использование уравнений Навье–Стокса становится невозможным, и возникает необходимость применения уравнения Больцмана и соответствующих ему граничных условий или модельных кинетических уравнений [11]. Построение численного решения уравнения Больцмана требует значительных вычислительных затрат [12], тогда как аналитические и численные методы, применяемые к модельным кинетическим уравнениям, позволяют существенно уменьшить данные затраты. Поэтому при решении задач математического моделирования процессов переноса в микро- и наноканалах являются актуальными разработка и применение аналитических и численных методов к модельным кинетическим уравнениям.

Степень разработанности темы исследования. Описанию течений

разреженного газа в каналах посвящены работы [1]-[63]. Первые исследования неизотермического течения газа были проведены в [13]-[15] для канала, образованного двумя параллельными пластинами, и длинного кругового цилиндра с применением модели БГК. Аналитические решения (в замкнутой форме) задач о течении Пуазейля, Куэтта и тепловом крипе в пространстве между двумя параллельными пластинами получены в [16]-[20] в [21]-[23] на основании БГК модели и уравнения Вильямса при диффузных граничных условиях. Под аналитическими решениями здесь понимаются решения, выраженные через квадратуры (интегралы) [16], значения которых находятся численными методами. Полученные в [16]-[23] аналитические решения были обобщены в [24]-[27] для зеркально-диффузного граничного условия Максвелла. В [6], [28]-[32] численные исследования течений проведены для прямоугольных каналов, в [32]-[34] — эллиптических цилиндров, в [35]-[42] — круговых цилиндров, в [43]-[45] — двух коаксиальных цилиндров, каналов с сечением в форме треугольника [5], трапеции [46], [47], правильного многоугольника, вписанного в круг [48], прямоугольника с внутренним кругом [49]. Результаты численного моделирования на основе БГК модели с постоянной частой столкновений представлены [31]-[33], [45]. В работах [4]-[6], [28]-[30], [34]-[39], [46]-[48] была использована S-модель кинетического уравнения Больцмана. Для описания взаимодействия молекул газа с поверхностью канала в перечисленных выше работах использована модель диффузного отражения, за исключением исследований, проведенных в [43], [44], [46] на основании зеркально-диффузной модели граничного условия и модели Черчиньяни–Лэмпис (Cercignani–Lampis, CL) в [28]. При этом аналитические решения для промежуточного режима пространственных течений газа в [4]-[6], [28]-[48] не были найдены.

Цель диссертационного исследования заключается в построении математических моделей процессов тепло- и массопереноса в разреженных газах через каналы с различной конфигурацией поперечного сечения в широком диапазоне изменения значений числа Кнудсена в рамках кинетического подхода.

Для достижения цели сформулированы и решены следующие **задачи**:

1. разработать комплексный подход к моделированию течений разреженного газа в микро- и наноканалах с различными конфигурациями их сечений с учетом характера поверхностного взаимодействия;

2. построить на основе предложенного подхода математические модели, описывающие процессы тепло- и массопереноса в газах в каналах со сложной геометрией сечений для различных значений числа Кнудсена;

3. разработать алгоритмы и комплексы программ для реализации вычислений макропараметров разреженного газа в каналах и визуализации полученных результатов с использованием численных методов и применением системы компьютерной алгебры Maple 18;

4. получить репрезентативные наборы значений потоков тепла и массы газа для валидации полученных результатов на основе построенных моделей.

Предметом исследования выступают потоки тепла и массы одноатомного газа в длинных микро- и наноканалах, которые имеют различные конфигурации поперечного сечения. Данные потоки исследуются в рамках задач о тепловом крипе и течении Пуазейля.

Объектом исследования являются математические модели процессов тепло- и массопереноса в каналах для различных режимов течения газа.

Методология и методы исследования. В основу проведенного исследования положено комплексное использование методов кинетической теории разреженных газов, линейной теории переноса, классических методов решения интегро-дифференциальных уравнений в частных производных и методов численного интегрирования с использованием полиномов Чебышёва. Программная реализация численных алгоритмов выполнена в системе компьютерной алгебры Maple 18.

Научная новизна проведенного исследования. До настоящего момента времени при построении математических моделей пространственных течений газа в каналах зависимость частоты столкновений молекул газа от их скорости не учитывалась и применялись модельные кинетические уравнения с постоянной частотой столкновения молекул газа, а их решения находились численно. В рамках диссертационного исследования разработан комплексный подход к моделированию течений разреженного газа с применением аналитических методов для построения решений кинетического модельного уравнения с частотой, пропорциональной молекулярной скорости, и численных методов для получения значений потоков тепла и массы газа в микро- и наноканалах технических систем. Построены новые модели процессов переноса в каналах

в зависимости от геометрии сечений этих каналов, значений числа Кнудсена и характера поверхностного взаимодействия молекул газа. Предложены алгоритмы расчета макропараметров газа в канале с использованием полиномов Чебышёва, и осуществлена их программная реализация. Получены репрезентативные наборы макропараметров газа на основе построенных моделей, которые приобретают особо важное значение в условиях, когда проведение эксперимента затруднено.

Теоретическая значимость предложенного исследования связана с тем, что полученные математические модели, разработанные численные алгоритмы и процедуры могут быть применены для решения задач динамики разреженного газа и плазмы, теории переноса.

Практическая значимость предложенного исследования обусловлена тем, что полученные математические модели, численные процедуры, алгоритмы и комплекс программ могут быть использованы при описании различных процессов переноса тепла и массы газа в микро- и наноканалах технических систем в химической промышленности, при использовании вакуумного оборудования, микро- и наноэлектронных приборов (MEMS, NEMS).

Положения, выносимые на защиту:

1. Построенные математические модели процессов тепло- и массопереноса в микро- и наноканалах в рамках задач о тепловом крипе и течении Пуазейля для переходного режима течения газа.

2. Разработанные алгоритмы вычислений макропараметров разреженного газа в микро- и наноканалах на основе построенных моделей с использованием полиномов Чебышёва.

3. Компьютерная реализация предложенных алгоритмов вычислений в виде комплекса программ. Визуализация полученных распределений компоненты вектора потока тепла и массовой скорости газа в каналах в виде графических моделей в трехмерном пространстве.

4. Результаты, проведенного численного эксперимента по нахождению приведенных потоков тепла и массы газа для различных конфигураций поперечных сечений каналов, режимов течений газа, моделей взаимодействия молекул газа со стенками каналов.

Достоверность полученных научно значимых результатов обусловле-

на тем, что в их основу положены фундаментальные уравнения классической кинетической теории переноса газа и плазмы, классические методы решения интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, методы численного интегрирования. Разработанные вычислительные алгоритмы верифицированы на модельных двухмерных и трехмерных задачах.

Область исследования. Полученные в диссертационном исследовании основные научные положения, относящиеся к построению и исследованию математических моделей процессов переноса в каналах, предложенные модели, алгоритмы, численные процедуры, которые используются в работе для решения научных и прикладных проблем кинетики разреженного газа, соответствуют паспорту научной специальности 05.13.18 "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ" по физико-математическим наукам. А именно: "разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений" (п.1), "реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента"(п.4), "комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента" (п.5).

Апробация работы. Основные результаты диссертационного исследования были представлены на следующих научных и научно-технических конференциях и семинарах: международной научной конференции "Моделирование нелинейных процессов и систем", Московский государственный технологический университет "СТАНКИН", Москва, 22-26 июня 2015 г.; XIV и XV молодежных научных школах-конференциях "Лобачевские чтения – 2015, 2016", Казанский государственный университет, Казань, 22-27 октября 2015 г. и 24-29 ноября 2016 г.; VII, VIII и IX международных молодежных научно-практических школах "Высокопроизводительные вычисления на GRID системах", Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова, Архангельск, 28 марта-2 апреля 2016 г., 6-11 февраля 2017 г. и 5-10 февраля 2018 г.; XVII Всероссийской конференции молодых ученых по математическому моделированию, Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск, 30 октября-3 ноября 2016 г.; VIII и IX международных научно-практических конференциях "Современные проблемы прикладной математики, теории управле-

ния и математического моделирования”, Воронежский государственный университет, Воронеж, 21-26 сентября 2015 г. и 20-26 сентября 2016 г.; международной научной конференции ” XII Белорусская математическая конференция”, Белорусский государственный университет, Минск, 5-10 сентября 2016 г.; международной конференции ” Физика конденсированных сред и дисперсных систем”, Московский государственный областной университет, Москва, 18-20 апреля 2017 г.; XXIV международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых ” Ломоносов”, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, 10-14 апреля 2017 г.

По теме диссертационного исследования опубликовано 25 работ, среди которых 15 входят в издания из списка ВАК РФ, 11 в одну из международных баз данных и систем цитирования Scopus, Web of Science. Также по результатам диссертации оформлено 1 свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ. Диссертация включает в себя Введение, четыре главы, Заключение, Список литературы из 99 наименований, 2 Приложения, 27 рисунков, 25 таблиц. Объем диссертации составляет 147 страниц машинописного текста.

Модельные кинетические уравнения течения разреженного газа в каналах

1.1 Анализ основных подходов моделирования течений разреженного газа в каналах

С развитием современных технологий исследования течений газа в микро- и наноканалах приобретают особое значение [50]. Движение разреженного газа в наноканалах, размеры поперечного сечения которых сравнимы с длиной свободного пробега молекул газа, описывается кинетическим уравнением Больцмана, которое представляет собой сложное нелинейное интегро-дифференциальное уравнение в частных производных [16]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_y \frac{\partial f}{\partial y'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = B[f, f], \quad (1.1.1)$$

где $f(\mathbf{r}', \mathbf{v}, t)$ – одночастичная функция распределения молекул газа, $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ – радиус-вектор молекулы газа в конфигурационном пространстве, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ – вектор скорости молекулы газа, $B[f, f]$ – интеграл столкновений, представляющий собой нелинейный оператор вида:

$$B[f, f] = \int (f(\mathbf{v})f(\mathbf{v}_*) - f(\mathbf{v}')f(\mathbf{v}'_*)) u \sigma(u, \theta) d\Omega d^3\mathbf{v}'_*.$$

Здесь $u = |\mathbf{v} - \mathbf{v}'_*|$, \mathbf{v}' , \mathbf{v}'_* , \mathbf{v} и \mathbf{v}_* – молекулярные скорости до и после столкновения, которые связаны равенствами

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{n}(\mathbf{n}(\mathbf{v}' - \mathbf{v}'_*)), \quad \mathbf{v}_* = \mathbf{v}'_* - \mathbf{n}(\mathbf{n}(\mathbf{v}'_* - \mathbf{v}')),$$

где \mathbf{n} – единичный вектор нормали к единичной сфере Ω , $d\Omega$ – элемент площади поверхности этой сферы, $\sigma(u, \theta)$ – дифференциальное сечение рассеяния молекулы на угол θ , зависящее от закона межмолекулярного взаимодействия и

определяющее вероятность того, что после столкновения налетающая молекула отразится под углом θ по отношению к вектору \mathbf{n} .

Сложность уравнения Больцмана не позволяет получить решение задач тепло- и массопереноса в общем виде [1], поэтому одним из подходов получения решения является упрощение интеграла столкновений путем некоторых предположений о характере межмолекулярных взаимодействий [51]. При использовании такого подхода выдвигается ряд предположений в отношении дифференциального сечения рассеяния. Параметры столкновений при этом фиксируются [51], чтобы полученные макроскопические величины соответствовали экспериментальным значениям.

Другой подход заключается в замене интеграла столкновений в уравнении (1.1.1) более простым выражением с сохранением его существенных свойств, к которым относятся законы сохранения энергии, импульса и частиц и приведение к необратимому поведению. Полученное таким образом уравнение называется "моделью" кинетического уравнения Больцмана или "модельным кинетическим уравнением". Впервые такой подход был использован в работах [52], [53]. В настоящее время линеаризованные модельные кинетические уравнения применяются для решения граничных задач кинетической теории газов [4]–[48]. Одним из таких уравнений является БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модель кинетического уравнения [16]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_y \frac{\partial f}{\partial y'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \nu(f_M - f), \quad (1.1.2)$$

$$f_M(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = n(\mathbf{r}') \left(\frac{m}{2\pi k_B T(\mathbf{r}')} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{2k_B T(\mathbf{r}')} (\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}'))^2 \right), \quad (1.1.3)$$

где $f_M(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – локальный максвеллиан, m , ν – масса молекул газа и их частота столкновений, k_B – постоянная Больцмана, $T(\mathbf{r}')$, $n(\mathbf{r}')$ – температура газа и его концентрация. В [76] показано, что фундаментальные свойства для модельного интеграла столкновений в уравнении (1.1.2) сохраняются, однако оно не дает одновременно правильных выражений коэффициентов переноса [1]. В итоге она приводит к единичному значению числа Прандтля ($Pr = 1$), которое отличается от значения $2/3$, получаемого из кинетического уравнения Больцмана и физического эксперимента для одноатомных газов. Для исключения сформулированных выше недостатков были предложены некоторые модификации

БГК-модели.

Одной из таких модификаций является S-модель кинетического уравнения [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_y \frac{\partial f}{\partial y'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \\ = \nu \left(f_M + \frac{2m}{15n(\mathbf{r}')k_B^2 T^2(\mathbf{r}')} \mathbf{v}' \mathbf{q}'(\mathbf{r}') \left(\frac{mv^2}{2k_B T(\mathbf{r}')} - \frac{5}{2} \right) - f \right), \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

где $\mathbf{q}'(\mathbf{r}')$ – вектор потока тепла в канале. При переходе к гидродинамическому режиму второе слагаемое в интеграле столкновений S-модели (1.1.2) приводит к $\text{Pr} = 2/3$, однако неравенство, вытекающее из второго закона термодинамики, доказано только в случае линеаризованной S-модели.

В уравнениях (1.1.2), (1.1.4) частота столкновений молекул газа является постоянной величиной. В то время как из расчетов частоты столкновений для физических моделей молекул (твердых сфер, потенциалов конечного радиуса действия) вытекает зависимость частоты столкновений молекул газа от молекулярной скорости [1], [54], поэтому в настоящем диссертационном исследовании в качестве основного уравнения, описывающего кинетику процессов, использована модификация модели БГК, в которой частота столкновений пропорциональна скорости молекул, – уравнение Вильямса [16]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_y \frac{\partial f}{\partial y'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\omega}{\gamma l_g} (f_* - f), \quad (1.1.5)$$

$$f_* = n_* \left(\frac{m}{2\pi k_B T_*} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2}{2k_B T_*} \right). \quad (1.1.6)$$

Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$ – массовая скорость газа, l_g – средняя длина свободного пробега частиц; $\omega = |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$. Величины n_* , T_* и \mathbf{u}_* находятся из законов сохранения импульса, энергии и числа частиц [21]. Значение $\gamma = 5\sqrt{\pi}/4$ в уравнении (1.1.5) выбрано из условия, что результаты, полученные на основании уравнения (1.1.5) для сплошной среды, соответствуют результатам классической гидродинамики. Основной недостаток уравнения (1.1.5) заключается в том, что оно приводит к значению $\text{Pr} = 8/9$ [76], которое по сравнению со значением для БГК модели с постоянной частотой столкновений ближе к реальному значению.

Важным аспектом при моделировании течений разреженного газа в каналах является выбор граничного условия, которое связывает функцию распределения $f^-(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v})$ падающих частиц на обтекаемую газом поверхность Γ и функцию распределения $f^+(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ молекул, отразившихся от нее [1]

$$f^+(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}) = \frac{H_+(v_n)}{v_n} \int H_+(-v'_n) |v'_n| R(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) f^-(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}') d^3\mathbf{v}', \quad \mathbf{v}\mathbf{n} > 0.$$

Здесь $H_+(v_n)$ – ступенчатая функция Хэвисайда, \mathbf{n} – единичный вектор нормали к Γ , направленный в сторону газа, $v_n = \mathbf{n}\mathbf{v}$ – нормальная к поверхности составляющая скорости молекулы газа, $R(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ – ядро рассеяния, а элемент $R(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) d^3\mathbf{v}'$ определяет вероятность того, что молекула, имеющая скорость \mathbf{v}' до столкновения с поверхностью в точке с радиус-вектором \mathbf{r}'_Γ , после столкновения приобретает скорость \mathbf{v} [1]. В случае полной аккомодации количества движения и энергии падающих частиц на поверхность канала имеет место диффузная модель граничного условия, а функция распределения отразившихся от поверхности канала молекул определяется локальным максвеллианом $f_\Gamma(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ с параметрами, заданными на стенках канала, и не зависит от распределения падающих частиц:

$$f^+(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}) = f_\Gamma(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v}\mathbf{n} > 0, \quad (1.1.7)$$

$$f_\Gamma(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}) = n(\mathbf{r}'_\Gamma) \left(\frac{m}{2\pi k_B T(\mathbf{r}'_\Gamma)} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{2k_B T(\mathbf{r}'_\Gamma)} \mathbf{v}^2 \right). \quad (1.1.8)$$

Здесь $T(\mathbf{r}'_\Gamma)$ есть температура, поддерживаемая на стенках канала, а величина $n(\mathbf{r}'_\Gamma)$ определяется условием непротекания, которое заключается в отсутствии среднемассового потока молекул газа через поверхность [76].

Обобщением модели (1.1.7) является зеркально-диффузное граничное условие Максвелла, в котором функция распределения молекул газа, отразившихся от поверхности канала, имеет вид [51]:

$$f^+(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}) = (1 - \alpha) f^-(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v})) + \alpha f_\Gamma(\mathbf{r}'_\Gamma, \mathbf{v}), \quad \mathbf{v}\mathbf{n} > 0. \quad (1.1.9)$$

Здесь α – коэффициент аккомодации тангенциального импульса молекул газа. Для зеркального отражения $\alpha = 0$, а скорость молекулы в момент этого отражения определяется однозначно скоростью ее падения. Другой моделью,

описывающей взаимодействие молекул разреженного газа с поверхностью канала, является модель Черчиньяни-Лэмпис, в которой ядро рассеяния имеет вид [54]:

$$R(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \frac{m^2 v_n}{4\pi^2 \alpha_n \alpha_\tau (2 - \alpha_\tau) (k_B T)^2} \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{\sqrt{1 - \alpha_n} m v_n v'_n \cos \phi}{k_B T \alpha_n}\right) d\phi \times \\ \times \exp\left(\frac{m (v_n^2 + (1 - \alpha_n) v_n'^2)}{2k_B T \alpha_n} - \frac{m (\mathbf{v}_\tau + (1 - \alpha_\tau) \mathbf{v}'_\tau)^2}{2k_B T \alpha_\tau (2 - \alpha_\tau)}\right), \quad (1.1.10)$$

где α_τ , α_n – коэффициенты аккомодации тангенциального импульса и кинетической энергии, связанной с компонентой скорости v_n . При $\alpha_\tau = 0$ и $\alpha_n = 0$ отражение молекул газа от поверхности канала соответствует зеркальному. При $\alpha_\tau = 1$ и $\alpha_n = 1$ это отражение является диффузным.

Полученные в [55] значения α для молекул тяжелых газов, например Kr и Xe, показали, что при моделировании течений этих газов в каналах можно ограничиться диффузной моделью отражения. В то время как для легких газов таких, как N, Ar, He и Ne, наблюдается отклонение значения α от единицы в случае химической очистки поверхности [56]-[62], поэтому для описания процессов переноса в этих газах применяется граничное условие (1.1.9). Если же взаимодействие молекул рассматривается в случае тяжелого газа с макроскопически гладкой поверхностью, то можно считать, что имеет место полная аккомодация молекул газа, так же как и при загрязнении поверхности. Это обстоятельство можно объяснить тем, что промышленные образцы имеют шероховатые поверхности, в силу чего падающие частицы газа испытывают неоднократные отражения от поверхности канала. Таким образом, выбор между диффузной и зеркально-диффузной моделями отражения молекул газа стенками канала определяется модельной ситуацией, а их использование является адекватным для описания течений разреженного газа в каналах.

1.2 Основные параметры при моделировании течений разреженного газа в каналах

При моделировании течений газа параметр, который определяется следующим отношением [51]

$$\text{Kn} = \frac{l_g}{l'}, \quad (1.2.1)$$

где l' – характерный размер течения газа в канале, называется числом Кнудсена. Из (1.2.1) вытекает, что уменьшение размеров поперечного сечения канала приводит к росту значений этого числа, и, как следствие, увеличивает влияние поверхностных взаимодействий. В зависимости от значений этого числа можно выделить режимы течения, указанные в таблице 1.2.1 согласно [60], [63], [64]. В свободномолекулярном режиме межмолекулярные столкновения могут не учитываться [1]. Реализация этого режима, как видно из таблицы 1.2.1, происходит при $\text{Kn} \gg 1$. В случае значений $\text{Kn} \ll 1$, характерных для гидродинамического режима, газ моделируется как сплошная среда. Для промежуточного режима решения задач о тепло- и массопереносе в микро- и наноканалах могут быть получены интегрированием кинетического уравнения Больцмана или модельных кинетических уравнений при соответствующих начальных и граничных условиях.

Таблица 1.2.1 - Классификация режимов течения в зависимости от значений числа Кн

Свободно-молекулярный режим	Режим, близкий к свободномолекулярному	Промежуточный режим	Режим течения со скольжением	Режим, близкий к гидродинамическому	Гидродинамический режим
$\text{Kn} \gg 1$	$\text{Kn} \geq 10$	$0.1 \leq \text{Kn} < 10$	$0.01 \leq \text{Kn} < 0.1$	$\text{Kn} < 0.01$	$\text{Kn} \ll 1$
Кинетическое уравнение Больцмана для бесстолкновительного газа	Уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения		Система уравнений Навье-Стокса с граничными условиями скольжения		Система уравнений Навье-Стокса с граничными условиями прилипания
			Уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения		

Основными макропараметрами для описания процессов массо- и теплопереноса разреженного газа в каналах служат потоки тепла и массы газа [11]. Вектор теплового потока и вектор массовой (гидродинамической, макроскопической) скорости определяются функцией $f(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ согласно [51] как

$$\mathbf{q}'(\mathbf{r}') = \frac{m}{2} \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')) |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|^2 f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) d^3\mathbf{v}, \quad (1.2.2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}') = \frac{1}{n(z)} \int \mathbf{v} f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) d^3\mathbf{v}. \quad (1.2.3)$$

Введем безразмерные векторы величин (1.2.2) и (1.2.3), следуя [1]

$$\mathbf{q} = \frac{\beta^{1/2}}{p_0} \mathbf{q}', \quad \mathbf{U} = \beta^{1/2} \mathbf{u}, \quad (1.2.4)$$

где $\beta = m/(2k_B T_0)$, T_0 – температура газа в начале координат.

Тепловой и массовый потоки газа через канал площадью поперечного сечения S' находим как [1]

$$J'_M = m \iint_{(S')} n(\mathbf{r}') u_z(\mathbf{r}') dx' dy', \quad (1.2.5)$$

$$J'_Q = \iint_{(S')} q_z(\mathbf{r}') dx' dy', \quad (1.2.6)$$

соответственно.

Приведенные потоки через поперечное сечение канала определяем через J'_Q и J'_M как

$$J_Q = \frac{2\beta^{1/2} J'_Q}{S' p_0}, \quad J_M = \frac{J'_M}{S' p_0 \beta^{1/2}} \quad (1.2.7)$$

где p_0 – давление газа в некоторой точке, принятой за начало координат.

1.3 Синтез математических моделей процессов

Проблема моделирования процессов тепло- и массопереноса в микро- и наноканалах связана с исследованием течений разреженного газа в зависимости от геометрии сечения каналов и характера поверхностного взаимодействия

молекул газа со стенками каналов. Построение математических моделей процессов в этом случае усложняется перекрестными эффектами, а именно, массовым потоком, обусловленным градиентом температуры, и тепловым потоком, обусловленным градиентом давления [1]. В настоящей диссертационной работе данные перекрестные эффекты рассматриваются в рамках задач о тепловом крипе и течении Пуазейля. Под тепловым крипом будем понимать, как и в работе [31], медленное течение, которое обусловлено постоянным, параллельно направленным оси канала, градиентом температуры; под течением Пуазейля — изотермическое течение, поддерживаемое постоянным градиентом давления [31]. Предлагаемый в исследовании подход моделирования течений разреженного газа включает этапы: 1) выбор модели кинетического уравнения и модели граничных условий, которые являются адекватными, 2) формализацию граничной задачи и сведение ее путем линеаризации функции распределения к решению квазилинейного неоднородного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, 3) решение методом характеристик полученного уравнения, 4) построение профилей вектора потока тепла и массовой скорости газа в канале, 5) вычисление теплового и массового потоков через поперечное сечение рассматриваемого канала, 6) анализ полученных результатов в предельных режимах течения газа и сравнение их с известными аналитическими решениями задач динамики разреженного газа и численными результатами других авторов.

При построении математических моделей процессов будем исходить из следующих предположений [1]:

1. Длины рассматриваемых каналов значительно превышают размеры их поперечных сечений. При этом условии концевыми эффектами пренебрегаем.
2. Режим течения газа стационарный.
3. Молекулы газа рассматриваются как одноатомные, бесструктурные частицы. В этом случае внутренние степени свободы молекул газа не учитываем.
4. Газ простой, однокомпонентный.
5. Течение газа в канале слабозмущенное.
6. Течение медленное и газ находится в состоянии теплового равновесия со стенками канала, а следовательно, в этом случае происходит полная аккомодация энергии падающих частиц.

Описанные выше этапы кинетического подхода были применены для построения математических моделей процессов тепло- и массопереноса в разреженных газах через сечения прямоугольных, цилиндрических, эллиптических каналов и каналов с внутренним цилиндром в задачах о тепловом крипе и течении Пуазейля. В качестве основного уравнения для описания кинетики процессов переноса использовано уравнение Вильямса (1.1.5), а в качестве граничных условий на стенках каналов применены модели диффузного (1.1.7) и зеркально-диффузного отражения (1.1.9). Уравнение Вильямса является сложным нелинейным интегро-дифференциальным уравнением. Однако, для медленных слабовозмущенных течений состояние газа мало отличается от равновесного, что позволяет линеаризовать функцию распределения относительно локального максвеллиана с параметрами, заданными на поверхности канала. В результате уравнение Вильямса записано в линеаризованном виде, а его решение представлено в виде разложения по двум ортогональным функциям в пространстве скоростей и сведено к системе двух независимых уравнений. Одним из них является интегро-дифференциальное уравнение, описывающее течение Пуазейля, другое — квазилинейное неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, описывающее тепловой крип. Показано, что при получении подынтегральной функции для компоненты вектора потока тепла в задаче о течении Пуазейля, интегро-дифференциальное уравнение в частных производных может быть сведено к квазилинейному неоднородному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка, имеющего такую же структуру, как и уравнение в задаче о тепловом крипе. Первые независимые интегралы системы характеристик полученных уравнений записаны методом характеристик. Из граничного условия найдены константы, входящие в интегралы системы. В результате для каждой модели поверхностного взаимодействия и конфигурации канала функция распределения записана в явном виде. На основе построенной функции распределения получены профили вектора потока тепла и массовой скорости газа в канале. С учетом определения компонент векторов потоков найдены приведенные безразмерные потоки тепла и массы газа. Значения интегральных выражений потоков вычислены с использованием полиномов Чебышёва для широкого диапазона изменения значений числа Кнудсена. Исследовано течение газа в предельных режимах. Проведено

сравнение с аналогичными результатами, полученными в [6]–[45] на основании БГК и S-моделей.

1.4 Линеаризация нелинейного релаксационного кинетического уравнения Вильямса

Рассмотрим установившееся течение газа в канале. Изменение состояния газа опишем уравнением Вильямса (1.1.5), которое для стационарного режима течения газа имеет вид

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_y \frac{\partial f}{\partial y'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\omega}{\gamma l_g} (f_* - f). \quad (1.4.1)$$

Уравнение (1.4.1) является существенно нелинейным интегро-дифференциальным уравнением. Однако, если состояние газа мало отличается от локально-равновесного, то возможно провести линеаризацию функции распределения относительно локального максвеллиана. Начало декартовой системы координат выберем в сечении, расположенном в середине канала. Ось z' направим параллельно образующей стенок канала. Будем рассматривать течение газа в окрестности точки $z' = 0$. Обозначим характерный размер поперечного сечения канала как l' и выберем его в качестве размерного масштаба. При этом безразмерные величины длины будем обозначать без штриха. Вследствие того, что длины каналов, рассматриваемых в главах 2 и 3, значительно превышают размеры поперечных сечений этих каналов, то температура и давление газа в этом случае значительно быстрее релаксируют в сечении, чем по оси канала [1]. В результате чего полагаем, что $T = T(z)$ и $p = p(z)$, где $z = z'/l'$, а их безразмерные градиенты G_T и G_p являются малыми по модулю, т. е.

$$G_T = \frac{1}{T_0} \frac{dT}{dz}, \quad |G_T| \ll 1; \quad G_p = \frac{1}{p_0} \frac{dp}{dz}, \quad |G_p| \ll 1. \quad (1.4.2)$$

В линейном приближении давление и температура газа имеют вид

$$T(z) = T_0(1 + G_T z), \quad p(z) = p_0(1 + G_p z). \quad (1.4.3)$$

Введем обозначение для безразмерной молекулярной скорости как $\mathbf{C} = \beta^{1/2}\mathbf{v}$, где $\beta = m/(2k_B T_0)$. Локально-равновесную функцию распределения (1.1.8) с параметрами на стенках канала линеаризуем относительно абсолютного максвеллиана $f_0(C) = n_0(\beta/\pi)^{3/2} \exp(-C^2)$. Учитывая при этом, что $p(z) = n(z)k_B T(z)$, приходим к следующему выражению для $f_\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{C})$

$$f_\Gamma(z, \mathbf{C}) = f_0(C) \left(1 + G_T \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) z + G_p z \right). \quad (1.4.4)$$

В предположении, что течение газа медленное и газ находится в состоянии теплового равновесия с поверхностью канала, осуществляем линеаризацию функции $f(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ относительно $f_\Gamma(z, \mathbf{C})$. Учитывая выражение (1.4.4), представляем функцию $f(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ как

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = f_0(C) (1 + h'(\mathbf{r}, \mathbf{C})), \quad (1.4.5)$$

$$h'(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = G_T \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) z + G_p z + C_z h(x, y, \mathbf{C}). \quad (1.4.6)$$

Принимая во внимание отсутствие нормальной к стенкам канала составляющей градиентов температуры и давления, в предположении тепловой непроницаемости стенок канала для молекул газа считаем, что векторы потока тепла и массовой скорости газа в канале имеют только продольные компоненты [34]. Подставляя функцию распределения (1.4.5) в (1.2.2) и (1.2.3), получаем выражения для соответствующих безразмерных компонент (1.2.4), записанные через функцию $h(x, y, \mathbf{C})$ как

$$q_z(x, y) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z^2 \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) h(x, y, \mathbf{C}) d^3 \mathbf{C}, \quad (1.4.7)$$

$$U_z(x, y) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z^2 h(x, y, \mathbf{C}) d^3 \mathbf{C}. \quad (1.4.8)$$

Полагая $T_* = T_0 + \delta T_*$, $n_* = n_0 + \delta n_*$ и $\mathbf{U}_* = \beta^{1/2} \mathbf{u}_*$, функцию $f_*(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ запишем в виде

$$f_*(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = f_0(C) (1 + h_*(\mathbf{r}, \mathbf{C})), \quad (1.4.9)$$

$$h_*(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = \frac{\delta n_*}{n_0} + 2\mathbf{C}\mathbf{U}_* + \left(C^2 - \frac{3}{2} \right) \frac{\delta T_*}{T_0}. \quad (1.4.10)$$

Величины δn_* , δT_* и \mathbf{U}_* , входящие в (1.4.10), находим из законов сохранения числа частиц, импульса и энергии [77]:

$$\int \omega M_j f_* d^3 \mathbf{C} = \int \omega M_j f d^3 \mathbf{C}, \quad j = \overline{0, 4}, \quad (1.4.11)$$

$$M_0 = 1, M_i = mC_i \ (i = \overline{1,3}), M_4 = mC^2/2.$$

Подставляя (1.4.5)-(1.4.10) в модельное кинетическое уравнение Вильямса (1.4.1), получаем линеаризованное релаксационное уравнение

$$\left(C_x \frac{\partial h}{\partial x} + C_y \frac{\partial h}{\partial y} + G_p + G_T \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) \right) C_z \gamma \text{Kn} = \\ = Ch_*(\mathbf{r}, \mathbf{C}) - Ch'(\mathbf{r}, \mathbf{C}). \quad (1.4.12)$$

Подставляя (1.4.5)-(1.4.10) в (1.4.11), находим

$$\frac{\delta n_*}{n_0} = \frac{3}{4\pi} \int C \exp(-C^2) h' d^3 \mathbf{C} - \frac{1}{8\pi} \int C^3 \exp(-C^2) h' d^3 \mathbf{C}, \quad (1.4.13)$$

$$\frac{\delta T_*}{T_0} = \frac{1}{2\pi} \int C \exp(-C^2) h' d^3 \mathbf{C} - \frac{1}{4\pi} \int C^3 \exp(-C^2) h' d^3 \mathbf{C}, \quad (1.4.14)$$

$$\mathbf{U}_* = \frac{3}{8\pi} \int C \mathbf{C} \exp(-C^2) h' d^3 \mathbf{C}. \quad (1.4.15)$$

Таким образом, уравнение (1.4.12) с учетом полученных выражений (1.4.13)-(1.4.15) и представления (1.4.6) перепишем в виде

$$\left(C_x \frac{\partial h}{\partial x} + C_y \frac{\partial h}{\partial y} + G_p + G_T \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) \right) \gamma \text{Kn} + Ch(x, y, \mathbf{C}) = \\ = \frac{C}{2\pi} \int C' \exp(-C'^2) k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') C_z h(x, y, \mathbf{C}') d^3 \mathbf{C}', \quad (1.4.16)$$

где $k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = 1 + 3\mathbf{C}\mathbf{C}'/2 + (C^2 - 2)(C'^2 - 2)/2$.

Полагая, что $C_x = Cc_x$, $C_y = Cc_y$ и функции c_x и c_y не зависят от C , поделим левую и правую части уравнения (1.4.16) на C . В результате получаем

$$\left(c_x \frac{\partial h}{\partial x} + c_y \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{G_p}{C} + G_T \left(C - \frac{5}{2C} \right) \right) \gamma \text{Kn} + h(x, y, \mathbf{C}) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int C' \exp(-C'^2) k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') C_z h(x, y, \mathbf{C}') d^3 \mathbf{C}'. \quad (1.4.17)$$

Поскольку градиенты температуры и давления малы, решение уравнения (1.4.17) может быть представлено как

$$h(x, y, \mathbf{C}) = G_p h_p(x, y, \mathbf{C}) + G_T h_T(x, y, \mathbf{C}). \quad (1.4.18)$$

Подставляя (1.4.17) в (1.4.7) и (1.4.8), можно видеть, что безразмерные компоненты q_z и U_z могут быть также представлены в виде суммы

$$q_z = G_p q_{p,z} + G_T q_{T,z}, \quad U_z(x, y) = G_p U_{p,z} + G_T U_{T,z}. \quad (1.4.19)$$

Здесь функции $q_{p,z}(x, y)$ и $U_{p,z}(x, y)$ определяют значения компонент векторов потоков тепла и массовой скорости газа в задаче о течении Пуазейля, а $q_{T,z}(x, y)$ и $U_{T,z}(x, y)$ — в задаче о тепловом крипе.

Подставляя (1.4.18) в (1.4.16), получаем два незацепленных уравнения:

$$\begin{aligned} \left(c_x \frac{\partial h_p}{\partial x} + c_y \frac{\partial h_p}{\partial y} + \frac{1}{C} \right) \gamma \text{Kn} + h_p(x, y, \mathbf{C}) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int C' \exp(-C'^2) k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') C_z h_p(x, y, \mathbf{C}') d^3 \mathbf{C}', \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

$$\begin{aligned} \left(c_x \frac{\partial h_T}{\partial x} + c_y \frac{\partial h_T}{\partial y} + \left(C - \frac{5}{2C} \right) \right) \gamma \text{Kn} + h_T(x, y, \mathbf{C}) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int C' \exp(-C'^2) k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') C_z h_T(x, y, \mathbf{C}') d^3 \mathbf{C}'. \end{aligned} \quad (1.4.21)$$

Уравнение (1.4.20) описывает поток разреженного газа, вызываемый градиентом давления в задаче о течении Пуазейля, а уравнение (1.4.21) — градиентом температуры в задаче о тепловом крипе. Будем искать решение уравнения (1.4.21) в виде:

$$h_T(x, y, \mathbf{C}) = \gamma \text{Kn} \left(C - \frac{5}{2C} \right) Z(x, y, c_x, c_y). \quad (1.4.22)$$

Тогда подстановкой (1.4.22) в (1.4.21) получаем

$$\left(c_x \frac{\partial Z}{\partial x} + c_y \frac{\partial Z}{\partial y} \right) \gamma \text{Kn} + Z(x, y, c_x, c_y) + 1 = 0. \quad (1.4.23)$$

Представим функцию $h_p(x, y, \mathbf{C})$ в виде разложения по ортогональным в смысле равенства нулю скалярного произведения функций $e_1 = 1$ и $e_2 = 1/C - 3\sqrt{\pi}/8$:

$$h_p(x, y, \mathbf{C}) = \gamma \text{Kn} Z_1(x, y, c_x, c_y) + \gamma \text{Kn} \left(\frac{1}{C} - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \right) Z_2(x, y, c_x, c_y). \quad (1.4.24)$$

Здесь скалярное произведение функций $f_1(C)$ и $f_2(C)$ определяется следующим образом [21]

$$(f_1, f_2) = \int_0^{+\infty} f_1(C) f_2(C) C^5 \exp(-C^2) dC. \quad (1.4.25)$$

Подставляя (1.4.24) в (1.4.20), в силу ортогональности функций $e_1 = 1$ и $e_2 = 1/C - 3\sqrt{\pi}/8$ получаем два независимых уравнения для определения неизвестных функций $Z_1(x, y, c_x, c_y)$ и $Z_2(x, y, c_x, c_y)$:

$$\left(c_x \frac{\partial Z_1}{\partial x} + c_y \frac{\partial Z_1}{\partial y} \right) \gamma \text{Kn} + Z_1(x, y, c_x, c_y) + \frac{3\sqrt{\pi}}{8} =$$

$$= \frac{3}{4\pi} \int C' \exp(-C'^2) C_z'^2 Z_1(x, y, c'_x, c'_y) d^3 \mathbf{C}', \quad (1.4.26)$$

$$\left(c_x \frac{\partial Z_2}{\partial x} + c_y \frac{\partial Z_2}{\partial y} \right) \gamma \text{Kn} + Z_2(x, y, c_x, c_y) + 1 = 0. \quad (1.4.27)$$

Компоненты $q_{T,z}(x, y)$, $U_{T,z}(x, y)$ и $q_{p,z}(x, y)$ в (1.4.19) находим по формулам (1.4.7) и (1.4.8)

$$q_{T,z}(x, y) = \frac{\gamma \text{Kn}}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) \frac{C_z^2}{C} \left(C^2 - \frac{5}{2} \right)^2 Z(x, y, c_x, c_y) d^3 \mathbf{C}, \quad (1.4.28)$$

$$U_{T,z}(x, y) = \frac{\gamma \text{Kn}}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) C_z^2 \left(C - \frac{5}{2C} \right) Z(x, y, c_x, c_y) d^3 \mathbf{C}, \quad (1.4.29)$$

$$q_{p,z}(x, y) = \frac{\gamma \text{Kn}}{\pi^{3/2}} \int \exp(-C^2) C_z^2 \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) \left(\frac{1}{C} - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \right) Z_2(x, y, c_x, c_y) d^3 \mathbf{C}. \quad (1.4.30)$$

Таким образом, для восстановления компонент $q_{T,z}(x, y)$, $U_{T,z}(x, y)$ и $q_{p,z}(x, y)$ в канале по формулам (1.4.28)-(1.4.30) и дальнейшего их анализа необходимы решения уравнений (1.4.23) и (1.4.27). В главах 2 и 3 эти решения получены в зависимости от модели поверхностного взаимодействия молекул газ и геометрии сечений каналов.

1.5 Выводы из главы 1

1. Рассмотрены основные модельные кинетические уравнения и модели поверхностного взаимодействия для описания течений разреженного газа в микро- и наноканалах.

2. Обосновано использование в диссертационном исследовании для описания процессов переноса в разреженном газе уравнения Вильямса и граничных условий на поверхности канала.

3. Описаны этапы моделирования течений одноатомного разреженного газа в прямых каналах.

4. Проведена линеаризация модельного уравнения и записаны выражения для тепловых и массовых потоков в каналах через функцию распределения.

Математическое моделирование течений разреженного газа в длинных каналах с использованием диффузной модели отражения

2.1 Постановка задачи о тепловом крипе

Рассматривается в рамках диффузной модели отражения медленное стационарное течение одноатомного разреженного газа в длинном канале постоянного поперечного сечения, обусловленное продольным градиентом температуры G_T . Начало O' декартовой системы координат находится в сечении, которое расположено в середине канала. Ось z' направлена параллельно образующей стенок канала, поддерживаемых при температуре T_Γ . При этом в качестве размерного масштаба выберем размер сечения, определяемый его конфигурацией. На стенках канала происходит диффузное отражение. Предполагаем, что $G_p = 0$. В этом случае, как было показано в главе 1, квазилинейное дифференциальное уравнение в частных производных (1.4.23) совместно с граничным условием для функции $Z(x, y, c_x, c_y)$ описывает поток разреженного газа в канале при малом по абсолютной величине безразмерном градиенте температуры G_T . Вид этого граничного условия определяется моделью отражения молекул газа стенками канала. В рамках рассматриваемой модели отражения граничное условие для функции $Z(x, y, c_x, c_y)$, как следует из (1.1.7), становится однородным

$$Z(x_\Gamma, y_\Gamma, c_x, c_y) = 0, \quad \mathbf{Cn} > 0. \quad (2.1.1)$$

Таким образом, для того, чтобы получить явный вид линеаризованной функции распределения (1.4.5) согласно (1.4.18) в рамках задачи о тепловом крипе при диффузной модели отражения молекул газа стенками канала необходимо найти функцию $Z(x, y, c_x, c_y)$ из уравнения (1.4.23), для которой на гра-

нице Γ выполняются условия (2.1.1). В этом случае компоненты безразмерных векторов потока тепла $q_{T,z}$ и массовой скорости $U_{T,z}$ газа в канале могут быть определены по формулам (1.4.28) и (1.4.29), а сами приведенные потоки — по формулам (1.2.7). Далее для промежуточного и свободномолекулярного режимов течения решения задачи о тепловом крипе получены в зависимости от геометрии сечения канала. Предлагаемые подходы к построению математических моделей процессов переноса в каналах, описанные в настоящей главе, подробно представлены в работах [65]-[75].

2.2 Тепловой крип в прямоугольном канале в промежуточном режиме течения

Рассмотрим длинный прямоугольный канал. Стороны прямоугольника обозначим как a' и b' , а его границу — Ω_r . Стенки прямоугольного канала расположены в плоскостях $x' = \pm a'/2$ и $y' = \pm b'/2$ (рисунок 2.2.1). Выберем в качестве размерного масштаба высоту b' , следовательно число Кнудсена согласно (1.2.1) становится равным $\text{Kn} = l_g/b'$.

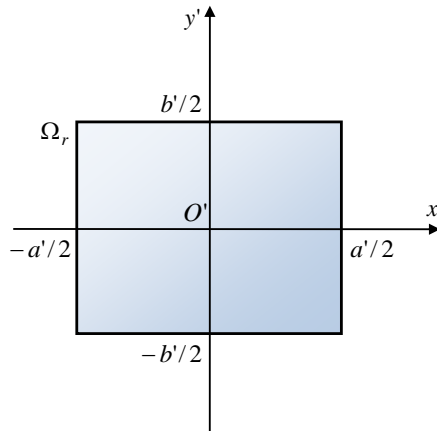


Рисунок 2.2.1 - Сечение прямоугольного канала

Для нахождения неизвестной функции $Z(x, y, c_x, c_y)$ из уравнения (1.4.23) в пространстве скоростей перейдем к сферическим координатам по формулам: $c_x = \cos \varphi \sin \theta$, $c_y = \sin \varphi \sin \theta$, $c_z = \cos \theta$. Новую функцию, полученную в

результате этого преобразования, обозначим как $Z'(x, y, \varphi, \theta) \equiv Z(x, y, c_x, c_y)$. Далее штрих будем опускать. Подставляя функцию $Z(x, y, \varphi, \theta)$ в уравнение (1.4.23) и граничное условие (2.1.1), приходим к следующей краевой задаче:

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial Z}{\partial y} \sin \varphi \right) \gamma \text{Kn} \sin \theta + Z(x, y, \varphi, \theta) + 1 = 0, \quad (2.2.1)$$

$$Z(\pm a/2, y_{\Omega_r}, \varphi, \theta) = 0, \quad \pm \cos \varphi < 0, \quad (2.2.2)$$

$$Z(x_{\Omega_r}, \pm b/2, \varphi, \theta) = 0, \quad \pm \sin \varphi < 0. \quad (2.2.3)$$

Решение уравнения (2.2.1) с граничными условиями (2.2.2) и (2.2.3) находим методом характеристик [78], записывая для (2.2.1) систему уравнений характеристик в виде

$$\frac{dx}{\gamma \text{Kn} \cos \varphi \sin \theta} = \frac{dy}{\gamma \text{Kn} \sin \varphi \sin \theta} = -\frac{dZ}{Z(x, y, \varphi, \theta) + 1} = dt. \quad (2.2.4)$$

Находим два первых интеграла системы (2.2.4)

$$\frac{x}{\cos \varphi} - \frac{y}{\sin \varphi} = C_1, \quad (Z(x, y, \varphi, \theta) + 1) \exp \left(\frac{x}{\gamma \text{Kn} \cos \varphi \sin \theta} \right) = C_2. \quad (2.2.5)$$

Для молекул, отразившихся от правой стенки $x_{\Omega_r} = a/2$, подставляем это значение для x в первый интеграл (2.2.5). Тогда,

$$\frac{y_{\Omega_r}}{\sin \varphi} = -\frac{2x - a}{2 \cos \varphi} + \frac{y}{\sin \varphi}. \quad (2.2.6)$$

Используем следующую запись для второго интеграла (2.2.5):

$$(Z(x, y, \varphi, \theta) + 1) \exp \left(\frac{y}{\gamma \text{Kn} \sin \varphi \sin \theta} \right) = C'_2. \quad (2.2.7)$$

Подставляем в (2.2.7) выражения (2.2.2) и (2.2.6) и исключаем C'_2 из (2.2.7). В итоге имеем, что для молекул, отразившихся от правой стенки $x_{\Omega_r} = a/2$, функция $Z(x, y, \varphi, \theta)$ имеет вид

$$Z(x, y, \varphi, \theta) = w_1(x, \varphi, \theta) - 1, \quad w_1(x, \varphi, \theta) = \exp \left(-\frac{2x - a}{2\gamma \text{Kn} \cos \varphi \sin \theta} \right). \quad (2.2.8)$$

Аналогично находим функцию $Z(x, y, \varphi, \theta)$ для молекул, отразившихся от левой стенки $x_{\Omega_r} = -a/2$:

$$Z(x, y, \varphi, \theta) = w_3(x, \varphi, \theta) - 1, \quad w_3(x, \varphi, \theta) = \exp \left(-\frac{2x + a}{2\gamma \text{Kn} \cos \varphi \sin \theta} \right). \quad (2.2.9)$$

Для молекул, отразившихся от верхней стенки, при подстановке $y_{\Omega_r} = b/2$ в первый интеграл (2.2.5) имеем следующее выражение для x_{Ω_r} :

$$\frac{x_{\Omega_r}}{\cos \varphi} = -\frac{2y - b}{2 \sin \varphi} + \frac{x}{\cos \varphi}, \quad (2.2.10)$$

которое в свою очередь подставляем во второй интеграл (2.2.5) совместно со значением функции $Z(x, y, \varphi, \theta)$ на этой стенке. В результате получаем

$$Z(x, y, \varphi, \theta) = w_2(y, \varphi, \theta) - 1, \quad w_2(y, \varphi, \theta) = \exp\left(-\frac{2y - b}{2\gamma \text{Kn} \sin \varphi \sin \theta}\right). \quad (2.2.11)$$

Подобным образом находим функцию $Z(x, y, \varphi, \theta)$ для молекул, отразившихся от нижней стенки $y_{\Omega_r} = -b/2$:

$$Z(x, y, \varphi, \theta) = w_4(y, \varphi, \theta) - 1, \quad w_4(y, \varphi, \theta) = \exp\left(-\frac{2y + b}{2\gamma \text{Kn} \sin \varphi \sin \theta}\right). \quad (2.2.12)$$

Определим границы изменения угла φ в формулах (2.2.8)-(2.2.12). Составляющую вектора скорости молекулы, отразившейся от стенки, в плоскости $c_x c_y$ обозначим как \mathbf{c}_\perp . Из рисунка 2.2.2 находим предельные значения φ_0 и φ_1 полярного угла φ вектора \mathbf{c}_\perp молекулы, отразившейся от правой стенки $x_{\Omega_r} = a/2$. В этом случае в формуле (2.2.8) угол φ принадлежит промежутку: $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$, в котором φ_0 и φ_1 согласно рисунку 2.2.2 определяются выражениями

$$\varphi_0 = \arctg \frac{2y + b}{2x - a} + \pi, \quad \varphi_1 = \arctg \frac{2y - b}{2x - a} + \pi. \quad (2.2.13)$$

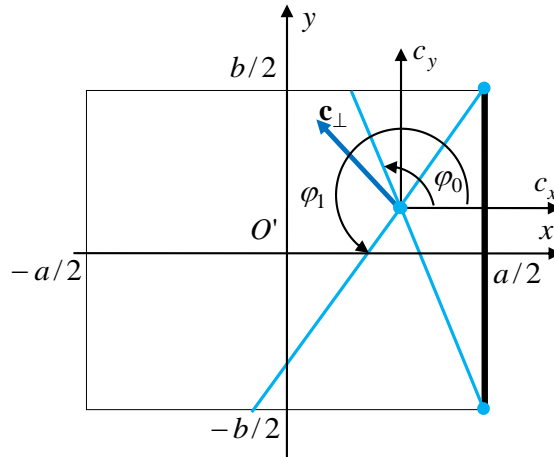


Рисунок 2.2.2 - Границы изменения угла φ при отражении молекулы от правой стенки прямоугольного канала

Аналогично определяем все остальные пределы изменения угла φ в формулах (2.2.9)-(2.2.12):

1. $\varphi_1 < \varphi \leq \varphi_2$ для молекул, отразившихся от верхней стенки $y_{\Omega_r} = b/2$;
 2. $\varphi_2 < \varphi \leq \varphi_3$ для молекул, отразившихся от левой стенки $x_{\Omega_r} = -a/2$;
 3. $\varphi_3 < \varphi \leq \varphi_4$ для молекул, отразившихся от нижней стенки $y_{\Omega_r} = -b/2$.
- Здесь углы φ_i ($i = \overline{2,4}$) определяются выражениями:

$$\varphi_2 = \arctg \frac{2y - b}{2x + a} + 2\pi, \quad \varphi_3 = \arctg \frac{2y + b}{2x + a} + 2\pi,$$

$$\varphi_4 = \arctg \frac{2y + b}{2x - a} + 3\pi. \quad (2.2.14)$$

Соотношения (2.2.8)-(2.2.14) определяют решение уравнения (2.2.1) с граничными условиями (2.2.2) и (2.2.3). Подставляя функцию $Z(x, y, \varphi, \theta)$ в (1.4.18), получим явный вид функции распределения (1.4.5), описывающей тепловой крип в прямоугольном канале при диффузной модели поверхностного отражения молекул газа стенками канала.

