

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Воронежский государственный
университет»

На правах рукописи

Стромов Александр Викторович

**МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОПУТЕВОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ В
БЕСПРОВОДНЫХ СЕТЯХ, ОСНОВАННОЙ НА ГЕОМЕТРИИ
СИЛОВЫХ ЛИНИЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ**

05.13.18

«Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
Заслуженный деятель науки РФ,
доктор физико-математических наук,
профессор Нечаев Юрий Борисович

Воронеж — 2014

Содержание

Введение.....	4
1 Маршрутизация в беспроводных сетях.....	17
1.1 Беспроводные ячеистые сети	17
1.2 Маршрутизация и протоколы маршрутизации	18
1.3 Сенсорные сети.....	23
1.4 Классификация протоколов маршрутизации для сенсорных сетей...	23
1.5 Моделирование маршрутизации в беспроводных сетях	27
Выводы по главе 1	28
2 Математическая модель маршрутизации в сверхбольшой сети	30
2.1 Модель сети на основе векторной функции информационного потока	30
2.2 Потенциальная функция	35
2.3 Коэффициент информопроводности.....	36
2.4 Случай нескольких источников помех.....	45
2.5 Построение маршрутов.....	51
Выводы по главе 2	56
3 Априорные оценки, существование и единственность решения задачи..	58
Выводы по главе 3	87
4 Численное моделирование	88
4.1 Методы граничных элементов.....	88
4.2 Метод конечных элементов.....	91
4.3 Комплекс программ.....	96
4.4 Численные эксперименты.....	99
4.4.1 Сравнительное исследование комплексных гранично-элементных	
методов	99
4.4.2 Исследование модели беспроводной адаптивной ячеистой сети	
111	
Выводы по главе 4	117
Заключение	119

Литература	124
Приложение 1 Процедура задания начальных данных для области, ограниченной произвольной замкнутой ломанной	142
Приложение 2 Процедура построения системы линейных алгебраических уравнений для метода комплексных полиномов	148
Приложение 3 Процедура построения матрицы p и правой части СЛАУ s для комплексного метода граничных элементов.....	151
Приложение 4 Процедура вычисления значений N_1 -аппроксимирующей функции в заданных узловых точках.....	155
Приложение 5 Процедура вычисления значений двойного интеграла по x и y от N_1 -аппроксимирующей функции по внутренним точкам области.....	158

Введение

Беспроводные сети – быстро и динамично развивающееся направление телекоммуникационных технологий. Это сотовые сети мобильной связи и передачи информации, сети беспроводного доступа к Интернету, сенсорные сети мониторинга окружающей среды и другие системы сбора и передачи информации. Большинство современных беспроводных сетей имеют достаточную простую топологическую архитектуру: полносвязную, при которой каждый узел может непосредственно установить соединение с любым другим, или «звезда», когда все соединения осуществляются через специально выделенный узел – базовую станцию. Для таких беспроводных сетей проблема маршрутизации, то есть поиска маршрута доставки данных от источника к получателю через несколько узлов-ретрансляторов неактуальна. Однако такие сети ограничены по зоне покрытия, количеству узлов и пропускной способности. В настоящее время наибольшее внимание уделяется неполносвязным сетям с ячеистой архитектурой, передача информации в которых осуществляется посредством ряда ретрансляций. В таких сетях задача поиска оптимального по выбранному критерию маршрута доставки данных является актуальной и принципиальной, определяющей параметры сети и алгоритмы её работы.

Впервые задача маршрутизации возникла при построении проводных сетей связи сложной топологии с коммутацией пакетов. Основам маршрутизации в проводных пакетных сетях связи посвящены работы Г. Фрэнка, И. Фриша [4], Г. П. Захарова [5], И. А. Мизина, В. А. Богатырева, А. П. Кулешова [6], Д. Бертсекаса, Р. Галлагера [7], М. Шварца [8]. Для решения задачи маршрутизации применялись алгоритмы поиска кратчайшего пути (Беллмана-Форда, Дейкстры или другие), методы теории массового обслуживания и теории графов. В дальнейшем вопросы маршрутизации в беспроводных сетях рассматривались, как правило, в рамках известных протоколов (IEEE 802.11, IEEE 802.16): В. М. Вишнеvский, А. И. Ляхов,