Далее находим отличные от нуля компоненты безразмерных векторов потока тепла $q_{T,z}(x, y)$ и массовой скорости $U_{T,z}(x, y)$ газа в канале по формулам (1.4.28) и (1.4.29):

$$q_{T,z}(x, y) = -\frac{3\gamma\text{Kn}}{2\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{3}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_k} w_k d\varphi \right), \quad (2.2.15)$$

$$U_{T,z}(x, y) = \frac{\gamma\text{Kn}}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{3}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_k} w_k d\varphi \right). \quad (2.2.16)$$

По формулам (1.2.7) определяем безразмерные приведенные потоки тепла и массы газа в канале

$$J_{T,Q} = \frac{8}{ab} \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} q_{T,z}(x, y) dx dy, \quad (2.2.17)$$

$$J_{T,M} = \frac{8}{ab} \int_0^{b/2} \int_0^{a/2} U_{T,z}(x, y) dx dy. \quad (2.2.18)$$

Приведенные потоки тепла и массы газа, найденные согласно (2.2.17) и (2.2.18), не зависят явно от размеров сечения канала, а определяются их отношением $a = a'/b'$ и числом Кнудсена Кн. Заметим, что в принятых безразмерных переменных $b = 1$, а обозначение b в формулах (2.2.15)-(2.2.18) сохранено

для симметрии записи соответствующих выражений. Из анализа выражений (2.2.15) и (2.2.16) следует, что

$$U_{T,z}(x, y) = -\frac{2}{9}q_{T,z}(x, y), \quad J_{T,M} = -\frac{2}{9}J_{T,Q}. \quad (2.2.19)$$

Соотношения (2.2.19) обобщают выражения, приведенные в [1] для потоков массы газа и тепла в свободномолекулярном режиме течения газа в канале. Значения $J_{T,M}$, найденные согласно (2.2.18) при $\text{Kn} \leq 1000$ с использованием системы компьютерной алгебры Maple 18 для различных отношений $a = a'/b'$, приведены в таблице 2.2.1. В последней строке этой таблицы значения $J_{T,M}$ получены на основе асимптотической формулы (2.2.21) для свободномолекулярного режима течения газа. При $a \geq 5$ аналогичные значения $J_{T,M}$ могут быть вычислены по (2.2.22).

Таблица 2.2.1 - Значения $J_{T,M}$ в зависимости от a и Kn для прямоугольного канала

Kn	$a = a'/b'$							
	0.1	0.5	0.9	1	1.1	5	10	100
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0.0010	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008
0.0100	0.0076	0.0081	0.0082	0.0082	0.0082	0.0083	0.0083	0.0083
0.1000	0.0395	0.0649	0.0699	0.0705	0.0711	0.0752	0.0758	0.0764
0.5000	0.0700	0.1623	0.1984	0.2043	0.2094	0.2593	0.2673	0.2745
1.0000	0.0799	0.2017	0.2572	0.2669	0.2756	0.3752	0.3949	0.4129
2.0000	0.0871	0.2321	0.3048	0.3182	0.3303	0.5105	0.5323	0.5729
5.0000	0.0931	0.2586	0.3478	0.3649	0.3804	0.6193	0.6996	0.8014
10.000	0.0958	0.2706	0.3678	0.3866	0.4040	0.6882	0.7990	0.9758
100.00	0.0990	0.2854	0.3929	0.4142	0.4340	0.7877	0.9579	1.4333
1000.0	0.0995	0.2878	0.3969	0.4186	0.4388	0.8059	0.9898	1.5984
∞	0.0995	0.2881	0.3976	0.4194	0.4396	0.8089	0.9954	1.6366

Для свободномолекулярного режима течения ($\text{Kn} \gg 1$) выражения (2.2.16) и (2.2.18) можно существенно упростить. Для этого разложим в ряд по малому параметру $1/\text{Kn}$ подынтегральные функции в (2.2.16) и ограничимся линейными членами в полученном выражении. В результате имеем

$$U_{T,z} = \frac{1}{16\sqrt{\pi}} \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{2x - a}{\cos \varphi} d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{2y - b}{\sin \varphi} d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} \frac{2x + a}{\cos \varphi} d\varphi + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} \frac{2y + b}{\sin \varphi} d\varphi \right) =$$

$$= \frac{1}{16\sqrt{\pi}} (W(x, a, y, b) + W(y, b, x, a) + W(x, -a, y, -b) + W(y, -b, x, -a)), \quad (2.2.20)$$

$$W(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2) \ln \left(\frac{\sqrt{(2x_1 - x_2)^2 + (2x_3 - x_4)^2} + 2x_3 - x_4}{\sqrt{(2x_1 - x_2)^2 + (2x_3 + x_4)^2} + 2x_3 + x_4} \right).$$

Подставляя (2.2.20) в (2.2.18), приходим к следующему выражению для $J_{T,M}$:

$$J_{T,M} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(a \ln \left(\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1} + \frac{b}{a} \right) + b \ln \left(\sqrt{\frac{a^2}{b^2} + 1} + \frac{a}{b} \right) - \frac{ab}{3(a + \sqrt{a^2 + b^2})} - \frac{ab}{3(b + \sqrt{a^2 + b^2})} \right). \quad (2.2.21)$$

При $a \gg 1$ выражение (2.2.21) имеет логарифмическую особенность

$$J_{T,M} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{b}{2} + b \ln \left(\frac{2a}{b} \right) + \frac{b^2}{3a} - \frac{b^3}{24a^2} \right), \quad (2.2.22)$$

что согласуется с аналогичным результатом [29] для прямоугольного канала в свободномолекулярном режиме и с выражением приведенного потока массы для двух бесконечных параллельных пластин в режиме, близком к свободномолекулярному [1]

$$J_{T,M} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \ln \text{Kn}^{-1}. \quad (2.2.23)$$

В то же время, как следует из (2.2.22) даже при значительно большем, но конечном значении отношения сторон a , в свободномолекулярном пределе приведенный поток массы газа в прямоугольном канале имеет конечное значение в отличии от соответствующей величины $J_{T,M}$ для двух горизонтальных параллельных пластин (2.2.23). Для $a = 5$ и $\text{Kn} \geq 100$ значения $J_{T,M}$ в прямоугольном канале (таблица 2.2.1) практически совпадают с асимптотическим значением 0.8089, найденным по (2.2.21) и (2.2.22). Погрешность вычислений менее 3% в этом случае.

В малой окрестности гидродинамического режима течения в выражении (2.2.16) вторым слагаемым в скобках (2.2.16) пренебрегаем, так как с уменьшением значений Kn подынтегральные выражения в (2.2.16) убывают экспоненциально. Тогда, $U_{T,z}(x, y) = \gamma \text{Kn} / (3\sqrt{\pi})$. Подставляя последнее выражение в

(2.2.18), имеем

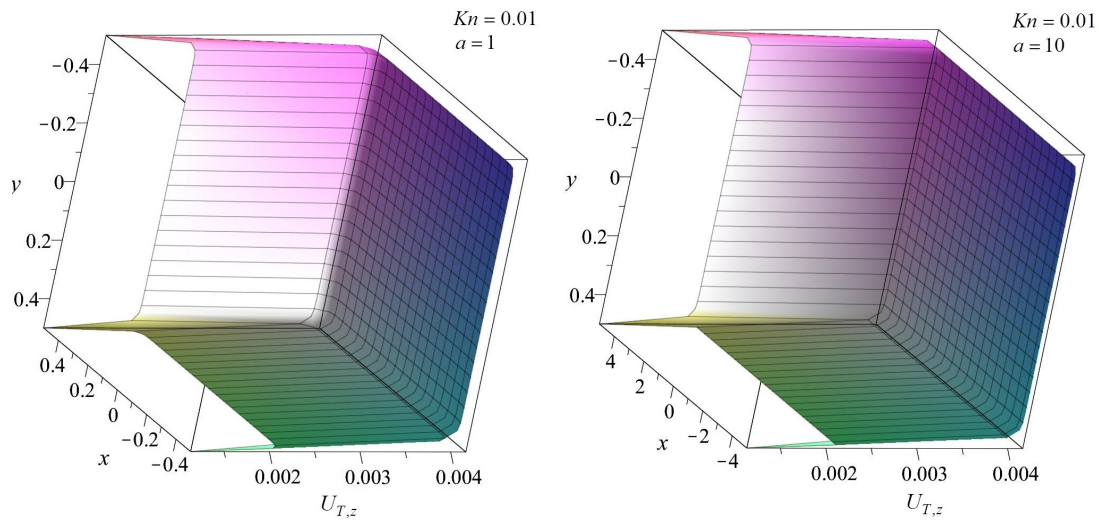
$$J_{T,M} = \frac{5\text{Kn}}{6}. \quad (2.2.24)$$

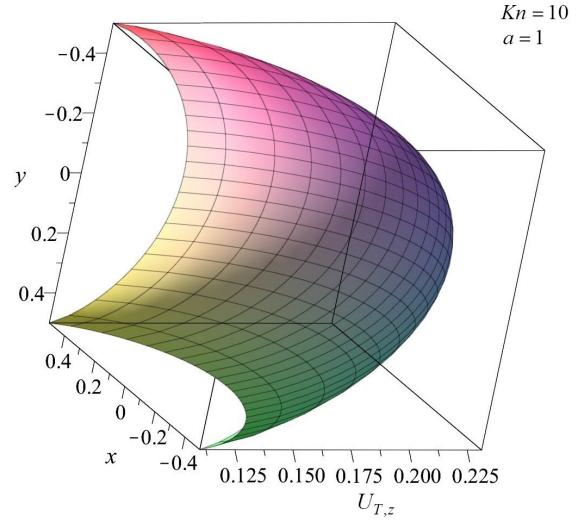
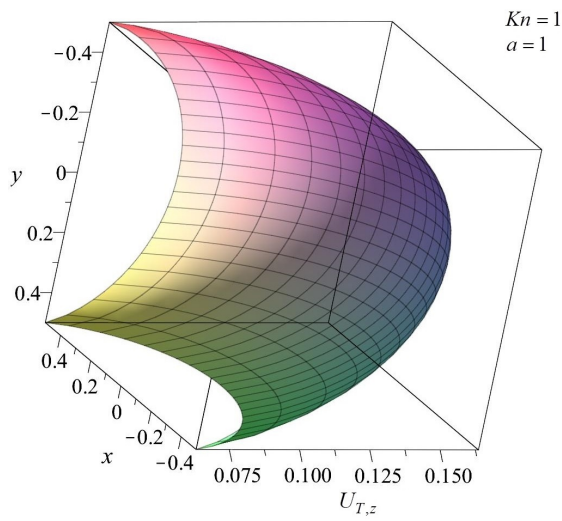
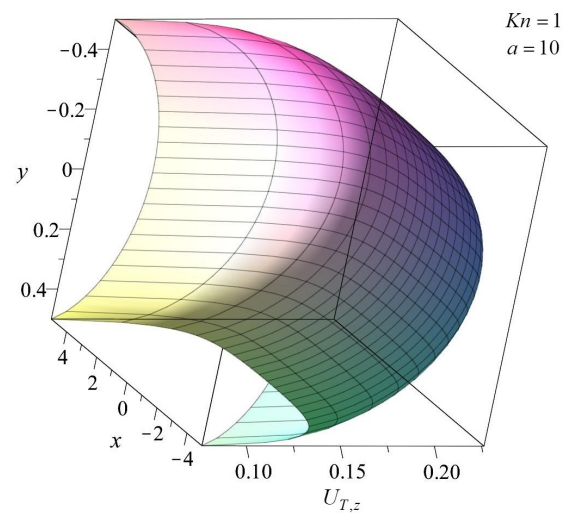
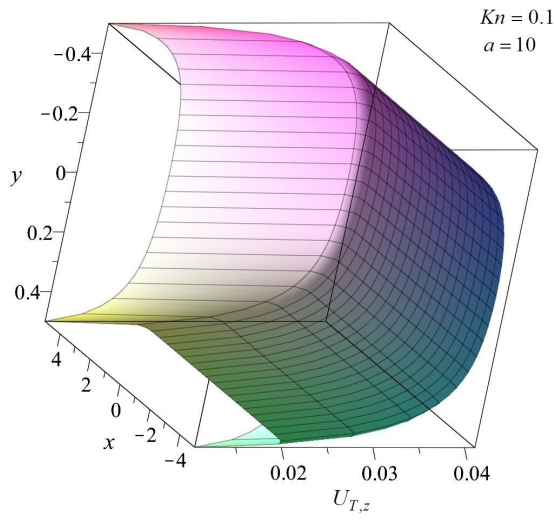
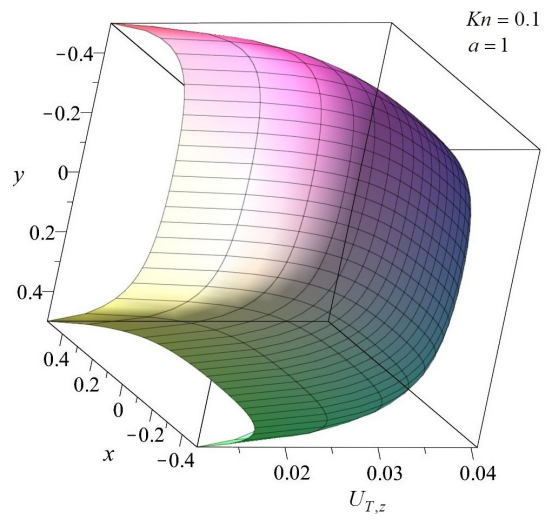
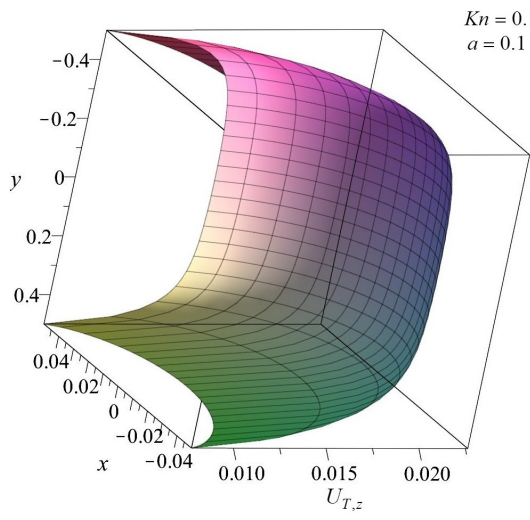
Из формул (2.2.19) и (2.2.24) вытекает, что величины $J_{T,Q}$ и $J_{T,M}$ не зависят от отношения a'/b' для режимов, близких гидродинамическому. Последнее утверждение подтверждается результатами, представленными в таблице 2.2.1 для $\text{Kn} \leq 0.001$. Согласно [1] в гидродинамическом режиме ($\text{Kn} = 0$) поток массы в отсутствии действия градиента давления принимает нулевое значение, которое получаем из (2.2.24) при $\text{Kn} = 0$. Значения $J_{T,M}$, приведенные в таблице 2.2.1, при малых значениях Kn приближаются к нулю. Из (2.2.24) следует, что коэффициент теплового скольжения имеет значение $5/6$, которое совпадает со значением, найденным в [76]. В таблице 2.2.2 для сравнения приведены результаты работ [6], [29], полученные с использованием S-модели методом дискретных ординат. Отличие приведенных значений потока массы газа от [6], [29] для каналов с квадратным сечением ($a = 1$) не превышает 8% при $\text{Kn} > 10$. Для каналов с $a > 1$ различие значений увеличивается. При этом значения $J_{T,M}$ при $\text{Kn} = 1000$, полученные по формуле (2.2.18), как следует из таблицы 2.2.2, ближе к свободномолекулярному пределу (2.2.21), чем результаты работ [6], [29]. При $\text{Kn} = 50$ отличие значений массового потока уменьшается до 3% для $a = 1, 2$.

Таблица 2.2.2 - Значения $J_{T,M}$ для $a = 1, 2, 4$ и 10 в сравнении с результатами [6], [29]

$\frac{1}{\text{Kn}}$	$a = a'/b'$							
	1		2		4		10	
	[29]	(2.2.18)	[6]	(2.2.18)	[6]	(2.2.18)	[29]	(2.2.18)
0.000	0.4194	0.4194	—	0.5762	—	0.7504	0.9954	0.9954
0.001	0.4181	0.4186	0.5736	0.5749	0.7451	0.7479	0.9839	0.9898
0.010	0.4110	0.4142	0.5558	0.5666	0.7120	0.7329	0.9165	0.9579
0.020	0.4037	0.4102	0.5416	0.5593	0.6874	0.7198	0.8658	0.9314
0.040	0.3912	0.4033	0.5210	0.5468	0.6524	0.6981	0.7960	0.8892
0.080	0.3716	0.3918	0.4925	0.5262	0.6051	0.6632	0.7078	0.8251
0.100	0.3637	0.3866	0.4815	0.5172	0.5871	0.6483	0.6763	0.7990
0.500	0.2953	0.3182	0.3731	0.4033	0.4239	0.4735	0.4490	0.5323
1.000	0.2545	0.2669	0.3122	0.3246	0.3428	0.3659	0.3553	0.3949
10.00	0.0868	0.0705	0.0921	0.0851	0.0947	0.0749	0.0956	0.0758

Профили распределения массовой скорости газа в канале, вычисленные по формуле (2.2.16) при $Kn = 0.01, 0.1, 1, 10, 100$ для отношения сторон сечения $a = 1, 10$ и 100 , представлены на рисунке 2.2.2. Из рисунка видно, что величина $U_{T,z}$ монотонно возрастает с увеличением отношения $a = a'/b'$ и значений числа Kn , что обусловлено с одной стороны ослаблением сопротивления на стенках $x = \pm a/2$ и уменьшением влияния межмолекулярных столкновений на характер течения газа с другой стороны. Начиная с $Kn = 10$, распределение массовой скорости приближается по своей форме к параболическому цилиндру, отклонение от которого происходит в непосредственной близости от стенок канала. При этом существенная часть профиля макроскопической скорости остается постоянной, что соответствует квазиодномерному течению в средней части канала. Для $Kn \geq 10$ профиль распределения $U_{T,z}$ в канале с квадратным сечением представляет собой эллиптический параболоид. Уменьшение значений Kn приводит к уменьшению скорости скольжения на каждой из стенок канала, причем на стенках $y = \pm b/2$ значение $U_{T,z}$ остается больше, чем на $x = \pm a/2$ для $a > 1$. Функция $U_{T,z}$ имеет максимум в начале координат, который становится слабо выраженным для $Kn < 0.1$. При дальнейшем уменьшении значения числа Kn профиль $U_{T,z}$ приближается по своей форме к перпендикулярной оси канала плоскости, отклонение от которой происходит в тонком пристеночном слое Кнудсена.





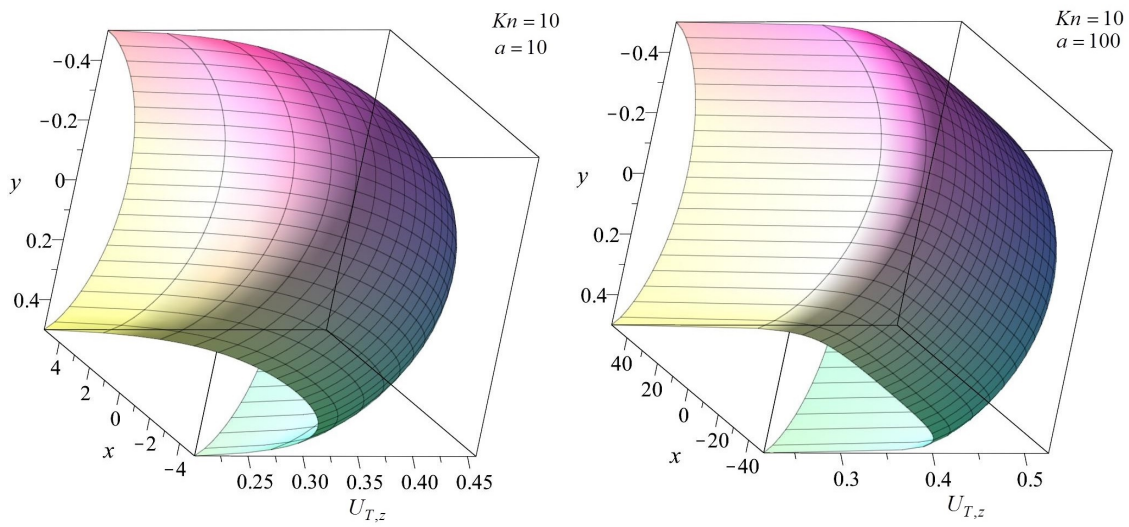


Рисунок 2.2.3 - Профили массовой скорости газа $U_{T,z}$ в прямоугольном канале при $Kn = 0.01, 0.1, 1, 10$ и 100

2.3 Тепловой крип в круговом цилиндре в промежуточном режиме течения

Рассмотрим задачу о тепловом крипе в случае течения газа в круговом цилиндре. Радиус окружности Ω_c в поперечном сечении канала обозначим R' (рисунок 2.3.1) и выберем его в качестве размерного масштаба.

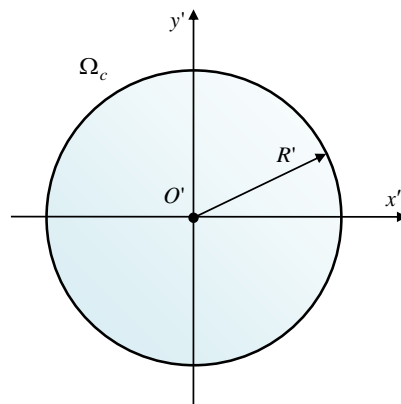


Рисунок 2.3.1 - Сечение кругового цилиндра

Для нахождения неизвестной функции $Z(x, y, c_x, c_y)$ из уравнения (1.4.23) в конфигурационном пространстве будем использовать цилиндрические координаты (ρ, φ, z) : $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, z , а в пространстве скоростей — сфери-

ческие координаты $(c_{\perp}, \psi, \theta)$: $c_{\rho} = c_{\perp} \cos \psi \sin \theta$, $c_{\varphi} = c_{\perp} \sin \psi \sin \theta$, $c_z = c_{\perp} \cos \theta$, где $c_{\perp} = 1$. Замечая, что для сечения канала имеет место радиальная симметрия, заключаем, что функция $Z(x, y, c_x, c_y)$ не будет зависеть от полярного угла φ . Подставим функцию $Z'(\rho, \psi, \theta) \equiv Z(x, y, c_x, c_y)$ в уравнение (1.4.23) и граничное условие (2.1.1). Далее штрих будем опускать. В итоге имеем

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial \rho} \cos \psi - \frac{\partial Z}{\partial \psi} \frac{\sin \psi}{\rho} \right) \gamma \text{Kn} \sin \theta + Z(\rho, \psi, \theta) + 1 = 0, \quad (2.3.1)$$

$$Z(1, \psi_{\Omega_c}, \theta) = 0, \quad \cos \psi_{\Omega_c} < 0. \quad (2.3.2)$$

Систему уравнений характеристик для (2.3.2) и первые два ее интеграла представляем как

$$\frac{d\rho}{\gamma \text{Kn} \cos \psi \sin \theta} = -\frac{\rho d\psi}{\gamma \text{Kn} \sin \psi \sin \theta} = -\frac{dZ}{Z(\rho, \psi, \theta) + 1} = dt, \quad (2.3.3)$$

$$\rho |\sin \psi| = C_1, \quad (Z(\rho, \psi, \theta) + 1) \exp \left(\frac{\rho \cos \psi}{\gamma \text{Kn} \sin \theta} \right) = C_2. \quad (2.3.4)$$

Исключая из (2.3.4) с помощью (2.3.2) постоянные интегрирования C_1 и C_2 , получаем

$$\rho |\sin \psi| = |\sin \psi_{\Omega_c}|, \quad \cos \psi < 0, \quad (2.3.5)$$

$$(Z(\rho, \psi, \theta) + 1) \exp \left(\frac{\rho \cos \psi}{\gamma \text{Kn} \sin \theta} \right) = \exp \left(\frac{\cos \psi_{\Omega_c}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta} \right). \quad (2.3.6)$$

Выражая из (2.3.5) $\sin \psi_{\Omega_c}$ и подставляя его в (2.3.6), находим

$$Z(\rho, \psi, \theta) = \exp(-w(\rho, \psi, \theta)) - 1, \quad (2.3.7)$$

$$w(\rho, \psi, \theta) = \frac{\rho \cos \psi + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \psi}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}. \quad (2.3.8)$$

Используя выражение (2.3.8), согласно (1.4.18) получаем явный вид функции распределения (1.4.5), описывающей тепловой крип в круговом цилиндре в рамках диффузной модели поверхностного отражения молекул газа стенками канала. В этом случае отличные от нуля компоненты безразмерных векторов потока тепла $q_{T,z}(\rho)$ и массовой скорости $U_{T,z}(\rho)$ газа в канале согласно формулам (1.4.28) и (1.4.29) становятся равными

$$U_{T,z}(\rho) = \frac{\gamma \text{Kn}}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{3}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{\pi} \exp(-w(\rho, \psi, \theta)) d\psi \right) = -\frac{2}{9} q_{T,z}(\rho). \quad (2.3.9)$$

По формулам (1.2.7) определяем безразмерные приведенные потоки тепла и массы газа в канале

$$J_{T,M} = 4 \int_0^1 U_{T,z}(\rho) \rho d\rho = -\frac{2}{9} J_{T,Q}. \quad (2.3.10)$$

Для режимов течения, близких к свободномолекулярному ($\text{Kn} \gg 1$), подынтегральную функцию $w = w(\rho, \psi, \theta)$ в выражении для массовой скорости газа (2.3.9) представляем в виде ряда по малому параметру $1/\text{Kn}$ и ограничиваемся двумя членами этого ряда. В результате имеем

$$\begin{aligned} U_{T,z}(\rho) &= \frac{\gamma \text{Kn}}{2\pi^{3/2}} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^\pi \left(w - \frac{1}{2} w^2 \right) d\psi = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(\int_0^\pi \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \psi} d\psi - \frac{\ln 2 + 2 \ln \text{Kn} - 2}{\gamma \text{Kn}} \right) \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Подставляя (2.3.11) в (2.3.10), окончательно получаем

$$J_{T,M} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} - \frac{2}{5\pi \text{Kn}} (\ln 2 + 2 \ln \text{Kn} - 2). \quad (2.3.12)$$

Первое слагаемое в (2.3.12) определяет приведенный поток массы газа в свободномолекулярном режиме и совпадает с выражением [1].

Для режимов течения, близких к гидродинамическому ($\text{Kn} \ll 1$), из выражения для массовой скорости газа (2.3.9) получаем, что $U_{T,z}(\rho) = \gamma \text{Kn} / (3\sqrt{\pi})$, а выражение для приведенного потока массы (2.3.10) имеет предел (2.2.24).

Приведенные тепловые и массовые потоки газа, найденные согласно (2.3.10), непосредственно не зависят от радиуса кругового цилиндра, а определяются числом Кнудсена Kn . Значения $J_{T,M}$, вычисленные по формуле (2.3.10) при различных значениях числа Кнудсена, приведены в таблице 2.3.1. Там же представлены результаты других авторов [13], [34], [37], [38], [40], [41], [42]. Значения массового потока в [13], [37], [41], [42] получены с использованием БГК-модели с постоянной частотой столкновения, причем в [13] применялся вариационный метод, в [37] – метод дискретных ординат, в [41] – метод элементарных решений, а в [42] использовано прямое численное решение. В [34], [38], [40] значения величины $J_{T,M}$ найдены на основе S-модели с применением методов дискретных скоростей и ординат. Проводя сравнительный анализ данных из таблицы 2.3.1, заключаем, что результаты проведенного исследования превосходят

значения массового потока из [34], [38], [40] не более, чем на 7% при $\text{Kn} \geq 1$, а [13], [38], [41], [42] — не более, чем на 10%. При $\text{Kn} < 1$ различие становится более существенным, хотя качественная картина поведения $J_{T,M}$ сохраняется. Отличие соответствующих результатов при $\text{Kn} < 1$ обусловлено тем, что при переходе к гидродинамическому пределу в отличие от S-модели уравнение Вильямса, как и БГК-модель с постоянной частотой столкновения, приводят к значениям числа Прандтля, которые отличаются от значения для одноатомного газа, полученного из кинетического уравнения Больцмана и эксперимента [21]. В то же время для $\text{Kn} = 1000$ полученное значение $J_{T,M} = 0.7502$ в настоящей работе по формуле (2.3.10) ближе к свободномолекулярному пределу $J_{T,M} = 4/(3\sqrt{\pi})$, чем значения $J_{T,M}$, найденные с использованием S-модели и уравнения БГК с постоянной частотой столкновения (таблица 2.3.1). При $\text{Kn} \geq 100$ значения, полученные на основе асимптотической формулы (2.3.12), хорошо согласуются с результатами из таблицы 2.3.1. Так для $\text{Kn} = 100$ приведенный поток массы газа согласно (2.3.12) имеет значение $J_{T,M} = 0.7422$, которое превышает $J_{T,M} = 0.7376$, вычисленное по (2.3.10), не более, чем на 0.7%.

Таблица 2.3.1 - Значения $J_{T,M}$ в зависимости от Kn для кругового цилиндра

$J_{T,M}$	Kn								
	0.01	0.1	0.5	1.0	2.0	5.0	10	100	1000
(2.3.10)	0.0083	0.0765	0.2705	0.3881	0.4977	0.6080	0.6632	0.7376	0.7502
[13]	—	0.0687	—	0.3220	—	—	0.5976	0.7179	0.7467
[34]	—	0.1018	0.3022	0.3962	0.4780	0.5667	0.6206	0.7223	—
[37]	0.0075	0.0685	0.2271	0.3217	0.4171	0.5974	0.6209	0.7178	—
[38]	0.0116	0.1020	0.3027	0.3968	0.4784	—	0.6209	0.7210	0.7469
[40]	—	0.1014	0.3016	0.3959	0.4779	0.5675	0.6210	0.7243	0.7486
[41]	—	0.0686	—	0.3217	—	—	0.5968	0.7177	0.7466
[42]	—	0.0683	—	0.3214	—	—	0.5975	0.7178	0.7467

Экспериментальные данные по неизотермическому течению газов He , Ne в цилиндрическом канале были получены в [79] для чисел Кнудсена $\text{Kn} \leq 1/2$. Измерения величины $J_{T,M}$ в [79] проводились нестационарным методом. Прямой круговой цилиндр в экспериментальной установке соединял два резерву-

ара. Радиус цилиндра имел значение $R' = (0.642 \pm 0.001)$ мм, а длина его — $L' = (303 \pm 1)$ мм. Резервуары поддерживались при температурах $T_1 = 273.2$ К, $T_2 = 293.3$ К для He и $T_2 = 292.6$ К для Ne . Относительная погрешность измерений составляла 2%. Экспериментальные данные приведенного потока массы как функции от $1/Kn$ для He и Ne представлены в таблице 2.3.2. Анализ результатов [79] показал, что они не более чем на 7% превышают значение $J_{T,M}$, полученное по формуле (2.3.10) при $Kn = 1/2$, и на 6% — результаты [40], а при $Kn = 1/30$ различие со значениями (2.3.10) увеличивается до 17% для He и 14% для Ne . Расхождение расчета $J_{T,M}$ в [40] при $Kn = 1/30$ с экспериментальными данными [79] при $Kn = 1/30$ составляет 13% для He и 17% для Ne .

Таблица 2.3.2 - Значения $J_{T,M}$ в сравнении с экспериментальными данными, полученными для плавленного стеклянного капилляра при $T_1 = 273.2$ К

1 Kn	$J_{T,M}$				1 Kn	$J_{T,M}$			
	(2.3.10)	[40]	He [79]	Ne [79]		(2.3.10)	[40]	He [79]	Ne [79]
2	0.2705	0.3016	0.2906	0.2859	9	0.0841	0.1106	0.0982	0.0969
3	0.2068	0.2439	0.2314	0.2304	10	0.0765	0.1014	0.0896	0.0887
4	0.1670	0.2042	0.1907	0.1899	15	0.0525	—	0.0618	0.0615
5	0.1397	0.1752	0.1607	0.1605	20	0.0399	0.0543	0.0473	0.0475
6	0.1200	0.1531	0.1384	0.1382	25	0.0322	—	0.0389	0.0380
7	0.1051	0.1359	0.1217	0.1210	30	0.0270	0.0369	0.0328	0.0314
8	0.0935	0.1220	0.1091	0.1076					

В таблице 2.3.3 приведены значения $J_{T,M}$, восстановленные из экспериментальных измерений коэффициента термомолекулярной разности давлений γ_p для He , Ne , Ar [79] и $J_{p,M}$ [80] по следующей формуле [1]

$$J_{T,M} = \gamma_p J_{p,M}. \quad (2.3.13)$$

Различие результатов (2.3.13) со значениями $J_{T,M}$, найденными по формуле (2.3.10), в этом случае уменьшается до 4% для He и 1% для Ne при $Kn = 1/2$, а со значениями [40] — до 6% и 9%, соответственно для He и Ne . Анализ данных таблиц 2.3.2 и 2.3.3 показал, что значения для разных газов отличаются в пределах 10%, что связано с неполной аккомодацией молекул газа

на стенках стеклянного капилляра. Коэффициент аккомодации тангенциального импульса для He в этом случае имеет значение $\alpha = 0.895 \pm 0.004$, для Ne — $\alpha = 0.925 \pm 0.014$, для Ar — $\alpha = 0.927 \pm 0.028$ [80]. Заметим, что если стенки цилиндрического канала с диаметром 530 нм выполнены из кремния, значение α для Ar уменьшается до 0.837 ± 0.032 [81].

Таблица 2.3.3 - Значения $J_{T,M}$, восстановленные из экспериментальных данных γ_p [79] и $J_{p,M}/G_p$ [80]

$\frac{1}{Kn}$	$J_{T,M}$				$\frac{1}{Kn}$	$J_{T,M}$			
	(2.3.10)	[79], [80]				(2.3.10)	[79], [80]		
		He	Ne	Ar			He	Ne	Ar
2	0.2705	0.282	0.274	0.283	8	0.0935	0.111	0.108	0.113
3	0.2068	0.227	0.221	0.225	9	0.0841	0.0995	0.0972	0.101
4	0.1670	0.191	0.187	0.188	10	0.0765	0.0908	0.0889	0.0913
5	0.1397	0.164	0.161	0.162	20	0.0399	0.0486	0.0471	0.0497
6	0.1200	0.143	0.139	0.142	30	0.0270	0.0328	0.0317	0.0336
7	0.1051	0.125	0.122	0.120					

Профили распределения массовой скорости газа в канале, построенные согласно (2.3.9) при $Kn = 0.01, 0.1, 1$ и 10 , представлены на рисунке 2.3.2. Приведенные на рисунке 2.3.2 профили $U_{T,z}$ соответствуют режиму, близкому к гидродинамическому, режиму со скольжением, переходному режиму и режиму, близкому к свободномолекулярному. Из рисунка 2.3.2 следует, что распределение массовой скорости имеет максимум в начале координат при $Kn > 0.1$, который становится слабовыраженным при $Kn = 0.1$ и приближается при дальнейшем уменьшении значений числа Kn , как и в случае с прямоугольным каналом (раздел 2.2), к плоскости, отклонение от которой имеет место в слое Кнудсена. При этом наблюдается монотонное убывание макроскопической скорости газа до критического нулевого значения в гидродинамическом режиме. В свою очередь, уменьшение влияния межмолекулярных столкновений при $Kn \geq 10$ проявляется в том, что скорость массового потока возрастает и достигает свободномолекулярного предела. В этом случае форма профиля массовой скорости приближается к параболоиду вращения с осью, совпадающей с осью цилиндра.

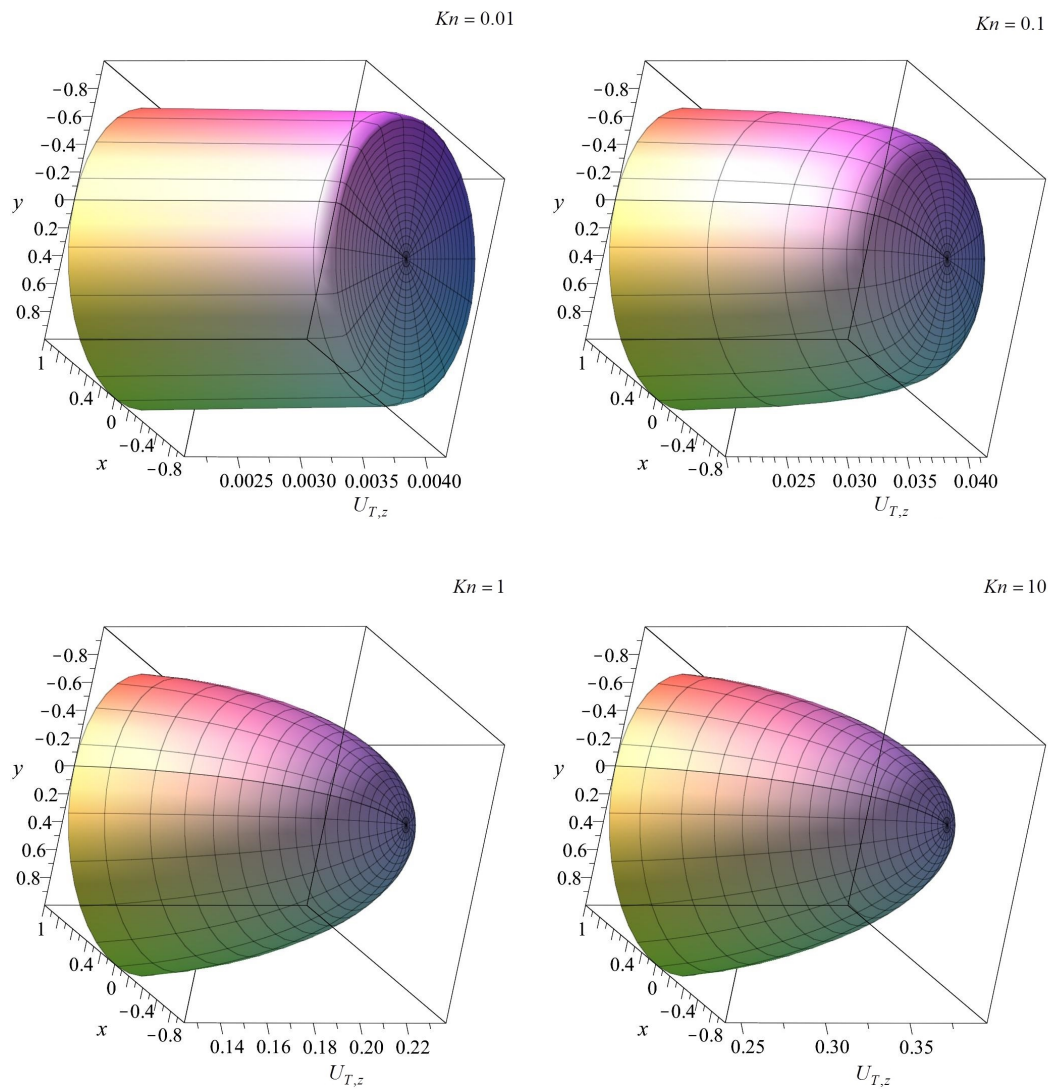


Рисунок 2.3.2 - Профили массовой скорости газа $U_{T,z}$ в цилиндрическом канале при $Kn = 0.01, 0.1, 1$ и 10

2.4 Тепловой крип в эллиптическом цилиндре в промежуточном режиме течения

Рассмотрим задачу о тепловом крипе в случае течения газа в прямом эллиптическом цилиндре. Обозначим a' большую полуось эллипса Ω_{el} , малую полуось — b' (рисунок 2.4.1) и выберем последнюю в качестве размерного масштаба.

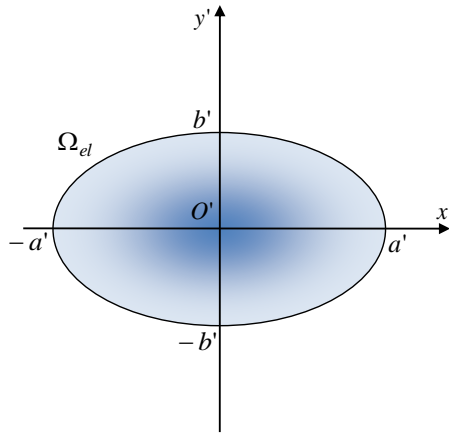


Рисунок 2.4.1 - Сечение эллиптического цилиндра

Осуществим переход в пространстве скоростей к сферической системе координат, аналогично описанному в разделе 2.2. Полученную в результате этого преобразования функцию $Z(x, y, \varphi, \theta)$ находим из квазилинейного неоднородного дифференциального уравнения (2.2.1) с граничным условием

$$Z(x_{\Omega_{el}}, y_{\Omega_{el}}, \varphi, \theta) = 0, \quad b^2 x_{\Omega_{el}} \cos \varphi + y_{\Omega_{el}} a^2 \sin \varphi < 0, \quad \frac{x_{\Omega_{el}}^2}{a^2} + \frac{y_{\Omega_{el}}^2}{b^2} = 1. \quad (2.4.1)$$

Система уравнений характеристик для (2.2.1) и два ее первых интеграла имеют вид (2.2.4) и (2.2.5), соответственно. Исключая из (2.2.5) с помощью (2.4.1) постоянные интегрирования C_1 и C_2 , получаем

$$\frac{x}{\cos \varphi} - \frac{y}{\sin \varphi} = \frac{x_{\Omega_{el}}}{\cos \varphi} - \frac{y_{\Omega_{el}}}{\sin \varphi}, \quad \frac{x_{\Omega_{el}}^2}{a^2} + \frac{y_{\Omega_{el}}^2}{b^2} = 1, \quad (2.4.2)$$

$$x_{\Omega_{el}} b^2 \cos \varphi + y_{\Omega_{el}} a^2 \sin \varphi < 0, \quad (2.4.3)$$

$$(Z(x, y, \varphi, \theta) + 1) \exp\left(\frac{x}{\gamma \text{Kn} \cos \varphi \sin \theta}\right) = \exp\left(\frac{x_{\Omega_{el}}}{\gamma \text{Kn} \cos \varphi \sin \theta}\right). \quad (2.4.4)$$

Решая систему совместных уравнений (2.4.2) относительно $x_{\Omega_{el}}$ при выполнении условия (2.4.3), находим

$$x_{\Omega_{el}} = \frac{a^2 \sin \varphi (x \sin \varphi - y \cos \varphi)}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} - \frac{ab \cos \varphi \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}. \quad (2.4.5)$$

Подставляя (2.4.2) в (2.4.4), получаем

$$Z(x, y, \varphi, \theta) = \exp(-w(x, y, \varphi, \theta)) - 1, \quad (2.4.6)$$

$$w(x, y, \varphi, \theta) = \frac{b^2 x \cos \varphi + a^2 y \sin \varphi}{\gamma \text{Kn} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \sin \theta} + \frac{ab \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}}{\gamma \text{Kn} (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \sin \theta}. \quad (2.4.7)$$

В случае $a = 1$ выражение (2.9.14) преобразуется к виду

$$w(x, y, \varphi, \theta) = \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi + \sqrt{1 - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}. \quad (2.4.8)$$

Используя выражение (2.9.14), согласно (1.4.18) получаем функцию распределения (1.4.5) при неизотермическом течении разреженного газа в эллиптическом цилиндре под действием постоянного градиента температуры. Для того чтобы показать, что результаты моделирования при $a = 1$ переходят в соответствующие результаты из раздела 2.3 для цилиндрического канала, сделаем замену переменных по формулам $x = \rho \cos \xi$, $y = \rho \sin \xi$ в (2.4.8). С учетом того, что $\psi = \varphi - \xi$, приходим к выражению (2.3.8). В случае $a \geq 1$ по формулам (1.4.28) и (1.4.29) для компонент $q_{T,z}(x, y)$ и $U_{T,z}(x, y)$ находим

$$U_{T,z}(x, y) = \frac{\gamma \text{Kn}}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \exp(-w(x, y, \varphi, \theta)) d\varphi \right) = -\frac{2}{9} q_{T,z}(x, y). \quad (2.4.9)$$

По формулам (1.2.7) определяем безразмерные приведенные потоки тепла и массы газа в канале

$$J_{T,M} = \frac{8}{ab\pi} \int_0^b \int_0^{a\sqrt{b^2-y^2}/b} U_{T,z}(x, y) dx dy = -\frac{2}{9} J_{T,Q}. \quad (2.4.10)$$

Приведенные потоки тепла и массы газа, найденные согласно (2.4.10), не зависят непосредственно от a' и b' , а определяются $a = a'/b'$ и числом Кн. При $a = 1$ значения величины $J_{T,M}$ совпадают с соответствующими значениями из таблицы 2.3.1 для цилиндрического канала. В таблице 2.4.1 приведены значения $J_{T,M}$, вычисленные по формуле (2.4.10) для отношений полуосей эллипса $a > 1$. Для сравнения в таблице 2.4.1 также представлены результаты работы [34], полученные с использованием S-модели кинетического уравнения.

Таблица 2.4.1 - Значения $J_{T,M}$ в зависимости от a и Kn для эллиптического цилиндра

Kn	$a = a'/b'$							
	1.1		5		10		100	
	(2.4.10)	[34]	(2.4.10)	[34]	(2.4.10)	[34]	(2.4.10)	[34]
0.0001	0.0001	—	0.0001	—	0.0001	—	0.0001	—
0.0010	0.0008	—	0.0008	—	0.0008	—	0.0008	—
0.0100	0.0083	—	0.0083	—	0.0083	—	0.0083	—
0.1000	0.0768	0.1024	0.0787	0.1048	0.0789	0.1049	0.0789	0.1049
0.5000	0.2753	0.3095	0.3132	0.3491	0.3167	0.3492	0.3184	0.3489
1.0000	0.3983	0.4381	0.4955	0.5450	0.5073	0.5469	0.5132	0.4957
2.0000	0.5144	0.4953	0.7059	0.6498	0.7392	0.6558	0.7583	0.6530
5.0000	0.6324	0.5896	0.9713	0.8527	1.0610	0.8831	1.1343	0.8798
10.000	0.6919	0.6469	1.1307	0.9965	1.2762	1.0645	1.4388	1.0749
100.00	0.7725	0.7559	1.3849	1.3203	1.6659	1.5502	2.3547	1.9008
1000.0	0.7863	—	1.4355	—	1.7536	—	2.7633	—

В свободномолекулярном пределе выражение (2.4.9) для массовой скорости $U_{T,z}(x, y)$ газа в канале преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
 U_{T,z}(x, y) &= \frac{ab}{4\sqrt{\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{\pi(1-e^2)}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sqrt{(1-e^2)^{-1} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}}{(1-e^2)^{-1} \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi,
 \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

где e – эксцентриситет эллипса. Значения $J_{T,M}$, найденные по формуле (2.4.10) при подстановке в нее (2.4.11), не более чем на 7% превосходят соответствующие значения потока массы из таблицы 2.4.1 при $\text{Kn} = 10$, а при $\text{Kn} = 10000$ – не более 0.6%. При $a \gg 1$ в этом случае приведенный поток массы (2.4.10) имеет логарифмическую особенность

$$J_{T,M} = \frac{\ln a}{\sqrt{\pi}}, \tag{2.4.12}$$

что в свою очередь согласуется с аналогичным выражением (2.2.22), полученным для прямоугольного канала, и величиной (2.2.23) для двух бесконечных параллельных пластин в режиме, близком к свободномолекулярному [1]. В то же время из (2.4.12) следует, что, как и в случае с прямоугольным каналом, при значительно большем, но конечном значении a , в свободномолекулярном пределе приведенный поток массы газа конечен в эллиптическом канале в отличие от соответствующей величины $J_{T,M}$ между двумя параллельными пластинами (2.2.23). С другой стороны, в случае слабдеформируемого эллиптического канала, раскладывая в ряд по малому параметру e подынтегральное выражение в (2.4.11), согласно (2.4.10) получаем

$$J_{T,M} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{1}{4}e^2 \right). \quad (2.4.13)$$

Выражение (2.4.13) при $e \ll 1$ определяет приведенный поток массы газа в канале под действием постоянного градиента температуры в свободномолекулярном режиме и совпадает при $e = 0$ с выражением (2.3.12) для цилиндрического канала. Погрешность составляет 1.6% для $a = 1.2$ со значением, найденным по формуле (2.4.10) при $\text{Kn} \gg 1$, причем для $a \leq 1.1$ ($e \leq 0.4161$) погрешность остается менее 0.5%. Для режимов течения, близких к гидродинамическому ($\text{Kn} \ll 1$), из выражения для массовой скорости газа (2.4.9) получаем, что $U_{T,z}(x, y) = \gamma \text{Kn} / (3\sqrt{\pi})$, а выражение для приведенного потока массы (2.4.10) имеет предел (2.2.24). Таким образом, результаты моделирования в этом случае могут быть интерпретированы, так же как и в разделе 2.2 для прямоугольного канала.

Для проведения сравнительного анализа результатов моделирования процессов переноса в прямоугольном и эллиптическом каналах будем рассматривать прямоугольный канал со стенками, расположенными в плоскостях $x' = \pm a'$ и $y' = \pm b'$. В этом случае при восстановлении значений величины $J_{T,M}$ по формуле (2.2.18) полагаем, что $a = 2\tilde{a}$ и $b = 2\tilde{b}$. Результаты вычислений приведены в таблице 2.4.2, в которой знак тильды опущен. Видим, что при фиксированных значениях a и Kn в эллиптическом канале величина $J_{T,M}$ оказывается меньше, чем в канале прямоугольного сечения. В частности, при $\text{Kn} \leq 100$ и a , сравнимых с единицей, разность значений этих приведенных потоков составляет около 11% и увеличивается с ростом Kn и a . Превышение потока массы

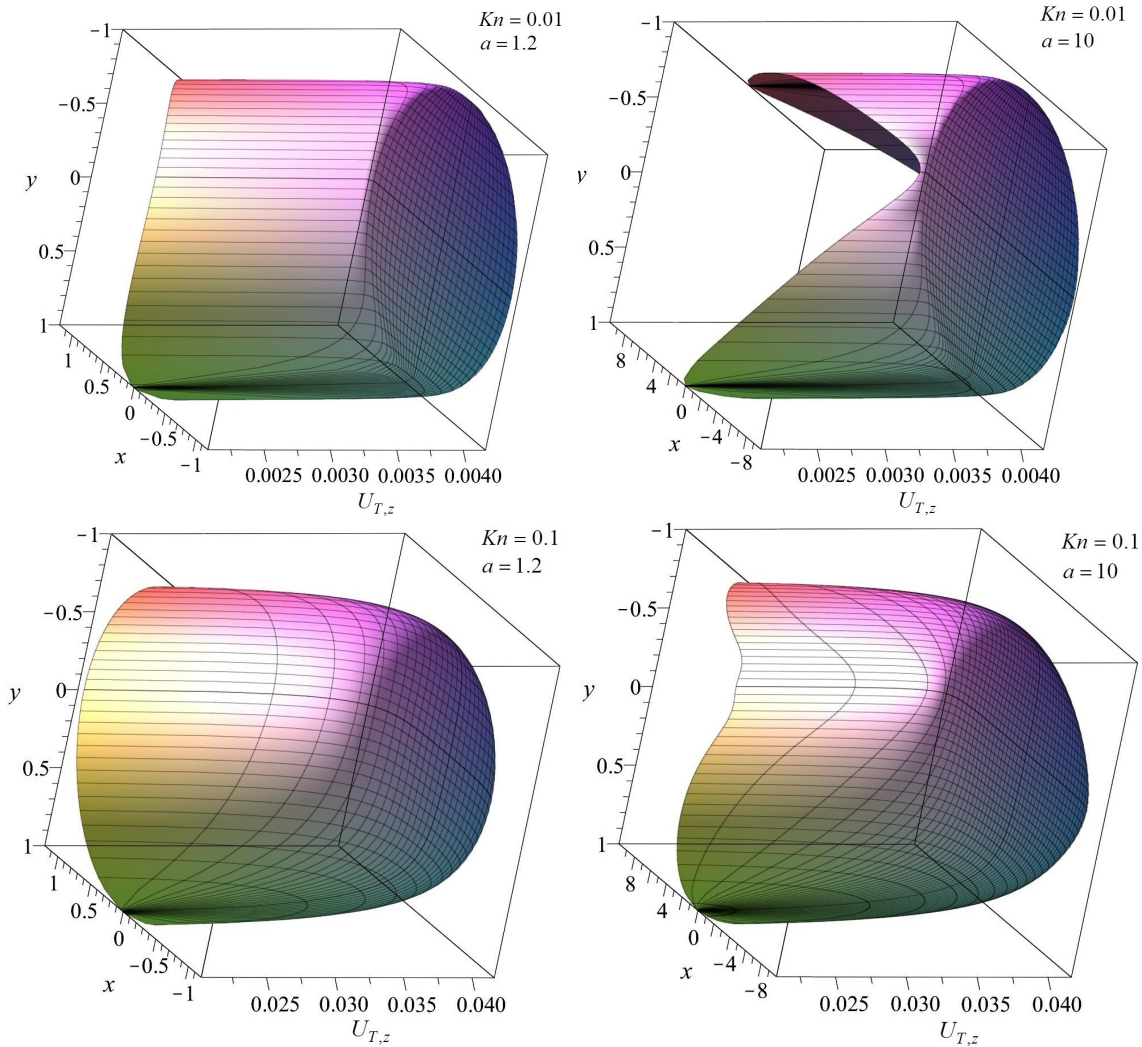
в прямоугольном канале обусловлено тем, что в этом случае стенки канала, на которых происходит полная аккомодация молекул газа, удалены от центра дальше, чем в случае прямого эллиптического цилиндра. В силу более слабого сопротивления значения макроскопической скорости в прямоугольном канале становятся больше, чем в эллиптическом канале. Заметим, что сравнительный анализ результатов [34] с [6] и [29] невозможен вследствие различной нормировки безразмерных величин.

Таблица 2.4.2 - Значения $J_{T,M}$ для эллиптического и прямоугольного каналов при одинаковых значениях a

Kn	$a = a'/b'$							
	1		1.1		5		10.0	
	(2.4.10)	(2.2.18)	(2.4.10)	(2.2.18)	(2.4.10)	(2.2.18)	(2.4.10)	(2.2.18)
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0.0010	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008
0.0100	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083
0.1000	0.0765	0.0767	0.0768	0.0770	0.0787	0.0792	0.0789	0.0796
0.5000	0.2705	0.2789	0.2753	0.2836	0.3132	0.3228	0.3167	0.3284
1.0000	0.3881	0.4086	0.3983	0.4189	0.4955	0.5186	0.5073	0.5346
2.0000	0.4977	0.5338	0.5144	0.5511	0.7059	0.7505	0.7392	0.7898
5.0000	0.6080	0.6635	0.6324	0.6896	0.9713	1.0523	1.0610	1.1513
10.000	0.6632	0.7297	0.6919	0.7610	1.1307	1.2386	1.2762	1.3991
100.00	0.7376	0.8205	0.7725	0.8593	1.3849	1.5442	1.6659	1.8629
1000.0	0.7502	0.8362	0.7863	0.8764	1.4355	1.6068	1.7536	1.9706

Профили распределения массовой скорости газа в канале, построенные согласно (2.4.9) при $Kn = 0.01, 0.1, 1, 10, 100$ для $a = 1.2, 10, 100$, представлены на рисунке 2.4.2. Видно, что макроскопическая скорость течения газа растет с увеличением значений a , что обусловлено ослаблением сопротивления соответствующей стенки. При этом для $Kn = 0.01$ значительная часть ее профиля остается постоянной, что находится в соответствии с квазиодномерным течением газа. Отклонение имеет место только в пристеночном слое, что согласуется с результатами, полученными для цилиндрического и прямоугольного каналов. В случае слабдеформируемого эллипса ($a = 1.2$) из рисунка 2.4.2 следует,

что профиль распределения массовой скорости мало отличается от профиля $U_{T,z}$ в цилиндрическом канале при всех режимах течения газа. При $a > 1$ у функции макроскопической скорости $U_{T,z}$ наблюдаются локальные минимумы на стенках канала. Для $Kn \leq 0.1$ эти точки находятся на оси y , а их ординаты равны ± 1 . Процесс возрастания скорости скольжения в окрестностях этих точек происходит с увеличением значения числа Kn до тех пор, пока оно не достигнет некоторого значения порядка единицы. В этом случае у функции $U_{T,z}$ наблюдаются локальные минимумы, принадлежащие оси x , с абсциссами равными $\pm a$. При $Kn \geq 10$ уменьшение влияния межмолекулярных столкновений проявляется в том, что скорость массового потока возрастает и достигает свободномолекулярного предела. Для $e < 1$ форма профиля массовой скорости приближается к параболоиду вращения с осью, совпадающей с осью канала.



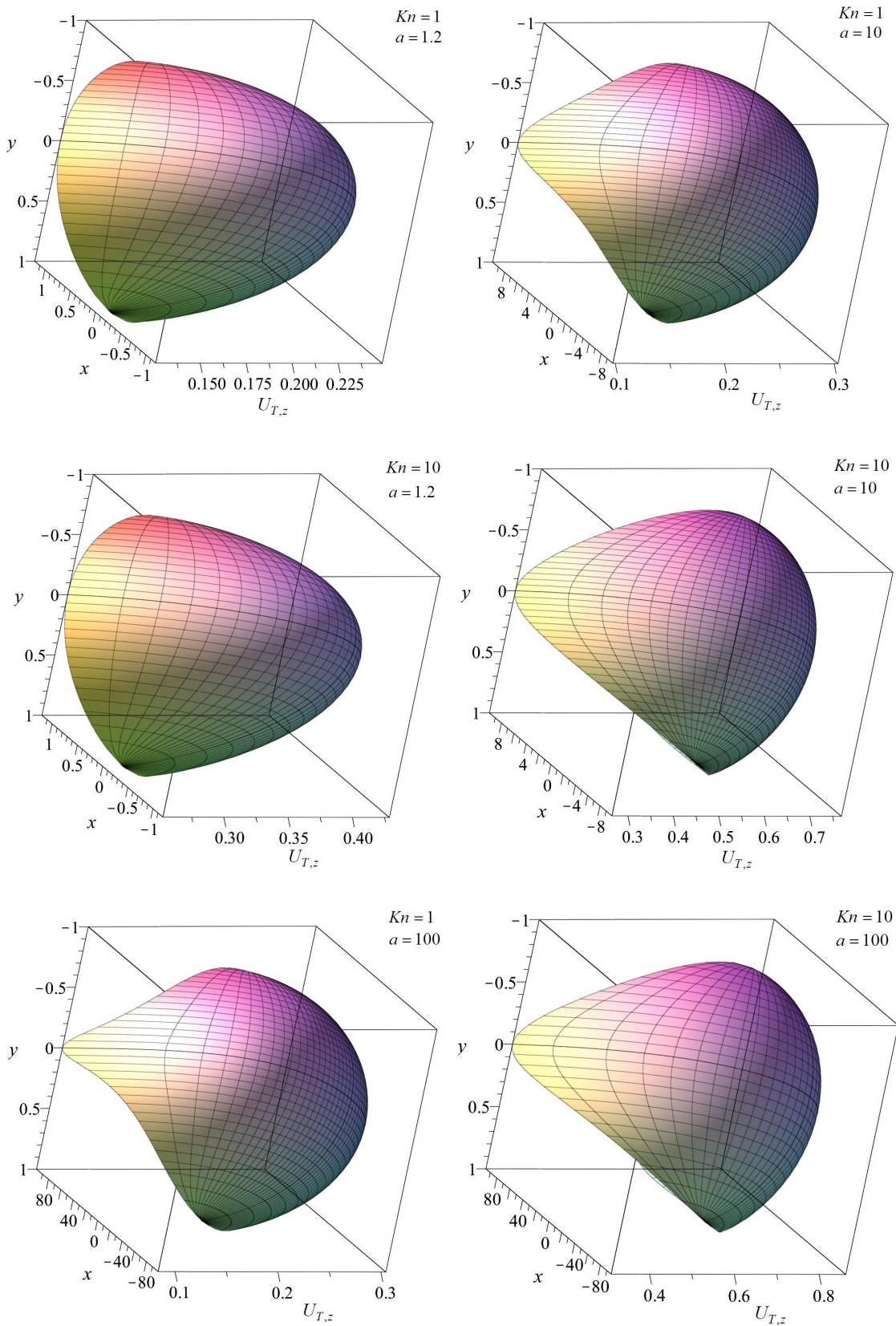


Рисунок 2.4.2 - Профили массовой скорости газа $U_{T,z}$ в эллиптическом канале при $Kn = 0.01, 0.1, 1, 10$ и 100

2.5 Тепловой крип в пространстве между двумя коаксиальными цилиндрами в промежуточном режиме течения

Рассмотрим задачу о тепловом крипе в случае течения газа в пространстве между двумя коаксиальными цилиндрами. Радиус малой окружности Ω_1 в поперечном сечении канала обозначим R'_1 (рисунок 2.5.1), большой окружности $\Omega_2 - R'_2$. Выберем в качестве размерного масштаба длины R'_2 . Тогда $R_2 = 1$. Обозначение R_2 сохранено для возможности изменения размерного масштаба длины при моделировании течений разреженного газа в пространстве между цилиндрами с близкими по значению радиусами в случае $R'_1/(R'_2 - R'_1) \gg 1$.

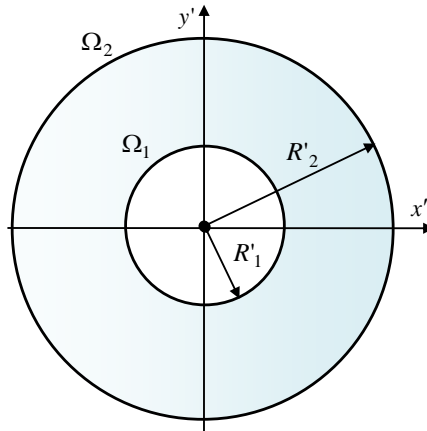


Рисунок 2.5.1 - Сечение канала, образованного двумя коаксиальными цилиндрами

Осуществим переход в конфигурационном пространстве к цилиндрической системе координат, а в пространстве скоростей к сферической системе координат, аналогично описанному в разделе 2.3. Полученная в результате этого преобразования функция $Z(\rho, \psi, \theta)$ не зависит от полярного угла φ в силу симметрии течения разреженного газа в канале. Найдем $Z(\rho, \psi, \theta)$ из квазилинейного неоднородного дифференциального уравнения (2.3.2) с условиями на границах Ω_1 и Ω_2

$$Z(R_1, \psi_{\Omega_1}, \theta) = 0, \quad \cos \psi_{\Omega_1} > 0, \quad (2.5.1)$$

$$Z(R_2, \psi_{\Omega_2}, \theta) = 0, \quad \cos \psi_{\Omega_2} < 0. \quad (2.5.2)$$

Система уравнений характеристик для (2.3.2) и два ее первых интеграла имеют вид (2.3.3) и (2.3.4), соответственно. Исключая из (2.3.4) с помощью

(2.5.1) и (2.5.2) постоянные интегрирования C_1 и C_2 , получаем

$$\rho |\sin \psi| = R_1 |\sin \psi_{\Omega_1}|, \quad \cos \psi_{\Omega_1} > 0, \quad (2.5.3)$$

$$\rho |\sin \psi| = R_2 |\sin \psi_{\Omega_2}|, \quad \cos \psi_{\Omega_2} < 0, \quad (2.5.4)$$

$$(Z(\rho, \psi, \theta) + 1) \exp\left(\frac{\rho \cos \psi}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}\right) = \exp\left(\frac{\cos \psi_{\Omega_i}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}\right). \quad (2.5.5)$$

Выражая из (2.5.3) $\sin \psi_{\Omega_1}$ и подставляя его в (2.5.5), находим

$$Z(\rho, \psi, \theta) = \exp(-w_1(\rho, \psi, \theta)) - 1, \quad \psi_1 \leq \psi \leq \psi_2 \quad (2.5.6)$$

$$w_1(\rho, \psi, \theta) = \frac{\rho \cos \psi - \sqrt{R_1^2 - \rho^2 \sin^2 \psi}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}. \quad (2.5.7)$$

Аналогично из уравнений (2.5.4) и (2.5.5) получаем

$$Z(\rho, \psi, \theta) = \exp(-w_2(\rho, \psi, \theta)) + 1, \quad \psi_2 < \psi \leq \psi_3, \quad (2.5.8)$$

$$w_2(\rho, \psi, \theta) = \frac{\rho \cos \psi + \sqrt{R_2^2 - \rho^2 \sin^2 \psi}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}. \quad (2.5.9)$$

Определим границы изменения угла ψ в формулах (2.5.6) и (2.5.8). Рассмотрим точку $M(\rho, \varphi)$, где ρ и φ – полярные координаты радиус-вектора \mathbf{r} молекул газа в плоскости, перпендикулярной оси канала. Компоненту вектора молекулярной скорости, принадлежащую этой плоскости, обозначим как \mathbf{c}_\perp (рисунок 2.5.2), а касательные к окружности Ω_1 , проведенные через точку M , обозначим как AM и BM . Из рисунка 2.5.2 следует, что угол между касательными AM и BM равен $2\psi_0$, где $\psi_0 = \arcsin(R_1/\rho)$. Тогда для молекул, отразившихся от внутреннего цилиндра, предельные значения ψ_1 и ψ_2 полярного угла ψ вектора \mathbf{c}_\perp равны соответственно $-\psi_0$ и ψ_0 .

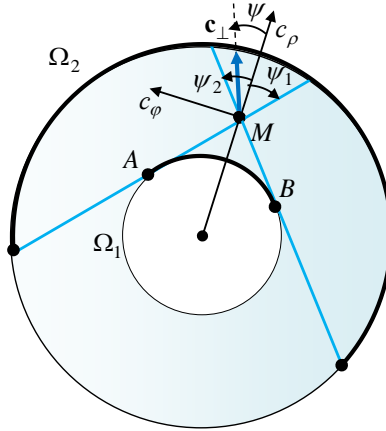


Рисунок 2.5.2 - Границы изменения угла ψ при отражении молекулы от внутреннего цилиндра

Аналогично находим пределы изменения угла ψ для молекул, которые отразились от внешнего цилиндра: $\psi_2 < \psi \leq \psi_3$, где $\psi_3 = \psi_0 + 2\pi$. Далее используя выражения (2.5.6)-(2.5.9), согласно (1.4.18) получаем явный вид функции распределения (1.4.5). По формулам (1.4.28) и (1.4.29) определяем компоненты вектора потока тепла $q_{T,z}(\rho)$ и массовой скорости $U_{T,z}(\rho)$ газа в канале

$$U_{T,z}(\rho) = \frac{\gamma \text{Kn}}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{3}{4\pi} \sum_{i=1}^2 \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} \exp(-w_i(\rho, \psi, \theta)) d\psi \right) = -\frac{2}{9} q_{T,z}(\rho). \quad (2.5.10)$$

Для свободномолекулярного режима течения функции $w_i = w_i(\rho, \psi, \theta)$ в выражении (2.5.10) представляем в виде ряда по малому параметру $1/\text{Kn}$ и ограничиваемся линейными членами этого ряда ($i = \overline{1, 3}$). В результате имеем

$$U_{T,z}(\rho) = \frac{\gamma \text{Kn}}{4\pi^{3/2}} \sum_{i=1}^2 \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} w_i d\psi = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(\int_{\psi_0}^{\pi} \sqrt{R_2^2 - \rho^2 \sin^2 \psi} d\psi - \int_0^{\psi_0} \sqrt{R_1^2 - \rho^2 \sin^2 \psi} d\psi \right). \quad (2.5.11)$$

По формулам (1.2.7) определяем безразмерные приведенные потоки тепла и массы газа в канале

$$J_{T,M} = \frac{4}{R_2^2 - R_1^2} \int_{R_1}^{R_2} U_{T,z}(\rho) \rho d\rho = -\frac{2}{9} J_{T,Q}. \quad (2.5.12)$$

При $R_1 = 0$ выражения (2.5.10)-(2.5.12) переходят в аналогичные результаты, полученные для цилиндрического канала в разделе 2.3. Наличие внутреннего цилиндра, как показано на рисунке 2.5.3, оказывает существенное влияние на распределение массовой скорости потока в канале по сравнению с тем, что имело место при течении газа в прямом круговом цилиндре. Для $\text{Kn} > 0.1$ профиль макроскопической скорости имеет сильно выраженные максимумы, которые находятся на одной окружности и сдвигаются в сторону внутреннего цилиндра при уменьшении его радиуса. В случае $R_1 \ll 1$ график $U_{T,z}$ приближается по форме к параболоиду вращения. С увеличением значений Kn

наблюдается монотонное возрастание макроскопической скорости газа, причем на внешнем цилиндре значение этой величины остается больше, чем на внутреннем.

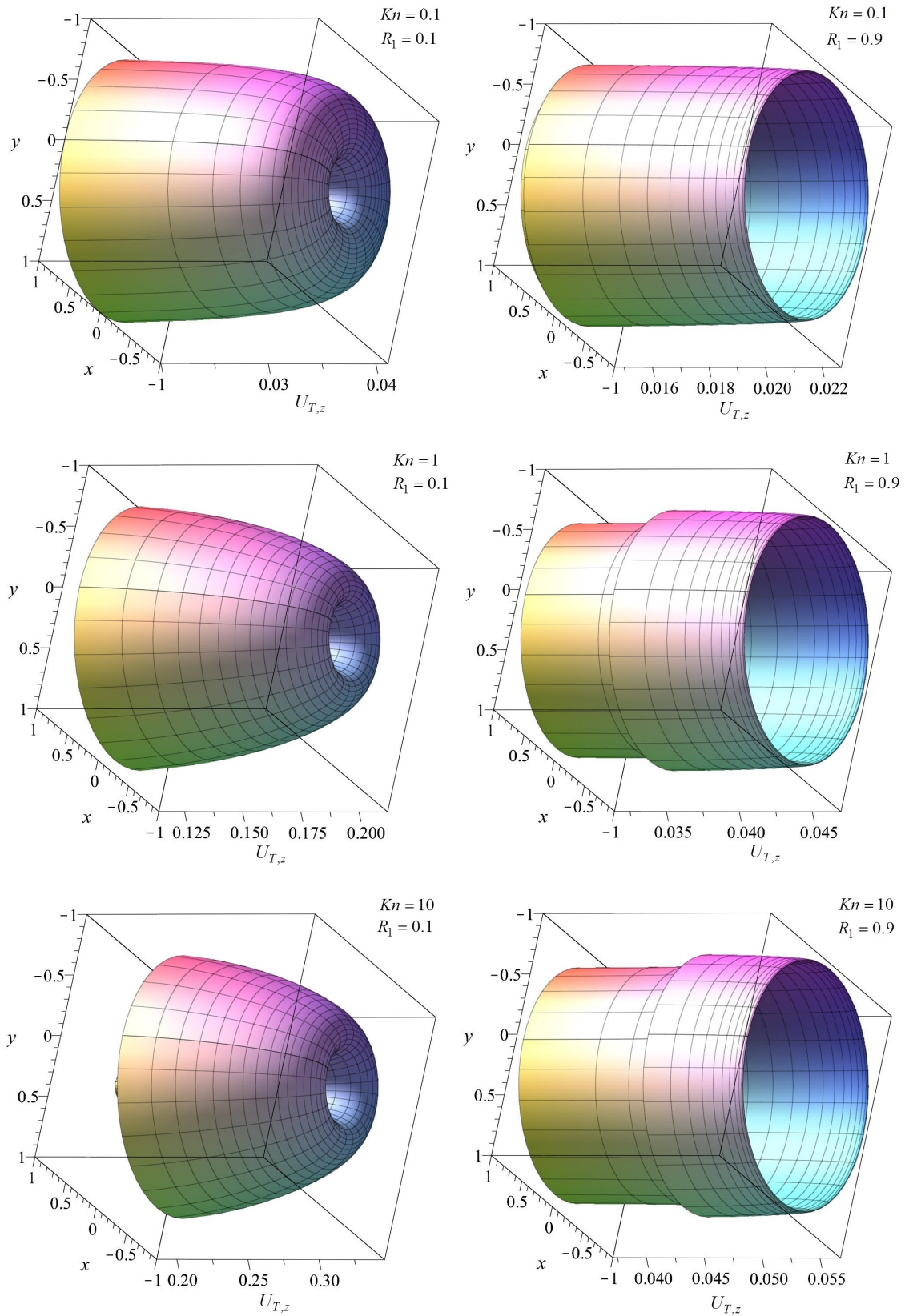


Рисунок 2.5.3 - Профили массовой скорости газа $U_{T,z}$ в канале, образованном двумя коаксиальными цилиндрами

Приведенные потоки, найденные согласно (2.5.12), не зависят непосредственно от радиусов цилиндров, а определяются их отношением $R_1 = R'_1/R'_2$ и числом Кнудсена Kn . Значения $J_{T,M}$, вычисленные по формуле (2.5.12), приведены в таблице 2.5.1. При этом в последней строке этой таблицы значения $J_{T,M}$ получены на основе асимптотической формулы для макроскопической скорости газа (2.5.11). При $Kn \geq 100$ из таблицы 2.5.1 следует, что величина массового потока не более, чем на 2% меньше своего свободномолекулярного предела.

Таблица 2.5.1 - Значения $J_{T,M}$ в зависимости от R_1 и Kn для канала, образованного двумя коаксиальными цилиндрами

Kn	$R_1 = R'_1/R'_2$				
	0	0.01	0.1	0.5	0.9
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0.0010	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008
0.0100	0.0083	0.0083	0.0083	0.0082	0.0076
0.1000	0.0764	0.0764	0.0757	0.0698	0.0414
0.5000	0.2705	0.2695	0.2601	0.2014	0.0761
1.0000	0.3881	0.3862	0.3684	0.2660	0.0878
2.0000	0.4977	0.4948	0.4677	0.3208	0.0963
5.0000	0.6080	0.6040	0.5666	0.3724	0.1034
10.000	0.6632	0.6586	0.6158	0.3970	0.1065
100.00	0.7376	0.7321	0.6816	0.4290	0.1103
1000.0	0.7502	0.7446	0.6927	0.4342	0.1108
10000	0.7520	0.7463	0.6943	0.4349	0.1109
∞	0.7523	0.7466	0.6945	0.4350	0.1109

Для режимов течения, близких к гидродинамическому, выражение (2.5.10) приближается к значению $U_{T,z}(\rho) = \gamma Kn / (3\sqrt{\pi})$, которое совпадает с выражением, полученным ранее для прямоугольного, цилиндрического и эллиптического каналов. Приведенный поток массы (2.5.12) становится равным (2.2.24).

В случае рассмотрения течений газа в пространстве между цилиндрами, радиусы которых практически совпадают, в качестве масштабного коэффициента выбираем величину $R'_2 - R'_1$. Тогда величины $J_{T,Q}$ и $J_{T,M}$ в канале определяем

по формулам (2.5.12), в которых $\rho = \rho'/(R'_2 - R'_1)$ и $R_i = R'_i/(R'_2 - R'_1)$ ($i = 1, 2$). Замечая, что в принятых безразмерных переменных $R_2 = 1 + R_1$, проведем сравнение полученных значений величины $J_{T,M}$ с соответствующими значениями приведенного потока массы в канале, образованном двумя параллельными плоскостями. Поскольку область течения разреженного газа в щели с бесконечной шириной a' имеет трансляционную инвариантность в x' -направлении, а размерный поток массы в щели определяется на единицу ширины [1]:

$$J'_M = \lim_{a' \rightarrow 0} \frac{1}{a'} \int_{-a'/2}^{a'/2} \int_{-b'/2}^{b'/2} n(\mathbf{r}') u_z(\mathbf{r}') dy' dx' = \int_{-b'/2}^{b'/2} n(\mathbf{r}') u_z(\mathbf{r}') dy'. \quad (2.5.13)$$

Выберем в качестве размерного масштаба щели ее высоту b' . Следуя [1], введем приведенный поток массы для щели как

$$J_M = \frac{J'_M}{b' p_0 \beta^{1/2}}. \quad (2.5.14)$$

Подставляя (2.5.13) в (2.5.15) и учитывая при этом (1.4.29), получаем

$$J_{T,M} = \frac{4}{b} \int_0^{b/2} U_{T,z}(y) dy = \frac{2\gamma \text{Kn}}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{3}{2\pi} \int_0^{b/2} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \times \right. \\ \left. \times \left(\int_0^\pi \exp\left(-\frac{2y+b}{2\gamma \text{Kn} \sin \varphi \sin \theta}\right) d\varphi + \int_\pi^{2\pi} \exp\left(-\frac{2y-b}{2\gamma \sin \varphi \text{Kn} \sin \theta}\right) dy d\varphi \right) \right), \quad (2.5.15)$$

где $b = 1$. При $\text{Kn} \gg 1$ выражение принимает вид (2.2.23), что согласуется с аналогичным результатом [1]. Соответствующие значения $J_{T,M}$ для каналов, образованных двумя коаксиальными цилиндрами (2.5.12) и параллельными плоскостями (2.5.15), представлены в таблице 2.5.2. Там же приведены значения потока массы в прямоугольном канале (2.2.18) и прямом эллиптическом канале (2.4.10) с полуосями $a/2$ и $b/2$. Как следует из таблицы 2.5.2, с увеличением $R_2 = a$ значения приведенного потока массы в канале, образованном двумя коаксиальными цилиндрами, и в прямоугольном канале значительно быстрее приближаются к соответствующему значению массового потока в щели с бесконечной высотой b , чем величина $J_{T,M}$ в эллиптическом канале. Это различие

значений $J_{T,M}$ не превышает 2.5% при $R_2 = a = 100$, $\text{Kn} \leq 100$ и увеличивается с ростом Kn , что объясняется конечным пределом для $J_{T,M}$ в свободномолекулярном режиме через каналы, сечение которых представляет собой ограниченную область пространства, в отличие от бесконечной по ширине щели $a \gg 1$. Стенки канала, образованного двумя коаксиальными цилиндрами, удалены от центра дальше при $R_1 \gg 1$, чем в случае прямого эллиптического цилиндра. В силу более слабого сопротивления макроскопическая скорость течения внутри этого канала оказывается выше, чем в эллиптическом канале.

Таблица 2.5.2 - Значения $J_{T,M}$ для эллиптического, прямоугольного каналов и каналов, образованных двумя коаксиальными цилиндрами и параллельными плоскостями, при одинаковых значениях a

Kn	$R_2 = a$						$a \gg 1$
	10			100			
	(2.5.12)	(2.4.10)	(2.2.18)	(2.5.12)	(2.4.10)	(2.2.18)	(2.5.15)
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0.0010	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008
0.0100	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083
0.1000	0.0764	0.0745	0.0758	0.0764	0.0747	0.0764	0.0764
0.5000	0.2753	0.2537	0.2673	0.2753	0.2566	0.2745	0.2753
1.0000	0.4135	0.3696	0.3949	0.4148	0.3792	0.4129	0.4149
2.0000	0.5679	0.4922	0.5323	0.5771	0.5195	0.5729	0.5774
5.0000	0.7614	0.6381	0.6996	0.8083	0.7194	0.8014	0.8138
10.000	0.8779	0.7227	0.7990	0.9767	0.8724	0.9758	1.0015
100.00	1.0650	0.8546	0.9579	1.3278	1.2672	1.4333	1.6436
1000.0	1.1026	0.8804	0.9898	1.4185	1.4038	1.5984	2.2922

В таблице 2.5.3 представлены результаты [82]–[85] для каналов, образованных двумя параллельными плоскостями. Значения массового потока в [82] получены прямым численным методом с использованием S-модели кинетического уравнения, в [84] — с применением метода дискретных скоростей при нахождении численного решения уравнения Больцмана, в [83], [85] — с применением метода дискретных ординат в рамках модели с комбинированным ядром (CES) и на основе линеаризованного уравнения Больцмана (LBE), соот-

ответственно. Из анализа данных, приведенных в таблице 2.5.3, следует, что при $R_2 = a = 100$ полученные по формулам (2.5.12), (2.4.10) и (2.2.18) значения массового потока в канале, образованном двумя коаксиальными цилиндрами, а также в эллиптическом и прямоугольном каналах приближаются к соответствующим результатам [82]–[85].

Таблица 2.5.3 - Значения $J_{T,M}$ для канала, образованного двумя параллельными плоскостями

Kn	$R_2 = a = 100$			$a \gg 1$				
	(2.5.12)	(2.4.10)	(2.2.18)	(2.5.15)	[82]	[83]	[84]	[85]
0.1	0.0764	0.0747	0.0764	0.0764	0.0982	0.0931	0.0898	0.0900
1.0	0.4148	0.3792	0.4129	0.4149	0.3655	0.4046	0.3890	0.3891
10	0.9767	0.8724	0.9758	1.0015	0.7327	0.7909	0.7966	0.7993

2.6 Тепловой крип в пространстве между двумя цилиндрическими поверхностями в промежуточном режиме течения

Рассмотрим канал, образованный двумя цилиндрами с радиусами R'_1 и R'_2 ($R'_2 > R'_1$). Образующие цилиндров параллельны, причем ось цилиндра с радиусом R'_2 смещена на расстояние a' относительно оси внутреннего цилиндра ($0 \leq a' < R'_2 - R'_1$), как это показано на рисунке 2.6.1. В качестве размерного масштаба выберем R'_2 .

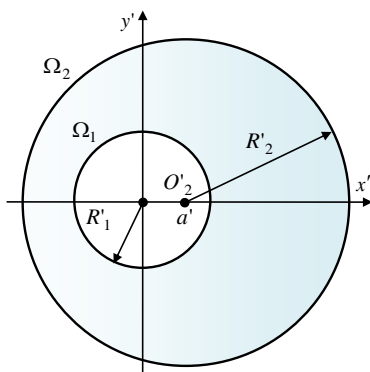


Рисунок 2.6.1 - Сечение канала, образованного некоаксиальными цилиндрами

Перейдем в конфигурационном пространстве к цилиндрической системе координат, а в пространстве скоростей к сферической системе координат, аналогично описанному в разделе 2.3. Полученная в результате этого преобразования функция $Z(\rho, \varphi, \psi, \theta)$ зависит от полярного угла φ . Подставим функцию $Z(\rho, \varphi, \psi, \theta)$ в уравнение (1.4.23) и граничное условие (2.1.1). В итоге имеем

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial \rho} \cos \psi + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi} - \frac{\partial Z}{\partial \psi} \right) \frac{\sin \psi}{\rho} \right) \gamma \text{Kn} \sin \theta + Z(\rho, \varphi, \psi, \theta) + 1 = 0, \quad (2.6.1)$$

$$Z(R_1, \varphi_{\Omega_1}, \psi_{\Omega_1}, \theta) = 0, \quad \cos \psi_{\Omega_1} > 0. \quad (2.6.2)$$

$$Z(\rho_{\Omega_2}, \varphi_{\Omega_2}, \psi_{\Omega_2}, \theta) = 0, \quad \rho_{\Omega_2} \cos \psi_{\Omega_2} + a \cos(\varphi_{\Omega_2} + \psi_{\Omega_2}) < 0, \quad (2.6.3)$$

$$\rho_{\Omega_2}^2 - 2a\rho_{\Omega_2} \cos \varphi_{\Omega_2} + a^2 = R_2^2.$$

Система уравнений характеристик для (2.3.2) и три ее первых интеграла имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\gamma \text{Kn} \cos \psi \sin \theta} &= \frac{\rho d\varphi}{\gamma \text{Kn} \sin \psi \sin \theta} = \\ &= -\frac{\rho d\psi}{\gamma \text{Kn} \sin \psi \sin \theta} = -\frac{dZ}{Z(\rho, \varphi, \psi, \theta) + 1} = dt, \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

$$\rho |\sin \psi| = C_1, \quad \varphi + \psi = C_2, \quad (Z(\rho, \varphi, \psi, \theta) + 1) \exp\left(\frac{\rho \cos \psi}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}\right) = C_3. \quad (2.6.5)$$

Исключая из (2.6.5) с помощью (2.6.2) и (2.6.8) постоянные интегрирования C_i ($i = \overline{1, 3}$), получаем

$$\rho |\sin \psi| = R_1 |\sin \psi_{\Omega_1}|, \quad \varphi + \psi = \varphi_{\Omega_1} + \psi_{\Omega_1}, \quad (2.6.6)$$

$$(Z(\rho, \varphi, \psi, \theta) + 1) \exp\left(\frac{\rho \cos \psi}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}\right) = \exp\left(\frac{R_1 \cos \psi_{\Omega_1}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}\right), \quad \cos \psi_{\Omega_1} > 0; \quad (2.6.7)$$

$$\rho |\sin \psi| = \rho_{\Omega_2} |\sin \psi_{\Omega_2}|, \quad \varphi + \psi = \varphi_{\Omega_2} + \psi_{\Omega_2},$$

$$(Z(\rho, \varphi, \psi, \theta) + 1) \exp\left(\frac{\rho \cos \psi}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}\right) = \exp\left(\frac{\rho_{\Omega_2} \cos \psi_{\Omega_2}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}\right),$$

$$\rho_{\Omega_2} \cos \psi_{\Omega_2} + a \cos(\varphi_{\Omega_2} + \psi_{\Omega_2}) < 0. \quad (2.6.8)$$

При $\psi_1 \leq \psi \leq \psi_2$, где $\psi_1 = -\psi_0$, $\psi_2 = \psi_0$ и $\psi_0 = \arcsin(R_1/\rho)$ отражение молекулы газа произошло от поверхности внутреннего цилиндра (рисунок 2.6.2). Тогда решая совместно уравнения (2.6.6) и (2.6.7), получаем

$$Z(\rho, \psi, \varphi, \theta) = \exp(-w_1(\rho, \varphi, \psi, \theta)) - 1, \quad (2.6.9)$$

$$w_1(\rho, \varphi, \psi, \theta) = \frac{\rho \cos \psi - \sqrt{R_1^2 - \rho^2 \sin^2 \psi}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}. \quad (2.6.10)$$

При $\psi_2 < \psi \leq \psi_3$, где $\psi_3 = \psi_0 + 2\pi$, молекула газа отразилась от поверхности внешнего цилиндра. Решением системы уравнений (2.6.8) является в этом случае функция

$$Z(\rho, \varphi, \psi, \theta) = \exp(-w_2(\rho, \varphi, \psi, \theta)) - 1, \quad (2.6.11)$$

$$w_2(\rho, \varphi, \psi, \theta) = \frac{\rho \cos \psi - a \cos(\varphi + \psi) + \sqrt{R_2^2 - (\rho \sin \psi - a \sin(\varphi + \psi))^2}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}. \quad (2.6.12)$$

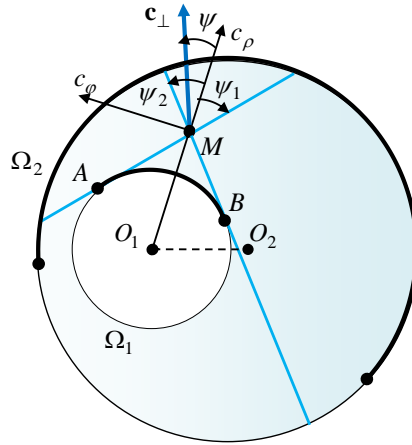


Рисунок 2.6.2 - Границы изменения угла ψ при отражении молекулы от внутреннего цилиндра

Используя выражения (2.6.9)-(2.6.12), согласно (1.4.18) получаем явный вид функции распределения (1.4.5), описывающей тепловой крип в пространстве между двумя цилиндрами, оси которых смещены друг относительно друга на расстояние a . В этом случае распределение векторов потока тепла $q_{T,z}(\rho, \varphi)$ и массовой скорости $U_{T,z}(\rho, \varphi)$ газа в канале согласно формулам (1.4.28) и (1.4.29) описывается следующим образом

$$U_{T,z}(\rho, \varphi) = \frac{\gamma \text{Kn}}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{3}{4\pi} \sum_{i=1}^2 \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} \exp(-w_i) d\psi \right) = \\ = -\frac{2}{9} q_{T,z}(\rho, \varphi). \quad (2.6.13)$$

По формулам (1.2.7) определяем безразмерные приведенные потоки тепла и массы газа в канале

$$J_{T,M} = \frac{4}{(R_2^2 - R_1^2) \pi} \int_0^\pi \int_{R_1}^{a \cos \varphi + \sqrt{R_2^2 - a^2 \sin^2 \varphi}} U_{T,z}(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = -\frac{2}{9} J_{T,Q}. \quad (2.6.14)$$

В случае $a = 0$ выражения (2.6.13) и (2.6.14) принимают соответственно вид (2.5.11) и (2.5.12). При $R_1 = 0$ становятся равными (2.3.9) и (2.3.10). Таким образом, результаты моделирования процессов тепло- и массопереноса в рассматриваемом канале при $a = 0$ переходят в соответствующие результаты, полученные в разделе 3.5, а при и $R_1 = 0$ — результаты, полученные в разделе 3.3.

Для свободномолекулярного режима течения ($\text{Kn} \gg 1$) подынтегральные функции $w_i = w_i(\rho, \psi, \theta)$ в выражении для массовой скорости газа (2.5.10), представляем в виде ряда по малому параметру $1/\text{Kn}$ и ограничиваемся линейными членами этого ряда. В результате имеем

$$U_{T,z}(\rho, \varphi) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left(\int_{\psi_0}^{\pi} \left(-a \cos(\varphi + \psi) + \sqrt{R_2^2 - (\rho \sin \psi - a \sin(\varphi + \psi))^2} \right) d\psi - \right. \\ \left. - 2 \int_0^{\psi_0} \sqrt{R_1^2 - \rho^2 \sin^2 \psi} d\psi \right). \quad (2.6.15)$$

Значения $J_{T,M}$, вычисленные по формуле (2.6.14) для различных отношений $R_1 = R'_1/R'_2$, приведены в таблицах 2.6.1 и 2.6.2 для $a = 0.01, 0.10, 0.50, 0.90$. При этом в последних строках этих таблиц значения $J_{T,M}$ получены на основе асимптотической формулы для макроскопической скорости газа (2.6.15) в свободномолекулярном режиме течения. При $\text{Kn} \geq 10$ из таблиц 2.6.1 и 2.6.2 следует, что величина массового потока не более чем на 12% меньше своего свободномолекулярного предела. При $\text{Kn} \geq 100$ данное различие уменьшается в среднем до 1%.