С. Л. Портной, И. В. Шахнович [9], П. Рошан, Д. Лиэри [10], В. Г. Олифер, Н. А. Олифер [48]. Стремление к увеличению скорости передачи информации привели к использованию в телекоммуникационных технологиях всё более высокочастотных участков спектра. При этом неизбежно сокращалась дальность передачи. Однако преимущества приёмопередатчиков, работающих на частотах гигагерцового диапазона – скорость передачи, миниатюрность, низкое энергопотребление, и, наконец, низкая стоимость, достигнутая благодаря массовому производству – обусловили необходимость найти способ обеспечить передачу информации на большие расстояния и предоставить доступ к связи большому количеству абонентов. Этим способом стало построение беспроводных сетей связи. Объединяя большое количество абонентов, такие сети должны эффективно решать вопрос поиска абонента и пути доставки информации. Наиболее распространенным подходом является иерархическая структуризация сети – разделение на уровни с выделением на каждом специализированной станции-портала для выхода в вышестоящую сеть. Примером такой структуры являются сотовые сети связи. Базируясь на стационарной инфраструктуре, они используют разделяемую общую среду передачи – беспроводный канал – практически только на участке сотовый телефон – базовая станция. Далее применяются проводные либо радиорелейные соединения. Благодаря роумингу и глобальной структуре сети, конечный пользователь получает полный набор сетевых сервисов в области радиовидимости любой базовой станции. В настоящий момент сотовые сети связи практически полностью удовлетворяют потребности в беспроводной голосовой связи и передачи данных, однако их зависимость от инфраструктуры заставляет продолжать исследования других топологических архитектур беспроводных сетей.

К таковым относятся ячеистая (сетчатая, MESH) топология, представляющая собой неполносвязную сеть, в которой каждый узел непосредственно соединён только с ближайшими узлами-соседями. Передача информации другим абонентам осуществляется с помощью множественных

ретрансляций. Исследованию таких сетей посвящена обширная литература [11 – 22]. На протяжении долгого времени ведутся работы по внедрению поддержки ячеистой топологии в стандарты беспроводной связи (IEEE 802.16, IEEE 802.11s), однако в настоящее время имеются только специализированные протоколы, разработанные либо крупными фирмами (например, Cisco [23]), или в рамках исследовательских проектов (MIT Roofnet [24] Berlin Roof Net [25]). Одной из основных задач, которые необходимо решить при разработке таких сетей является задача маршрутизации – определения и выбора пути (или путей) передачи информационных пакетов между узлом-источником и узлом-адресатом. В ячеистых сетях маршрут проходит через другие узлы, каждый из которых является ретранслятором и, соответственно, маршрутизатором. Непосредственно маршрут представляется последовательностью маршрутизаторов, через которые должны пройти передаваемые пакеты данных [48].

В связи с высокой загруженностью частотного диапазона, а особенно тех его участков, которые выделены в общественное нелицензируемое пользование, актуальным является моделирование работы беспроводных сетей при наличии источников непреднамеренных помех и разработка методов минимизации влияния помехи на работу сети. Перспективными методами минимизации влияния помехи являются изменение скорости передачи данных между узлами в зависимости от отношения сигнал / шум и применение адаптивных антенн. Моделирование работы таких адаптивных беспроводных сетей является актуальной задачей.

Ещё одной важной задачей в данной области является исследование ячеистых сетей с большим количеством узлов, так как в таких сетях возникает ряд проблем, связанных с масштабированием существующих протоколов, прежде всего алгоритмов маршрутизации. В связи с этим актуальна задача моделирования алгоритмов маршрутизации в беспроводных сетях, поддерживающих работу с большим количеством узлов и методов

моделирования таких алгоритмов. Одним из вариантов решения этой задачи является метод маршрутизации на основе силовых линий потенциального поля предложенный в работах M. Kalantari, M. Shayman [1], S. Toumpis, L. Tassiulas [2] и Nam T. Nguyen, An-I A. Wang [3]: маршрутизация в беспроводной сети описывается через «макроскопические» характеристики, характеризующие сеть не дискретными параметрами, описывающими состояние каждого узла в отдельности, а интегральными функциями, непрерывными в области развертывания сети. Маршруты передачи информации определяются потенциальным векторным полем функции плотности информационного потока, что позволяет перейти к задаче относительно потенциала плотности информационного потока, которому позднее в [84] было предложено поставить в соответствие количество ретрансляций. Описанный подход является весьма перспективным, особенно для моделирования и реализации маршрутизации в сетях с большим количеством узлов, однако предложенный метод имеет некоторые недостатки:

- отсутствует привязка параметров модели к техническим характеристикам узлов сети;

- трактовка потенциала плотности информационного потока не учитывает различных вариантов соотношений между скоростью и дальностью беспроводной передачи информации;

- рассмотрена задача с коэффициентом при потенциале плотности информационного потока только в виде простой: постоянной, либо кусочно-постоянной по области, занимаемой сетью, функции.

Анализ предложенной в [1, 2, 3] модели показывает, что коэффициент при потенциале плотности информационного потока является основным параметром модели, зависящим от плотности расположения узлов, их технических характеристик и алгоритмов работы. Более того, задавая его соответствующим образом можно моделировать влияние на сеть источников помех и работу сетей с адаптивными алгоритмами изменения скорости

передачи данных и адаптивными антеннами. Совершенствованию в указанных направлениях исходной модели посвящена настоящая работа.

Впервые выполнено моделирование алгоритма маршрутизации на основе силовых линий потенциального поля для адаптивной сети при наличии в области, занимаемой сетью, источника помех, для чего:

- предложена энергетическая трактовка потенциала плотности информационного потока в сети,

- определена размерность коэффициента информопроводности, характеризующего возможности сети как среды передачи информации

- предложена методика оценки коэффициента информопроводности на основе параметров узлов сети и источника помех;

- построена математическая модель маршрутизации на основе геометрии силовых линий потенциального поля при наличии источника помех в беспроводных сетях:

- с адаптивным изменением скорости передачи информации в зависимости от отношения сигнал / шум в канале и изотропными диаграммами направленности антенн узлов;

- с адаптивными антеннами с автоматически регулируемой кардиоидоподобной диаграммой направленности и аналогичным методом адаптации скорости передачи информации.

- построена математическая модель маршрутизации на основе геометрии силовых линий потенциального поля для сети с узлами, оборудованными адаптивными антеннами, при воздействии на область, занимаемую сетью, нескольких источников помех.

В случае, когда рассматривается сеть с адаптивными антеннами с автоматически регулируемой кардиоидоподобной диаграммой направленности и адаптивным изменением скорости передачи информации в зависимости от отношения сигнал / шум в канале, математическая модель представляет собой краевую задачу математической физики с вырождением.

Потребовалось провести дополнительное исследование корректности её постановки.

Основы исследований вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка и граничных задач для них были заложены М. В. Келдышем [26]. В дальнейшем его результаты развивались О. А. Олейник [27]. С. Г. Михлиным [28] и М. И. Вишиком [29] были впервые рассмотрены обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка. За этими работами появился ряд публикаций, посвященных изучению вырождающиеся уравнения второго порядка методами, близкими к методу М. И. Вишика. Итоги этого этапа исследований и библиография приведены в работах М. М. Смирнова [30] и О. А. Олейник, Е. В. Радкевича [31]. Асимптотические свойства решений линейных и нелинейных эллиптических и параболических уравнений и систем изучались В. А. Кондратьевым [32], [33], В. А. Кондратьевым, Е. М. Ландисом [34], Ю. В. Егоровым, В. А. Кондратьевым, О. А. Олейник [35]. В [36] О. А. Олейник, а затем в [37] Дж. Коном и Л. Ниренбергом для изучения эллиптико-параболических уравнений второго порядка был применен метод «эллиптической регуляризации». Коэрцитивная разрешимость общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка в специальных пространствах типа пространств С. Л. Соболева с весом была установлена В. П. Глушко [38], [39]. Задача Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка с согласованным вырождением исходных данных в произвольной области была исследована в работе В. А. Рукавишникова, А. Г. Ереклинцева [40], а с несогласованным вырождением – в работе В. А. Рукавишникова [41]. С. Н. Антонцевым и С. И. Шмаревым [42] была рассмотрена задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с неоднородным анизотропным вырождением в области. А. Д. Баевым [115] были доказаны коэрцитивные априорные оценки и теоремы разрешимости общих краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка.