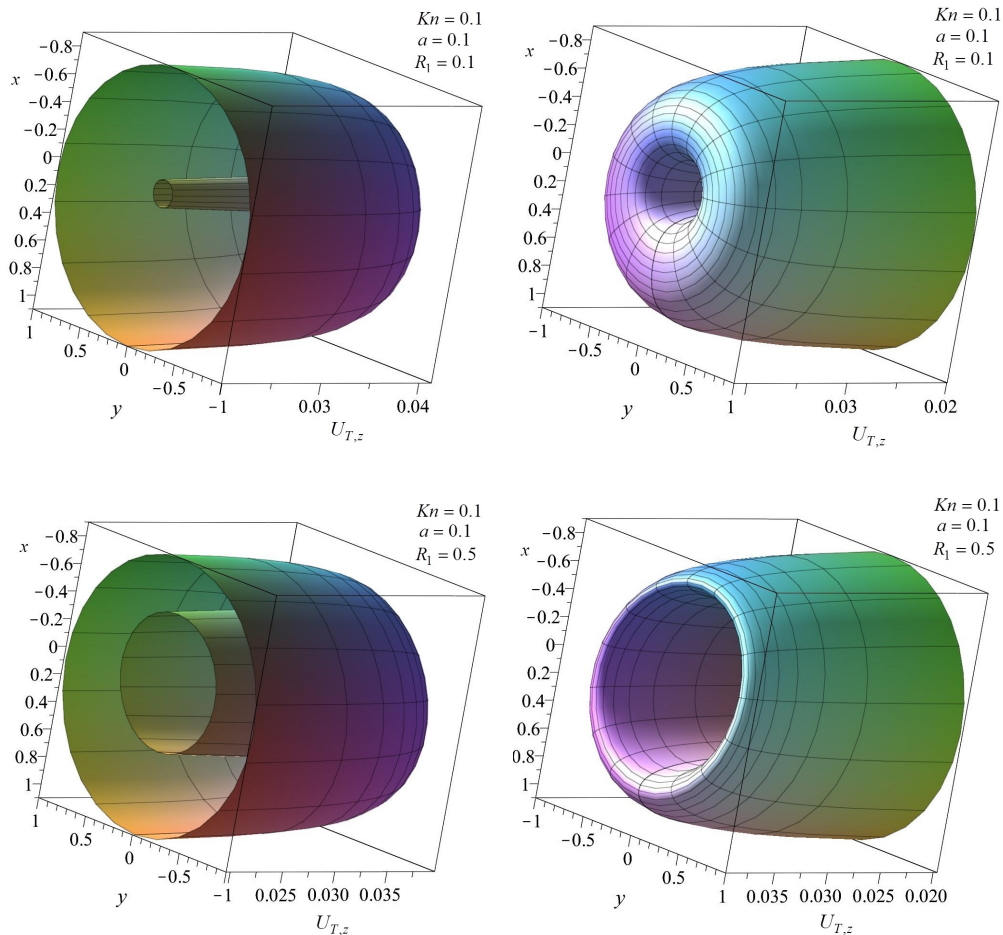
Таблица 2.6.1 - Значения $J_{T,M}$ для $a = 0.01, 0.50$ в зависимости от R_1 и Kn для канала, образованного двумя цилиндрическими поверхностями

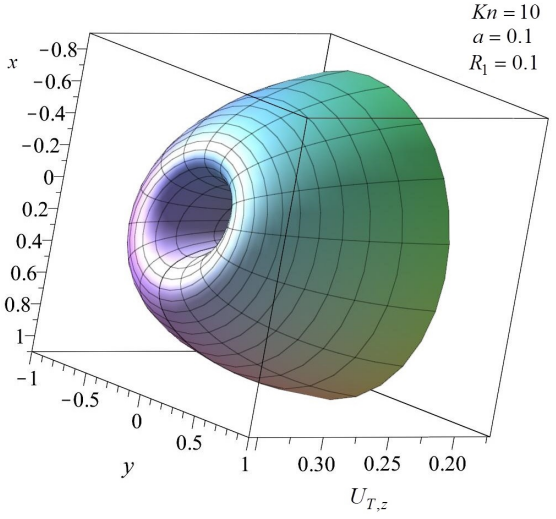
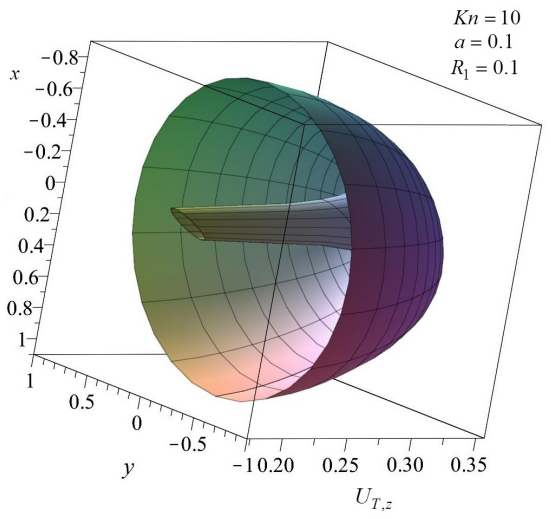
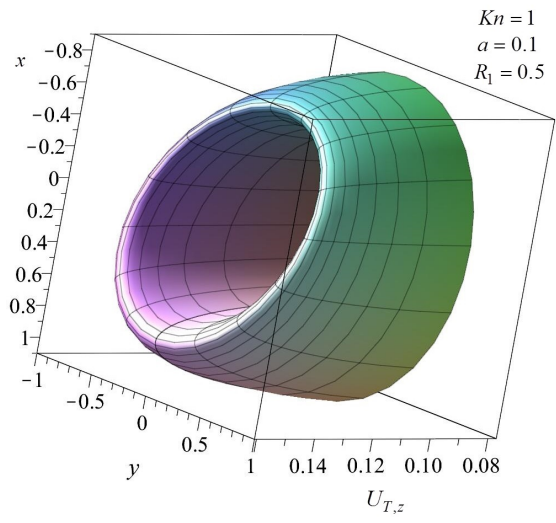
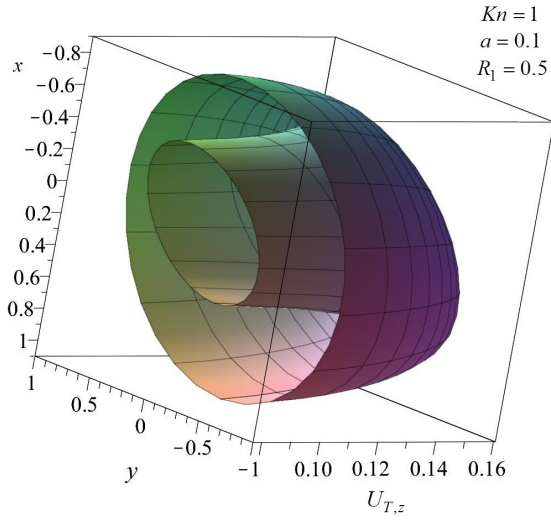
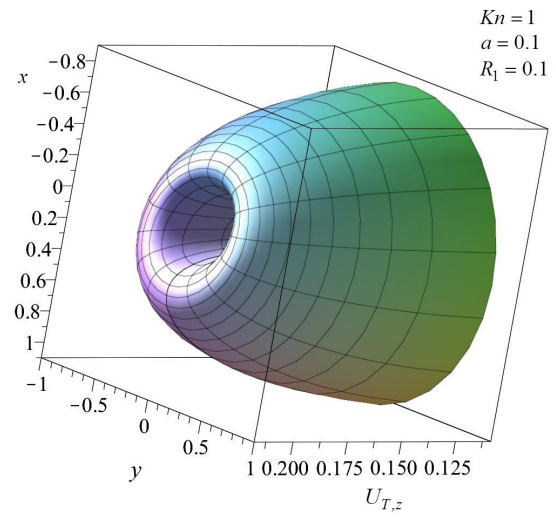
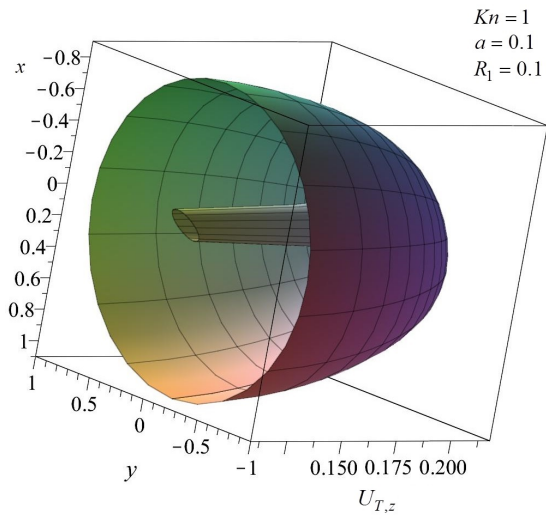
Kn	$a = 0.01, R_1 = R'_1/R'_2$				$a = 0.50, R_1$		
	0.01	0.1	0.5	0.9	0.01	0.1	0.5
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0.0010	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008
0.0100	0.0083	0.0083	0.0082	0.0076	0.0083	0.0083	0.0082
0.1000	0.0764	0.0757	0.0698	0.0414	0.0764	0.0757	0.0720
0.5000	0.2695	0.2601	0.2014	0.0763	0.2696	0.2620	0.2276
1.0000	0.3862	0.3684	0.2660	0.0881	0.3866	0.3726	0.3120
2.0000	0.4948	0.4677	0.3209	0.0966	0.4955	0.4747	0.3870
5.0000	0.6040	0.5666	0.3724	0.1038	0.6050	0.5767	0.4598
10.000	0.6586	0.6158	0.3971	0.1069	0.6597	0.6276	0.4954
100.00	0.7321	0.6816	0.4290	0.1107	0.7334	0.6959	0.5425
1000.0	0.7446	0.6929	0.4342	0.1113	0.7460	0.7074	0.5504
∞	0.7466	0.6945	0.4351	0.1114	0.7480	0.7093	0.5516

Таблица 2.6.2 - Значения $J_{T,M}$ для $a = 0.1, 0.9$ в зависимости от R_1 и Kn для канала, образованного двумя цилиндрическими поверхностями

Kn	$a = 0.1, R_1 = R'_1/R'_2$				$a = 0.9, R_1$	
	0.01	0.1	0.5	0.9	0.01	0.1
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0008	0.0008
0.0010	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0083	0.0083
0.0100	0.0083	0.0083	0.0082	0.0077	0.0764	0.0761
0.1000	0.0764	0.0757	0.0699	0.0477	0.2702	0.2683
0.5000	0.2695	0.2602	0.2023	0.0975	0.3877	0.3844
1.0000	0.3862	0.3685	0.2676	0.1158	0.4971	0.4924
2.0000	0.4948	0.4680	0.3233	0.1296	0.6072	0.6011
5.0000	0.6040	0.5670	0.3758	0.1416	0.6623	0.6554
10.000	0.6587	0.6163	0.4009	0.1469	0.7365	0.7285
100.00	0.7321	0.6821	0.4334	0.1535	0.7491	0.7409
1000.0	0.7446	0.6933	0.4388	0.1545	0.7509	0.7427
∞	0.7467	0.6951	0.4396	0.1547	0.7512	0.7430

Профили распределения массовой скорости (2.6.13) газа в канале при $Kn = 0.1, 1, 10$ для различных пар значений $a = 0.1, 0.5$ и $R_1 = 0.1, 0.5$ приведены на рисунке 2.6.3. Слева представлены профили $U_{T,z}$ в положительном направлении оси z , а справа — эти же профили, за исключением последнего ряда, но в отрицательном направлении оси z . Можно видеть, что при любом отношении R'_1/R'_2 функция $U_{T,z}$ имеет максимум, сдвиг которого происходит в сторону внутреннего цилиндра с уменьшением его радиуса. В отличие от распределений величины $U_{T,z}$, приведенных на рисунке 2.5.3, распределения макроскопической скорости на рисунке 2.6.3 при $a > 0$ не обладают радиальной симметрией в поперечных сечениях. В случае $a > R_1$ при фиксированном значении R_1 с увеличением величины a смещение точки максимума происходит в сторону внешнего цилиндра. Значения $U_{T,z}$ на внутреннем цилиндре меньше, чем на внешнем цилиндре. В то же время минимальное значение $U_{T,z}$ сдвигается в сторону смещения a . С уменьшением значений a и R_1 распределение профиля вектора массовой скорости приближается к распределению для полого цилиндра.





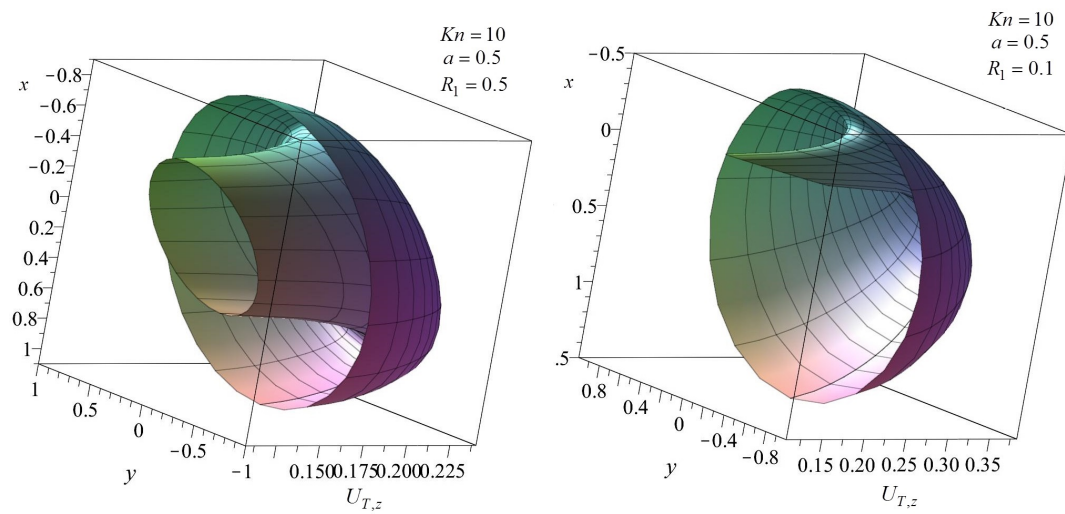


Рисунок 2.6.3 - Профили массовой скорости газа $U_{T,z}$ в канале, образованном двумя цилиндрами, при $Kn = 0.1, 1, 10$ для $a = 0.1, 0.5$ и $R_1 = 0.1, 0.5; R_2 = 1$

2.7 Тепловой крип в прямоугольном канале с внутренним цилиндром в промежуточном режиме течения

Рассмотрим прямоугольный канал с внутренним цилиндром, имеющим радиус R' . Сечение канала плоскостью $x'y'$ показано на рисунке 2.7.1. Выберем в качестве размерного масштаба длины высоту канала b' .

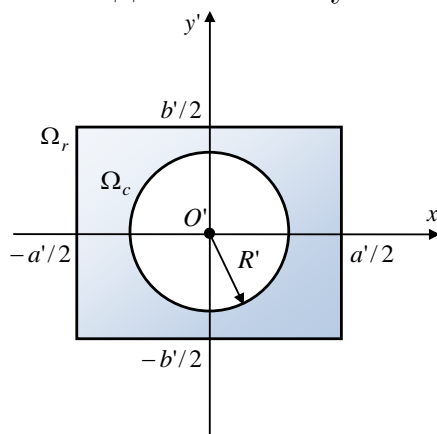


Рисунок 2.7.1 - Сечение прямоугольного канала с внутренним цилиндрическим элементом

Осуществим переход в пространстве скоростей к сферической системе координат, аналогично описанному в разделе 2.2. Полученную в результате этого преобразования функцию $Z(x, y, \varphi, \theta)$ находим из квазилинейного неоднород-

ного дифференциального уравнения (2.2.1) с граничными условиями

$$Z(\pm a/2, y_{\Omega_r}, \varphi, \theta) = 0, \quad \pm \cos \varphi < 0, \quad (2.7.1)$$

$$Z(x_{\Omega_r}, \pm b/2, \varphi, \theta) = 0, \quad \pm \sin \varphi < 0, \quad (2.7.2)$$

$$Z(x_{\Omega_c}, y_{\Omega_c}, \varphi, \theta) = 0, \quad x_{\Omega_c} \cos \varphi + y_{\Omega_c} \sin \varphi > 0, \quad x_{\Omega_c}^2 + y_{\Omega_c}^2 = R^2. \quad (2.7.3)$$

Система уравнений характеристик для (2.2.1) и два ее первых интеграла имеют вид (2.2.4) и (2.2.5), соответственно. Учитывая симметрию сечения канала относительно координатных осей x и y , рассмотрим точку $M(x, y)$ из первого квадранта. Возможные положения касательных AM и BM представлены на рисунке 2.7.2 (угол между касательными равен $2\chi_2$). Исключая постоянные интегрирования C_1 и C_2 из (2.2.5) с помощью (2.7.1)-(2.7.3), где $(x \geq 0) \wedge (y \geq 0)$, получаем, что для молекул, отразившихся от Ω , функция $Z(x, y, \varphi, \theta)$ имеет вид (2.7.1), а $w(x, y, \varphi, \theta)$ с учетом (2.7.3) определяется как

$$w(x, y, \varphi, \theta) = \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi - \sqrt{1 - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}. \quad (2.7.4)$$

Здесь угол φ принадлежит промежутку $[\chi_1, \chi_1 + 2\chi_2]$:

$$\chi_1 = \text{arctg} \left(\frac{y}{x} \right) - \chi_2 + 2\pi, \quad \chi_2 = \text{arctg} \left(\frac{R}{\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}} \right). \quad (2.7.5)$$

Для молекул, отразившихся от верхней части $y_{\Omega_r} = b/2$ границы Ω_r , функция $Z(x, y, \varphi, \theta)$ имеет вид (2.2.11), где $\varphi_1 \leq \varphi \leq \min(\varphi_2, \chi_1)$.

В случае отражения частиц газа от стенки $x_{\Omega_r} = -a/2$ границы Ω_r функция $Z(x, y, \varphi, \theta)$ принимает вид (2.2.9), а угол φ принадлежит одному из следующих промежутков:

$$\left[\begin{array}{l} \varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3, \text{ если } \chi_1 > \varphi_3 \text{ (рисунок 2.7.2 (a))}, \\ \varphi_2 \leq \varphi < \chi_1, \text{ если } (\varphi_2 < \chi_1 < \varphi_3) \wedge (\chi_1 + 2\chi_2 > \varphi_3) \text{ (рисунок 2.7.2 (b), (c))}, \\ (\varphi_2 \leq \varphi < \chi_1) \vee (\chi_1 + 2\chi_2 < \varphi \leq \varphi_3), \text{ если } \chi_1 + 2\chi_2 < \varphi_3 \text{ (рисунок 2.7.2 (d))}; \end{array} \right.$$

при отражении молекул от нижней части $y_{\Omega_r} = -b/2$ границы Ω_r , функция $Z(x, y, \varphi, \theta)$ имеет вид (2.2.12), причем

$$\left[\begin{array}{l} \varphi_3 < \varphi \leq \varphi_4, \text{ если } \chi_1 + 2\chi_2 < \varphi_3 \text{ (рисунок 2.7.2 (d))}, \\ \chi_1 + 2\chi_2 < \varphi \leq \varphi_4, \text{ если } \varphi_3 < \chi_1 + 2\chi_2 < \varphi_4 \text{ (рисунок 2.7.2 (b), (e))}, \\ (\varphi_3 < \varphi < \chi_1) \vee (\chi_1 + 2\chi_2 \leq \varphi \leq \varphi_4), \text{ если } \chi_1 > \varphi_3 \text{ (рисунок 2.7.2 (a))}; \end{array} \right.$$

при отражении молекул от правой части $x_{\Omega_r} = a/2$ границы Ω_r функция $Z(x, y, \varphi, \theta)$ принимает вид (2.2.8), где

$$\left[\begin{array}{l} \varphi_4 < \varphi \leq \varphi_0 + 2\pi, \text{ если } \chi_1 + 2\chi_2 < \varphi_4 \text{ (рисунок 2.7.2 (a), (b), (d), (e)),} \\ \chi_1 + 2\chi_2 < \varphi \leq \varphi_0 + 2\pi, \text{ если } \chi_1 + 2\chi_2 > \varphi_4 \text{ (рисунок 2.7.2 (c), (f)).} \end{array} \right.$$

Здесь углы φ_i ($i = \overline{0, 4}$) определяются выражениями (2.2.13), (2.2.14).

В результате компоненты $q_{T,z}(x, y)$ и $U_{T,z}(x, y)$ принимают вид

$$U_{T,z}(x, y) = \frac{\gamma \text{Kn}}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi W(x, y, \theta) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \right) = -\frac{2}{9} q_{T,z}(x, y), \quad (2.7.6)$$

$$W = \begin{cases} W_1 + W_2 + W_3 + W_4, & (\chi_1 \leq \varphi_2) \wedge (\chi_1 + 2\chi_2 \leq \varphi_4), \\ W_1 + W_2 + W_5, & (\chi_1 \leq \varphi_2) \wedge (\chi_1 + 2\chi_2 \geq \varphi_4), \\ W_1 + W_4 + W_6 + W_7 + W_8 + W_9, & \chi_1 + 2\chi_2 \leq \varphi_3, \\ W_1 + W_3 + W_4 + W_6 + W_7, & (\varphi_2 \leq \chi_1 \leq \varphi_3) \wedge (\varphi_3 \leq \chi_1 + 2\chi_2 \leq \varphi_4), \\ W_1 + W_5 + W_6 + W_7, & (\varphi_2 \leq \chi_1) \wedge (\varphi_4 \leq \chi_1 + 2\chi_2), \\ W_1 + W_3 + W_4 + W_6 + W_{10} + W_{11}, & \varphi_3 \leq \chi_1, \end{cases}$$

где функции W_i определяются интегралами ($i = \overline{1, 11}$), в которых w_j ($j = \overline{1, 4}$) — формулами (2.2.8)-(2.2.12) и φ_k ($i = \overline{0, 4}$) — формулами (2.2.13), (2.2.14):

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_{\chi_1}^{\chi_1+2\chi_2} \exp \left(-\frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi + \sqrt{R^2 - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta} \right) d\varphi, \\ W_2 &= \int_{\varphi_1}^{\chi_1} w_2 d\varphi, \quad W_3 = \int_{\chi_1+2\chi_2}^{\varphi_4} w_4 d\varphi, \quad W_4 = \int_{\varphi_4}^{\varphi_0+2\pi} w_1 d\varphi, \quad W_5 = \int_{\chi_1+2\chi_2}^{\varphi_0+2\pi} w_1 d\varphi, \\ W_6 &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} w_2 d\varphi, \quad W_7 = \int_{\varphi_2}^{\chi_1} w_3 d\varphi, \quad W_8 = \int_{\chi_1+2\chi_2}^{\varphi_3} w_3 d\varphi, \quad W_9 = \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} w_4 d\varphi, \\ W_{10} &= \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} w_3 d\varphi, \quad W_{11} = \int_{\varphi_3}^{\chi_1} w_4 d\varphi. \end{aligned}$$

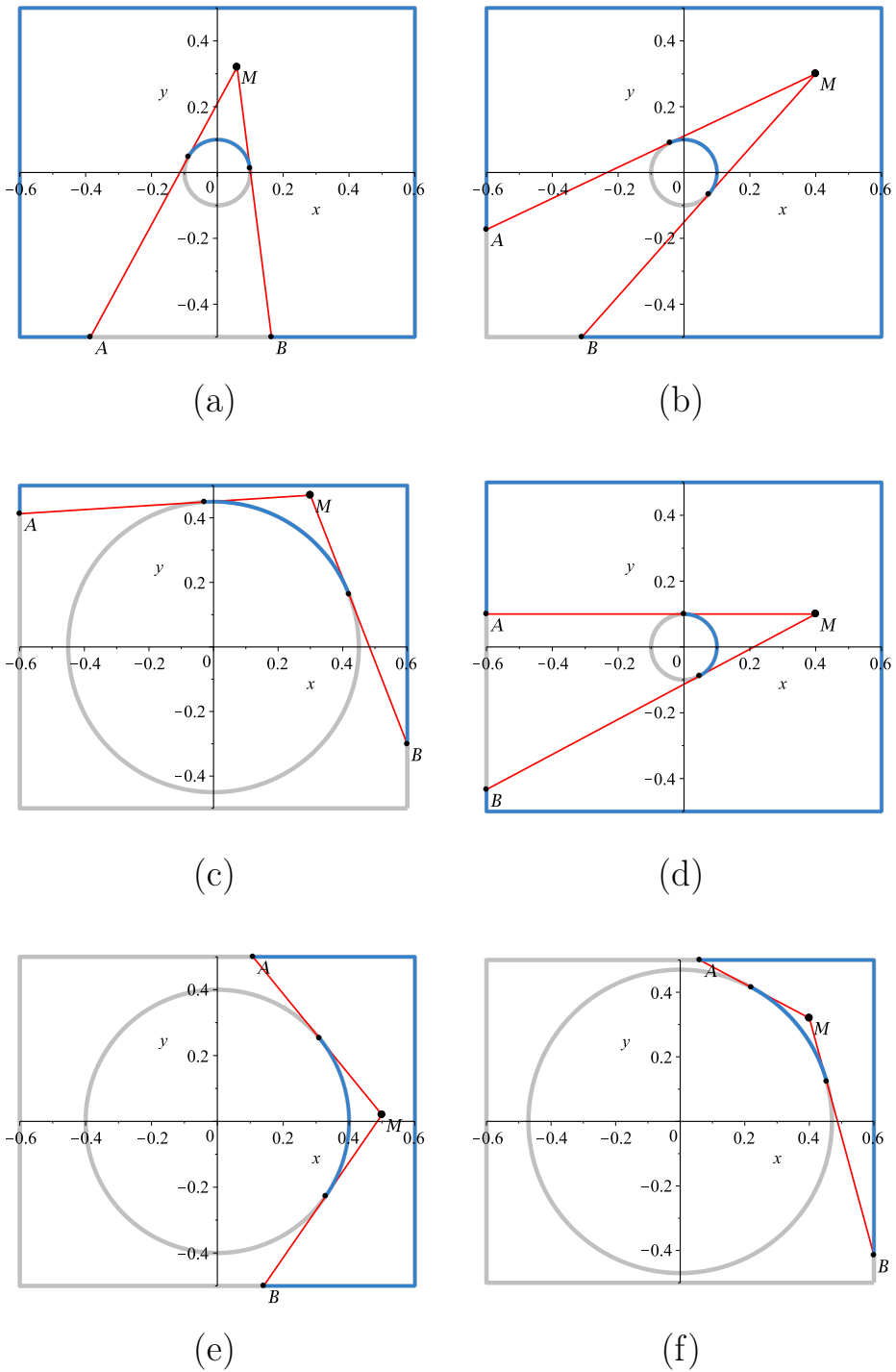


Рисунок 2.7.2 - Границы отражения для различных положений точки M и значений R

По формуле (1.2.7) определяем безразмерный приведенный поток массы газа в канале

$$J_{T,M} = \frac{8}{ab - \pi R^2} \left(\int_0^R dy \int_{\sqrt{R^2 - x^2}}^{a/2} U_{T,z}(x, y) dx + \int_R^{1/2} dy \int_0^{a/2} U_{T,z}(x, y) dx \right). \quad (2.7.7)$$

Приведенный поток тепла при этом находим по формуле (2.2.19). В случае $R = 0$ выражения (2.7.6) и (2.7.7) принимают вид (2.2.15)-(2.2.18). Таким образом, результаты моделирования процессов тепло- и массопереноса в рассматриваемом канале при $R_1 = 0$ переходят в соответствующие результаты, полученные в разделе 2.2.

Значения $J_{T,M}$, вычисленные по формуле (2.7.7) для различных отношений $a = a'/b'$ и $R_1 = R'_1/b'$, приведены в таблице 2.7.1 для $a = 1, 1.1, 2$. При этом в последней строке этой таблицы значения $J_{T,M}$ получены на основе асимптотической формулы для макроскопической скорости газа в свободномолекулярном режиме течения [75]. Из сравнения значений в таблицах 2.2.1 и 2.7.1 следует, что величина массового потока в канале с внутренним цилиндром с $R = 0.01$ уменьшилась менее, чем на 1%, по сравнению с тем же значением в отсутствие внутреннего цилиндра в прямоугольном канале. При этом с ростом значений числа Кн до 10 для отношений $a = 1$ и 2 различие значений в таблицах 2.2.1 и 2.7.1 увеличивается до 13% при $R = 0.1$ и 28% при $R = 0.2$. Для $a = 5$ эти различия уменьшаются в 2 раза.

Таблица 2.7.1 - Значения $J_{T,M}$ для $a = 1, 1.1$ и 5 в зависимости от R и Kn для прямоугольного канала с внутренним цилиндрическим элементом

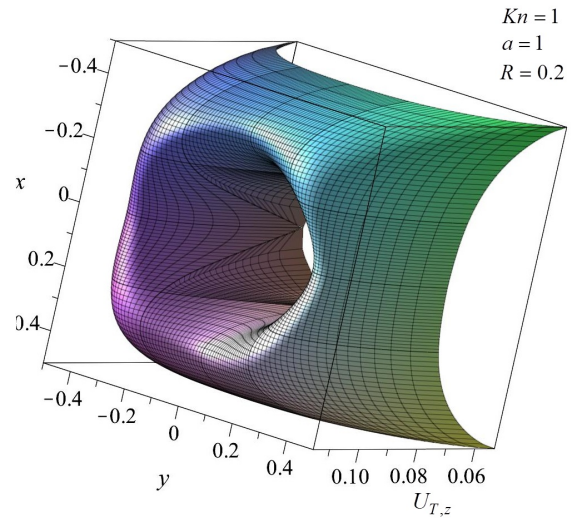
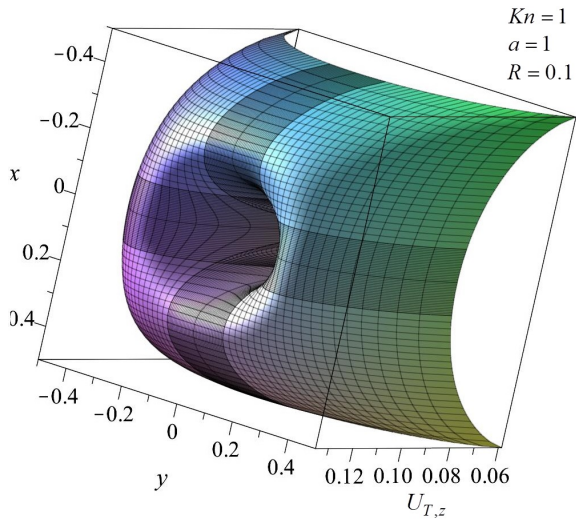
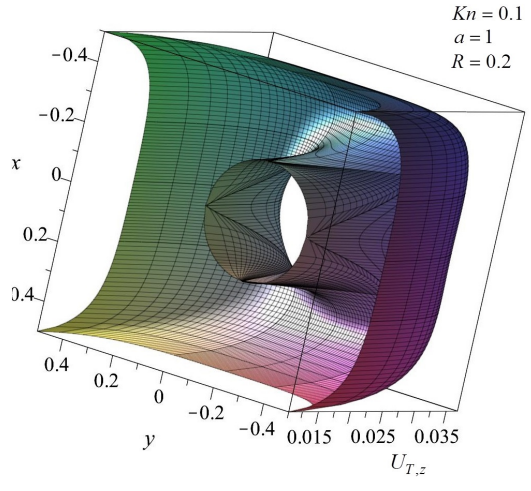
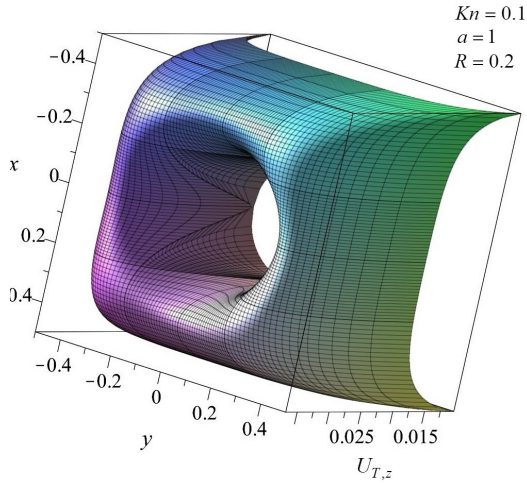
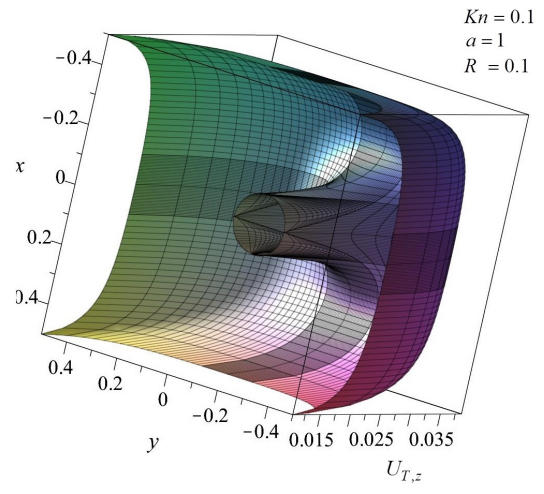
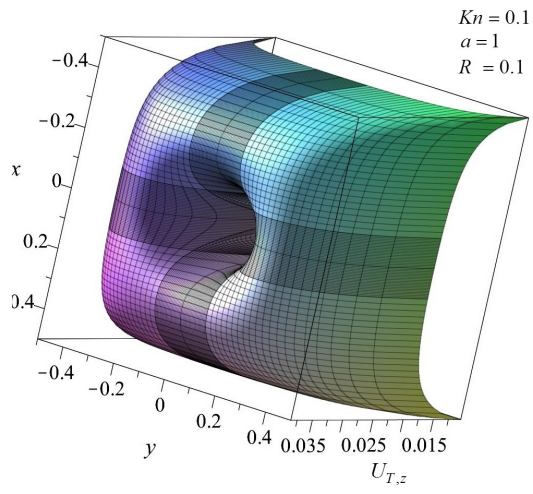
Кн	$a = 1, R$			$a = 1.1, R$			$a = 5, R$		
	0.01	0.1	0.2	0.01	0.1	0.2	0.01	0.1	0.2
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0.0010	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008
0.0100	0.0082	0.0082	0.0081	0.0082	0.0082	0.0082	0.0082	0.0082	0.0082
0.1000	0.0703	0.0681	0.0646	0.0709	0.0689	0.0657	0.0752	0.0748	0.0742
0.5000	0.2026	0.1857	0.1635	0.2078	0.1917	0.1705	0.2587	0.2536	0.2476
1.0000	0.2642	0.2379	0.2047	0.2729	0.2474	0.2153	0.3741	0.3631	0.3507
2.0000	0.3146	0.2799	0.2371	0.3267	.2927	0.2508	0.4895	0.4705	0.4493
5.000	0.3603	0.3176	0.2658	0.3760	0.3337	0.2826	0.6160	0.5858	0.5527
10.000	0.3815	0.3348	0.2786	0.3989	0.3526	0.2970	0.6841	0.6469	0.6064
100.00	0.4080	0.3562	0.2945	0.4277	0.3761	0.3148	0.7809	0.7327	.6805
1000.0	0.4130	0.3602	0.2975	0.4332	0.3804	0.3181	0.7992	0.7487	0.6942
∞	0.4136	0.3607	0.2978	0.4339	0.3810	0.3185	0.8032	0.7522	0.6970

Профили распределения массовой скорости (2.7.6) газа в канале при $\text{Kn} = 0.1, 1, 10$ для различных пар значений $a = 1, 2$ и $R_1 = 0.1, 0.2$ приведены на рисунке 2.7.3. При построении величины $U_{T,z}$ использовалась структурированная сетка в физическом пространстве. Учитывая симметрию сечения канала относительно координатных осей, рассматривалась область заключенная между границами Ω_c и Ω_r в первом квадранте. Данная область была поделена в свою очередь на четыре подобласти $\left(x_1^{(i)} \leq x \leq x_2^{(i)}\right) \wedge \left(y_1^{(i)} \leq y \leq y_2^{(i)}\right)$, $(i = \overline{1,4})$:

1. $x_1^{(1)} = \sqrt{R^2 - y^2}$, $x_2^{(1)} = R$, $y_1^{(1)} = 0$, $y_2^{(1)} = R$;
2. $x_1^{(2)} = 0$, $x_2^{(2)} = R$, $y_1^{(2)} = R$, $y_2^{(2)} = b/2$;
3. $x_1^{(3)} = R$, $x_2^{(3)} = a/2$, $y_1^{(3)} = 0$, $y_2^{(3)} = R$;
4. $x_1^{(4)} = R$, $x_2^{(4)} = a/2$, $y_1^{(4)} = R$, $y_2^{(4)} = b/2$.

При этом каждой точки из прямоугольника размером 1×1 ($x', y' \in [0, 1]$) с 20×20 узлами была сопоставлена точка подобласти i : $x = x_1^{(i)} + (x - x_2^{(i)}) x'$, $y = y_1^{(i)} + (y - y_2^{(i)}) y'$, $(i = \overline{1,4})$. Данное разбиение позволяет выполнять построение массовой скорости газа в канале с поперечным сечением сложной формы во всем диапазоне изменения числа Kn .

Для значений $\text{Kn} = 0.1$ на рисунке 2.7.3 слева представлены профили $U_{T,z}$ в положительном направлении оси z , а справа — эти же профили, но в отрицательном направлении оси z . Можно видеть, что распределение макроскопической скорости не является осесимметричным в отличие от случая течения газа в канале, образованном двумя коаксиальными цилиндрами. Следует также заметить, что в промежуточном режиме течения ($\text{Kn} > 0.1$) значения величины $U_{T,z}$ на внутреннем цилиндре перестают принадлежать единой окружности и наблюдается некоторое смещение точек максимума профиля массовой скорости от начала координат к угловым точкам границы. В то же время с увеличением значений числа Kn наблюдается быстрый рост величины $U_{T,z}$ в окрестности стенок прямоугольного канала.



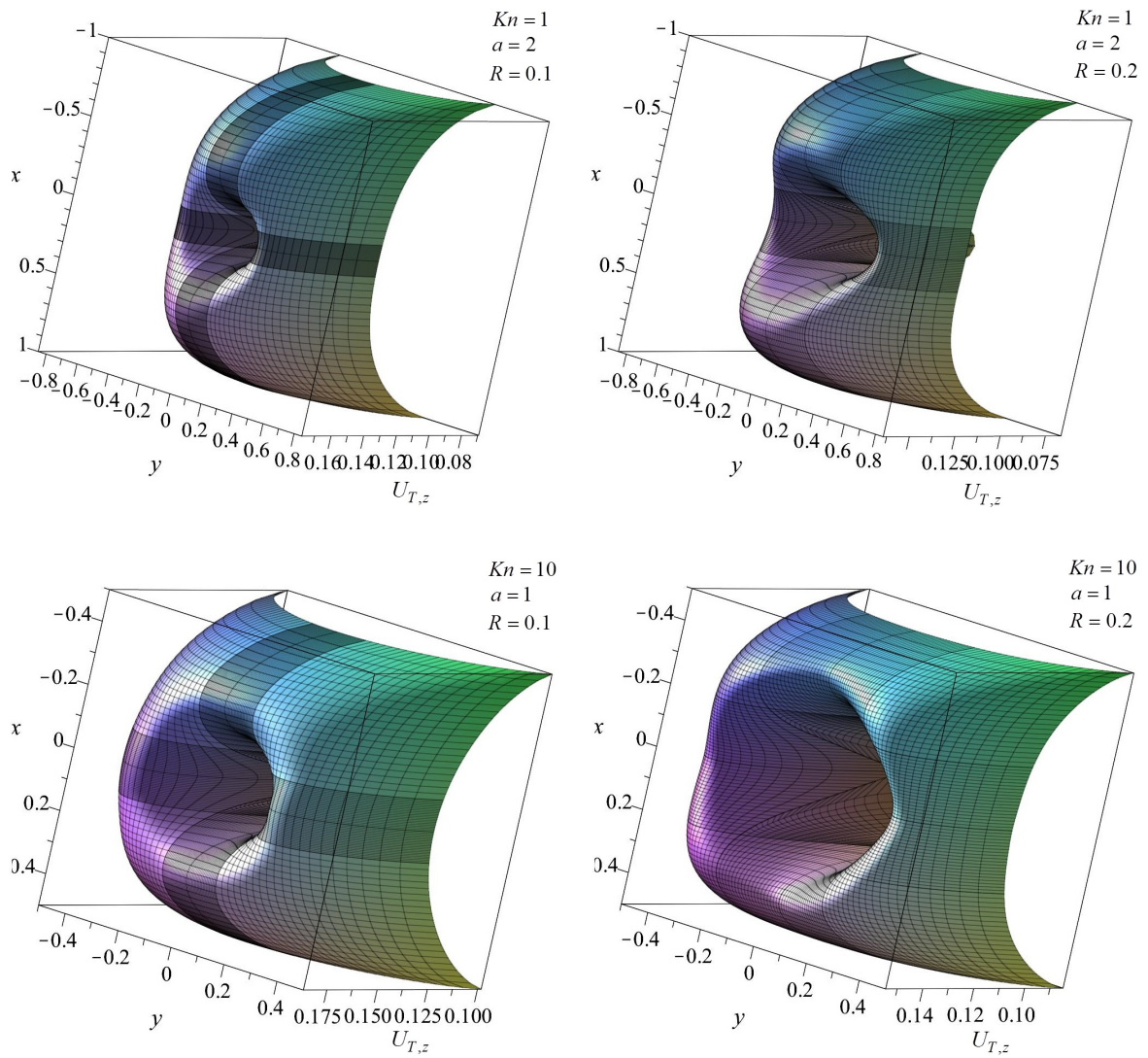


Рисунок 2.7.3 - Профили массовой скорости газа $U_{T,z}$ в прямоугольном канале с внутренним цилиндром с радиусом $R = 0.1, 0.2$ при $Kn = 0.1, 1, 10$ для $a = 1$ и $a = 2$

2.8 Математическое моделирование теплопереноса в задаче о течении Пуазейля в промежуточном режиме

Рассмотрим в рамках диффузной модели отражения медленное стационарное изотермическое течение одноатомного разреженного газа в длинном канале постоянного поперечного сечения, в котором поддерживается продольный постоянный градиент давления G_p , а $G_T = 0$. В качестве размерного масштаба выберем размер сечения, определяемый его конфигурацией. На стенках канала

происходит диффузное отражение молекул. В этом случае компонента вектора потока тепла (1.4.30) определяется функцией $Z_2(x, y, c_x, c_y)$, а значения приведенного потока тепла $J_{p,Q}$ могут быть получены по формуле (1.2.7) при подстановке в нее выражения (1.4.30). В виду того, что структура уравнений (1.4.23) и (1.4.27) совпадает, как и граничное условие (1.1.7), для функций $q_{p,z}(x, y)$ и $U_{T,z}(x, y)$ в рамках задач о течении Пуазейля и тепловом крипе по формулам (1.4.29) и (1.4.30) приходим к следующим соотношениям

$$q_{p,z}(x, y) = U_{T,z}(x, y), \quad J_{p,Q} = J_{T,M}. \quad (2.8.1)$$

Последнее согласуется с соотношением Онзагера [1]. Поскольку выражения приведенных потоков тепла $J_{p,Q}$ и массы газа $J_{T,M}$ получены из двух независимых уравнений (1.4.23) и (1.4.27), то соотношение (2.8.1) может также выступать в качестве дополнительного критерия точности результатов, полученных численными методами.

2.9 Тепловой крип и течение Пуазейля в свободномолекулярном режиме

В рамках задач о тепловом крипе и течении Пуазейля рассмотрим медленное стационарное течение одноатомного разреженного газа в длинном канале постоянного поперечного сечения в свободномолекулярном режиме. Функцию распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ представляем в виде (1.4.5), где возмущение $h(x, y, \mathbf{C})$ определяется выражением (1.4.18). Для нахождения $f(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ будем использовать кинетическое уравнение Больцмана, которое в бесстолкновительном газе имеет вид [51]

$$C_x \frac{\partial f}{\partial x} + C_y \frac{\partial f}{\partial y} + C_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (2.9.1)$$

Подставляя (1.4.5) в (2.9.1), получаем

$$c_x \frac{\partial h}{\partial x} + c_y \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{G_p}{C} + G_T \left(C - \frac{5}{2C} \right) = 0. \quad (2.9.2)$$

Поскольку градиенты температуры и давления малы, решение уравнения (2.9.2) может быть представлено как (1.4.18), где функции $h_T(x, y, \mathbf{C})$ и $h_p(x, y, \mathbf{C})$ в этом случае имеют вид

$$h_T(x, y, \mathbf{C}) = \left(C - \frac{5}{2C} \right) Z(x, y, c_x, c_y), \quad (2.9.3)$$

$$h_p(x, y, \mathbf{C}) = Z_1(x, y, c_x, c_y) + \left(\frac{1}{C} - \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \right) Z_2(x, y, c_x, c_y). \quad (2.9.4)$$

Подставляя (1.4.18) с учетом выражений (2.9.3) и (2.9.3), получаем три независимых уравнения, имеющих одинаковую структуру

$$c_x \frac{\partial Z}{\partial x} + c_y \frac{\partial Z}{\partial y} + 1 = 0, \quad (2.9.5)$$

с граничным условием

$$Z(x_\Gamma, y_\Gamma, c_x, c_y) = 0, \quad \mathbf{Cn} > 0. \quad (2.9.6)$$

Здесь для каждой функции $Z_i(x, y, c_x, c_y)$ для краткости обозначено $Z_i(x, y, c_x, c_y) = Z(x, y, c_x, c_y)$, $i = 1, 2$. Для прямоугольного и эллиптического каналов при нахождении неизвестной функции $Z(x, y, c_x, c_y)$ из уравнения (2.9.5) осуществляем переход в пространстве скоростей к сферическим координатам (раздел 2.2 и 2.4). Новую функцию, полученную в результате этого преобразования, обозначаем как и ранее $Z'(x, y, \varphi, \theta) \equiv Z(x, y, c_x, c_y)$. Штрих для новой введенной функции будем опускать далее. Записываем систему уравнений характеристик для (2.9.5) и ее первые интегралы

$$\frac{dx}{\sin \theta \cos \varphi} = \frac{dy}{\sin \theta \sin \varphi} = -\frac{dZ}{1} = dt, \quad (2.9.7)$$

$$\frac{x}{\cos \varphi} - \frac{y}{\sin \varphi} = C_1, \quad Z(x, y, \varphi, \theta) + \frac{x}{\sin \theta \cos \varphi} = C_2. \quad (2.9.8)$$

Используя граничные условия (2.9.6), исключаем постоянные интегрирования C_1 и C_2 из (2.9.8) аналогично тому, как это было выполнено в разделах 2.2 и 2.4, получаем функцию $Z(x, y, C_\perp, \varphi)$ в виде

$$Z(x, y, \varphi, \theta) = -\frac{w(x, y, \varphi)}{\sin \theta}, \quad (2.9.9)$$

где функция $w(y, x, \varphi)$ для прямоугольного канала в случае отражения молекул газа от его правой стенки $x_{\Omega_r} = a/2$ равна w_1 :

$$w_1(x, \varphi) = \frac{2x - a}{2 \cos \varphi}, \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{2y + 1}{2x - a} + \pi, \\ \varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{2y - 1}{2x - a} + \pi, \quad (2.9.10)$$

при отражении от стенки $y_{\Omega_r} = b/2 - w = w_2$:

$$w_2(y, \varphi) = \frac{2y - 1}{2 \sin \varphi}, \quad \varphi_1 < \varphi \leq \varphi_2, \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{2y - 1}{2x + a} + 2\pi, \quad (2.9.11)$$

при отражении молекул от стенки $x_{\Omega_r} = -a/2 - w = w_3$:

$$w_3(x, \varphi) = \frac{2x + a}{2 \cos \varphi}, \quad \varphi_2 < \varphi \leq \varphi_3, \quad \varphi_3 = \operatorname{arctg} \frac{2y + 1}{2x + a} + 2\pi, \quad (2.9.12)$$

при отражении молекул от стенки $y_{\Omega_r} = b/2 - w = w_4$:

$$w_4(y, \varphi) = \frac{2y + 1}{2 \sin \varphi}, \quad \varphi_3 < \varphi \leq \varphi_4, \quad \varphi_4 = \operatorname{arctg} \frac{2y + 1}{2x - a} + 3\pi. \quad (2.9.13)$$

Выражения для величин $U_{T,z}(x, y)$ и $J_{T,M}$ совпадают по виду с (2.2.20) и (2.2.21), которые были получены ранее в разделе 2.2 на основе уравнения Вильямса в предельном переходе к свободномолекулярному режиму течения.

В случае течения газа через эллиптический канал функция $w(y, x, \varphi)$ имеет вид

$$w(x, y, \varphi) = \frac{b^2 x \cos \varphi + a^2 y \sin \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} + \\ + \frac{ab \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}. \quad (2.9.14)$$

Макроскопическая скорость газа в эллиптическом канале, обусловленная градиентом температуры в задаче о тепловом крипе, определяются функцией $w(x, y, \varphi)$:

$$U_{T,z}(x, y) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} w(x, y, \varphi) d\varphi. \quad (2.9.15)$$

Подставляя (2.9.14) в (2.9.15), получаем выражение для $U_{T,z}(x, y)$, совпадающее с (2.4.11). Определяя величину приведенного потока массы газа в эллиптическом канале по формуле (2.4.10) при подстановке в нее выражения

для компоненты массовой скорости, получаем, что значения $J_{T,M}$ для $a = 1.1$ и 10.0 соответственно равны 0.7885 и 1.7688 . Проводя затем сравнение указанных значений с соответствующими данными из таблицы 2.4.1, приходим к выводу, что при $\text{Kn} = 100$ различие со значениями, найденными по формуле (2.4.10), составляет менее 6% , с результатами [34] — 12% , а при $\text{Kn} = 1000$ для макропараметра $J_{T,M}$, полученного по (2.4.10), оно уменьшается до 0.9% . Указанные различия минимальны для a , близких к единице, и увеличиваются с возрастанием a , причем для $a = 1.1$ при $\text{Kn} = 10$ они соответственно равны 12.2% и 18% с результатами, полученными по (2.4.10) и в рамках S-модели [34].

Для прямого кругового цилиндра и канала, образованного двумя цилиндрическими поверхностями, при нахождении неизвестной функции $Z(x, y, c_x, c_y)$ из уравнения (2.9.5) перейдем в конфигурационном пространстве к цилиндрической системе координат, а в пространстве скоростей к сферической (раздел 2.3, 2.5 и 2.6). В итоге приходим к уравнению

$$\sin \theta \cos \psi \frac{\partial Z}{\partial \rho} + \frac{\sin \theta \sin \psi}{\rho} \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi} - \frac{\partial Z}{\partial \psi} \right) + 1 = 0. \quad (2.9.16)$$

Система уравнений характеристик для (2.9.16) и три ее первых интеграла выглядят следующим образом:

$$\frac{d\rho}{\sin \theta \cos \psi} = \frac{\rho d\psi}{\sin \theta \sin \varphi} = -\frac{\rho d\psi}{\sin \theta \sin \psi} = -\frac{dZ}{1} = dt, \quad (2.9.17)$$

$$\rho |\sin \psi| = C_1, \quad \psi + \varphi = C_2, \quad Z(\rho, \varphi, \psi, \theta) + \frac{\rho \cos \psi}{\sin \theta} = C_3. \quad (2.9.18)$$

Аналогично тому, как это было описано в разделах 2.3, 2.5 и 2.6, исключаем из (2.9.18) с помощью граничного условия (2.9.6) постоянные интегрирования C_i $i = \overline{1, 3}$. В итоге для прямого кругового цилиндра имеем

$$Z(\rho, \psi, \theta) = -\frac{\rho \cos \psi + \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \psi}}{\sin \theta}; \quad (2.9.19)$$

для канала, образованного двумя коаксиальными цилиндрами:

$$Z(\rho, \psi, \theta) = -\frac{\rho \cos \psi + (-1)^i \sqrt{R_i^2 - \rho^2 \sin^2 \psi}}{\sin \theta}, \quad \psi_i \leq \psi \leq \psi_{i+1}; \quad (2.9.20)$$

$$\psi_2 = -\psi_1 = \psi_0, \quad \psi_3 = \psi_0 + 2\pi, \quad \psi_0 = \arcsin \left(\frac{R_1}{\rho} \right), \quad i = 1, 2;$$

для канала, образованного двумя цилиндрами с осями, расположенными на расстоянии a друг относительно друга:

$$Z(\rho, \varphi, \psi, \theta) = -\frac{\rho \cos \psi - \sqrt{R_1^2 - \rho^2 \sin^2 \psi}}{\sin \theta}, \quad \psi_1 \leq \psi \leq \psi_2; \quad (2.9.21)$$

$$Z(\rho, \varphi, \psi, \theta) = \frac{\rho \cos \psi - a \cos(\varphi + \psi) + \sqrt{R_2^2 - (\rho \sin \psi - a \sin(\varphi + \psi))^2}}{\sin \theta};$$

$$\psi_2 < \psi \leq \psi_3. \quad (2.9.22)$$

Выражение для $U_{T,z}$ совпадает с первым слагаемым в сумме (2.4.11) для прямого кругового цилиндра и с выражениями (2.5.11) и (2.6.15) для цилиндрических поверхностей с осями, совпадающими и расположенными на расстоянии a , соответственно. В случае прямого кругового цилиндра при подстановке эллиптического интеграла для $U_{T,z}$ в формулу (2.3.10) приведенный поток массы газа $J_{T,M}$ принимает значение $4/(3\sqrt{\pi})$. В канале, образованном двумя некоаксиальными цилиндрами, макропараметр $J_{T,M}$ вычисляем по формуле (2.6.14).

Для прямоугольного канала с внутренним цилиндром функция $w(x, y, \varphi)$ в (2.9.9) имеет вид (2.9.10)-(2.9.13) при $(\varphi_1 \leq \varphi < \chi_1) \vee (\chi_1 + 2\chi_2 < \varphi \leq \varphi_0 + 2\pi)$ (раздел 2.7), а при $\chi_1 \leq \varphi \leq \chi_1 + 2\chi_2$ выглядит как

$$w(x, y, \varphi) = x \cos \varphi + y \sin \varphi - \sqrt{1 - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}. \quad (2.9.23)$$

Подставляя далее вместо подынтегральных функций в выражениях W_i ($i = \overline{1, 11}$) для функции W из раздела 2.7 новые функции w_l ($l = \overline{1, 4}$), окончательно для прямоугольного канала с внутренним цилиндром имеем $U_{T,z}(x, y) = W(x, y)/(8\sqrt{\pi})$. Приведенный тепловой поток $J_{T,M}$ находим по формуле (2.7.7).

Для остальных компонент $q_{T,z}$, $q_{p,z}$ и приведенных потоков $J_{T,Q}$, $J_{p,Q}$ в рассматриваемых каналах имеем соотношения (2.2.19) и (2.8.1).

2.10 Выводы из главы 2

1. Построены математические модели течения разреженного газа в прямоугольном, цилиндрическом, эллиптическом каналах и каналах, имеющих внут-

ренный цилиндр, в задачах о тепловом крипе и течении Пуазейля при диффузном отражении молекул газа от поверхностей этих каналов.

2. Найдены распределения вектора потока тепла и массовой скорости газа в каналах в зависимости от геометрии поперечного сечения канала при различных значениях числа Кнудсена. Показано, что эти распределения в свободномолекулярном режиме переходят в выражения, основанные на решении кинетического уравнения Больцмана для бесстолкновительного газа.

3. Получены выражения приведенных тепловых и массовых потоков в каналах на основе уравнения Вильямса в промежуточном режиме течения и вычислены значения этих потоков.

4. Проведен сравнительный анализ найденных значений приведенных потоков тепла и массы газа с результатами, полученными в рамках БГК и S-моделей с постоянной частотой столкновения, и с экспериментальными данными для цилиндрического канала.

5. Получены формулы для определения приведенных потоков в прямоугольном и слабodeформированном эллиптическом канале в свободномолекулярном режиме течения, а в цилиндрическом канале — для режимов течения, близких к свободномолекулярному.

6. Показано, что для режимов, близких к гидродинамическому, приведенные потоки тепла и массы не зависят от размеров сечения канала.

Математическое моделирование течений разреженного газа в каналах в рамках зеркально-диффузной модели отражения

3.1 Тепловой крип в круговом цилиндре в промежуточном режиме течения

В рамках зеркально-диффузной модели отражения рассмотрим задачу о тепловом крипе в прямом круговом цилиндре (рисунок 2.3.1). Постановка задачи остается такой же как в разделе 2.1, за исключением граничного условия для функции $Z(\rho, \psi, \theta)$. Коэффициент аккомодации тангенциального импульса молекул газа на внутренней поверхности цилиндра обозначим через α . В качестве размерного масштаба, как и в разделе 2.3, выберем радиус цилиндра R' . При подстановке в (1.1.9) выражения (1.4.5) с учетом (1.4.18) и $G_p = 0$ граничное условие для $Z(\rho, \psi, \theta)$ перестает быть однородным, а имеет вид

$$Z(1, \psi_{\Omega_c}, \theta) = (1 - \alpha)Z(1, \pi - \psi_{\Omega_c}, \theta), \quad \cos \psi_{\Omega_c} < 0. \quad (3.1.1)$$

Система уравнений характеристик для (2.3.2) и два ее первых интеграла имеют вид (2.3.3) и (2.3.4), соответственно. Исключая из (2.3.4) с помощью (3.1.1) постоянные интегрирования C_1 и C_2 , получаем

$$Z(\rho, \psi, \theta) = w(\rho, \psi, \theta) - 1, \quad (3.1.2)$$

$$w(\rho, \psi, \theta) = \frac{\alpha \exp(-\xi_1(\rho, \psi, \theta))}{\exp(\xi_2(\rho, \psi, \theta)) - (1 - \alpha) \exp(-\xi_2(\rho, \psi, \theta))}, \quad (3.1.3)$$

$$\xi_1(\rho, \psi, \theta) = \frac{\rho \cos \psi}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}, \quad \xi_2(\rho, \psi, \theta) = \frac{\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \psi}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}. \quad (3.1.4)$$

Используя выражение (3.1.2), согласно (1.4.18) получаем явный вид функции распределения (1.4.5), описывающей тепловой крип в круговом цилиндре в рамках зеркально-диффузной модели поверхностного отражения молекул газа стенками канала. В этом случае отличные от нуля компоненты безразмерных векторов потока тепла $q_{T,z}(\rho)$ и массовой скорости $U_{T,z}(\rho)$ газа в канале согласно формулам (1.4.28) и (1.4.29) равны

$$U_{T,z}(\rho) = \frac{\gamma \text{Kn}}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{3}{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^\pi w(\rho, \psi, \theta) d\psi \right) = -\frac{2}{9} q_{T,z}(\rho). \quad (3.1.5)$$

Для случая полной аккомодации ($\alpha = 1$) макроскопическая скорость (3.1.5) принимает вид (2.3.9).

При значениях α , отличных от единицы, приведенные потоки тепла и массы газа могут быть определены, как и ранее по формулам (2.3.10) с подстановкой в них выражений (3.1.5) для $U_{T,z}(\rho)$ и $q_{T,z}(\rho)$, соответственно. Результаты вычислений $J_{T,M}$ в этом случае представлены в таблице 3.1.1 в сравнении с экспериментальными данными [79] и [80].

Таблица 3.1.1 - Значения $J_{T,M}$ в сравнении с экспериментальными данными [79], [80]

1 $\overline{\text{Kn}}$	$\alpha = 0.895$ (2.3.10)	<i>He</i>		$\alpha = 0.925$ (2.3.10)	<i>Ne</i>		$\alpha = 0.927$ (2.3.10)	<i>Ar</i> [80]
		[80]	[79]		[80]	[79]		
2	0.2839	0.282	0.2906	0.2801	0.274	0.2859	0.2798	0.283
3	0.2138	0.227	0.2314	0.2118	0.221	0.2304	0.2117	0.225
4	0.1712	0.191	0.1907	0.1700	0.187	0.1899	0.1698	0.188
5	0.1425	0.164	0.1607	0.1417	0.161	0.1605	0.1416	0.162
6	0.1220	0.143	0.1384	0.1214	0.139	0.1382	0.1214	0.142
7	0.1065	0.125	0.1217	0.1061	0.122	0.1210	0.1061	0.120
8	0.0946	0.111	0.1091	0.0942	0.108	0.1076	0.0942	0.113
9	0.0850	0.0995	0.0982	0.0847	0.0972	0.0969	0.0847	0.101
10	0.0772	0.0908	0.0896	0.0770	0.0889	0.0887	0.0769	0.0913
20	0.0401	0.0486	0.0618	0.0401	0.0471	0.0615	0.0400	0.0497
30	0.0271	0.0328	0.0473	0.0270	0.0317	0.0475	0.0270	0.0336

Анализ данных, представленных в таблице 3.1.1, показал, что отличие значений $J_{T,M}$, найденных по формуле (2.3.10) с учетом результатов (3.1.5),

для $\alpha = 0.895, 0.925$ и 0.927 от экспериментальных данных [79] и [80] для He , Ne и Ar уменьшилось по сравнению с аналогичной оценкой в случае полной аккомодации молекул стенками канала. Наибольшее снижение наблюдается при значениях $Kn = 1/2$ и $1/3$. Для He при $Kn = 1/2$ отличие от значения величины $J_{T,M}$ [80] уменьшилась до 0.7% и до 2% от результата [79], для Ar и Ne — до 1% и 2%, соответственно. В таблице 3.1.2 для сравнения приведены результаты работы [40] при $\alpha = 1, 0.8$ и 0.6 , полученные с использованием S-модели методом дискретных ординат.

Таблица 3.1.2 - Значения $J_{T,M}$ в зависимости от α

Kn	α					
	1		0.8		0.6	
	(2.3.10)	[40]	(2.3.10)	[40]	(2.3.10)	[40]
0.0001	0.0001	—	0.0001	—	0.0001	—
0.0010	0.0008	—	0.0008	—	0.0008	—
0.0100	0.0083	—	0.0083	—	0.0083	—
0.1000	0.0765	0.1014	0.0778	0.0962	0.0792	0.0908
0.5000	0.2705	0.3016	0.2965	0.3118	0.3238	0.3230
1.0000	0.3881	0.3959	0.4529	0.4372	0.5264	0.4865
2.0000	0.4977	0.4779	0.6209	0.5648	0.7742	0.6769
5.0000	0.6080	0.5675	0.8165	0.7244	1.1066	0.9435
10.000	0.6632	0.6210	0.9266	0.8297	1.3166	1.1341
100.00	0.7376	0.7243	1.0919	1.0530	1.6687	1.5775
1000.0	0.7502	0.7486	1.1230	1.1166	1.7525	1.7237
10000	0.7520	—	1.1267	—	1.7513	—

Анализ данных, представленных в таблице 3.1.2, показал, что уменьшение α увеличивает величину массового потока в канале. При $Kn < 0.5$ наблюдается также уменьшение различий значений $J_{T,M}$, найденных в рамках S-модели и уравнения Вильямса. В свободномолекулярном режиме происходит в целом увеличение различий, которое не превышает 1% при $Kn = 1000$ и 6% при $Kn = 100$. Отличие полученных в данном исследовании значений потока массы газа от [40] не превосходят 8% при $Kn > 10$.

Для режима, близкого к свободномолекулярному, выражение (2.3.10) может быть записано в виде ряда по малому параметру Kn^{-1} . В этом случае, ограничиваясь линейными относительно Kn^{-1} членами полученного разложения, имеем

$$J_{T,M} = \frac{4 \cdot (2 - \alpha)}{3\alpha\sqrt{\pi}} - \frac{2 \cdot (\alpha^2 - 6\alpha + 6)}{5\alpha^2\pi\text{Kn}} (\ln 2 + 2 \ln \text{Kn} - 2). \quad (3.1.6)$$

Первое слагаемое в (3.1.6) представляет собой приведенный поток массы газа при неполной аккомодации в свободномолекулярном режиме и совпадает с выражением [1]. В случае $\alpha = 1$ выражение (3.1.6) переходит в (2.3.12). При $\text{Kn} \geq 100$ значения, вычисленные с использованием формулы (3.1.6), соответствуют результатам из таблицы 3.1.2 для каждого из приведенных значений α . Так, для $\text{Kn} = 100$ и $\alpha = 0.6, 0.8$ приведенные потоки массы газа согласно (3.1.6) принимают значения $J_{T,M} = 1.6781, 1.0994$, которые превышают аналогичные значения $J_{T,M} = 1.6687, 1.0919$, вычисленные по (2.3.10), не более, чем на 0.7%, как и в случае полной аккомодации.

Для режима течения, близкого к гидродинамическому, выражение (2.3.9) приближается к значению $U_{T,z}(\rho) = \gamma\text{Kn}/(3\sqrt{\pi})$, которое совпадает с аналогичным выражением для $U_{T,z}(\rho)$, полученным ранее в разделе 2.3 при $\alpha = 1$. В этом режиме приведенный поток массы (2.5.12) имеет вид (2.2.24). Таким образом, приведенные потоки тепла и массы в этом случае не зависят от коэффициента аккомодации тангенциального импульса.

Профили распределения массовой скорости (3.1.5) газа в канале при $\alpha = 0.8, 0.9$ для $\text{Kn} = 0.1, 1$ и 10 представлены на рисунке 3.1.1. На рисунке 3.1.2 в верхнем ряду одновременно показаны профили $U_{T,z}^{(1)} = U_{T,z}|_{\alpha=1}$ и $U_{T,z}^{(2)} = U_{T,z}|_{\alpha=0.9}$ из первого квадранта для $\text{Kn} = 1, 10$. В последнем ряду рисунка 3.1.2 приведены профили $U_{T,z}^{(2)}$ и $\kappa U_{T,z}^{(1)}$, где $\kappa = (2 - \alpha)/\alpha$, $\alpha = 0.9$. Из рисунков 3.1.1 и 3.1.2 следует, что уменьшение значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа приводит к увеличению модуля массовой скорости в целом, при этом форма ее профиля практически не меняется. Для значений числа Кнудсена $\text{Kn} \geq 100$ это увеличение значений $U_{T,z}$ соответствует $\kappa U_{T,z}^{(1)}$, что характерно для цилиндрического канала в свободномолекулярном режиме течения.

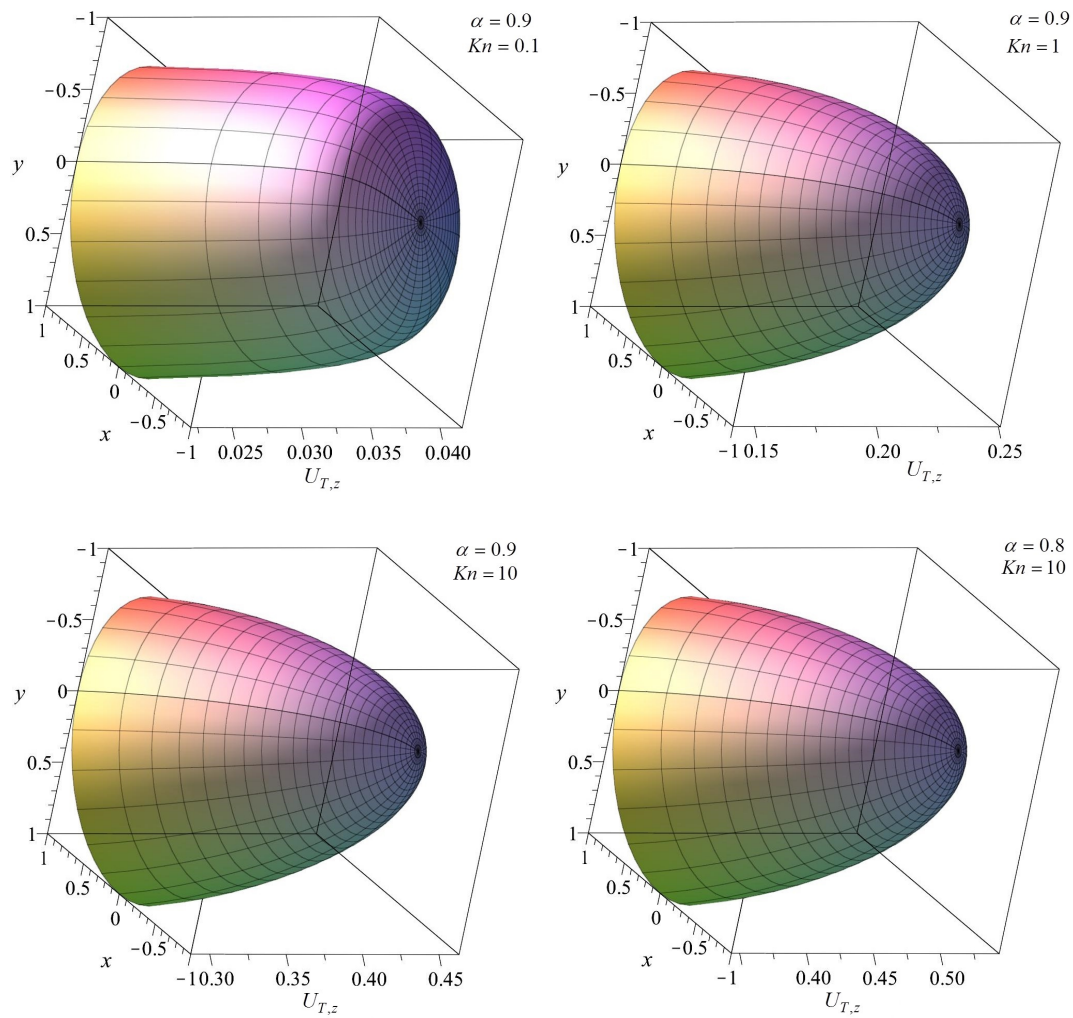
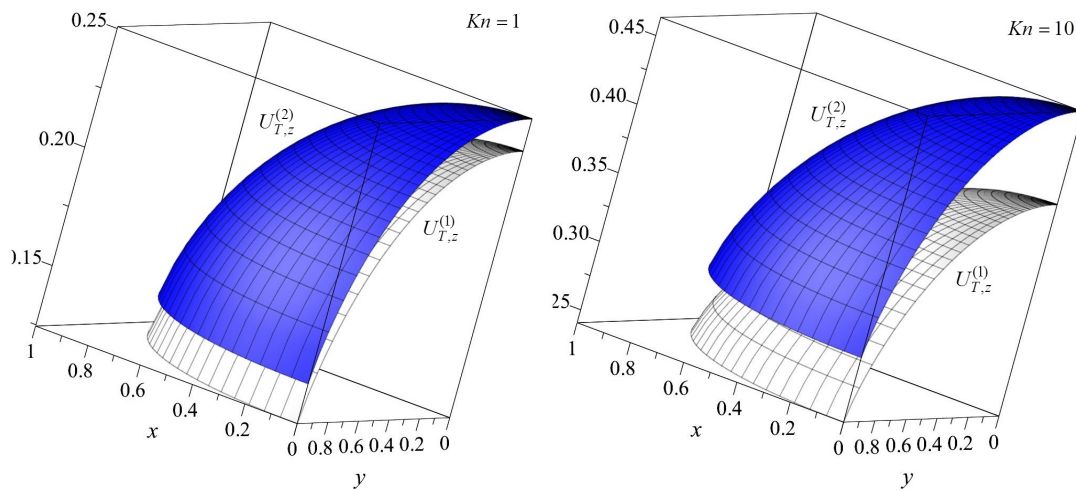


Рисунок 3.1.1 - Профили массовой скорости газа $U_{T,z}$ в цилиндрическом канале при $\alpha = 0.8, 0.9$ для $Kn = 0.1, 1$ и 10



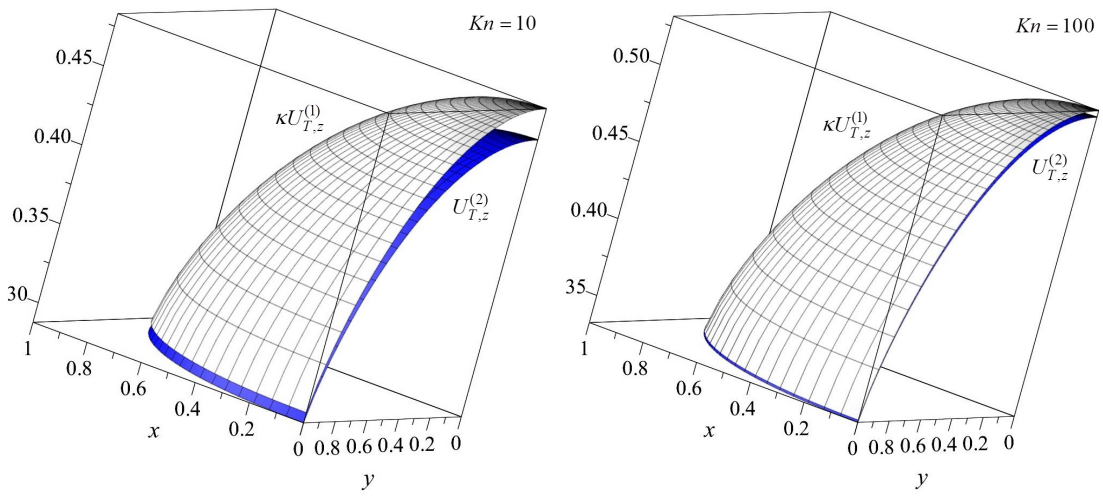


Рисунок 3.1.2 - Профили $U_{T,z}^{(1)}$ и $U_{T,z}^{(2)}$ в цилиндрическом канале для $Kn = 1, 10$ и 100

3.2 Тепловой крип в пространстве между двумя коаксиальными цилиндрами в промежуточном режиме течения

В рамках зеркально-диффузной модели отражения рассмотрим задачу о тепловом крипе в канале, образованном двумя коаксиальными цилиндрами (рисунок 2.4.1). Считаем, что на поверхностях цилиндров коэффициенты аккомодации тангенциального импульса молекул газа совпадают и равны α . В разделах 1.5 и 2.4 данная задача сведена к решению квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных (2.3.2) с граничным условием в форме (1.1.9). При этом в качестве размерного масштаба длины выбран R'_2 . Обозначение R_2 сохраняем для общности результатов моделирования. Преобразуя выражение (1.1.9) при подстановке в него (1.4.5) и (1.4.18), имеем

$$Z(R_i, \psi_{\Omega_i}, \theta) = (1 - \alpha)Z(R_i, \text{sign}(\psi_{\Omega_i})\pi - \psi_{\Omega_i}, \theta),$$

$$(-1)^i \cos \psi_{\Omega_i} < 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.2.1)$$

Система уравнений характеристик для (2.3.2) и два ее первых интеграла имеют вид (2.3.3) и (2.3.4), соответственно. Для определения C_1 и C_2 в (2.3.4) рассмотрим три промежутка изменения угла ψ :

1. $-\psi_0 \leq \psi \leq \psi_0$ для молекул, которые летят к внешней поверхности, отразившись от внутренней, где угол ψ_0 определяется выражением $\psi_0 = \arcsin(R_1/\rho)$;

2. $\pi - \psi_0 \leq \psi \leq \pi$ или $-\pi \leq \psi \leq -\pi + \psi_0$ для молекул, которые отразились от внешней поверхности и летят к внутренней;

3. $\psi_0 < \psi < \pi - \psi_0$ или $-\pi + \psi_0 < \psi < -\psi_0$ для молекул, которые отразились от внешней поверхности и летят к ней.

Выразим функцию $Z(\rho, \psi, \theta)$ из второго интеграла (2.3.4) и подставим ее в граничные условия (3.2.1). В результате для молекул с углом ψ из промежутка i ($i = 1, 2$) получаем

$$C_2^{(i)} \exp\left(-\frac{R_i \cos \psi_{\Omega_i}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}\right) - 1 = (1 - \alpha) \left(C_2^{(k)} \exp\left(\frac{R_i \cos \psi_{\Omega_i}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}\right) - 1\right), \quad (3.2.2)$$

где $k = i + (-1)^{i+1}$. Решая совместно уравнения (3.2.2), находим $C_2^{(i)}$:

$$C_2^{(i)} = \left((\alpha - \alpha^2) \exp\left(\frac{R_i \cos \psi_{\Omega_i}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}\right) + \alpha \exp\left(\frac{-R_k \cos \psi_{\Omega_k}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}\right) \right) \times \\ \times \left(-(1 - \alpha)^2 \exp\left(\frac{R_1 \cos \psi_{\Omega_1} + R_2 \cos \psi_{\Omega_2}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}\right) + \right. \\ \left. + \exp\left(-\frac{R_1 \cos \psi_{\Omega_1} + R_2 \cos \psi_{\Omega_2}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}\right) \right)^{-1}, \quad k = i + (-1)^{i+1}, \quad i = 1, 2. \quad (3.2.3)$$

Для определения $\cos \psi_{\Omega_i}$ в (3.2.3) воспользуемся первым независимым интегралом (2.3.4), учитывая, что из граничных условий (3.2.1) следует $(-1)^i \cos \psi_{\Omega_i} < 0$ ($i = 1, 2$). Подставив полученное таким образом выражение для $\cos \psi_{\Omega_i} = (-1)^{i+1} \sqrt{R_i^2 - \rho^2 \sin^2 \psi} / R_i$ в (3.2.3), для промежутка i ($i = 1, 2$) имеем

$$Z(\rho, \psi, \theta) = w_i(\rho, \psi, \theta) - 1, \quad (3.2.4)$$

$$w_i(\rho, \psi, \theta) = \exp\left(-\frac{\rho \cos \psi}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}\right) \left((\alpha - \alpha^2) g_i(\rho, \psi, \theta) + \frac{\alpha}{g_k(\rho, \psi, \theta)} \right) \times \\ \times \left(-(1 - \alpha)^2 g_1(\rho, \psi, \theta) g_2(\rho, \psi, \theta) + \right. \\ \left. + g_1^{-1}(\rho, \psi, \theta) g_2^{-1}(\rho, \psi, \theta) \right)^{-1}, \quad k = i + (-1)^{i+1}. \quad (3.2.5)$$

$$g_i(\rho, \psi, \theta) = \exp\left(\frac{(-1)^{i+1} \sqrt{R_i^2 - \rho^2 \sin^2 \psi}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}\right), \quad i = 1, 2. \quad (3.2.6)$$

Для молекул с углом ψ из промежутка 3 при подстановке (2.3.4) в граничное условие (3.2.1) при $i = 2$ получаем

$$C_2^{(3)} \exp\left(-\frac{R_2 \cos \psi_{\Omega_2}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}\right) - 1 = (1 - \alpha) \left(C_2^{(3)} \exp\left(\frac{R_2 \cos \psi_{\Omega_2}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}\right) - 1\right), \quad (3.2.7)$$

где $\cos \psi_{\Omega_2} = -\sqrt{R_2^2 - \rho^2 \sin^2 \psi}/R_2$. Откуда следует, что функция $Z(\rho, \psi, \theta)$ определяется выражением (3.2.4), в котором $i = 3$, а $w_3(\rho, \psi, \theta)$ имеет вид

$$w_3(\rho, \psi, \theta) = -\alpha \exp\left(-\frac{\rho \cos \psi}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}\right) \left((1 - \alpha)g_2(\rho, \psi, \theta) - \frac{1}{g_2(\rho, \psi, \theta)}\right)^{-1}. \quad (3.2.8)$$

Используя выражение (3.1.2), согласно (1.4.18) получаем явный вид функции распределения (1.4.5) для промежутка i ($i = \overline{1, 3}$), описывающей тепловой крип в канале, образованном двумя коаксиальными цилиндрами, в рамках зеркально-диффузной модели отражения молекул газа стенками канала. В этом случае отличные от нуля компоненты безразмерных векторов потока тепла $q_{T,z}(\rho)$ и массовой скорости $U_{T,z}(\rho)$ газа в канале согласно формулам (1.4.28) и (1.4.29) принимают вид

$$U_{T,z}(\rho) = \frac{\gamma \text{Kn}}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{3}{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \left(\int_0^{\psi_0} w_1(\rho, \psi, \theta) d\psi + \int_{\pi-\psi_0}^\pi w_2(\rho, \psi, \theta) d\psi + \int_{\psi_0}^{\pi-\psi_0} w_3(\rho, \psi, \theta) d\psi \right)\right) = -\frac{2}{9} q_{T,z}(\rho). \quad (3.2.9)$$

Для свободномолекулярного режима течения подынтегральные функции $w_i = w_i(\rho, \psi, \theta)$ в выражении для массовой скорости газа (3.2.9) представляем в виде ряда по малому параметру $1/\text{Kn}$ и ограничиваемся линейными членами этого ряда. В результате имеем

$$U_{T,z}(\rho) = \frac{1}{4\alpha\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{\psi_0} \left((1 - \alpha) \sqrt{R_2^2 - \rho^2 \sin^2 \psi} - \sqrt{R_1^2 - \rho^2 \sin^2 \psi} \right) d\psi + \int_{\pi-\psi_0}^\pi \left(\sqrt{R_2^2 - \rho^2 \sin^2 \psi} - (1 - \alpha) \sqrt{R_1^2 - \rho^2 \sin^2 \psi} \right) d\psi + \right)$$

$$+ (2 - \alpha) \int_{\psi_0}^{\pi - \psi_0} \sqrt{R_1^2 - \rho^2 \sin^2 \psi} d\psi \Big). \quad (3.2.10)$$

В случае полной аккомодации молекул газа стенками канала ($\alpha = 1$) выражения (3.2.9) принимают вид (2.5.10), а соответствующие значения массового потока в этом случае приведены в таблице 2.5.1. При значениях α , отличных от единицы, приведенные потоки тепла и массы газа могут быть определены, как и ранее в разделе 2.4 по формулам (2.5.12) с подстановкой в них (3.2.9) для $U_{T,z}(\rho)$ и $q_{T,z}(\rho)$, соответственно. Результаты вычислений $J_{T,M}$ представлены в таблице 3.2.1 в зависимости от $R_1 = R'_1/R'_2$. В последней строке этой таблицы значения $J_{T,M}$ получены на основе асимптотической формулы для макроскопической скорости газа (3.2.10) в свободномолекулярном режиме течения. При $\text{Kn} \geq 100$ из таблицы 3.2.1 следует, что величина массового потока не более, чем на 3% меньше своего свободномолекулярного предела. При $R_1 = 0$ выражения (3.2.9) преобразуются к виду (3.1.5).

Таблица 3.2.1 - Значения $J_{T,M}$ при $\alpha = 0.8, 0.9$ в зависимости от R_1 и Kn для канала, образованного двумя коаксиальными цилиндрами

Kn	$\alpha = 0.9, R_1 = R'_1/R'_2$				$\alpha = 0.8, R_1 = R'_1/R'_2$			
	0.01	0.1	0.5	0.9	0.01	0.1	0.5	0.9
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0.0010	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008
0.0100	0.0083	0.0083	0.0082	0.0077	0.0083	0.0083	0.0082	0.0078
0.1000	0.0771	0.0765	0.0712	0.0442	0.0830	0.0800	0.0678	0.0574
0.5000	0.2824	0.2735	0.2163	0.0862	0.2956	0.2872	0.2321	0.0977
1.0000	0.4177	0.3997	0.2946	0.1017	0.4510	0.4332	0.3261	0.1179
2.0000	0.5531	0.5243	0.3658	0.1135	0.6177	0.5873	0.4169	0.1341
5.0000	0.7000	0.6579	0.4371	0.1239	0.8114	0.7642	0.5137	0.1488
10.000	0.7780	0.7284	0.4731	0.1286	0.9204	0.8628	0.5648	0.1558
100.00	0.8892	0.8281	0.5220	0.1344	1.0838	1.0096	0.6374	0.1647
1000.0	0.9091	0.8458	0.5303	0.1353	1.1146	1.0370	0.6503	0.1660
10000	0.9112	0.8476	0.5310	0.1354	1.1181	1.0401	0.6516	0.1661
∞	0.9125	0.8488	0.5317	0.1356	1.1199	1.0417	0.6526	0.1663

Профили распределения массовой скорости (3.2.9) газа в канале при $\alpha = 0.9$ для значений $Kn = 0.1, 1, 10$ и $R_1 = R'_1/R'_2 = 0.1, 0.9$ приведены на рисунке 3.2.1.

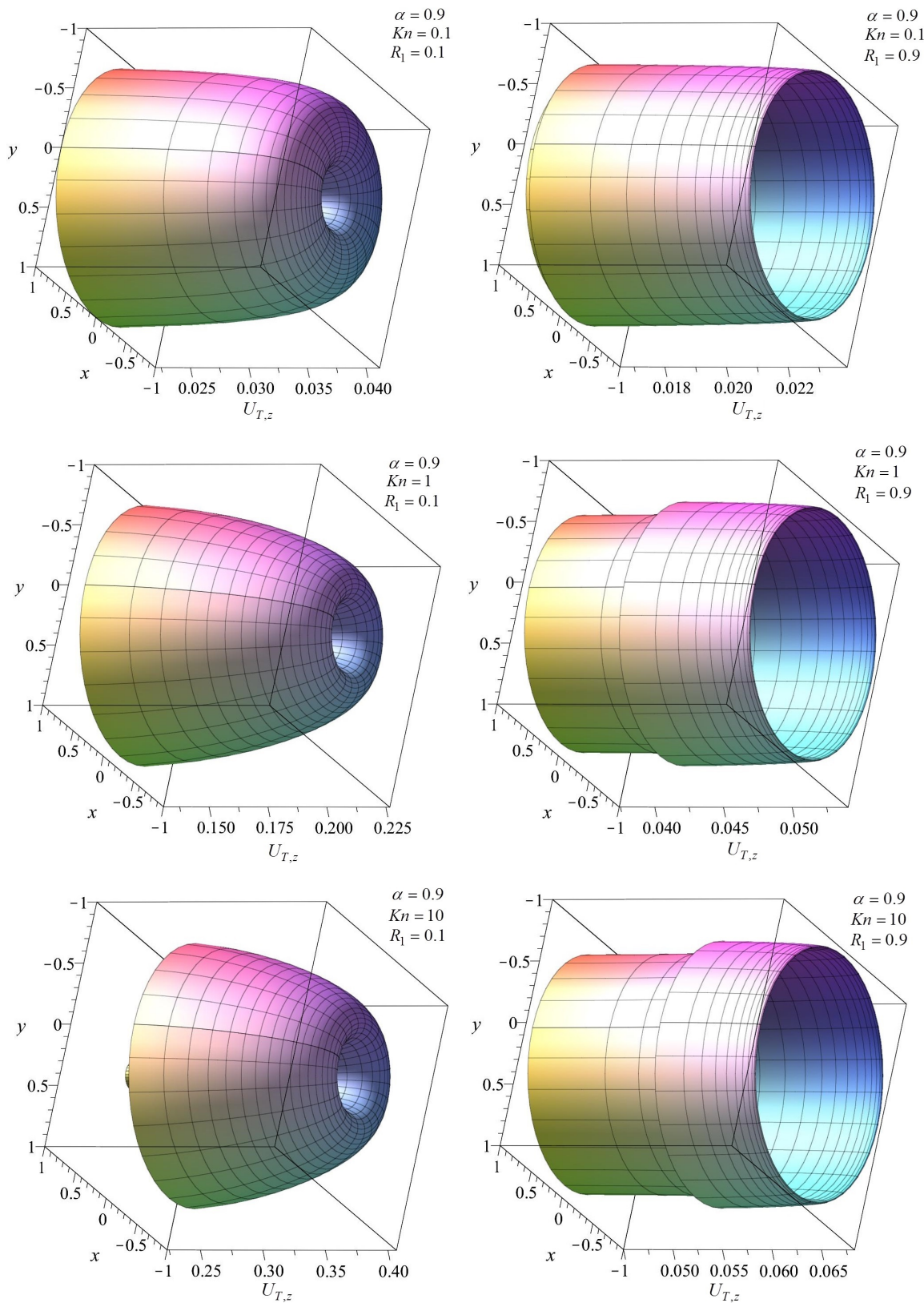


Рисунок 3.2.1 - Профили массовой скорости газа $U_{T,z}$ в канале, образованном двумя коаксиальными цилиндрами при $\alpha = 0.9$ для $Kn = 0.1, 1, 10$ и $R_1 = 0.1, 0.9$

3.3 Тепловой крип в прямоугольном канале в промежуточном режиме течения

В рамках зеркально-диффузной модели отражения рассмотрим задачу о тепловом крипе в прямоугольном канале (рисунок 2.2.1). Считаем, что на всех четырех стенках канала коэффициенты аккомодации тангенциального импульса имеют равные значения α . Данная задача сводится к решению квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных (2.2.1) с граничным условием в форме (1.1.9). При этом в качестве размерного масштаба длины, как и в разделе 2.2, выбрана ширина прямоугольного сечения канала b' . Преобразуя выражение (1.1.9) при подстановке в него (1.4.5) и (1.4.18), имеем

$$Z(\pm a/2, y_{\Omega_r}, \varphi, \theta) = (1 - \alpha)Z(\pm a/2, y_{\Omega_r}, \varphi^*, \theta),$$

$$\cos \varphi^* = -\cos \varphi, \quad \pm \cos \varphi < 0, \quad (3.3.1)$$

$$Z(x_{\Omega_r}, \pm b/2, \varphi, \theta) = (1 - \alpha)Z(x_{\Omega_r}, \pm b/2, \varphi^*, \theta),$$

$$\sin \varphi^* = -\sin \varphi, \quad \pm \sin \varphi < 0. \quad (3.3.2)$$

Для построения решения уравнения (2.2.1), удовлетворяющего граничным условиям (3.3.1)-(3.3.2), применяем подход, использованный в [86]-[88]. Изменение функции $Z(x, y, \varphi, \theta)$ вдоль характеристики [86]

$$d\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{c}_{\perp} dt, \quad (3.3.3)$$

определяем согласно уравнению

$$\frac{\partial Z}{\partial \mathbf{r}_{\perp}} \mathbf{c}_{\perp} \gamma \text{Kn} + Z(x, y, \varphi, \theta) + 1 = 0. \quad (3.3.4)$$

Здесь $\mathbf{r}_{\perp} = (x, y)$, $\mathbf{c}_{\perp} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi)$ – компоненты радиус-вектора \mathbf{r} и вектора скорости молекулы $\mathbf{c} = \mathbf{C}/C$ в плоскости, перпендикулярной оси z . Уравнение (3.3.4) запишем в виде:

$$dZ = -\frac{1}{\gamma \text{Kn}} (Z(x, y, \varphi, \theta) + 1) dt. \quad (3.3.5)$$

Рассмотрим процесс столкновения молекул газа со стенками канала. Будем вести счет этих столкновений в противоположном направлении движения молекулы. При этом полагаем, что t_1 – момент последнего столкновения с поверхностью, t_2 – момент предыдущего столкновения и т.д., а t_0 – время предстоящего столкновения, $T_n = t_n - t_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$). На рисунок 3.3.1 показаны траектории для интервалов $[t_1, t_2], \dots, [t_6, t_7]$.

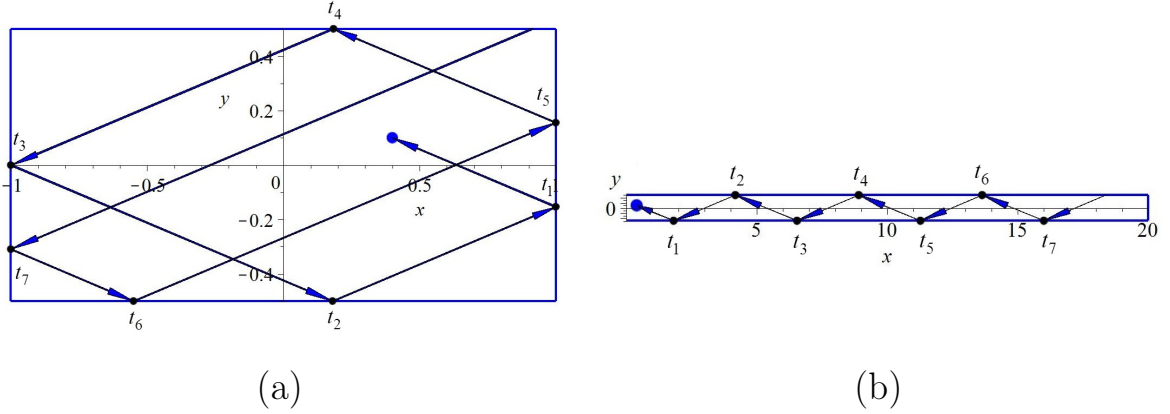


Рисунок 3.3.1 - Траектории на промежутках $[t_1, t_2], \dots, [t_6, t_7]$ для $a = 1$ и $a = 40$

Решением уравнения (3.3.5) является функция

$$Z_n(t) = A_n \exp\left(-\frac{t - t_n}{\gamma K n}\right) - 1, \quad t_n \leq t \leq t_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.3.6)$$

В точке отражения $t = t_n$ функция (3.3.6) испытывает скачок

$$Z_n(t_n + 0) = (1 - \alpha)Z_{n+1}(t_n - 0). \quad (3.3.7)$$

Здесь под обозначением $+/-$ понимаем предел функции $Z_n(t)$ в точке отражения t_n справа или слева. Получим явный вид функции (3.3.6) на интервале $[t_1, t_0]$. В этом случае при $t = t_1 + 0$ имеем

$$Z_1(t_1 + 0) = A_1 - 1.$$

С другой стороны, замечая, что $t_1 - 0 = t_2 + T_1$, получаем

$$Z_2(t_1 - 0) = A_2 \exp\left(-\frac{T_1}{\gamma K n}\right) - 1.$$

Из (3.3.7) следует, что $Z_1(t_1 + 0) = (1 - \alpha)Z_2(t_1 - 0)$. Тогда,

$$A_1 = (1 - \alpha) \left(A_2 \exp\left(-\frac{T_1}{\gamma K n}\right) - 1 \right) + 1. \quad (3.3.8)$$

Действуя аналогично, получаем рекуррентное соотношение для A_n :

$$A_n = (1 - \alpha) \left(A_{n+1} \exp \left(-\frac{T_n}{\gamma \text{Kn}} \right) - 1 \right) + 1, \quad n = 2, 3, \dots \quad (3.3.9)$$

Подставляя (3.3.9) в (3.3.8) при $n = 2, 3, \dots$, находим

$$\begin{aligned} A_1 = & 1 + (1 - \alpha) \left(\exp \left(-\frac{T_1}{\gamma \text{Kn}} \right) - 1 \right) + (1 - \alpha)^2 \left(\exp \left(-\frac{T_2}{\gamma \text{Kn}} \right) - 1 \right) \times \\ & \times \exp \left(-\frac{T_1}{\gamma \text{Kn}} \right) + (1 - \alpha)^3 \left(\exp \left(-\frac{T_3}{\gamma \text{Kn}} \right) - 1 \right) \exp \left(-\frac{T_1 + T_2}{\gamma \text{Kn}} \right) + \\ & + (1 - \alpha)^4 \left(\exp \left(-\frac{T_4}{\gamma \text{Kn}} \right) - 1 \right) \exp \left(-\frac{T_1 + T_2 + T_3}{\gamma \text{Kn}} \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

В частном случае течения разреженного газа в канале, образованном двумя бесконечными параллельными плоскостями ($a^{-1} \ll 1$), все T_n совпадают ввиду симметрии (рисунок 3.3.1 (b)), получаем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (3.3.10):

$$A_1 = 1 + \frac{(1 - \alpha) \left(\exp \left(-\frac{T}{\gamma \text{Kn}} \right) - 1 \right)}{1 - (1 - \alpha) \exp \left(-\frac{T}{\gamma \text{Kn}} \right)}. \quad (3.3.11)$$

Соотношения (3.3.6) и (3.3.10) полностью будут определять функцию $Z(x, y, \varphi, \theta)$ на интервале $[t_1, t_0]$, если параметры $t - t_1, T_1, T_2, T_3$, и т.д. записать через x, y, φ . Получим выражение для $t - t_1$, интегрируя левую и правую части уравнения (3.3.3). Учитывая при этом (3.3.1) и (3.3.2), имеем

$$t - t_1 = \frac{2y - b}{2 \sin \theta \sin \varphi}, \quad \varphi_1 \leq \varphi < \varphi_2; \quad (3.3.12)$$

$$t - t_1 = \frac{2x - a}{2 \sin \theta \cos \varphi}, \quad \varphi_2 \leq \varphi < \varphi_3; \quad (3.3.13)$$

$$t - t_1 = \frac{2y + b}{2 \sin \theta \sin \varphi}, \quad \varphi_3 \leq \varphi < \varphi_4; \quad (3.3.14)$$

$$t - t_1 = \frac{2x + a}{2 \sin \theta \cos \varphi}, \quad \varphi_4 \leq \varphi < \varphi_0 + 2\pi. \quad (3.3.15)$$

Здесь значения углов φ_k определяются выражениями (2.2.13) и (2.2.14). Найдем параметр T_n , рассматривая точку на интервале $[t_{n+1}, t_n]$. Учитывая, что $T_n = t_n - t_{n+1}$, из уравнения (3.3.3) получим

$$T_n = \frac{x_{\Omega_r, n} - x_{\Omega_r, n+1}}{\sin \theta \cos \varphi^{(n)}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.3.16)$$

В момент последнего столкновения с поверхностью ($n = 1$) находим координаты $\mathbf{r}_{\perp, \Omega_r, 1}$ из уравнения (3.3.3) и угол $\varphi^{(1)}$ — из граничных условий (3.3.1) и (3.3.2). В этом случае, если $\varphi_1 \leq \varphi < \varphi_2$ (рисунок 3.3.2 (а)-(с)), то

$$\begin{aligned} y_{\Omega_r, 1} &= b/2, & x_{\Omega_r, 1} &= x - \frac{y - y_{\Omega_r, 1}}{\operatorname{tg} \varphi}, \\ \varphi^{(1)} &= -\varphi + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & 2\pi < \varphi^{(1)} < 3\pi, \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

иначе, если $\varphi_2 \leq \varphi < \varphi_3$ (рисунок 3.3.2 (d)-(f)), то

$$\begin{aligned} x_{\Omega_r, 1} &= -a/2, & y_{\Omega_r, 1} &= y - (x - x_{\Omega_r, 1}) \operatorname{tg} \varphi, \\ \varphi^{(1)} &= \pi - \varphi + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & \varphi_1(x_{\Omega_r, 1}, y_{\Omega_r, 1}) < \varphi^{(1)} < 3\pi/2 \\ & & & \text{или } 5\pi/2 < \varphi^{(1)} < \varphi_0(x_{\Omega_r, 1}, y_{\Omega_r, 1}) + 2\pi, \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

иначе, если $\varphi_3 \leq \varphi < \varphi_4$ (рисунок 3.3.2 (g)-(j)), то

$$\begin{aligned} y_{\Omega_r, 1} &= -b/2, & x_{\Omega_r, 1} &= x - \frac{y - y_{\Omega_r, 1}}{\operatorname{tg} \varphi}, \\ \varphi^{(1)} &= -\varphi + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & \varphi_1(x_{\Omega_r, 1}, y_{\Omega_r, 1}) < \varphi^{(1)} < 2\pi \\ & & & \text{или } 3\pi < \varphi^{(1)} < \varphi_0(x_{\Omega_r, 1}, y_{\Omega_r, 1}) + 2\pi, \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

иначе (рисунок 3.3.2 (k)-(m)):

$$\begin{aligned} x_{\Omega_r, 1} &= a/2, & y_{\Omega_r, 1} &= y - (x - x_{\Omega_r, 1}) \operatorname{tg} \varphi, \\ \varphi^{(1)} &= \pi - \varphi + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & 3\pi/2 < \varphi^{(1)} < 5\pi/2. \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Для $n = 2, 3, \dots$ координаты $x_{\Omega_r, n}$, $y_{\Omega_r, n}$ определяются $x_{\Omega_r, n-1}$, $y_{\Omega_r, n-1}$ и $\varphi_{\Omega_r, n-1}$, а угол $\varphi^{(n)}$ — $x_{\Omega_r, n}$, $y_{\Omega_r, n}$. В этом случае, если $y_{\Omega_r, 1} = b/2$, то если $\varphi_3 \leq \varphi^{(n-1)} < \varphi_4$ (рисунок 3.3.2 (а)), то

$$\begin{aligned} y_{\Omega_r, n} &= -b/2, & x_{\Omega_r, n} &= x_{\Omega_r, n-1} - \frac{y_{\Omega_r, n-1} - y_{\Omega_r, n}}{\operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}}, \\ \varphi^{(n)} &= -\varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & \varphi_1(x_{\Omega_r, n}, y_{\Omega_r, n}) < \varphi^{(n)} < 2\pi \\ & & & \text{или } 3\pi < \varphi^{(n)} < \varphi_0(x_{\Omega_r, n}, y_{\Omega_r, n}) + 2\pi, \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

иначе, если $5\pi/2 \leq \varphi^{(n-1)}$ (рисунок 3.3.2 (b)), то

$$\begin{aligned} x_{\Omega_r, n} &= a/2, & y_{\Omega_r, n} &= y_{\Omega_r, n-1} - (x_{\Omega_r, n-1} - x_{\Omega_r, n}) \operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}, \\ \varphi^{(n)} &= \pi - \varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & 3\pi/2 < \varphi^{(n)} < 5\pi/2, \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

иначе (рисунок 3.3.2 (с))

$$\begin{aligned} x_{\Omega_r, n} &= -a/2, & y_{\Omega_r, n} &= y_{\Omega_r, n-1} - (x_{\Omega_r, n-1} - x_{\Omega_r, n}) \operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}, & (3.3.23) \\ \varphi^{(n)} &= \pi - \varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & \varphi_1(x_{\Omega_r, n}, y_{\Omega_r, n}) < \varphi^{(n)} < 3\pi/2 \\ & & & \text{или } 5\pi/2 < \varphi^{(n)} < \varphi_0(x_{\Omega_r, n}, y_{\Omega_r, n}) + 2\pi; \end{aligned}$$

иначе, если $x_{\Omega_r, n-1} = -a/2$, то если $\varphi_3 \leq \varphi^{(n-1)} < \varphi_4$ (рисунок 3.3.2 (d)), то

$$\begin{aligned} x_{\Omega_r, n} &= a/2, & y_{\Omega_r, n} &= y_{\Omega_r, n-1} - (x_{\Omega_r, n-1} - x_{\Omega_r, n}) \operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}, & (3.3.24) \\ \varphi^{(n)} &= \pi - \varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & 3\pi/2 < \varphi^{(n)} < 5\pi/2, \end{aligned}$$

иначе, если $2\pi \leq \varphi^{(n-1)}$ (рисунок 3.3.2 (e)), то

$$\begin{aligned} y_{\Omega_r, n} &= -b/2, & x_{\Omega_r, n} &= x_{\Omega_r, n-1} - \frac{y_{\Omega_r, n-1} - y_{\Omega_r, n}}{\operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}}, & (3.3.25) \\ \varphi^{(n)} &= -\varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & \varphi_1(x_{\Omega_r, n}, y_{\Omega_r, n}) < \varphi^{(n)} < 2\pi \\ & & & \text{или } 3\pi < \varphi^{(n)} < \varphi_0(x_{\Omega_r, n}, y_{\Omega_r, n}) + 2\pi, \end{aligned}$$

иначе (рисунок 3.3.2 (f))

$$\begin{aligned} y_{\Omega_r, n} &= b/2, & x_{\Omega_r, n} &= x_{\Omega_r, n-1} - \frac{y_{\Omega_r, n-1} - y_{\Omega_r, n}}{\operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}}, & (3.3.26) \\ \varphi^{(n)} &= -\varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & 2\pi < \varphi^{(n)} < 3\pi; \end{aligned}$$

иначе, если $y_{\Omega_r, n-1} = -b/2$, то если $\varphi_1 \leq \varphi^{(n-1)} < \varphi_2$ (рисунок 3.3.2 (g)), то

$$\begin{aligned} y_{\Omega_r, n} &= b/2, & x_{\Omega_r, n} &= x_{\Omega_r, n-1} - \frac{y_{\Omega_r, n-1} - y_{\Omega_r, n}}{\operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}}, & (3.3.27) \\ \varphi^{(n)} &= -\varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & 2\pi < \varphi^{(n)} < 3\pi, \end{aligned}$$

иначе, если $3\pi \leq \varphi^{(n-1)}$ (рисунок 3.3.2 (i)), то

$$\begin{aligned} x_{\Omega_r, n} &= a/2, & y_{\Omega_r, n} &= y_{\Omega_r, n-1} - (x_{\Omega_r, n-1} - x_{\Omega_r, n}) \operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}, & (3.3.28) \\ \varphi^{(n)} &= \pi - \varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & 3\pi/2 < \varphi^{(n)} < 5\pi/2, \end{aligned}$$

иначе (рисунок 3.3.2 (j))

$$\begin{aligned} x_{\Omega_r, n} &= -a/2, & y_{\Omega_r, n} &= y_{\Omega_r, n-1} - (x_{\Omega_r, n-1} - x_{\Omega_r, n}) \operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}, & (3.3.29) \\ \varphi^{(n)} &= \pi - \varphi^{(n-1)} + 2\pi k, & k \in \mathbb{N} : & \varphi_1(x_{\Omega_r, n}, y_{\Omega_r, n}) < \varphi^{(n)} < 3\pi/2 \\ & & & \text{или } 5\pi/2 < \varphi^{(n)} < \varphi_0(x_{\Omega_r, n}, y_{\Omega_r, n}) + 2\pi; \end{aligned}$$

иначе, если $x_{\Omega_r, n-1} = a/2$, то если $\varphi_2 \leq \varphi^{(n-1)} < \varphi_3$ (рисунок 3.3.2 (k)), то

$$x_{\Omega_r, n} = -a/2, \quad y_{\Omega_r, n} = y_{\Omega_r, n-1} - (x_{\Omega_r, n-1} - x_{\Omega_r, n}) \operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}, \quad (3.3.30)$$

$$\varphi^{(n)} = \pi - \varphi^{(n-1)} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{N}: \varphi_1(x_{\Omega_r, n}, y_{\Omega_r, n}) < \varphi^{(n)} < 3\pi/2$$

$$\text{или } 5\pi/2 < \varphi^{(n)} < \varphi_0(x_{\Omega_r, n}, y_{\Omega_r, n}) + 2\pi,$$

иначе, если $\varphi^{(n-1)} < 2\pi$ (рисунок 3.3.2 (l)), то

$$y_{\Omega_r, n} = b/2, \quad x_{\Omega_r, n} = x_{\Omega_r, n-1} - \frac{y_{\Omega_r, n-1} - y_{\Omega_r, n}}{\operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}}, \quad (3.3.31)$$

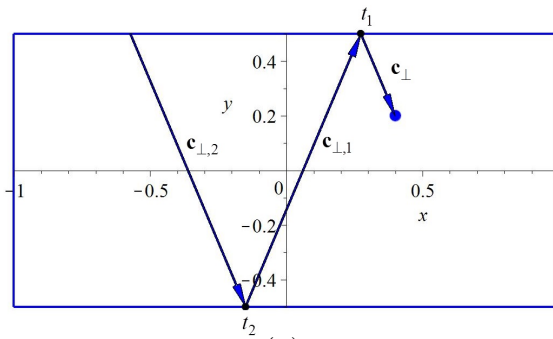
$$\varphi^{(n)} = -\varphi^{(n-1)} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{N}: 2\pi < \varphi^{(n)} < 3\pi,$$

иначе (рисунок 3.3.2 (m))

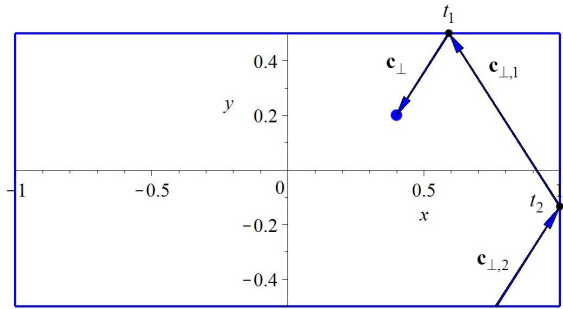
$$y_{\Omega_r, n} = -b/2, \quad x_{\Omega_r, n} = x_{\Omega_r, n-1} - \frac{y_{\Omega_r, n-1} - y_{\Omega_r, n}}{\operatorname{tg} \varphi^{(n-1)}}, \quad (3.3.32)$$

$$\varphi^{(n)} = k \in \mathbb{N}: \varphi_1(x_{\Omega_r, n}, y_{\Omega_r, n}) < \varphi^{(n)} < 2\pi$$

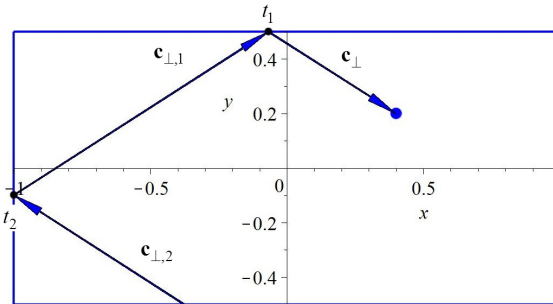
$$\text{или } 3\pi < \varphi^{(n)} < \varphi_0(x_{\Omega_r, n}, y_{\Omega_r, n}) + 2\pi.$$



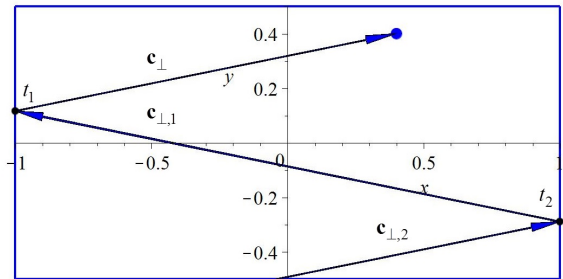
(a)



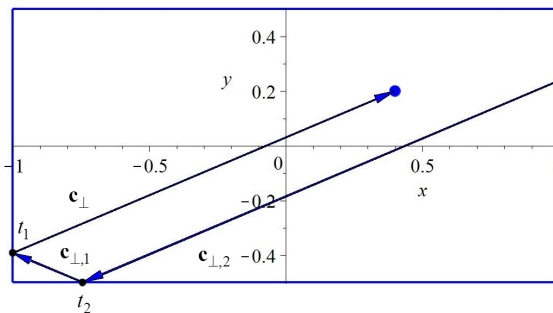
(b)



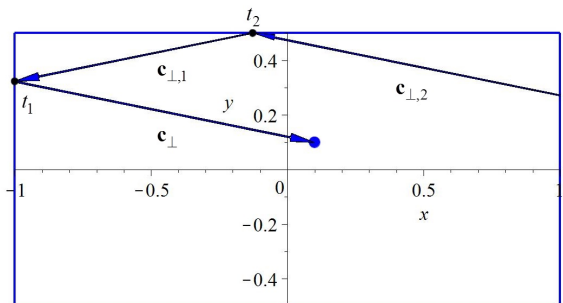
(c)



(d)



(e)



(f)

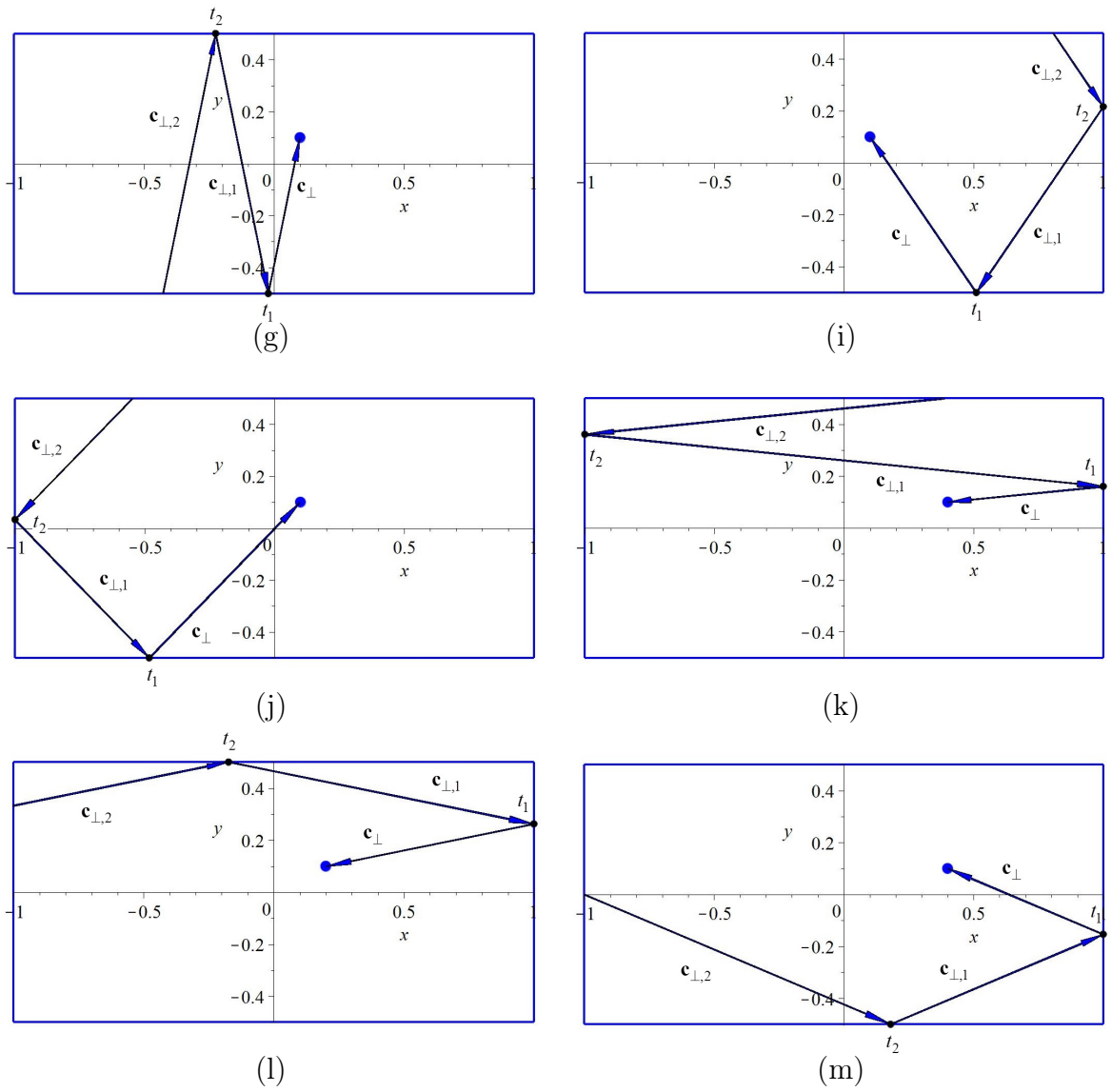


Рисунок 3.3.2 - Траектории на промежутке $[t_2, t_1]$

Таким образом, функция $Z(x, y, \varphi, \theta)$ на рассматриваемом интервале построена. Подставляя при $n = 1$ выражение (3.3.6) в (1.4.28) и (1.4.29), получаем

$$\begin{aligned}
 U_{T,z}(x, y) &= \frac{\gamma \text{Kn}}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} A_1 \exp\left(-\frac{t-t_1}{\gamma \text{Kn}}\right) d\varphi \right) = \\
 &= -\frac{2}{9} q_{T,z}(x, y), \quad (3.3.33)
 \end{aligned}$$

где A_1 определяется выражением (3.3.10), $(t - t_1)$ — выражениями (3.3.12)-(3.3.15), а T_n — (3.3.16)-(3.3.32). Приведенные потоки тепла $J_{T,Q}$ и массы газа $J_{T,M}$ в канале находим по формулам (2.2.17) и (2.2.18). В случае полной accommodation молекул газа стенками канала ($\alpha = 1$) получаем согласно (3.3.10) $A_1 = 1$, а выражение (3.3.33) принимает вид (2.2.16).

В свободномолекулярном пределе выражение (3.3.33) для массовой скорости $U_{T,z}(x, y)$ газа в канале с учетом формул (3.3.10), (3.3.12)-(3.3.15) принимает вид

$$U_{T,z}(x, y) = U_{T,z}(x, y)|_{\alpha=1} + \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left((1 - \alpha) \int_0^{2\pi} T'_1 d\varphi + (1 - \alpha)^2 \int_0^{2\pi} T'_2 d\varphi + \dots \right), \quad T'_n = T_n \sin \theta, \quad (3.3.34)$$

где T_n ($n = 1, 2, \dots$) определяется (3.3.16)-(3.3.32), $U_{T,z}(x, y)|_{\alpha=1}$ — выражением (2.2.20) и представляет собой массовую скорость газа при полной аккомодации молекул газа стенками прямоугольного канала.

В случае свободномолекулярного течения газа в канале, образованном двумя бесконечными параллельными плоскостями ($a^{-1} \ll 1$), выражения (3.3.33) и (2.5.15) можно записать как

$$U_{T,z}(x, y) = -\frac{2 - \alpha}{4\alpha\sqrt{\pi}} \ln \text{Kn}^{-1}, \quad J_{T,M} = -\frac{2 - \alpha}{2\alpha\sqrt{\pi}} \ln \text{Kn}^{-1}. \quad (3.3.35)$$

Полученное выражение для $J_{T,M}$ в формуле (2.5.15) отличается от аналогичного значения этого потока (2.2.23) при полной аккомодации молекул газа стенками канала на множитель $(2 - \alpha)/\alpha$ и согласуется с аналогичным результатом [1].

Для режима течения, близкого к гидродинамическому, выражение (3.3.33) приближается к значению $U_{T,z} = \gamma \text{Kn} / (3\sqrt{\pi})$, и следовательно выводы, сделанные в разделе 3.1, остаются справедливыми и в этом случае. Результаты вычислений $J_{T,M}$ по формуле (2.2.18) при подстановке в нее выражения (3.3.33) с учетом пяти членов ряда (3.3.10) представлены в таблице 3.3.1 для $\alpha = 0.95$ и 0.9 . В случае $a \gg 1$ значения $J_{T,M}$ найдены с использованием формул (2.5.15) и (3.3.11). В последней строке таблицы 3.3.1 значения $J_{T,M}$ получены для свободномолекулярного режима течения газа при подстановке асимптотической формулы (3.3.34) в (2.2.18), при чем для $a \gg 1$ в этом случае полагаем, что $\text{Kn} = 10000$ в (3.3.35).

Таблица 3.3.1 - Значения $J_{T,M}$ в прямоугольном канале для $\alpha = 0.9, 0.95$

Kn	a						
	1	1.1	2	5	10	50	∞
$\alpha = 0.9$							
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0.010	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083
0.100	0.0717	0.0722	0.0744	0.0760	0.0765	0.0771	0.0771
0.500	0.2177	0.2228	0.2490	0.2716	0.2795	0.2858	0.2873
1.000	0.2915	0.3005	0.3510	0.4028	0.4225	0.4391	0.4429
2.000	0.3550	0.3681	0.4465	0.5406	0.5846	0.6215	0.6303
5.000	0.4160	0.4334	0.5443	0.6996	0.7868	0.8865	0.9102
10.00	0.4450	0.4647	0.5933	0.7882	0.9129	1.0862	1.1360
100.0	0.4842	0.5073	0.6632	0.9247	1.1212	1.5371	1.9172
1000	0.4889	0.5124	0.6724	0.9489	1.1617	1.6264	2.7094
∞	0.4900	0.5136	0.6744	0.9521	1.1772	1.7206	3.1756
$\alpha = 0.95$							
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0.010	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083
0.100	0.0711	0.0716	0.0739	0.0756	0.0761	0.0766	0.0768
0.500	0.2110	0.2158	0.2425	0.2654	.2733	0.2797	0.2813
1.000	0.2788	0.2877	0.3375	0.3887	0.4085	0.4247	0.4286
2.000	0.3359	0.3485	0.4241	0.5151	0.5571	0.5940	0.6032
5.000	0.3889	0.4054	0.5102	0.6576	0.7418	0.8350	0.8605
10.00	0.4148	0.4331	0.5534	0.7361	0.8539	1.0145	1.0663
100.0	0.4477	0.4691	0.6129	0.8525	1.0341	1.4144	1.7745
1000	0.4515	0.4733	0.6205	0.8721	1.0666	1.4774	2.4911
∞	0.4526	0.4744	0.6225	0.8765	1.0813	1.5737	2.8717

Профили распределения массовой скорости (3.3.33) газа в канале при $\alpha = 0.9$ для значений $a = 1, 10$ и $Kn = 0.1, 1, 10$ представлены на рисунке 3.3.3.

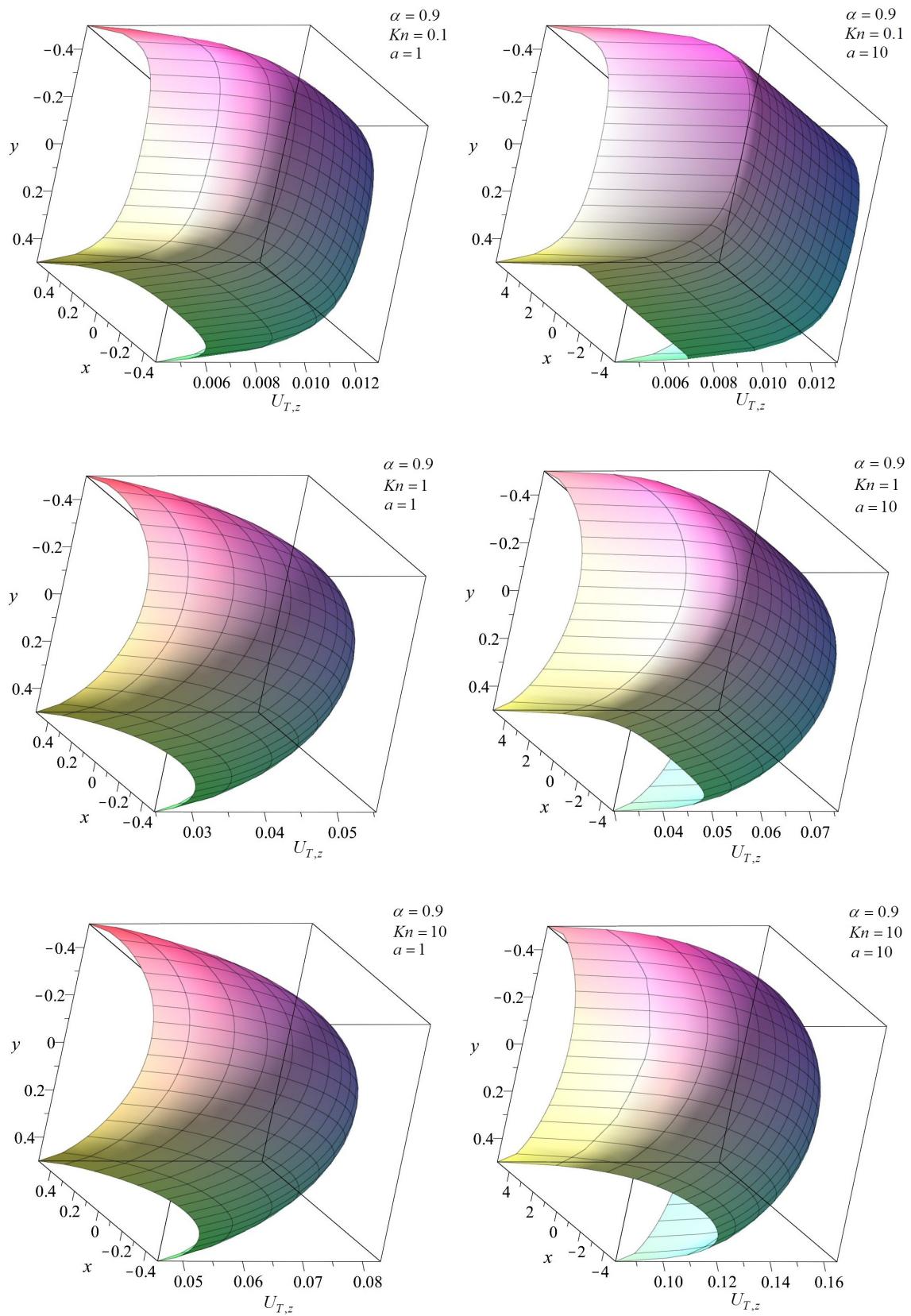


Рисунок 3.3.3 - Профили массовой скорости газа $U_{T,z}$ в прямоугольном канале при $\alpha = 0.9$ для $a = 1, 10$ и $Kn = 0.1, 1, 10$

3.4 Тепловой крип в эллиптическом цилиндре в промежуточном режиме течения

В рамках зеркально-диффузной модели отражения рассмотрим задачу о тепловом крипе в прямом эллиптическом цилиндре (рисунок 2.5.1), которая приводит к решению квазилинейного дифференциального уравнения в частных производных (2.2.1) с неоднородным граничным условием

$$Z(x_{\Omega_{el}}, y_{\Omega_{el}}, \varphi, \theta) = (1 - \alpha)Z(x_{\Omega_{el}}, y_{\Omega_{el}}, \varphi^*, \theta), \quad b^2 x_{\Omega_{el}} \cos \varphi + y_{\Omega_{el}} a^2 \sin \varphi < 0, \quad (3.4.1)$$

$$\cos \varphi^* = \frac{\cos \varphi (a^4 y_{\Omega_{el}}^2 - b^4 x_{\Omega_{el}}^2) - 2a^2 b^2 x_{\Omega_{el}} y_{\Omega_{el}} \sin \varphi}{a^4 y_{\Omega_{el}}^2 + b^4 x_{\Omega_{el}}^2}, \quad (3.4.2)$$

$$\sin \varphi^* = -\frac{\sin \varphi (a^4 y_{\Omega_{el}}^2 - b^4 x_{\Omega_{el}}^2) - 2a^2 b^2 x_{\Omega_{el}} y_{\Omega_{el}} \cos \varphi}{a^4 y_{\Omega_{el}}^2 + b^4 x_{\Omega_{el}}^2}. \quad (3.4.3)$$

В разделе 3.3 показано, что решение уравнения (2.2.1) на интервале $[t_1, t_0]$ определяется выражениями (3.3.6) и (3.3.10). С использованием граничного условия (3.4.1) восстановим параметры $t - t_1$, T_1 , T_2 , T_3 , и т.д. в (3.3.6) и (3.3.10). Интегрируя левую и правую части уравнения (3.3.3) и учитывая при этом (3.4.1), получаем

$$t - t_1 = \frac{x - x_{\Omega_{el},1}}{\sin \theta \cos \varphi}, \quad (3.4.4)$$

где $x_{\Omega_{el},1} = x_{\Omega_{el}}(x, y, \varphi)$ определяется выражением (2.4.5).

Найдем параметр T_n ($n = 1, 2, \dots$), рассматривая точку на интервале $[t_{n+1}, t_n]$. Учитывая, что $T_n = t_n - t_{n+1}$, получаем

$$T_n = \frac{x_{\Omega_{el},n} - x_{\Omega_{el},n+1}}{\sin \theta \cos \varphi_n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.4.5)$$

При $n = 1$ в выражении (3.4.5) по формулам (2.4.5), (3.4.1)-(3.4.3) имеем

$$\begin{aligned} x_{\Omega_{el},1} &= x_{\Omega_{el}}(x, y, \varphi), & y_{\Omega_{el},1} &= y_{\Omega_{el}}(x, y, \varphi), \\ \cos \varphi_1 &= \cos \varphi^*(x_{\Omega_{el},1}, y_{\Omega_{el},1}, \varphi), & \sin \varphi_1 &= \sin \varphi^*(x_{\Omega_{el},1}, y_{\Omega_{el},1}, \varphi), \end{aligned}$$

$$y_{\Omega_{el}} = \frac{b^2 \cos \varphi (y \cos \varphi - x \sin \varphi)}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} - \frac{ab \sin \varphi \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}. \quad (3.4.6)$$

При $n \geq 2$ в (3.4.5) аналогично получаем следующие рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} x_{\Omega_{el},n} &= x_{\Omega_{el}}(x_{\Omega_{el},n-1}, y_{\Omega_{el},n-1}, \varphi_{n-1}), & y_{\Omega_{el},n} &= y_{\Omega_{el}}(x_{\Omega_{el},n-1}, y_{\Omega_{el},n-1}, \varphi_{n-1}), \\ \cos \varphi_n &= \cos \varphi^*(x_{\Omega_{el},n}, y_{\Omega_{el},n}, \varphi_{n-1}), & \sin \varphi_n &= \sin \varphi^*(x_{\Omega_{el},n}, y_{\Omega_{el},n}, \varphi_{n-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $Z(x, y, \varphi, \theta)$ на рассматриваемом интервале построена. Заметим при этом, что в частном случае кругового сечения, когда все T_n ($n = 1, 2, \dots$) совпадают ввиду симметрии, получаем сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии (3.3.11). Массовую скорость $U_{T,z}$ газа в канале находим по формуле (3.3.33), в которой A_1 и $(t - t_1)$ определяются выражениями (3.3.10) и (3.4.4), а T_n ($n = 1, 2, \dots$) — выражением (3.4.5). Приведенные потоки тепла $J_{T,Q}$ и массы газа $J_{T,M}$ в канале находим по формуле (2.4.10). В случае полной аккомодации молекул газа стенками канала получаем для $U_{T,z}$ выражение (2.4.9). Результаты вычислений $J_{T,M}$ по формуле (2.4.10) с учетом трех членов ряда (3.3.10) представлены в таблице 3.4.1 для $\alpha = 0.95$ и 0.9 . Для $a = 1$ значения $J_{T,M}$ также найдены с применением (3.3.11). Поэтому в третьей строке таблицы указаны ссылки на формулы при определении параметра A_1 в выражении (3.3.33). В последней строке этой таблицы значения $J_{T,M}$ получены при подстановке асимптотической формулы (3.3.34) для свободномолекулярного режима течения газа в (2.4.10).

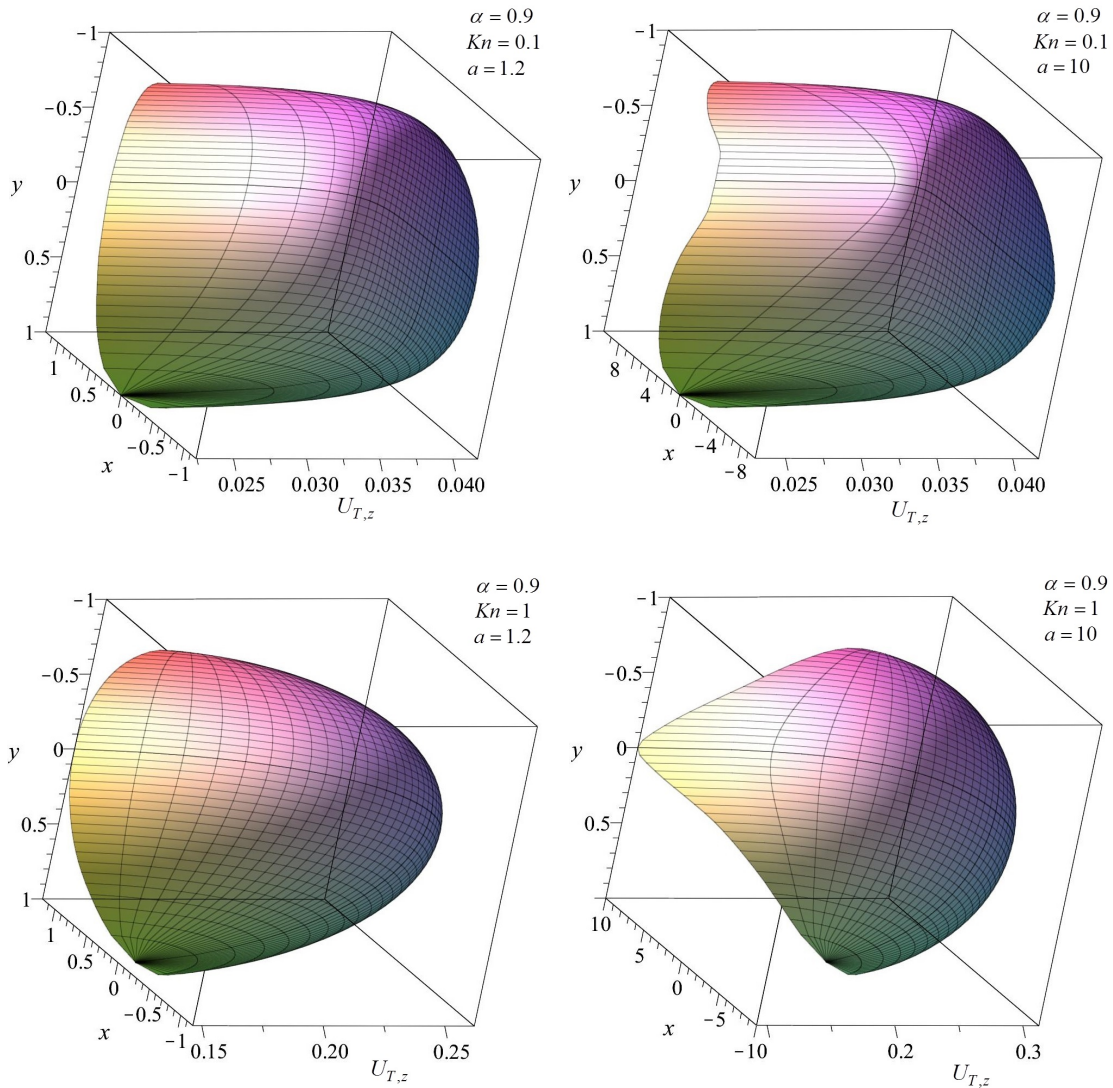
В свободномолекулярном пределе выражение (3.3.33) для массовой скорости $U_{T,z}(x, y)$ газа в канале с учетом формул (3.3.10), (3.4.4) и (3.4.5) принимает вид (3.3.34), в котором параметр T_n ($n = 1, 2, \dots$) определяется (3.4.5), $U_{T,z}(x, y)|_{\alpha=1}$ — выражением (2.4.11) и представляет собой массовую скорость газа при полной аккомодации молекул газа стенками эллиптического канала.

Таблица 3.4.1 - Значения $J_{T,M}$ в эллиптическом канале для $\alpha = 0.9, 0.95$

Kn	a						
	1		1.1	2	5	10	50
	(3.3.10)	(3.3.11)	(3.3.10)	(3.3.10)	(3.3.10)	(3.3.10)	(3.3.10)
$\alpha = 0.9$							
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0.010	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083
0.100	0.0771	0.0771	0.0776	0.0787	0.0794	0.0795	0.0796
0.500	0.2833	0.2833	0.2880	0.3089	0.3229	0.3266	0.3276
1.000	0.4196	0.4196	0.4301	0.4806	0.5213	0.5330	0.5379
2.000	0.5562	0.5562	0.5734	0.6674	0.7601	0.7937	0.8129
5.000	0.7045	0.7045	0.7309	0.8843	1.0752	1.1703	1.2456
10.00	0.7834	0.7834	0.8168	1.0075	1.2696	1.4299	1.5994
100.0	0.8962	0.8962	0.9380	1.1881	1.5911	1.9053	2.5492
1000	0.9148	0.9148	0.9574	1.2177	1.6533	2.0038	2.8777
∞	0.9194	0.9193	0.9629	1.2290	1.6694	2.0463	2.9736
$\alpha = 0.95$							
0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
0.010	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083	0.0083
0.100	0.0768	0.0768	0.0771	0.0782	0.0789	0.0790	0.0791
1.000	0.4036	0.4036	0.4135	0.4656	0.5077	0.5194	0.5262
2.000	0.5262	0.5262	0.5428	0.6376	0.7323	0.7658	0.7845
5.000	0.6545	0.6545	0.6795	0.8312	1.0211	0.6545	1.1851
10.00	0.7208	0.7208	0.7497	0.9359	1.1971	1.3501	1.5098
100.0	0.8130	0.8130	0.8514	1.0910	1.4789	1.7736	2.3641
1000	0.8276	0.8276	0.8665	1.1148	1.5345	1.8631	2.6592
∞	0.8314	0.8314	0.8711	1.1252	1.5510	1.9018	2.7463

Профили распределения массовой скорости (3.3.33) газа в канале при $\alpha = 0.9$ для значений $a = 1.2, 10$ и $\text{Kn} = 0.1, 1, 10$ представлены на рисунке 3.4.1. На рисунке 3.4.2 в двух первых рядах показаны профили $U_{T,z}^{(1)} = U_{T,z}|_{\alpha=1}$ и $U_{T,z}^{(2)} = U_{T,z}|_{\alpha=0.9}$ из первого квадранта для $a = 1.2, 10$ и $\text{Kn} = 1, 10$. В по-

следнем ряду этого рисунка приведены для $a = 1.2$ и $Kn = 10, 100$ профили $U_{T,z}^{(2)}$ и $\kappa U_{T,z}^{(1)}$, где $\kappa = (2 - \alpha)/\alpha$, $\alpha = 0.9$. Из рисунков 3.4.1 и 3.4.2 следует, что уменьшение значений α приводит к увеличению значений макроскопической скорости в целом в сравнении с аналогичными значениями этой величины в случае полной аккомодации молекул газа на стенках эллиптического канала. Однако, форма ее профиля практически не меняется. Для значений числа Кнудсена $Kn \geq 100$, как и для цилиндрического канала (раздел 3.1) в свободномолекулярном режиме течения, это увеличение значений $U_{T,z}$ соответствует $\kappa U_{T,z}^{(1)}$.



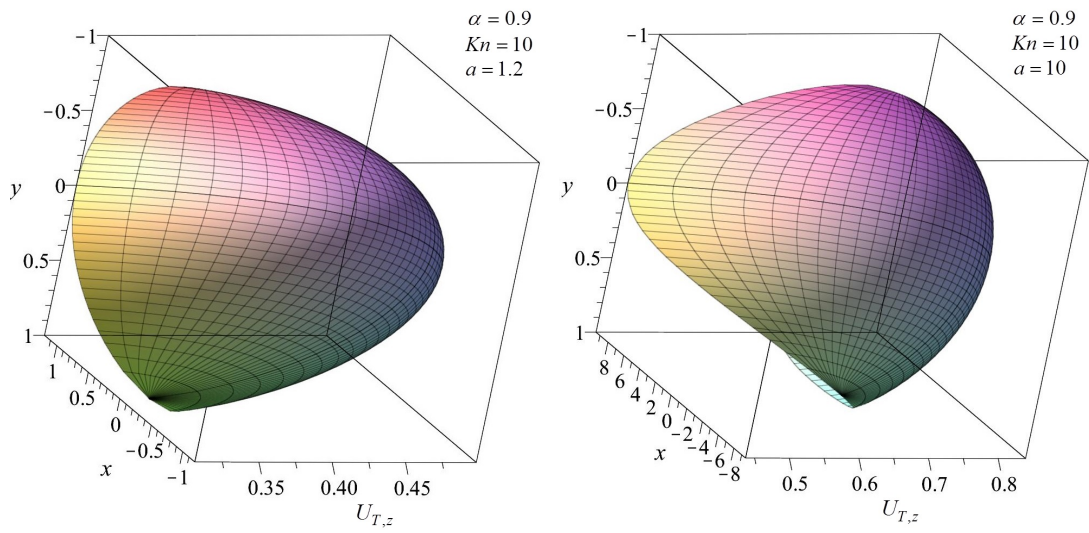
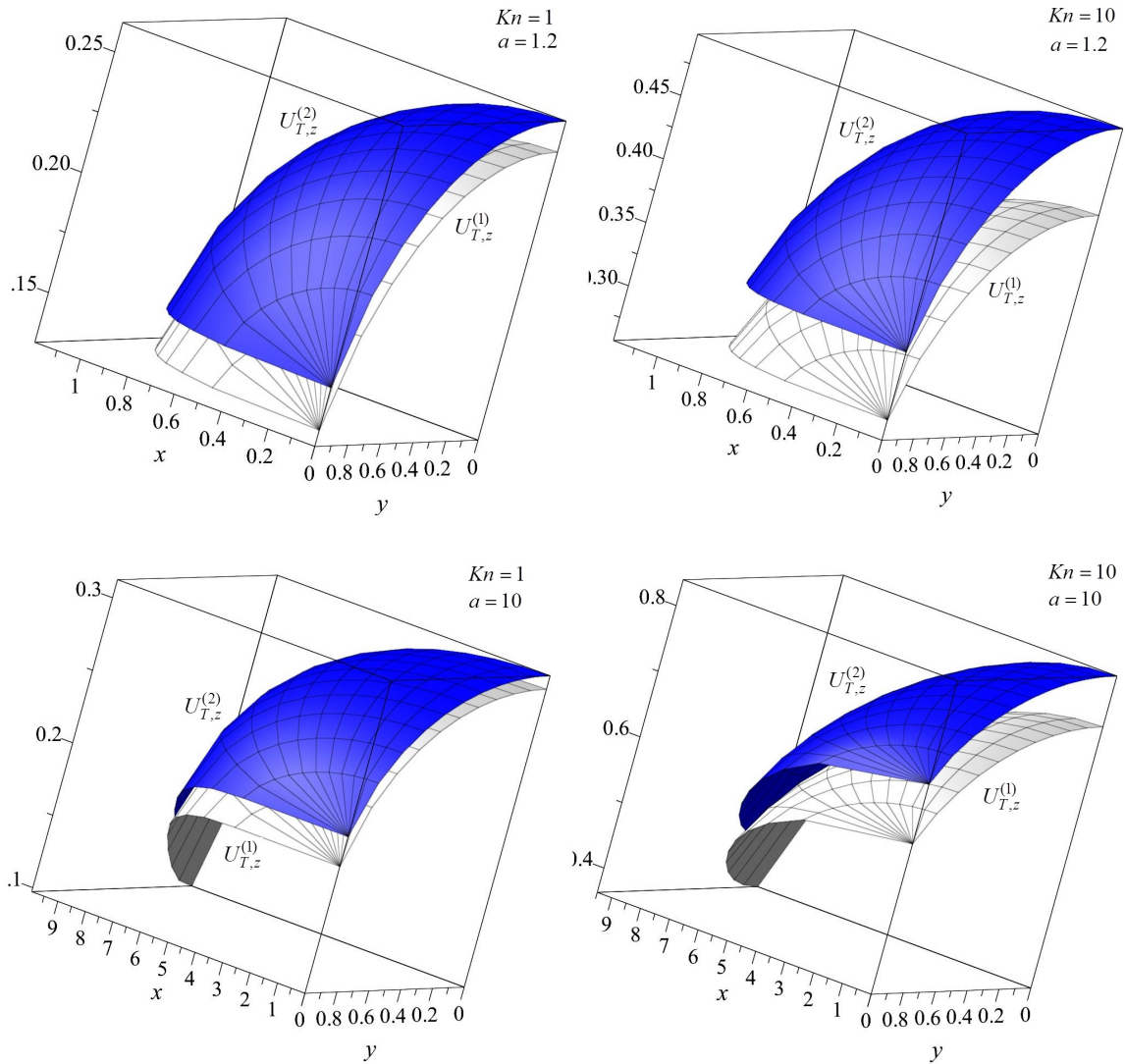


Рисунок 3.4.1 - Профили массовой скорости газа $U_{T,z}$ в эллиптическом канале при $\alpha = 0.9$ для $a = 1.2, 10$ и $Kn = 0.1, 1, 10$



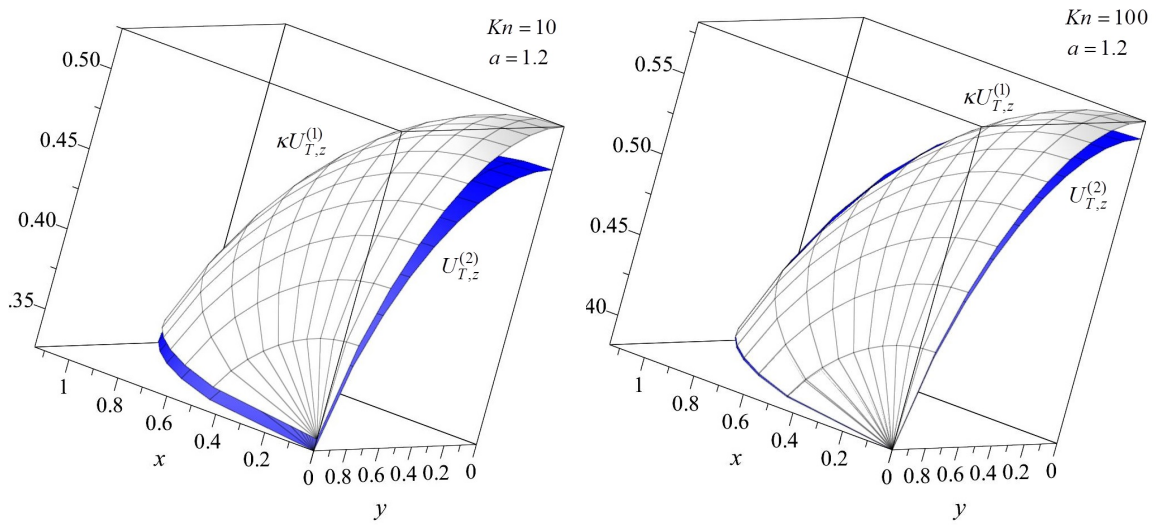


Рисунок 3.4.2 - Профили $U_{T,z}^{(1)}$ и $U_{T,z}^{(2)}$ в эллиптическом канале для $a = 1.2$, 10 и $Kn = 1, 10, 100$

3.5 Математическое моделирование теплопереноса в задаче о течении Пуазейля в промежуточном режиме. Свободномолекулярный режим течения

Рассмотрим в рамках зеркально-диффузной модели отражения медленное стационарное изотермическое течение одноатомного разреженного газа в длинном канале постоянного поперечного сечения, в котором поддерживается продольный градиент давления G_p . Полная постановка задачи о течении Пуазейля приведена в разделе 2.8, за исключением граничного условия на боковых стенках канала, которое в этом случае имеет вид (1.1.9). Компонента вектора потока тепла $q_{p,z}$ определяется функцией $Z_2(x, y, c_x, c_y) = Z(x, y, c_x, c_y)$, как было показано в разделе 2.8, и равна согласно соотношению (2.8.1) компоненте массовой скорости $U_{T,z}$ в задаче о тепловом крипе. Значения макропараметра $J_{p,Q}$ в этом случае совпадают с соответствующими значениями величины $J_{T,M}$.

В свободномолекулярном режиме решение задачи о тепловом крипе и течении Пуазейля сводятся к решению линейного дифференциального уравнения в частных производных (2.9.5) с граничным условием (1.1.9). В результате вы-

ражение для приведенного потока массы в цилиндрическом канале, полученное в этом случае в рамках задачи о тепловом крипе, совпадает с первым слагаемым в (3.1.6). Макроскопическая скорость газа в канале, образованном коаксиальными цилиндрами, имеет вид (3.2.10). В прямоугольном и эллиптическом каналах эта скорость при практически полной аккомодации молекул газа на стенках каналов представляет собой ряд (3.3.34) по малому параметру $1 - \alpha$. Необходимо также заметить, что все эти выражения для макропараметров газа в каналах получены в разделах 3.1-3.4 на основе уравнения Вильямса при предельном переходе к свободномолекулярному режиму течения. Для остальных компонент $q_{T,z}$, $q_{p,z}$ и приведенных потоков $J_{T,Q}$, $J_{p,Q}$ в рассматриваемых каналах имеем соотношения (2.2.19) и (2.8.1).

Предлагаемые подходы к построению математических моделей процессов переноса в каналах, описанные в настоящей главе, подробно представлены в работах [89]-[91].

3.6 Выводы из главы 3

1. Построены математические модели течения разреженного газа в цилиндрическом, прямоугольном, эллиптическом каналах и канале, состоящем из двух коаксиальных цилиндров, в задачах о тепловом крипе и течении Пуазейля при зеркально-диффузном отражении молекул газа от поверхностей каналов. Показано, что результаты, полученные на основании этих моделей, обобщают ранее найденные в главе 2 результаты.

2. В зависимости от значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа построены распределения вектора потока тепла и массовой скорости газа в каналах для различных значений числа Кнудсена.

3. Получены в рамках зеркально-диффузной модели отражения с использованием уравнения Вильямса выражения приведенных тепловых и массовых потоков газа в каналах в промежуточном режиме и вычислены значения этих потоков. Показано, что найденные выражения переходят при значениях коэф-

коэффициента аккомодации тангенциального импульса равного единице в аналогичные результаты разделов 2.2-2.5. В свободномолекулярном режиме течения приведенные потоки как функции от K_n имеют пределы, которые соответствуют величинам потоков, полученных на основании кинетического уравнения Больцмана для бесстолкновительного газа.

4. Показано существенное влияние коэффициента аккомодации тангенциального импульса частиц газа на величины потоков при приближении к свободномолекулярному режиму течения.

5. Для цилиндрического канала проведен сравнительный анализ полученных значений приведенных потоков тепла и массы газа с результатами, рассчитанными на основании БГК и S-моделей с постоянной частотой столкновения, а так же с экспериментальными данными.

6. Получены аналитические формулы для определения приведенных потоков в цилиндрическом канале для режимов течения, близких к свободномолекулярному.

7. Показано, что для режима течения, близкого к гидродинамическому, приведенные потоки тепла и массы не зависят от коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа.

Программный комплекс для расчета макропараметров газа в длинных каналах

4.1 Численное интегрирование с использованием полиномов Чебышёва

Для расчета макропараметров газа в канале были разработаны и реализованы алгоритмы численного интегрирования с использованием полиномов Чебышёва, где в качестве интерполяционных узлов подынтегральной функции были выбраны корни или точки экстремумов этих полиномов. В частности, при нахождении значения определенного интеграла от функции одной переменной приводим его к виду

$$I_1 = \int_{-1}^1 f(x) dx, \quad (4.1.1)$$

где $f(x)$ – аналитическая функция на $[-1, 1]$. Заметим, что интеграл $\int_{a_1}^{a_2} f(x') dx'$ сводится к виду (4.1.1) заменой переменной x' на x по формуле

$$x' = \frac{x(a_2 - a_1) + (a_1 + a_2)}{2}, \quad x \in [-1, 1]. \quad (4.1.2)$$

Функцию $f(x)$ разложим в ряд по ортогональным многочленам Чебышёва первого рода [92]

$$T_i(x) = \cos i\theta, \quad x = \cos \theta, \quad \theta \in [0, \pi], \quad (4.1.3)$$

на отрезке $x \in [-1, 1]$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i T_i(x) = \frac{1}{2} A_0 T_0(x) + A_1 T_1(x) + A_2 T_2(x) + \dots \quad (4.1.4)$$

где под \sum'_i понимаем сумму, в которой первое слагаемое умножается на $1/2$.

Для определения $T_i(x)$ в разложении (4.1.4) воспользуемся рекуррентной формулой [92]

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_i(x) = 2xT_{i-1}(x) - T_{i-2}(x), \quad i \geq 2. \quad (4.1.5)$$

Рассмотрим случай, когда в качестве интерполяционных узлов для $f(x)$ выбираем нули многочлена Чебышёва $T_{n+1}(x)$ на отрезке $[-1; 1]$. Следуя [93], аппроксимируем функцию $f(x)$ конечной суммой многочленов $T_i(x)$ ($i = \overline{0, n}$)

$$f_n(x) = \sum'_{i=0}^n a_i T_i(x) = \frac{1}{2}a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \dots + a_n T_n(x). \quad (4.1.6)$$

Подставляя в (4.1.1) выражения (4.1.4) и (4.1.6), получаем

$$I_1 = \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum'_{i=0}^{\infty} A_i \int_{-1}^1 T_i(x) dx. \quad (4.1.7)$$

$$I_{1,n} = \int_{-1}^1 f_n(x) dx = \sum'_{i=0}^n a_i \int_{-1}^1 T_i(x) dx. \quad (4.1.8)$$

Учитывая, что

$$\int_{-1}^1 T_i(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{1-i^2}, & \text{если } i \text{ чет.}, \\ 0, & \text{если } i \text{ нечет.}, \end{cases} \quad (4.1.9)$$

полагаем в (4.1.6), что n – четное число. Тогда выражения (4.1.11) и (4.1.8) преобразуются к виду

$$I_1 = 2 \sum'_{\substack{i=0 \\ i\text{-чет}}}^{\infty} \frac{A_i}{1-i^2} = A_0 - \frac{2}{3}A_2 - \frac{2}{15}A_4 - \dots - \frac{2}{n^2-1}A_n - \dots, \quad (4.1.10)$$

$$I_{1,n} = 2 \sum'_{l=0}^{n/2} \frac{a_{2l}}{1-4l^2} = a_0 - \frac{2}{3}a_2 - \frac{2}{15}a_4 - \dots - \frac{2}{n^2-1}a_n. \quad (4.1.11)$$

Неизвестные величины a_{2l} ($l = \overline{0, n/2}$) в (4.1.11) найдем, используя следующее свойство многочленов Чебышёва [92]:

$$\sum_{k=1}^{n+1} T_i(x_k) T_j(x_k) = \begin{cases} n+1, & i = j = 0, \\ 0, & 0 \leq i \neq j \leq n, \\ \frac{n+1}{2}, & 0 < i = j \leq n. \end{cases} \quad (4.1.12)$$

Здесь x_k нули многочлена $T_{n+1}(x)$:

$$x_k = \cos \left(\frac{\pi(2(n-k)+3)}{2(n+1)} \right), \quad k = \overline{1, n+1}. \quad (4.1.13)$$

Умножим левую и правую части равенства (4.1.6) на $T_j(x)$, где $(j = \overline{0, n})$ и подставим точки x_k ($k = \overline{1, n+1}$), определяемые (4.1.13). Суммируя полученные таким образом равенства по k , приходим к системе независимых уравнений для определения a_i ($i = \overline{0, n}$):

$$\sum_{k=1}^{n+1} f_n(x_k) T_j(x_k) = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{k=1}^{n+1} T_i(x_k) T_j(x_k). \quad (4.1.14)$$

Из (4.1.12) и (4.1.14) вытекает, что

$$a_j = \frac{2}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} f_n(x_k) T_j(x_k), \quad 0 \leq j \leq n. \quad (4.1.15)$$

Для того чтобы оценить абсолютную погрешность $E_n = |I_1 - I_{1,n}|$ при численном интегрировании с использованием (4.1.11) и (4.1.15), воспользуемся формулой [94]

$$E_n^* = |I_{1,n} - I_{1,n/2}|. \quad (4.1.16)$$

Для верификации предложенного метода численного интегрирования проведены тестовые расчеты, которые включали в себя и проверку адекватности оценки погрешности по формуле (4.1.16). В частности, для интегралов $\int_0^1 f(x) dx$ от функции Рунге [95] $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ и функции $f(x) = \frac{1}{1-0.98x^4}$ [95] в таблице 4.1.1 представлены результаты выполненных расчетов на основании (4.1.11) и (4.1.15). Предварительно интеграл $\int_0^1 f(x) dx$ приведен к виду (4.1.13) заменой переменной x на x' по формуле (4.1.2). Опуская штрих у новой переменной, имеем

$$I_1 = \int_{-1}^1 f_p(x) dx, \quad f_p(x) = \frac{1}{2} f \left(\frac{x+1}{2} \right), \quad x \in [-1, 1]. \quad (4.1.17)$$

Значения I_1 при вычислении абсолютных погрешностей $E_n = |I_1 - I_{1,n}|$ для каждой из рассматриваемых функций получены аналитически: $\int_0^1 \frac{1}{1+25x^2} dx =$

$\frac{1}{5} \operatorname{arctg} 5 = 0.274680153389004$ и $\int_0^1 \frac{1}{1 - 0.98x^4} dx = 1.89633563117770$. В зависимости от наибольшего порядка n полинома Чебышёва $T_n(x)$ в (4.1.6) найдены значения $I_{1,n}$ для E_n и $I_{1,n/2}$ в (4.1.16) по формулам (4.1.11) и (4.1.15) с учетом (4.1.13) и (4.1.11).

Таблица 4.1.1 - Значения оценок погрешностей при вычислении интегралов $\int_0^1 \frac{1}{1 + 25x^2} dx$ и $\int_0^1 \frac{1}{1 - 0.98x^4} dx$ с использованием формул (4.1.11), (4.1.15) и (4.1.17)

$\int_0^1 f(x) dx$	n	8	12	16	24	32
$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$	E_n^*	0.0013	$5.3 \cdot 10^{-4}$	$2.7 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-7}$
	E_n	0.000031	$3.2 \cdot 10^{-7}$	$2.1 \cdot 10^{-8}$	$1.3 \cdot 10^{-10}$	$4.0 \cdot 10^{-14}$
$f(x) = \frac{1}{1 - 0.98x^4}$	E_n^*	0.2412	0.1106	0.0577	0.0187	0.00690
	E_n	0.0299	0.0237	0.0125	0.0026	0.00052

Как показывают предварительные верификационные расчеты, использованный в работе критерий оценки погрешности по формуле (4.1.16) является адекватным и позволяет достигнуть заданной точности при сравнительно небольших значениях n в разложении (4.1.6).

При нахождении значения кратного интеграла от многоаргументной функции приводим его к виду

$$I_m = \int_{[-1,1] \dots \times [-1,1]} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (4.1.18)$$

где \mathbf{x} – m -мерный вектор переменных интегрирования $x^{(i)}$ ($1 \leq i \leq m$, $2 \leq m \leq 4$). Областью интегрирования в (4.1.18) является $[-1, 1] \dots \times [-1, 1]$.

Функцию $f(\mathbf{x})$ разложим в ряд по ортогональным многочленам Чебышёва первого рода

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_m=0}^{\infty} A_{\mathbf{i}} T_{i_1}(x^{(1)}) \dots \cdot T_{i_m}(x^{(m)}). \quad (4.1.19)$$

Ограничиваясь в ряде (4.1.19) членами с номерами $i_j \leq n_j$ ($j = \overline{1, m}$),

имеем

$$f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \sum'_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum'_{i_m=0}^{n_m} a_{\mathbf{i}} T_{i_1}(x^{(1)}) \dots T_{i_m}(x^{(m)}). \quad (4.1.20)$$

Полагая в (4.1.20), что n_j – четное число ($j = \overline{1, m}$), и применяя свойство (4.1.9), получаем

$$I_m = 2^m \sum'_{\substack{i_1, \dots, i_m=0 \\ i_1, \dots, i_m \text{ - чет}}}^{\infty} \frac{A_{\mathbf{i}}}{(1 - i_1^2) \dots (1 - i_m^2)}, \quad (4.1.21)$$

$$I_{m, \mathbf{n}} = 2^m \sum'_{i_1=0}^{n_1/2} \dots \sum'_{i_m=0}^{n_m/2} \frac{a_{2i_1, \dots, 2i_m}}{(1 - 4i_1^2) \dots (1 - 4i_m^2)}. \quad (4.1.22)$$

Учитывая (4.1.12), приходим к следующим выражениям для неизвестных коэффициентов $a_{2i_1, \dots, 2i_m}$ в (4.1.22):

$$a_{\mathbf{i}} = \frac{2^m}{(n_1 + 1) \dots (n_m + 1)} \sum_{k_1=1}^{n_1+1} \dots \sum_{k_m=1}^{n_m+1} f_{\mathbf{n}}(x_{k_1}^{(1)}, \dots, x_{k_m}^{(m)}) T_{i_1}(x_{k_1}^{(1)}) \dots T_{i_m}(x_{k_m}^{(m)}), \quad (4.1.23)$$

$0 \leq i_j \leq n_j; 1 \leq j \leq m.$

Подставляя (4.1.23) в (4.1.22), преобразуем (4.1.22) к виду

$$I_{m, \mathbf{n}} = p_m \sum'_{k_1=1}^{n_1+1} \tau(x_{k_1}^{(1)}, n_1) \dots \sum'_{k_m=1}^{n_m+1} \tau(x_{k_m}^{(m)}, n_m) f_{\mathbf{n}}(x_{k_1}^{(1)}, \dots, x_{k_m}^{(m)}), \quad (4.1.24)$$

$$p_m = \frac{4^m}{(n_1 + 1) \dots (n_m + 1)}, \quad \tau(x, n) = \sum'_{i=0}^{n/2} \frac{T_i(x)}{1 - 4i^2}. \quad (4.1.25)$$

где $x_0^{(j)}, x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{n_j}^{(j)}$ – нули полинома $T_{n_j+1}(x)$ ($j = \overline{1, m}$), определяемые по формуле (4.1.13).

Для того чтобы оценить погрешность $E_{\mathbf{n}} = |I_m - I_{m, \mathbf{n}}|$ при численном интегрировании с использованием (4.1.24), воспользуемся формулой [94]

$$E_{\mathbf{n}}^* = |I_{m, \mathbf{n}} - I_{m, \mathbf{n}/2}|. \quad (4.1.26)$$

Рассмотрим случай, когда в качестве интерполяционных узлов для $f(x)$ выбираем точки экстремума многочлена $T_n(x)$ на отрезке $[-1; 1]$. Численно найдем значение интеграла вида (4.1.1). Функцию $f(x)$ представляем в этом случае в виде

$$f_n(x) = \sum'_{i=0}^n a_i T_i(x) = \frac{1}{2} a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \dots + \frac{1}{2} a_n T_n(x). \quad (4.1.27)$$

где под $\sum_{i=0}^n$ понимаем сумму, в которой первое и последнее слагаемые умножаются на $1/2$.

Подставляя в (4.1.1) выражение (4.1.27), полагаем в (4.1.27), что n – четное число. Учитывая (4.1.9), получаем

$$I_{1,n} = 2 \sum_{l=0}^{n/2} \frac{a_{2l}}{1-4l^2} = a_0 - \frac{2}{3}a_2 - \frac{2}{15}a_4 - \dots - \frac{1}{n^2-1}a_n. \quad (4.1.28)$$

Неизвестные величины a_{2l} ($l = \overline{0, n/2}$) в (4.1.28) найдем, используя следующее свойство многочленов Чебышёва [92]:

$$\sum_{k=0}^n T_i(x_k)T_j(x_k) = \begin{cases} n, & (i = j = 0) \vee (i = j = n), \\ 0, & 0 \leq i \neq j \leq n, \\ \frac{n}{2}, & 0 < i = j < n. \end{cases} \quad (4.1.29)$$

Здесь x_k точки экстремума многочлена $T_n(x)$ на отрезке $[-1; 1]$:

$$x_k = \cos\left(\frac{\pi(n-k)}{n}\right), \quad k = \overline{0, n}. \quad (4.1.30)$$

Умножим левую и правую части равенства (4.1.27) на $T_j(x)$ и подставим точки (4.1.30). Суммируя полученные таким образом равенства по k , приходим к системе независимых уравнений для определения a_i ($i = \overline{0, n}$):

$$\sum_{k=0}^n f_n(x_k)T_j(x_k) = \sum_{i=0}^n a_i \sum_{k=0}^n T_i(x_k)T_j(x_k). \quad (4.1.31)$$

Из (4.1.29) и (4.1.31) вытекает, что

$$a_j = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^n f_n(x_k)T_j(x_k), \quad 0 \leq j \leq n. \quad (4.1.32)$$

Подставляя (4.1.32) в (4.1.28), преобразуем (4.1.28) к виду

$$I_{1,n} = \frac{4}{n} \sum_{k=0}^n \tau_{ex}(x_k, n) f_n(x_k), \quad (4.1.33)$$

$$\tau_{ex}(x, n) = \sum_{i=0}^{n/2} \frac{T_i(x)}{1-4i^2}. \quad (4.1.34)$$

Для практической оценки погрешности воспользуемся формулой (4.1.16). Из (4.1.30) вытекает, что точки экстремума многочлена $T_{n/2}(\hat{x})$ на отрезке $[-1; 1]$ являются и точками экстремума многочлена $T_n(x)$ на этом же отрезке, причем $\hat{x}_r = x_{2r}$ ($r = \overline{0, n/2}$), так как

$$\hat{x}_r = \cos\left(\frac{\pi(n/2 - r)}{n/2}\right) = \cos\left(\frac{\pi(n - 2r)}{n}\right), \quad r = \overline{0, n/2}. \quad (4.1.35)$$

Тогда, интеграл $I_{1, n/2}$ преобразуем к виду

$$I_{1, n/2} = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n/2} \tau_{ex}(x_k, n/2) f_n(x_{2k}), \quad (4.1.36)$$

где x_0, x_2, \dots, x_n – точки экстремума полинома $T_n(x)$, определяемые по формуле (4.1.30).

В таблице 4.1.2 приведены значения абсолютных погрешностей E_n и их оценок (4.1.16) при нахождении значений интегралов $\int_0^1 \frac{1}{1 + 25x^2} dx$ и $\int_0^1 \frac{1}{1 - 0.98x^4} dx$ с использованием формул (4.1.17) и (4.1.33).

Таблица 4.1.2 - Значения оценок погрешностей при вычислении интегралов $\int_0^1 \frac{1}{1 + 25x^2} dx$ и $\int_0^1 \frac{1}{1 - 0.98x^4} dx$ с использованием формул (4.1.17) и (4.1.33)

$\int_0^1 f(x) dx$	n	8	12	16	24	32
$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$	E_n^*	0.0026	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-5}$	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-9}$
	E_n	0.000059	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$2.5 \cdot 10^{-9}$	$2.6 \cdot 10^{-11}$	$9.0 \cdot 10^{-15}$
$f(x) = \frac{1}{1 - 0.98x^4}$	E_n^*	0.9603	0.2852	0.0954	0.0067	0.00318
	E_n	0.0920	0.0054	0.0034	0.0013	0.00027

Сравнивая данные, представленные в таблицах 4.1.1 и 4.1.2, можем видеть, что использование точек экстремумов полиномов Чебышёва в качестве интерполяционных узлов для подынтегральной функции позволяет достигнуть более высокой точности при одинаковом числе членов ряда в разложении (4.1.27).

Для получения значения кратного интеграла (4.1.18) с использованием в качестве интерполяционных узлов для подынтегральной функции точек экстремума полиномов Чебышёва в ряде (4.1.19) ограничиваемся членами с номерами $i_j \leq n_j$ ($j = \overline{1, m}$). Результат суммирования представляем в виде

$$f_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m} a_{\mathbf{i}} T_{i_1}(x^{(1)}) \dots T_{i_m}(x^{(m)}). \quad (4.1.37)$$

Полагая в (4.1.37), что n_j – четное число ($j = \overline{1, m}$), и применяя свойство (4.1.9), получаем

$$I_{m, \mathbf{n}} = 2^m \sum_{i_1=0}^{n_1/2} \dots \sum_{i_m=0}^{n_m/2} \frac{a_{2i_1, \dots, 2i_m}}{(1 - 4i_1^2) \dots (1 - 4i_m^2)}. \quad (4.1.38)$$

Учитывая (4.1.9), приходим к следующим выражениям для неизвестных коэффициентов $a_{2i_1, \dots, 2i_m}$ в (4.1.38):

$$a_{\mathbf{i}} = \frac{2^m}{n_1 \dots n_m} \sum_{k_1=0}^{n_1} \dots \sum_{k_m=0}^{n_m} f_{\mathbf{n}}(x_{k_1}^{(1)}, \dots, x_{k_m}^{(m)}) T_{i_1}(x_{k_1}^{(1)}) \dots T_{i_m}(x_{k_m}^{(m)}), \quad (4.1.39)$$

$0 \leq i_j \leq n_j; 1 \leq j \leq m.$

Подставляя (4.1.39) в (4.1.38), преобразуем (4.1.38) к виду

$$I_{m, \mathbf{n}} = p_m \sum_{k_1=0}^{n_1} \tau_{ex}(x_{k_1}^{(1)}, n_1) \dots \sum_{k_m=0}^{n_m} \tau_{ex}(x_{k_m}^{(m)}, n_m) f_{\mathbf{n}}(x_{k_1}^{(1)}, \dots, x_{k_m}^{(m)}), \quad (4.1.40)$$

$$p_m = \frac{4^m}{n_1 \dots n_m}, \quad \tau_{ex}(x, n) = \sum_{i=0}^{n/2} \frac{T_i(x)}{1 - 4i^2}.$$

Для практической оценки погрешности как и ранее воспользуемся формулой (4.1.26), в которой интеграл $I_{m, \mathbf{n}/2}$ согласно (4.1.26) и (4.1.40) вычисляется, как

$$I_{m, \mathbf{n}/2} = 2^{-m} p_m \sum_{k_1=0}^{n_1/2} \tau_{ex}(x_{2k_1}^{(1)}, n_1/2) \dots \sum_{k_m=0}^{n_m/2} \tau_{ex}(x_{2k_m}^{(m)}, n_m/2) f_{\mathbf{n}}(x_{2k_1}^{(1)}, \dots, x_{2k_m}^{(m)}), \quad (4.1.41)$$

где $x_0^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_{n_j}^{(j)}$ – точки экстремума полинома $T_{n_j}(x)$ ($j = \overline{1, m}$), определяемые по формуле (4.1.30).

4.2 Реализация алгоритмов расчета

Алгоритмы вычисления значений макропараметров газа основаны на формулах (4.1.24) и (4.1.40), полученных в разделе 4.1. В формуле (4.1.24) интерполяционными узлами подынтегральной функции являются нули полиномов Чебышёва, определяемые в соответствии с (4.1.13), а в (4.1.40) — точки экстремумов этих полиномов (4.1.30). Оценки погрешности вычислений в каждом из рассмотренных случаев произведены согласно (4.1.26). Расчеты, выполненные в рамках этих алгоритмов, включают в себя определение вида подынтегральной функции в выражениях приведенных потоков тепла и массы газа через задание геометрии поперечного сечения канала, выбор модели граничного условия и режима течения (главы 2 и 3), преобразование области интегрирования в этих выражениях к многомерному кубу $[-1, 1] \dots \times [-1, 1]$ по формуле (4.1.2). Данные алгоритмы реализованы в системе компьютерной алгебры Maple 18. Выбор в качестве среды вычислений системы Maple 18 обусловлен тем, что эта система сочетает в себе инструменты для сложных программных вычислений и эффективные средства графической визуализации математических моделей. В главах 2 и 3 представлены значения приведенных потоков тепла и массы газа, найденные с использованием разработанных алгоритмов в зависимости от конфигурации и относительных размеров поперечных сечений каналов, значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа и числа Кнудсена. В частности, для вычисления значений массового потока $J_{T,M}$ в прямом круговом цилиндре в рамках зеркально-диффузной модели отражения (раздел 3.1) выражение (2.3.10) для $J_{T,M}$ с учетом (3.1.3), (3.1.4) и (3.1.5) представлено в виде

$$J_{T,M} = \frac{2\gamma\text{Kn}}{\pi^{3/2}} I_{3,c}, \quad I_{3,c} = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^\pi f_c(\rho, \psi, \theta) d\rho d\psi d\theta, \quad (4.2.1)$$

$$f_c(\rho, \psi, \theta) = (w_c(\rho, \psi, \theta) - 1)\rho \cos^2 \theta \sin \theta, \quad (4.2.2)$$

$$w_c(\rho, \psi, \theta) = \frac{\alpha \exp(-\xi_1(\rho, \psi, \theta))}{\exp(\xi_2(\rho, \psi, \theta)) - (1 - \alpha) \exp(-\xi_2(\rho, \psi, \theta))},$$

$$\xi_1(\rho, \psi, \theta) = \frac{\rho \cos \psi}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}, \quad \xi_2(\rho, \psi, \theta) = \frac{\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \psi}}{\gamma \text{Kn} \sin \theta}.$$

Применяя (4.1.2) к (4.2.1), преобразуем область интегрирования в (4.2.1) к кубу $[-1, 1]^3$. В результате получаем

$$I_{3,c} = \frac{\pi^2}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_c \left(\frac{1}{2}(\rho' + 1), \frac{1}{2}(\psi' + 1)\pi, \frac{1}{2}(\theta' + 1)\pi \right) d\rho' d\psi' d\theta'. \quad (4.2.3)$$

Значения интеграла (4.2.3) в зависимости от Kn и α находим по формуле (4.1.24), в которой интерполяционными узлами подынтегральной функции являются нули полиномов Чебышёва (4.1.13). В таблице 4.2.1 приведены эти значения, обозначенные как $I_{3,c}^{(nPC)}$, в сравнении со значениями $I_{3,c}^{(CC)}$, полученными методами CubaCuhre [96] и CubaSuave [97] с точностью не менее 10^{-4} . Там же указаны значения оценки погрешности для $I_{3,c}^{(nPC)}$, вычисленные по формуле (4.1.26), и значения $E_n = |I_{3,c}^{(CC)} - I_{3,c}^{(nPC)}|$. Из последнего столбца таблицы 4.2.1, следует, что при указанных значениях n_j ($j = \overline{1, 3}$) использование нулей полиномов Чебышёва в качестве интерполяционных узлов для подынтегральной функции обеспечивает точность вычислений приведенного потока массы газа $J_{T,M}$ в цилиндрическом канале не менее 10^{-4} .

Таблица 4.2.1 - Значения $I_{3,c}^{(nPC)}$ в зависимости от Kn , α , $n_j = n$ ($j = \overline{1, 3}$)

Kn, α, n	$I_{3,c}^{(CC)}$	$I_{3,c}^{(nPC)}$	E_n	E_n^*	$J_{T,M}$
$\text{Kn} = 0.1, \alpha = 0.8$ $n = 16$	0.97793	0.97789	$3.7 \cdot 10^{-5}$	$4.1 \cdot 10^{-5}$	0.0778
$\text{Kn} = 0.5, \alpha = 0.8$ $n = 16$	0.74509	0.74504	$5.6 \cdot 10^{-5}$	$4.7 \cdot 10^{-4}$	0.2965
$\text{Kn} = 1, \alpha = 0.8$ $n = 16$	0.56917	0.56914	$3.5 \cdot 10^{-5}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	0.4529
$\text{Kn} = 2, \alpha = 0.8$ $n = 16$	0.39012	0.39011	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	0.6209
$\text{Kn} = 10, \alpha = 0.8$ $n = 16$	0.11644	0.11641	$3.0 \cdot 10^{-5}$	$5.8 \cdot 10^{-4}$	0.9266
$\text{Kn} = 100, \alpha = 0.8$ $n = 32$	0.01372	0.01372	$5.1 \cdot 10^{-6}$	$8.4 \cdot 10^{-6}$	1.0918

Следует заметить, что алгоритм *CubaCuhre* представляет собой модификацию детерминированного полиномиального алгоритма *cuhre* и реализован с использованием адаптивной схемы разбиения и преобразования *split-t* [98]. Алгоритм *CubaSuave* базируется на методе квази Монте-Карло и применении LP_τ -последовательностей, предложенных И. М. Соболев в [99].

При использовании в качестве интерполяционных узлов для подынтегральной функции в (4.2.3) точек экстремумов полиномов Чебышёва (4.1.30) эта функция становится не определена в точках, для которых $\theta = 0$ или $\theta = \pi$. В этом случае интеграл $I_{3,c}$ представляем в виде суммы малых величин и интегралов, не содержащих особенностей

$$I_{3,c} = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^\delta f_c(\rho, \psi, \theta) d\rho d\psi d\theta + \int_0^1 \int_0^\pi \int_\delta^{\pi-\delta} f_c(\rho, \psi, \theta) d\rho d\psi d\theta + \\ + \int_0^1 \int_0^\pi \int_{\pi-\delta}^\pi f_c(\rho, \psi, \theta) d\rho d\psi d\theta. \quad (4.2.4)$$

Подбираем δ таким образом, чтобы первое и последнее слагаемые в (4.2.4) не превышали заданной точности. Тогда,

$$I_{3,c} = \int_0^1 \int_0^\pi \int_\delta^{\pi-\delta} f_c(\rho, \psi, \theta) d\rho d\psi d\theta = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \times \\ \times \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_c \left(\frac{1}{2}(\rho + 1), \frac{1}{2}(\psi + 1)\pi, \theta \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) + \frac{\pi}{2} \right) d\rho d\psi d\theta. \quad (4.2.5)$$

Значения интеграла (4.2.5) находим по формуле (4.1.40), в которой интерполяционными узлами подынтегральной функции являются точки экстремумов полиномов Чебышёва (4.1.30). В таблице 4.2.2 для $\delta = 10^{-12}$ приведены эти значения, обозначенные как $I_{3,c}^{(ePC)}$, в сравнении со значениями $I_{3,c}^{(CC)}$, полученными методом *CubaCuhre* и *CubaSuave* с точностью не менее 10^{-4} . Там же указаны значения оценки погрешности для $I_{3,c}^{(ePC)}$, вычисленные по формуле (4.1.26), и значения $E_{\mathbf{n}} = |I_{3,c}^{(CC)} - I_{3,c}^{(ePC)}|$.

Таблица 4.2.2 - Значения $I_{3,c}^{(ePC)}$ в зависимости от Kn, α , $n_j = n$ ($j = \overline{1,3}$)

Kn, α , n	$I_{3,c}^{(CC)}$	$I_{3,c}^{(ePC)}$	E_n	E_n^*	$J_{T,M}$
Kn = 0.1, $\alpha = 0.8$ $n = 16$	0.97793	0.97780	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	0.0778
Kn = 0.5, $\alpha = 0.8$ $n = 16$	0.74509	0.74500	$8.7 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-3}$	0.2965
Kn = 1, $\alpha = 0.8$ $n = 16$	0.56917	0.56912	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$8.0 \cdot 10^{-4}$	0.4529
Kn = 2, $\alpha = 0.8$ $n = 16$	0.39012	0.39010	$2.9 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$	0.6209
Kn = 10, $\alpha = 0.8$ $n = 16$	0.11644	0.11645	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$6.6 \cdot 10^{-5}$	0.9266
Kn = 100, $\alpha = 0.8$ $n = 32$	0.01372	0.01372	$1.5 \cdot 10^{-6}$	$1.9 \cdot 10^{-5}$	1.0918

Для вычисления значений массового потока $J_{T,M}$ в прямом эллиптическом цилиндре в рамках диффузной модели отражения (раздел 2.4) выражение (2.4.10) для $J_{T,M}$ с учетом (2.4.9) и (2.4.8) представим в виде

$$J_{T,M} = \frac{2\gamma Kn}{\pi^{3/2}} I_{4,e}, \quad I_{4,e} = \frac{1}{\pi ab} \int_0^b \int_0^{a\sqrt{b^2-y^2}/b} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f_e(x, y, \varphi, \theta) dy dx d\varphi d\theta, \quad (4.2.6)$$

$$f_e(x, y, \varphi, \theta) = (w_e(x, y, \varphi, \theta) - 1) \cos^2 \theta \sin \theta, \quad (4.2.7)$$

$$w_e(x, y, \varphi, \theta) = \frac{b^2 x \cos \varphi + a^2 y \sin \varphi}{\gamma Kn (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \sin \theta} + \frac{ab \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi - (y \cos \varphi - x \sin \varphi)^2}}{\gamma Kn (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \sin \theta}.$$

Заменой переменных в $I_{4,e}$ по (4.1.2) преобразуем область интегрирования в (4.2.6) к четырехмерному кубу $[-1, 1]^4$. В итоге получаем

$$I_{4,e} = \frac{\pi}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_e(x(y', x'), y(y'), \varphi(\varphi'), \theta(\theta')) \sqrt{4 - (y' + 1)^2} dx' dy' d\varphi' d\theta', \quad (4.2.8)$$

$$x(y', x') = \frac{a(x' + 1) \sqrt{4 - (y' + 1)^2}}{4}, \quad y(y') = \frac{b(y' + 1)}{2},$$

$$\varphi(\varphi') = (\varphi' + 1)\pi, \quad \theta(\theta') = \frac{\pi}{2}(\theta' + 1). \quad (4.2.9)$$

Значения интеграла (4.2.8) в зависимости от a и Kn находим по формуле (4.1.24), в которой интерполяционными узлами подынтегральной функции являются нули полиномов Чебышёва (4.1.13). В таблице 4.2.3 эти значения обозначены как $I_{4,e}^{(nPC)}$ и приведены при $b = 1$ в сравнении со значениями $I_{4,e}^{(CC)}$, полученными методами CubaCuhre и CubaSuave с точностью не менее 10^{-4} . Там же указаны значения оценки погрешности для $I_{4,e}^{(nPC)}$, вычисленные по формуле (4.1.26), и значения $E_{\mathbf{n}} = |I_{4,e}^{(CC)} - I_{4,e}^{(nPC)}|$.

В случае выбора в качестве интерполяционных узлов подынтегральной функции в $I_{4,e}$ из (4.2.6) точек экстремумов полиномов Чебышёва (4.1.30) аналогично (4.2.5) интеграл $I_{4,e}$ записываем в виде

$$I_{4,e} = \frac{1}{\pi ab} \int_0^b \int_0^{a\sqrt{b^2-y^2}/b} \int_0^{2\pi} \int_{\delta}^{\pi-\delta} f_e(x, y, \varphi, \theta) dy dx d\varphi d\theta = \frac{(\frac{\pi}{2} - \delta)}{4} \times$$

$$\times \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f_e(x(y', x'), y(y'), \varphi(\varphi'), \theta(\theta')) \sqrt{4 - (y' + 1)^2} dx' dy' d\varphi' d\theta', \quad (4.2.10)$$

$$\theta(\theta') = \theta' \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) + \frac{\pi}{2}, \quad (4.2.11)$$

где $x(y', x')$, $y(y')$, $\varphi(\varphi')$ определяем по формулам (4.2.9).

Таблица 4.2.3 - Значения $I_{4,e}^{(nPC)}$ в зависимости от a , Kn и n_j ($j = \overline{1,4}$)

a, Kn, n_j	$I_{4,e}^{(CC)}$	$I_{4,e}^{(nPC)}$	$E_{\mathbf{n}}$	$E_{\mathbf{n}}^*$	$J_{T,M}$
$a = 1.1, Kn = 0.1$ $n_{1,2,3,4} = 16$	0.96458	0.96453	$4.6 \cdot 10^{-5}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	0.0768
$a = 10, Kn = 0.1$ $n_2 = 8, n_{1,4} = 16, n_3 = 32$	0.99114	0.99087	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$4.9 \cdot 10^{-4}$	0.0789
$a = 1.1, Kn = 1$ $n_{1,2,3,4} = 16$	0.50060	0.50059	$1.5 \cdot 10^{-5}$	$9.5 \cdot 10^{-5}$	0.3983
$a = 10, Kn = 1$ $n_2 = 8, n_{1,4} = 16, n_3 = 32$	0.63752	0.63758	$6.0 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	0.5073
$a = 1.1, Kn = 10$ $n_{1,2,3,4} = 32$	0.08695	0.08695	$7.7 \cdot 10^{-8}$	$4.5 \cdot 10^{-5}$	0.6919
$a = 10, Kn = 10$ $n_2 = 8, n_{1,4} = 16, n_3 = 32$	0.16036	0.16036	$7.6 \cdot 10^{-7}$	$2.2 \cdot 10^{-3}$	1.2761

Значения интеграла (4.2.10) при $\delta = 10^{-12}$ и $a \leq 2$ находим по формуле (4.1.40). В таблице 4.2.4 приведены эти значения, обозначенные как $I_{4,e}^{(ePC)}$, в

сравнении со значениями $I_{4,e}^{(CC)}$, полученными методом CubaCuhre и CubaSuave с точностью не менее 10^{-4} . Там же указаны значения оценки погрешности для $I_{4,e}^{(ePC)}$, вычисленные по формуле (4.1.26), и значения $E_n = |I_{4,e}^{(CC)} - I_{4,e}^{(ePC)}|$. Для уменьшения погрешности при $a > 2$ разбиваем отрезок интегрирования $[0; 2\pi]$ в (4.2.6) для переменной φ на два интервала точкой $\varphi = \pi$, которая соответствует точке экстремума $\varphi' = 0$ полинома Чебышёва $T_3(\varphi')$. Каждый, полученный таким образом, интервал для переменной φ согласно преобразованию (4.1.2) приводим к отрезку $[-1, 1]$. В результате имеем

$$I_{4,e} = \frac{(\frac{\pi}{2} - \delta)}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f'_e(x', y', \varphi', \theta') dx' dy' d\varphi' d\theta', \quad (4.2.12)$$

$$f'_e(x', y', \varphi', \theta') = \sum_{k=0}^1 f_e(x(y', x'), y(y'), \theta(\theta'), \varphi(\varphi', \varphi'_{k+1}, \varphi'_k)) \sqrt{4 - (y' + 1)^2},$$

$$\varphi(\varphi', \varphi'_{k+1}, \varphi'_k) = \frac{\varphi'(\varphi'_{k+1} - \varphi'_k) + (\varphi'_k + \varphi'_{k+1})}{2}, \quad \varphi'_k = \cos\left(\frac{\pi(2-k)}{2}\right), \quad k = \overline{0, 2},$$

где $x(y', x')$, $y(y')$ определяем по формулам (4.2.9), а $\theta(\theta')$ – в соответствии с (4.2.11).

Таблица 4.2.4 - Значения $I_{4,e}^{(ePC)}$ в зависимости от a , Kn и n_j ($j = \overline{1, 4}$)

a, Kn, n_j	$I_{4,e}^{(CC)}$	$I_{4,e}^{(ePC)}$	E_n	E_n^*	$J_{T,M}$
$a = 1.1, \text{Kn} = 0.1$ $n_{1,2,3,4} = 16$	0.96458	0.96451	$6.4 \cdot 10^{-5}$	$4.9 \cdot 10^{-4}$	0.0768
$a = 10, \text{Kn} = 0.1$ $n_2 = 8, n_{1,3,4} = 16$	0.99114	0.99095	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	0.0789
$a = 1.1, \text{Kn} = 1$ $n_{1,2,3,4} = 16$	0.50060	0.50057	$2.7 \cdot 10^{-5}$	$7.3 \cdot 10^{-4}$	0.3983
$a = 10, \text{Kn} = 1$ $n_2 = 8, n_{1,3,4} = 16$	0.63752	0.63749	$3.2 \cdot 10^{-5}$	$4.5 \cdot 10^{-4}$	0.5073
$a = 1.1, \text{Kn} = 10$ $n_{1,2,3,4} = 32$	0.08695	0.08695	$8.5 \cdot 10^{-7}$	$3.3 \cdot 10^{-5}$	0.6919
$a = 10, \text{Kn} = 10$ $n_2 = 8, n_{1,3,4} = 16$	0.16036	0.16036	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$4.0 \cdot 10^{-4}$	1.2762

Значения приведенных потоков тепла и массы газа в прямоугольном канале и каналах, имеющих внутренний цилиндрический элемент, получены ана-

логично и представлены в главах 2 и 3. Причем, в главе 3 в рамках зеркально-диффузной модели отражения молекул газа стенками прямоугольного и эллиптического каналов задание подинтегральной функции (3.3.33) происходит рекурсивно согласно (3.3.10). Предложенные в этом случае алгоритмы включают определение параметров T_1 , T_2 , и т.д. через переменные x , y , φ (подробное описание которых приведено в разделах 3.3 и 3.4) и проведение цикла вычислений по схеме (3.3.10). Полученные в рамках формул (3.3.16) и (3.4.5) выражения для параметров T_1 , T_2 , и т.д. согласуются с геометрическими моделями максвелловского взаимодействия молекул газа со стенками каналов, которые представлены в виде независимых программ с графическим интерфейсом для прямоугольного и эллиптического каналов. Это позволило оптимизировать процедуры расчетов макропараметров и адекватно описать это взаимодействие.

Функции для построения профилей компонент вектора потока тепла и массовой скорости газа в каналах на основе формул, полученных в главах 2 и 4, реализованы с использованием библиотек `plots`, `plottools`. При этом была использована полярная система координат для кругового цилиндра и канала, образованного двумя цилиндрами. Для остальных рассмотренных каналов построения компонент вектора потока тепла и макроскопической скорости выполнены в декартовой системе координат с использованием структурированной сетки в фазовом пространстве. С учетом симметрии сечения канала относительно координатных осей рассматривалась область из первого квадранта. Путем конформного отображения для каждой точки (x', y') из прямоугольника $[0, 1] \times [0, 1]$ с необходимым количеством узлов была сопоставлена точка (x, y) из рассматриваемой области: $x = x_1 + (x_2 - x_1)x'$, $y = y_1 + (y_2 - y_1)y'$, где $x_1 \leq x \leq x_2$, $y_1 \leq y \leq y_2$, при этом $x_{1,2}$ или $y_{1,2}$ являются константами. Данное разбиение позволило выполнить построение профиля вектора потока тепла и массовой скорости газа в каналах с поперечным сечением сложной формы (эллиптический, прямоугольный с внутренним цилиндрическим элементом) во всем диапазоне изменения числа Kn .

4.3 Описание программного комплекса

На базе приведенных в главах 2 и 3 математических моделей процессов тепло- и массопереноса газа в каналах и алгоритмов определения продольной составляющей вектора потока тепла, массовой скорости газа, приведенных потоков построен программный комплекс для расчета этих макропараметров. Программный комплекс реализован в системе компьютерной алгебры Maple 18 с применением объектно-ориентированного подхода. Схема программного комплекса показана на рисунке 4.3.1. Одним из элементов этого комплекса является графический интерфейс пользователя, который представляет собой Maplet с функциональными возможностями Java-приложений. Данный компонент реализован с использованием библиотек Maplets, Elements, Tools. Компонент, отвечающий за логику взаимодействия с пользователем и осуществляющий обработку поступающих данных, обеспечивает логически правильное заполнение полей формы (рисунок 4.3.2), согласовывая работу вычислительных процедур. Его реализация осуществлена в виде кода, который отвечает за обработку событий, генерируемых пользователем. Числовые значения параметров, введенные в текстовые поля диалоговых окон Maplets, поступают в модуль логики обработки данных, где происходит инкапсуляция алгоритмов вычислений макропараметров газа и формирование управляющих структур для исполнения maplew.exe. В результате с помощью определения таких конструкций в программах предусмотрена возможность модифицировать предложенные в исследовании алгоритмы расчетов независимо от компонентов визуализации представленных программ.

Программный комплекс имеет следующие функциональные возможности:

- расчета приведенных потоков в прямоугольном, цилиндрическом, эллиптическом каналах и каналах, содержащих внутренний цилиндр, в задачах о тепловом крипе и течении Пуазейля для промежуточного и свободномолекулярного режимов течения газа;
- построения графиков распределений компонент вектора потока тепла и

массовой скорости газа в каналах в виде поверхностей в зависимости от конфигурации сечения, режима течения и модели взаимодействия молекул газа со стенками канала;

- динамической визуализации геометрических моделей максвелловского взаимодействия молекул газа со стенками прямоугольного, эллиптического каналов;
- геометрической интерпретации подхода к заданию области определения функции распределения молекул газа при диффузном отражении в прямоугольном канале с внутренним цилиндрическим элементом.

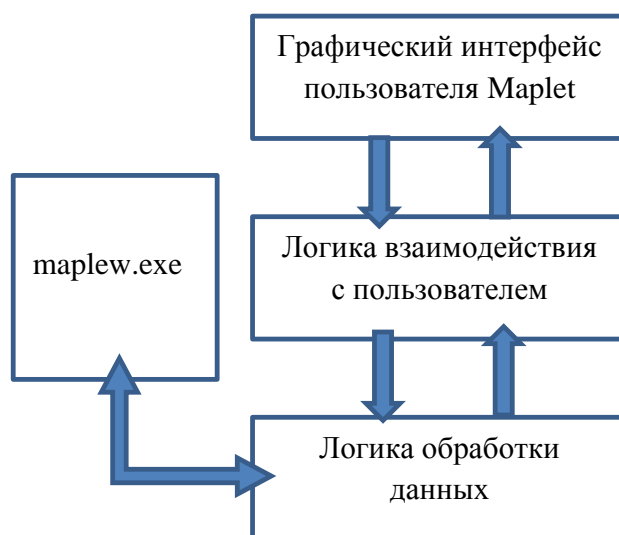


Рисунок 4.3.1 - Схема программного комплекса

Предложенный комплекс включает в себя следующие программы: "Расчет макропараметров газа в канале, образованном двумя цилиндрическими поверхностями", "Расчет макропараметров газа в эллиптическом канале", "Расчет макропараметров газа в прямоугольном канале", "Зеркально-диффузная модель в эллиптическом канале", "Зеркально-диффузная модель в прямоугольном канале", "Вычисление значений потоков тепла и массы разреженного газа в длинном прямоугольном канале с внутренним круговым цилиндрическим элементом". Каждая из представленных программ расчета макропараметров газа в канале отражает один из результатов моделирования процессов тепло- и массопереноса, полученных в главах 2 и 3. Выбор задачи динамики

разреженного газа определяется пользователем путем нажатия на соответствующую кнопку в главном диалоговом окне программы. На рисунке 4.3.2 слева показан вид этого диалогового окна для программы "Расчет макропараметров газа в канале, образованном двумя цилиндрическими поверхностями". При нажатии на кнопку "Тепловой крип" появляется соответствующее диалоговое окно, в котором одновременно с выбором режима течения осуществляется задание отношения геометрических размеров поперечного сечения канала к характерному масштабному коэффициенту, ввод значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа и числа Кнудсена для промежуточного режима течения (рисунок 4.3.2). В результате после нажатия кнопки "Вычислить" происходит вычисление значений приведенных потоков тепла и массы газа в канале. Построение в графической области трехмерных графиков распределения компонент вектора потока тепла и массовой скорости газа осуществляется на основе ранее полученных формул в главах 2 и 3. Алгоритм построения данных поверхностей был представлен в разделе 4.1. Вид диалогового окна "Течение Пуазейля" аналогичен показанному на рисунке 4.3.2 справа.

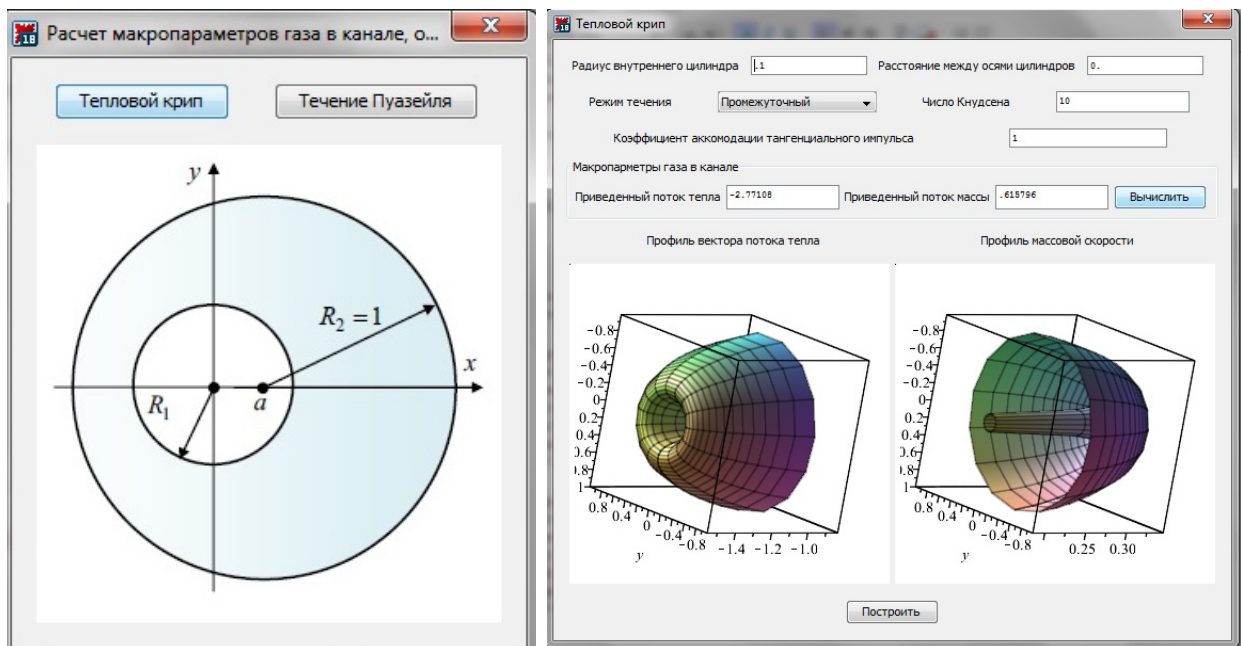


Рисунок 4.3.2 - Диалоговые окна программы "Расчет макропараметров газа в канале, образованном двумя цилиндрическими поверхностями"

Динамическая визуализация геометрических моделей максвелловского взаимодействия молекул газа со стенками прямоугольного, эллиптического каналов выполнена в программах "Зеркально-диффузная модель в эллиптическом канале" и "Зеркально-диффузная модель в эллиптическом канале".

ском канале” и ”Зеркально-диффузная модель в прямоугольном канале”. Данные программы позволяют восстановить динамически траектории движения точек до момента последнего столкновения молекул газа с поверхностью канала в сечениях, перпендикулярных осям указанных каналов, в зависимости от положения этой точки и полярного угла компоненты вектора молекулярной скорости в этом сечении. Вид диалогового окна ”Зеркально-диффузная модель в эллиптическом канале” представлен на рисунке 4.3.3. Технология создания управляемой динамической графической модели максвелловского взаимодействия в этом случае заключается в следующем: с помощью процедур `plot`, `pointplot`, `implicitplot` и `animate`, библиотек `plot` и `plottools` в системе Maple происходит формирование графических статических (сечение канала, положение точек в моменты соударения) и графических динамических объектов (траектории движения), которые процедурой `display` объединяются в единый графический объект.

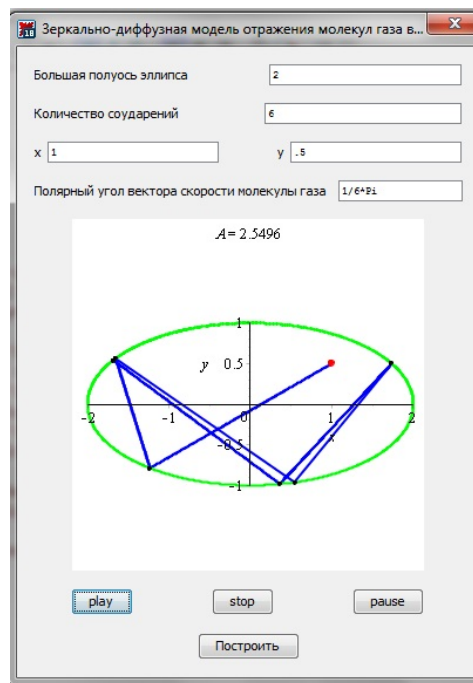


Рисунок 4.3.3 - Диалоговое окно программы ”Зеркально-диффузная модель в эллиптическом канале”

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ ”Вычисление значений потоков тепла и массы разреженного газа в длинном прямоугольном канале с внутренним круговым цилиндрическим элементом” и листинг этой программы представлены в приложениях А и В, соответственно.

Таким образом, разработанный программный комплекс предлагает удобные инструменты, которые позволяют осуществлять расчеты макропараметров газа в рамках построенных математических моделей процессов тепло- и массопереноса газа в каналах. Результаты проведенных расчетов с использованием этого программного комплекса представлены в конце каждого раздела в главах 2 и 3. Там же проведен сравнительный анализ с аналогичными результатами, полученными в рамках БГК и S-моделей и с экспериментальными данными для цилиндрического канала.

4.4 Выводы из главы 4

1. Предложены вычислительные алгоритмы для расчета макропараметров газа в каналах с использованием полиномов Чебышёва.

2. Проведены верификационные расчеты, которые показали, что разработанные алгоритмы обеспечивают необходимую точность вычислений потоков газа в каналах с различной геометрией поперечного сечения в промежуточном режиме при использовании диффузной и зеркально-диффузной моделей отражения молекул газа.

3. Представлен и описан программный комплекс, включающий в себя программы для вычисления значений приведенных потоков тепла и массы газа в этих каналах, а также построения сложных динамически управляемых геометрических моделей компонент массовой скорости и вектора потока тепла. Приведена структура разработанного комплекса и рассмотрены его основные элементы и инструменты моделирования с описанием функциональных возможностей.

4. По результатам проведенного исследования оформлено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Заключение

Диссертация представляет собой завершённую научно-квалификационную работу, в которой на основании проведенного исследования получены решения задач математического моделирования процессов тепло- и массопереноса в каналах при произвольных значениях числа Кнудсена и коэффициента аккомодации тангенциального импульса, которая вносит существенный вклад в развитие кинетической теории разреженного газа и имеет важное значение для таких отраслей промышленности, как вакуумная и микро- и наноэлектронная.

В представленной работе получены следующие значимые научные результаты.

1. Разработан комплексный подход к моделированию течений разреженного газа с применением аналитических методов для построения решений кинетического модельного уравнения с частотой, пропорциональной молекулярной скорости, и численных методов для получения значений потоков тепла и массы газа в микро- и наноканалах технических систем.

2. Получены аналитические решения задач о тепловом крипе и течении Пуазейля в длинных микро- и наноканалах в зависимости размеров и конфигураций их поперечных сечений, значений коэффициента аккомодации тангенциального импульса и числа Кнудсена.

3. Для промежуточного режима течения газа с использованием предложенного комплексного подхода построены математические модели процессов переноса в прямоугольном, цилиндрическом, эллиптическом каналах и каналах, содержащих внутренний цилиндр, в рамках задач о тепловом крипе и течении Пуазейля.

4. В рамках построенных моделей получены распределения вектора потока тепла и массовой скорости газа в поперечных сечениях каналов, вычислены значения приведенных потоков тепла и массы газа. Показано, что выражения для макроскопических величин в свободномолекулярном режиме согласуются с результатами, полученными на основе уравнения Больцмана для бесстолкновительного газа.

5. Предложены эффективные алгоритмы расчета макропараметров газа с использованием полиномов Чебышёва. Выполненный в работе анализ полученных результатов показал, что предложенные алгоритмы позволяют получать верифицированные наборы значений макропараметров газа для произвольных значений числа Кнудсена при диффузном и зеркально-диффузном отражениях молекул газа от внутренних поверхностей каналов.

6. В результате проведенного на основе полученных математических моделей вычислительного эксперимента показано существенное влияние наличия цилиндрического элемента и отклонения коэффициента аккомодации тангенциального импульса от единичного значения на макропараметры газа в каналах с размерами, сопоставимыми со средней длиной сводного пробега частиц газа.

7. Полученные в представленном диссертационном исследовании результаты могут быть применены для решения многих практически важных задач при разработке и модернизации микро- и наноэлектронных систем, а также в высшей школе при подготовке инженерных и научных кадров.

Список литературы

- [1] Шарипов, Ф.М. Движение разреженных газов в каналах и микроканалах / Ф.М. Шарипов, В.Д. Селезнев. – Екатеринбург: УрО РАН, 2008. – 230 с.
- [2] Bharat, B. Springer Handbook of Nanotechnology / B. Bharat. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2017. – 1500 p.
- [3] Akhlaghi, H. Study of Physical Aspects of Rarefied Gas Flow Through Micro/Nano Scale Channels Using DSMC / H. Akhlaghi, A. Rangrazi, E. Roohi // Arab J Sci Eng. – 2014. – Vol. 39. – Pp. 2331–2338.
- [4] Конопелько, Н.А. Нестационарное течение разреженного газа в микроканале из-за распада разрыва давления / Н.А. Конопелько, В.А. Титарев, Е.М. Шахов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2016. – Т. 56, № 3. – С. 476–489.
- [5] Naris, S. Rarefied gas flow in a triangular duct based on a boundary fitted lattice / S. Naris, D. Valougeorgis // European J. Mechanics. B/Fluids. – 2008. – Vol. 27. – Pp. 810–822.
- [6] Graur, I. Rarefied gas flow through a long rectangular channel of variable cross section / I. Graur, M.T. Ho // Vacuum. – 2014. – Vol. 101. – Pp. 328–332.
- [7] Клосс, Ю. Ю. Компьютерное моделирование и анализ технических характеристик термомолекулярных микронасосов / Ю. Ю. Клосс, Д. В. Мартынов, Ф. Г. Черемисин // Журнал технической физики. – 2011. – Т. 81, №7. – С. 141–148.
- [8] Клосс, Ю. Ю. Компьютерное моделирование и анализ насоса Холвека в переходном режиме / Ю. Ю. Клосс, Д. В. Мартынов, Ф. Г. Черемисин // Журнал технической физики. – 2012. – Т. 82, №4. – С. 25–30.
- [9] Experimental study of the influences of degraded vacuum on multilayer insulation blankets / P.J. Sun, J.Y. Wu, P. Zhang, et al. // Cryogenics. – 2009. – Vol. 49 – Pp. 719–726.

- [10] Pantazis, S. Heat transfer through rarefied gases between coaxial cylindrical surfaces with arbitrary temperature difference / S. Pantazis, D. Valougeorgis // European Journal of Mechanics – B/Fluids. – 2010. – Vol. 29, no 6. – Pp. 494–509.
- [11] Кошмаров, Ю. А. Прикладная динамика разреженного газа / Ю. А. Кошмаров, Ю. А. Рыжов. – М.: Машиностроение, 1977. – 184 с.
- [12] Chikitkin, A.V. OpenMP + MPI parallel implementation of a numerical method for solving a kinetic equation / A.V. Chikitkin, V.A. Titarev, S.V. Utyuzhnikov // Comput. Math. Math. Phys. – 2016. – Vol. 56, no 4. – Pp. 1919–1928.
- [13] Loyalka, S.K. Thermal transpiration in a cylindrical tube / S.K. Loyalka // Phys. Fluids. – 1969. – Vol. 12. – Pp. 2301-2305.
- [14] Loyalka, S.K. Kinetic theory of thermal transpiration and mechanocaloric effect. I / S.K. Loyalka // J. Chem. Phys. – 1971. – Vol. 55, no 9. – Pp. 4497–4503.
- [15] Loyalka, S.K. Kinetic theory of thermal transpiration and mechanocaloric effect. II/ S.K. Loyalka // J. Chem. Phys. 1975. – Vol. 63, no 9. – Pp. 4054–4060.
- [16] Латышев, А.В. Аналитические решения граничных задач для кинетических уравнений / А.В. Латышев, А.А. Юшканов. – М.: МГОУ, 2004. – 286 с.
- [17] Попов, В.Н. Аналитическое решение задачи о течении Пуазейля / В.Н. Попов, И.В. Тестова, А.А. Юшканов // Журнал Средневолжского математического общества. – 2010. – Т. 12, № 3. – С. 111–121.
- [18] Попов, В.Н. Аналитическое решение задачи о течении Куэтта в плоском канале с бесконечными параллельными стенками / В.Н. Попов, И.В. Тестова, А.А. Юшканов // Журнал технической физики. – 2011. – Т. 81, № 1. – С. 53–58.

- [19] Латышев, А.В. *Граничные задачи для молекулярных газов* / А.В. Латышев, А.А. Юшканов. – М.: МГОУ, 2005. – 264 с.
- [20] Попов, В. *Математическое моделирование течений газа в каналах. Монография.* / В. Попов, И. Тестова, А. Юшканов. – LAP LAMBERT Academic publishing, 2012. – 116 с.
- [21] Латышев, А.В. *Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения* / А.В. Латышев, А.А. Юшканов. – М.: МГОУ, 2004. – 271 с.
- [22] Гулакова, С.В. *Аналитическое решение задачи о течении Куэтта для произвольных значений числа Кнудсена* / С.В. Гулакова, В.Н. Попов // *Инженерно физический журнал.* – 2014. – Т. 87, № 4. – С. 953–960.
- [23] Гулакова, С.В. *Математическое моделирование процессов переноса в задаче о течении Пуазейля на основе уравнения Вильямса* / С.В. Гулакова, В.Н. Попов // *Вестник Северного (Арктического) федерального университета. Серия "Естественные науки".* – 2013, №4. – С. 84–89.
- [24] Лукашев В.В. *Моделирование процессов переноса в задаче о течении Куэтта при неполной аккомодации тангенциального импульса молекул газа стенками канала* / В.В. Лукашев, В. Н. Попов, А. А. Юшканов // *Матем. моделирование.* – 2013. – Т. 25, №2. – С. 111-124.
- [25] Лукашев, В.В. *Аналитическое решение задачи о тепловом крипе* / В.В. Лукашев, В.Н. Попов // *Журнал Средневолжского математического общества.* – 2013. – Т. 15, № 1. – С. 90-101.
- [26] Гулакова, С.В. *Аналитическое решение уравнения Вильямса в задаче о течении Пуазейля с использованием зеркально-диффузной модели взаимодействия молекул газа со стенками канала* / С.В. Гулакова, В.Н. Попов // *Журнал технической физики.* – 2015. – Т. 85, № 4. – С. 1–6.
- [27] Gulakova, S.V. *Analytical solution of the Couette flow problem for arbitrary values of the knudsen number* / S.V. Gulakova, V.N. Popov // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* – 2014. – Т. 87, №4. – С. 988–996.

- [28] Gas-surface scattering effect on vacuum gas flows through rectangular channels / C. Day, V. Hauer, S. Pantazis, et al. // *Vacuum*. – 2011. – Vol. 85. – Pp. 1161–1164.
- [29] Sharipov, F.M. Rarefied gas flow through a long rectangular channel/ F.M. Sharipov// *J. Vac. Sci. Technol. A*. – 1999. – Vol. 17, no 5. – Pp. 3062–3066.
- [30] Sharipov, F.M. Non-isothermal gas flow through rectangular microchannels/ F.M. Sharipov // *J. Micromech. Microeng.* – 1999. – Vol. 9, no 4. – Pp. 394–401.
- [31] Титарев, В.А. Кинетический анализ изотермического течения в длинном микроканале прямоугольного поперечного сечения/ В.А. Титарев, Е.М. Шахов // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* – 2010. – Т. 50, № 7. – С. 1285–1302.
- [32] Rykov, V. A. Rarefied Poiseuille Flow in Elliptical and Rectangular Tubes/ V. A. Rykov, V. A. Titarev, E. M. Shakhov // *Fluid Dynamics*. – 2011. – Vol. 46, № 3. – Pp. 456–466.
- [33] Graur, I. Gas flow through an elliptical tube over the whole range of the gas rarefaction / I. Graur, F. Sharipov // *European Journal of Mechanics B / Fluids*. – 2008. – Vol. 27. – Pp. 335–345.
- [34] Graur, I. Non-isothermal flow of rarefied gas through a long pipe with elliptic cross section / I. Graur, F. Sharipov // *Microfluid Nanofluid*. – 2009. – Vol. 6. – Pp. 267–275.
- [35] Barichello, L.B. A closed-form solution of a kinetic integral equation for rarefied gas flow in a cylindrical duct/ L.B. Barichello, C.H. Kamphorst, P. Rodrigues // *Applied Mathematics*. – 2014. – Vol. 5. – Pp. 1516–1527.
- [36] Lo, S.S. An efficient computation of near-continuum rarefied gas flows/ Lo S.S., S.K. Loyalka // *Z. Angew. Math. Phys.* – 1982. – Vol. 33 – Pp. 419–424.
- [37] Siewert, C.E. Poiseuille and thermal-creep flow in a cylindrical tube/ C.E. Siewert// *Journal of Computational Physics*. – 2000. – Vol. 160. – Pp. 470–480.

- [38] Siewert, C.E. An analytical discrete-ordinates solution of the S-model kinetic equations for flow in a cylindrical tube/ C.E. Siewert, D. Valougeorgis// J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. – 2002. – Vol. 72. – Pp. 531–550.
- [39] Seleznev, V., Rarefied gas flow through a long tube at any pressure ratio/ V. Seleznev, F. Sharipov// J. Vac. Sci. Technol. A. – 1994. – Vol. 12, № 5. – Pp. 2933–2935
- [40] Sharipov, F. Rarefied gas flow through a long tube at any temperature ratio/ F. Sharipov//J. Vac. Sci. Technol. – 1996. – Vol. 14, № 4. – Pp. 2627–2635.
- [41] Thomas, J.R. Exact numerical results for Poiseuille and thermal creep flow in a cylindrical tube/ J.R. Thomas, D. Valougeorgis//Phys. Fluids. – 1986. – Vol. 29, № 2. – Pp. 423–429.
- [42] Породнов, Б.Т. Применение вариационного метода к задаче о термомолекулярной разности давлений в цилиндрическом канале/ Б. Т. Породнов, П. Е. Суетин, В.Г. Черняк// Инженерно физический журнал. – 1974. – Т. 26, № 3. – С. 446–450.
- [43] Boutebba, S. Slip flow and heat transfer through a rarefied nitrogen gas between two coaxial cylinders / S. Boutebba, W. Kaabar // J. Chem. Pharm. Res. – 2016. – Vol. 8, № 8. – Pp. 495–501.
- [44] Taheri, P. Poiseuille flow of moderately rarefied gases in annular channels/ P. Taheri, H. Struchtrup // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2012. V. 55 – Pp. 1291–1303
- [45] Шахов, Е. М. Течение разреженного газа между коаксиальными цилиндрами под действием градиента давления/ Е. М. Шахов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2003. – Т. 43, № 7. – С. 1107–1116
- [46] Computational and experimental study of gas flows through long channels of various cross sections in the whole range of the knudsen number. / C. Day, V. Hauer, S. Pantazis, et al. // J Vac Sci Technol A. – 2009. – Vol. 27. – Pp. 89–100

- [47] Study of the thermomolecular pressure difference phenomenon in thermal creep flows through microchannels of triangular and trapezoidal cross sections / Y. Lihnaropoulos, S. Naris, K. Ritos, et al. // 2nd Micro and Nano Flows Conference, Brunel University, West London, UK. 2009.
- [48] Титарев, В.А., Шахов, Е.М., Неизотермическое течение газа в длинном канале на основе кинетической S-модели / В.А. Титарев, Е.М. Шахов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2010 – Т. 50, №12. – С. 2246–2260.
- [49] Proskurin, A.V. Modeling Duct Flow by the R-Function Method / A.V. Proskurin, A.M. Sagalakov // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2016. – Vol. 10, no 3. – Pp. 429–434.
- [50] Geometry effects on rarefied nanochannel flows / J. Kim, A.J.H. Frijns, S.V. Nedeя, et al. // Microfluidics and Nanofluidics. – 2013. – Vol. 15. – Pp. 661–673.
- [51] Коган, М.Н. Динамика разреженного газа. Кинетическая теория / М.Н. Коган. – М.: Наука, 1967. – 440 с.
- [52] Welander, P. On the temperatura jump in a rarefied gas / P. Welander // Arkiv for Fysik. – 1954. – Vol. 7, no 44 – Pp. 507–564.
- [53] Bhatnagar, P.L. Model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one component systems / P.L. Bhatnagar, E.M. Gross, M. Krook // Phys.Review. – 1954. – Vol. 94, no 3. – Pp. 511–525.
- [54] Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана / К. Черчиньяни. – М.: Мир. 1978. 495 с.
- [55] Mass flow rate measurement of thermal creep flow from transitional to slip flow regime / H. Yamaguchi, P. Perrier, M.T. Ho et al. // J. Fluid Mech. – 2016. – Vol. 795. – Pp. 690–707.
- [56] Arkilic, E.B. Mass flow and tangential momentum accommodation in silicon micromachined channels / E.B. Arkilic, K.S. Breuer, M.A. Schmidt // J. Fluid Mech. – 2001. – Vol. 437 – Pp. 29–43.

- [57] Tangential momentum accommodation in microtube / T. Ewart, I. Graur, P. Perrier, et al. // *Microfluidics and Nanofluidics*. – 2006. – Vol. 41. – Pp. 487–498
- [58] Tangential momentum accommodation in microtube / T. Ewart, I. Graur, P. Perrier, et al. // *Microfluidics and Nanofluidics*. – 2007. – Vol. 26, no. 6. – Pp. 689–695
- [59] Second-order slip laws in microchannels for helium and nitrogen / Maurer J, Tabeling P, Joseph P, et al // *Phys Fluids*. – 2003. – Vol. 15 – Pp. 2613–2621.
- [60] Hadj-Nacer, M. Tangential momentum accommodation coefficient in microchannels with different surface materials (measurements and simulations) / M. Hadj-Nacer. – These de doctorat. Universite d'aix Marseille. – 2012. – 210 p.
- [61] Silva, E. Experimental analysis of velocity slip at the wall for gas flows of nitrogen, R134a, and R600a through a metallic microtube / E. Silva, M. Rojas-Cardenas, C.J. Deschamps // *International Journal of Refrigeration*. – 2016. – Vol. 66. – Pp. 121–132.
- [62] Борисов, С.Ф. Влияние адсорбционного покрытия поверхности на молекулярный теплообмен в системе разреженный газ-металл / С.Ф. Борисов, Б.Т. Породнов, А.И. Ухов // *Теплофизика и аэромеханика*. – 2010. – Т. 17, № 1. – С. 141–150
- [63] Loh, H.T. *Modern Developments in Gas Dynamics* / H.T. Loh. – New York: Plenum Press, 1969 – 385 p.
- [64] Wang, K. Analytical characterization of gaseous slip flow and heat transport through a parallel-plate microchannel with a centered porous substrate / K. Wang, K. Vafai, D. Wang. // *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. – 2016. – Vol. 26, no 3-4. – Pp. 854–878.
- [65] Гермидер, О.В. Математическое моделирование процесса переноса тепла в прямоугольном канале в зависимости от числа Кнудсена / О.В. Гермидер, В.Н. Попов // *Журнал Средневолжского математического общества*. – 2016. – Т. 18, №2. – С. 85–93.

- [66] Germider, O.V. Computation of the gas mass and heat fluxes in a rectangular channel in the free molecular regime / O.V. Germider, V.N. Popov, A.A. Yushkanov // *Technical Physics*. – 2016. – Vol. 61, no 835. – Pp. 835–840.
- [67] Гермидер, О.В. Математическое моделирование процесса переноса тепла в прямоугольном канале в задаче о течении Пуазейля / О.В. Гермидер, В.Н. Попов // *Сибирские электронные математические известия*. – 2016. – Т. 13. – С. 1401–1409.
- [68] Гермидер, О.В. Математическое моделирование процесса теплопереноса в длинном цилиндрическом канале / О.В. Гермидер, В.Н. Попов, А.А. Юшканов // *Журнал Средневолжского математического общества*. – 2015. – Т. 17, №1. – С. 22–29.
- [69] Germider, O.V. Computation of the heat flux in a cylindrical duct within the framework of the kinetic approach / O.V. Germider, V.N. Popov, A.A. Yushkanov // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. – 2016. – Vol. 89, no 5. – Pp. 1338–1343.
- [70] Germider, O.V. Heat transfer process in an elliptical channel / O.V. Germider, V.N. Popov, A.A. Yushkanov // *Mathematical Models and Computer Simulations*. – 2017. – Vol. 9, no 521. – Pp. 521–528.
- [71] Germider, O.V. Mathematical simulation of heat transfer in an elliptic channel under the action of a pressure gradient / O.V. Germider, V.N. Popov, A.A. Yushkanov // *Technical Physics*. – 2017. – Vol. 62, no 3. – Pp. 355–358.
- [72] Germider, O.V. Mathematical simulation of transfer processes in an elliptical channel in a free molecular regime / O.V. Germider, V.N. Popov, A.A. Yushkanov // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. – 2017. – Vol. 11, no 347. – Pp. 347–353.
- [73] Germider, O.V. Mathematical modelling of the mass transfer process between two coaxial cylinders in the problem of thermal creep / O.V. Germider, V.N. Popov // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. – 2016. – Vol. 158, no 1.

- [74] Germider, O.V. Analytical solution of the problem of heat transfer in rarefied gas between two coaxial cylinders / O.V. Germider, V.N. Popov, A.A. Yushkanov // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2017. – Vol. 58, no 2. – Pp. 285–290.
- [75] Гермидер, О.В. Математическое моделирование течения разреженного газа в прямоугольном канале с внутренним цилиндрическим элементом / О.В. Гермидер, В.Н. Попов // Сибирские электронные математические известия. – 2017. – Т. 14. – С. 518–527.
- [76] Латышев, А.В. Аналитическое решение граничных задач кинетической теории / А.В. Латышев, А.А. Юшканов. – М.: МГОУ, 2004. – 286 с.
- [77] Черчиньяни, К. Математические методы в кинетической теории газов / К. Черчиньяни. – М.: Мир, 1973. – 245 с.
- [78] Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М.: Мир, 1964 – 830 с.
- [79] Кулев, А.Н. Экспериментальное исследование неизотермического течения газов в капиллярах: Дис. канд. физ.-мат. наук. У ПИ. / А.Н. Кулев. – Свердловск, 1977 – 177 с.
- [80] Experimental investigation of rarefied gas flow in different channels / V.D. Akinshin, S.F. Borisov, V.T. Porodnov et al. // J. Fluid Mech. – 1974. – Vol. 64. – Pp. 417–437.
- [81] Experimental measurement on tangential momentum accommodation coefficient in a single microtube / H. Yamaguchi, T. Hanawa, O. Yamamoto et al. // Microfluid Nanofluid. – 2011. – Vol. 11, no 57. – Pp. 57–64.
- [82] Калинин, В.В. К теории неизотермического движения газа в плоском канале / В.В. Калинин, П.Е. Суетин, В.Г. Черняк // Инженерно физический журнал. – 1979. – Т. 36, №6. – С. 1059–1065.
- [83] Siewert, C.E. Poiseuille, thermal creep and Couette flow: results based on the CES model of the linearized Boltzmann equation / C.E. Siewert // European Journal of Mechanics B/Fluids. – 2002. – Vol. 21 – Pp. 579–597.

- [84] Hickey, K.A. Kinetic theory of thermal transpiration and the mechanocaloric effect: Planar flow of a rigid sphere gas with arbitrary accommodation at the surface / K.A. Hickey, S.K. Loyalka // *J. Vac. Sci. Technol. A.* – 1991. – Vol. 9, no 1. – Pp. 158–163.
- [85] Siewert, C.E. The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems / C.E. Siewert // *Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik.* – 2003. – Vol. 54. – Pp. 273–303.
- [86] Лесскис, А.Г. Магнитное дипольное поглощение инфракрасного излучения мелкой металлической частицей / А.Г. Лесскис, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов // *Поверхность.* – 1987. – Т. 11. – С. 115–121.
- [87] Завитаев, Э.В. Влияние характера отражения электронов от поверхности на электрические свойства цилиндрической частицы / Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов // *Физика низких температур.* – 2005. – Т. 31, №12. – С. 1381–1387.
- [88] Завитаев, Э.В. Влияние характера отражения электронов на электромагнитные свойства неоднородной цилиндрической частицы / Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов // *Физика твердого тела.* – 2005. – Т. 47, №7. – С. 1153–1161.
- [89] Germider, O.V. Mathematical simulation of heat and mass transfer in a cylindrical channel versus the tangential momentum accommodation coefficient / O.V. Germider, V.N. Popov // *Technical Physics.* – 2017. – Vol. 62, no 11. – Pp. 1605–1610.
- [90] Germider, O.V. Heat and mass fluxes upon incomplete accommodation of rarefied gas molecules by the walls of an elliptic channel / O.V. Germider, V.N. Popov // *Fluid Dynamics.* – 2017. – Vol. 52, no 5. – Pp. 695–701.
- [91] Гермидер, О.В. Математическое моделирование процессов переноса в цилиндрическом канале / О.В. Гермидер, В.Н. Попов // *Журнал Средневолжского математического общества.* – 2018. – Т. 20, №1. – С. 64–77.
- [92] Handscomb, D.C. Modern Developments in Gas Dynamics / D.C. Handscomb, J.C. Mason. – Florida: CRC Press, 2003. – 335 p.

- [93] Clenshaw, C.W. A method for numerical integration on an automatic computer / C.W. Clenshaw, A.R. Curtis // Num. Math. – 1960. – Vol. 2. – Pp. 197-205.
- [94] Genz, A. Subregion Adaptive Integration of Functions Having a Dominant Peak / A. Genz, R.E. Kass // Carnegie Mellon University, Dept. of Statistics. technical report – 1993. – Pp. 1–19.
- [95] O’Hara, H. Error estimation in the Clenshaw-Curtis quadrature formula / H. O’Hara, Francis J. Smith // Compu. J. – 1968 – Vol. 11 – Pp. 213–219.
- [96] Hahn, T. Cuba – a library for multidimensional numerical integration / T. Hahn // Computer Physics Communications. – 2005. – Vol. 168, no 2. – Pp. 78–95.
- [97] Hahn, T. Cuba – a library for multidimensional numerical integration / T. Hahn // Computer Physics Communications. – 2007. – Vol. 176, no 11–12. – Pp. 712–713.
- [98] Bernstein, J. Algorithm 698: DCUHRE: an adaptive multidimensional integration routine for a vector of integrals / J. Bernstein, T. Espelid, A. Genz // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). – 1991 – Vol. 17., no 4 – Pp. 452–456.
- [99] Соболев И.М. О распределении точек в кубе и приближенном вычислении интегралов / И.М. Соболев // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1967 – Т. 7, №4 – С. 784–802

Приложение А.

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2017619922

**Вычисление значений потоков тепла и массы разреженного
газа в длинном прямоугольном канале с внутренним
круговым цилиндрическим элементом**

Правообладатель: *Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования «Северный
(Арктический) федеральный университет имени М.В.
Ломоносова» (RU)*

Авторы: *Гермидер Оксана Владимировна (RU),
Попов Василий Николаевич (RU)*



Заявка № 2017616856

Дата поступления 13 июля 2017 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 11 сентября 2017 г.

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев Г.П. Ивлиев

Приложение В.

Листинг программы ” Вычисление значений потоков тепла и массы разреженного газа в длинном прямоугольном канале с внутренним круговым цилиндрическим элементом ”

```
restart;
with(Maplets[Elements]):
with (Maplets[Tools]):
with(plots):
with(plottools):
cx1:=(x,y,p)->-r*(-r*x^2+p*sqrt(-x^2*(r^2-x^2-y^2))*y)/((x^2+y^2)*x);
cy1:=(x,y,p)->(r*y+p*sqrt(-x^2*(r^2-x^2-y^2)))*r/(x^2+y^2);
xp1:=(x,y,p,yp)->-cy1(x,y,p)/cx1(x,y,p)*(yp-cy1(x,y,p))+cx1(x,y,p);
yp1:=(x,y,p,xp)->-cx1(x,y,p)/cy1(x,y,p)*(xp-cx1(x,y,p))+cy1(x,y,p);
t:=(x,y,phi)->[-(2*y-1)/sin(phi),-(2*x+a)/cos(phi),-(2*y+1)
/sin(phi),-(2*x-a)/cos(phi)];
phi1:=(x,y)->[arctan((2*y-1)/(2*x-a))+Pi,arctan((2*y-1)
/(2*x+a))+2*Pi,arctan((2*y+1)/(2*x+a))+2*Pi,
arctan((2*y+1)/(2*x-a))+3*Pi];
phi2:=(x,y)->[arctan((2*y-1)/(2*x+a))+2*Pi,arctan((2*y+1)
/(2*x+a))+2*Pi,
arctan((2*y+1)/(2*x-a))+3*Pi,arctan((2*y-1)/(2*x-a))+3*Pi];
xi:=(x,y)->2*Pi+arctan((y*(-r^2+x^2+y^2)^(1/2)-r*x)/
(x*(-r^2+x^2+y^2)^(1/2)+r*y));
al:=(x,y)->arctan(r/(x^2+y^2-r^2)^(1/2));
koeff:=9/(16*Pi^(1/2)):
strCoB1:=["Поток массы", "Поток тепла"]:
pointRect := proc(x,y)
global mp,xp2,yp2,xp3,yp3,kl;
local atg1,atg2,al;
```

```

al:=arcsin(r/(x^2+y^2)^(1/2));
atg1:=-arctan(cx1(x1,y1,1)/cy1(x1,y1,1));
if evalf(Pi+atg1)>arctan((1-2*y)/(a-2*x))and
evalf(Pi+atg1)<evalf(Pi-arctan((1-2*y)/(a+2*x)))
then
kl:=1;
xp2:=xp1(x1,y1,1,1/2);
yp2:=1/2;
if evalf(Pi+atg1+2*al)>evalf(Pi+arctan((1+2*y)/(a+2*x)))and
evalf(Pi+atg1+2*al)<evalf(2*Pi-arctan((1+2*y)/(a-2*x)))
then
xp3:=xp1(x1,y1,-1,-1/2);
yp3:=-1/2;
mp:=[[xp3,yp3],[a/2,-1/2],[a/2,1/2],[xp2,yp2]];
else
xp3:=a/2;
yp3:=yp1(x1,y1,-1,a/2);
mp:=[[xp3,yp3],[a/2,1/2],[xp2,yp2]];
fi;
else
if evalf(Pi+atg1)<evalf(Pi+arctan((1+2*y)/(a+2*x)))and
evalf(Pi+atg1)>evalf(Pi-arctan((1-2*y)/(a+2*x)))
then
xp2:=-a/2;
yp2:=yp1(x1,y1,1,-a/2);
if evalf(Pi+atg1+2*al)<evalf(Pi+arctan((1+2*y)/(a+2*x)))and
evalf(Pi+atg1+2*al)>evalf(Pi-arctan((1-2*y)/(a+2*x)))
then
kl:=2;
xp3:=-a/2;
yp3:=yp1(x1,y1,-1,-a/2);
mp:=[[xp3,yp3],[-a/2,-1/2],[a/2,-1/2],[a/2,1/2],[-a/2,1/2],[xp2,yp2]];
else

```

```

if evalf(Pi+atg1+2*a1)>evalf(Pi+arctan((1+2*y)/(a+2*x)))and
evalf(Pi+atg1+2*a1)<evalf(2*Pi-arctan((1+2*y)/(a-2*x)))
then
xp3:=xp1(x1,y1,-1,-1/2);
yp3:=-1/2;
mp:=[[xp3,yp3],[a/2,-1/2],[a/2,1/2],[-a/2,1/2],[xp2,yp2]];
kl:=3;
else
xp3:=a/2;
yp3:=yp1(x1,y1,-1,a/2);
mp:=[[xp3,yp3],[a/2,1/2],[-a/2,1/2],[xp2,yp2]];
kl:=4;
fi;
fi;
else
xp2:=xp1(x1,y1,1,-1/2);
yp2:=-1/2;
if evalf(Pi+atg1+2*a1)>evalf(Pi+arctan((1+2*y)/(a+2*x)))and
evalf(Pi+atg1+2*a1)<evalf(2*Pi-arctan((1+2*y)/(a-2*x)))
then
xp3:=xp1(x1,y1,-1,-1/2);
yp3:=-1/2;
mp:=[[xp3,yp3],[a/2,-1/2],[a/2,1/2],[-a/2,1/2],[-a/2,-1/2],[xp2,yp2]];
kl:=5;
else
xp3:=a/2;
yp3:=yp1(x1,y1,-1,a/2);
mp:=[[xp3,yp3],[a/2,1/2],[-a/2,1/2],[-a/2,-1/2],[xp2,yp2]];
kl:=6;
fi;
fi;
fi;
end proc:

```

```

fqr:= proc(x,y)
local xi1,a11,qk;
xi1:=xi(x,y);
a11:=al(x,y);
if evalf(xi1)<=evalf(phi2(x,y)[1])
then
qk:=evalf(Int(t(x,y,phi)[1],phi=phi1(x,y)[1]..xi1));
if evalf(xi1+2*a11)>=evalf(phi1(x,y)[4])
then
qk:=qk+evalf(Int(t(x,y,phi)[4],phi=xi1+2*a11..phi2(x,y)[4]));
else
qk:=qk+evalf(Int(t(x,y,phi)[3],phi=xi1+2*a11..phi2(x,y)[3]));
qk:=qk+evalf(Int(t(x,y,phi)[4],phi=phi1(x,y)[4]..phi2(x,y)[4]));
fi;
else
qk:=evalf(Int(t(x,y,phi)[1],phi=phi1(x,y)[1]..phi2(x,y)[1]));
if evalf(xi1)<evalf(phi2(x,y)[2])
then
qk:=qk+evalf(Int(t(x,y,phi)[2],phi=phi1(x,y)[2]..xi1));
if evalf(xi1+2*a11)>=evalf(phi2(x,y)[2])
then
if evalf(xi1+2*a11)>=evalf(phi2(x,y)[3])
then
qk:=qk+evalf(Int(t(x,y,phi)[4],phi=xi1+2*a11..phi2(x,y)[4]));
else
qk:=qk+evalf(Int(t(x,y,phi)[3],phi=xi1+2*a11..phi2(x,y)[3]));
qk:=qk+evalf(Int(t(x,y,phi)[4],phi=phi1(x,y)[4]..phi2(x,y)[4]));
fi;
else
qk:=qk+evalf(Int(t(x,y,phi)[2],phi=xi1+2*a11..phi2(x,y)[2]));
qk:=qk+evalf(Int(t(x,y,phi)[3],phi=phi1(x,y)[3]..phi2(x,y)[3]));
qk:=qk+evalf(Int(t(x,y,phi)[4],phi=phi1(x,y)[4]..phi2(x,y)[4]));
fi;

```

```

else
qk:=qk+evalf(Int(t(x,y,phi)[2],phi=phi1(x,y)[2]..phi2(x,y)[2]));
qk:=qk+evalf(Int(t(x,y,phi)[3],phi=phi1(x,y)[3]..xi1));
qk:=qk+evalf(Int(t(x,y,phi)[3],phi=xi1+2*a1..phi2(x,y)[3]));
qk:=qk+evalf(Int(t(x,y,phi)[4],phi=phi1(x,y)[4]..phi2(x,y)[4]));
fi;
fi;
return qk;
end proc;
fqc:=(phi,rho,beta)->
sign(cos(beta+(2*phi-1)*arcsin(r/rho)))*(r^2-rho^2*sin((2*phi-1)
*arcsin(r/rho))^2)^(1/2)*arcsin(r/rho)*rho;
J:= proc()
global a,r,JM,JQ;
local Jk1,Jk2,Jk3,Jk4,Jk5,J1,J2,J3;
Jk1:=evalf(Int(
(x,y)->fqr((r^2-y^2)^(1/2)+(a/2-(r^2-y^2)^(1/2))*x,y)
*(a/2-(r^2-y^2)^(1/2)),[0..1,0..r],
'epsilon'=0.001
)):
Jk2:=evalf(Int(
(x,y)->fqr(x,y),[0..a/2,r..1/2],
'epsilon'=0.001
)):
Jk3:=2*evalf(Int(
fqc(phi,r+rho*(a/2/cos(beta)-r),beta)*(a/2/cos(beta)-r),
[phi=0..1,rho=0..1,beta=0..arctan(1/a)],
'epsilon'=0.001
)):
Jk4:=2*evalf(Int(
fqc(phi,r+rho*(1/2/sin(beta)-r),beta)*(1/2/sin(beta)-r),
[phi=0..1,rho=0..1,beta=arctan(1/a)..Pi/2],
'epsilon'=0.001

```

```

)):
Jk5:=- (4/3)*r^3*Pi:
J1:=-evalf(koeff*8*(Jk1/2+Jk2/2-2*r*(a-Pi*r^2)/4)*2/9/a*2):
J2:=-evalf(koeff*8*(Jk3+Jk4)*2/9/a*2):
J3:=-evalf(koeff*8*(Jk5)*2/9/(Pi*a)*2):
JM:=evalf(J1+J2+J3,5):
JQ:=-evalf(JM*9/2,5):
end proc:
a:=1.6;x1:=0.3;y1:=0.47;r:=0.1:
p1:=implicitplot(x^2+y^2-r^2, x = -r .. r, y = -r .. r,
color="Nautical GrayViolet",thickness=2,gridrefine=3,
scaling = constrained):
p2:=pointplot([x1,y1],color=black,symbol=solidcircle,symbolsize=14):
p3:=plot( [[a/2,-1/2],[a/2,1/2],[-a/2,1/2],[-a/2,-1/2],[a/2,-1/2]],
style=line,color="Nautical GrayViolet",thickness=2):
pointRect(x1,y1);
p4:=plot( [[xp2,yp2],[x1,y1],[xp3,yp3]],style=line,color=red):
p5:=pointplot([[cx1(x1,y1,1),cy1(x1,y1,1)],
[cx1(x1,y1,-1),cy1(x1,y1,-1)],
[xp2,yp2],[xp3,yp3]],color=black,symbol=solidcircle,symbolsize=10):
p6:=implicitplot(x^2+y^2-r^2,x = cx1(x1,y1,-1) .. cx1(x1,y1,1),
y=0 .. r,color=COLOR(RGB, 0.2, 0.5, 0.8),
thickness=4,rational, scaling = constrained):
p7:=implicitplot(x^2+y^2-r^2,x=0 .. a/2,y=cy1(x1,y1,-1)..cy1(x1,y1,1),
color=COLOR(RGB, 0.2, 0.5, 0.8),thickness=4,rational,
scaling=constrained):
p8:=plot(mp,style=line,color=COLOR(RGB, 0.2, 0.5, 0.8),thickness=4):
p0:=display(p1,p2,p3,p4,p2,p6,p7,p8,p5,scaling=CONSTRAINED,
axes=normal,numpoints=200,labels=[x,y]):
J():
FunBt1 := proc()
global a,r,x1,y1;
local a1,p1,p2,p3,p4,p5,p6,p7,p8,x11,y11,r1;

```



```

a1:=Get(TF1::algebraic,corrections=true,update=true);
if a1>0 then a:=a1:
else Set(TF1(value)=a):TF1(update):=true:
fi:
r1:=Get(TF2::algebraic, corrections=true, update=true);
if r1>0 and r1<=0.5 then r:=r1:
else Set(TF2(value)=r):TF2(update):=true:
fi:
x1l:=Get(TF3::algebraic, corrections=true, update=true);
if x1l>0 and x1l<a/2 then x1:=x1l:
else x1:=RandomTools[Generate](float(range = 0..a/2)):
Set(TF3(value)=evalf(x1,4)):TF3(update):=true:
fi:
y1l:=Get(TF4::algebraic, corrections=true, update=true);
if y1l>0 and x1^2+y1l^2>r^2 and y1l<1/2 then y1:=y1l:
else y1:=RandomTools[Generate](float(range = (r^2-x1^2)^(1/2)..1/2)):
Set(TF4(value)=evalf(y1,4)):TF4(update):=true:
fi:
p1:=implicitplot(x^2+y^2-r^2, x = -r .. r, y = -r .. r,
color="Nautical GrayViolet",thickness=2,gridrefine=3,
scaling = constrained):
p2:=pointplot([x1,y1],color=black,symbol=solidcircle,symbolsize=14):
p3:=plot( [[a/2,-1/2],[a/2,1/2],[-a/2,1/2],[-a/2,-1/2],[a/2,-1/2]],
style=line,color="Nautical GrayViolet",thickness=2):
pointRect(x1,y1);
p4:=plot( [[xp2,yp2],[x1,y1],[xp3,yp3]],style=line,color=red):
p5:=pointplot([[cx1(x1,y1,1),cy1(x1,y1,1)],
[cx1(x1,y1,-1),cy1(x1,y1,-1)],
[xp2,yp2],[xp3,yp3]],color=black,symbol=solidcircle,symbolsize=10):
p6:=implicitplot(x^2+y^2-r^2,x = cx1(x1,y1,-1) ..cx1(x1,y1,1), y=0 ..r,
color=COLOR(RGB, 0.2, 0.5, 0.8),thickness=4,rational,
scaling = constrained):
p7:=implicitplot(x^2+y^2-r^2,x =0 .. a/2,y=cy1(x1,y1,-1) ..cy1(x1,y1,1),

```

```

color=COLOR(RGB, 0.2, 0.5, 0.8),thickness=4,rational,scaling=constrained):
p8:=plot(mp,style=line,color=COLOR(RGB, 0.2, 0.5, 0.8),thickness=4):
Set(PL1(value)=display(p1,p2,p3,p4,p2,p6,p7,p8,p5,
scaling=CONSTRAINED,axes=normal,numpoints=200,labels=[x,y])):
end proc:
FunBt2 := proc()
global a,r,strCoB1,JM,JQ;
local a1,r1;
a1:=Get(TF1::algebraic,corrections=true,update=true);
if a1>0 then a:=a1:
else Set(TF1(value)=a):TF1(update):=true:
fi:
r1:=Get(TF2::algebraic, corrections=true, update=true);
if r1>=0 and r1<=0.5 then r:=r1:
else Set(TF2(value)=r):TF2(update):=true:
fi;
J():
if Get(CoB1, update=true)=strCoB1[1] then
Set(TF5(value)=JM):
else
Set(TF5(value)=JQ):
end if
end proc:
MassFlowProfile:= Maplet(
Window('title'="Вычисление значений потоков тепла и
массы разреженного газа в длинном прямоугольном канале
с внутренним круговым цилиндрическим элементом",
[[Label['L1'](caption="Введите отношение ширины
прямоугольного канала\n к высоте:",halign=left),
TextBox[TF1](value=a)],
[Label['L2'](caption="Введите отношение радиуса цилиндра\n
к высоте прямоугольного канала",halign=left),
TextBox[TF2](value=r)], [Label['L3']

```

```

(caption="Введите абсциссу точки в первом квадранте x:\n",
halign=left),TextBox[TF3](value=x1)], [Label['L4']
(caption="Введите ординату точки в первом квадранте y:\n",
halign=left),TextBox[TF4](value=y1)],
[Plotter['PL1'](width=300, height=300,p0),
Button['B1']("Построить",Evaluate(function='FunBt1()'))],
[Label['L5'](caption="Выберите из списка макропараметр\n
течения разреженного газа:",halign=left),
ComboBox['CoB1'](strCoB1[1], sort(strCoB1, lexorder)),
TextBox[TF5](value=JM,editable=false),
Button['B2']("Вычислить",Evaluate(function='FunBt2()'))],
Button("OK", Shut-down("OK"))]]):
Maplets[Display](MassFlowProfile );

```