В настоящей работе доказано того, что математическая модель, описывающая маршрутизацию в сети, узлы которой оборудованы антеннами с крадиоидоподобной диаграммой направленности, является корректно поставленной задачей математической физики, а также разработано программное обеспечение, реализующего и визуализирующего предложенную модель.

Для проведения численных экспериментов был разработан специализированный комплекс программ.

Отметим, что метод оценки коэффициента информопродности для сети, адаптивно реагирующей на воздействие источника помехи разработан впервые, а предлагаемая модифицированная математическая модель позволяет, в отличие от исходной:

- строить маршруты с учетом наличия в сети источника помех;
- учитывать адаптивное изменение скорости передачи информации в зависимости от отношения сигнал / шум;
- моделировать сети, узлы которых оборудованы антеннами с адаптивно изменяемой диаграммой направленности в зависимости от расположения источника помехи.

Доказательство корректности постановки рассматриваемой задачи ранее не проводилось. Для рассматриваемой задачи оно необходимо, так как отсутствует совершенно аналогичный природный физический процесс.

Численное моделирование позволяет оценить выигрыш от применения в сети методов адаптации по скорости передачи информации и антенн с адаптивно изменяемой диаграммой направленности. Также в работе даны практические рекомендации по использованию комплексных методов граничных элементов.

Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на ряде конференций в том числе: IX Международная научно-техническая конференция «Физика и технические приложения волновых процессов», Миасс, 2010 г.; Воронежская зимняя математическая школа

«Современные методы теории функций и смежные проблемы», Воронеж, 2011; XVII Международная научно-техническая конференция «Радиолокация, навигация, связь» (RLNC – 2011), Воронеж; 21st Int. Crimean Conference “Microwave & Telecommunication Technology” (CriMiCo’2011), Sevastopol, Ukraine, 2011, 5-я Международная научно-техническая конференция «Сенсорная электроника и микросистемные технологии» (СЭМСТ-5), Украина, Одесса, 2012, доклад отмечен дипломом конференции; 22nd Int. Crimean Conference “Microwave & Telecommunication Technology” (CriMiCo’2012), Sevastopol, Ukraine 2012, XIX Международная научно-техническая конференция «Радиолокация, навигация, связь» (RLNC – 2013), Воронеж, XX Международная научно-техническая конференция «Радиолокация, навигация, связь» (RLNC – 2014), Воронеж. По теме диссертации опубликованы шесть статей [43, 44, 45, 46, 47, 52] в научных рецензируемых журналах, входящих в перечень ВАК, двадцать четыре статьи в сборниках трудов научных конференций.

Полученные в диссертации результаты частично использовались при выполнении НИР «Разработка и применение новых методов обработки, передачи и защиты информации в информационно-коммуникационных системах» (государственный регистрационный № 012202.04120808) в Воронежском государственном университете, грантов РФФИ (проекты 08-02-13555-офи-ц, 09-07-97577-р-центр-а, 11-07-00600-а, 14-07-00713).

Отдельные результаты внедрены в учебный процесс в Воронежском государственном университете, что подтверждается актами о внедрении.

Далее приведено краткое содержание глав работы.

В первой главе «Маршрутизация в беспроводных сетях» представлены описание, принципы построения, особенности и основные сферы применения беспроводных сетей с ячеистой топологией. Приведено определение маршрутизации в беспроводных ячеистых сетях, указаны отличия от маршрутизации в проводных сетях. Дана классификация

алгоритмов маршрутизации в беспроводных ячеистых сетях. Также описаны основные подходы к моделированию процесса маршрутизации в таких сетях.

В первом разделе первой главы описаны беспроводные сети с ячеистой топологией.

Во втором разделе первой главы описана специфика маршрутизации в беспроводных сетях, дана классификация протоколов маршрутизации для ячеистых сетей связи и приведены алгоритмы работы типичных протоколов из каждого класса.

В третьем разделе первой главы описаны беспроводные сенсорные сети, указана их специфика и основные отличия от сетей связи.

В четвёртом разделе первой главы дана классификация протоколов маршрутизации для сенсорных сетей и приведены алгоритмы работы типичных протоколов из различных классов

В пятом разделе первой главы описаны основные подходы к моделированию беспроводных ячеистых сетей, приведены проблемы, возникающие при моделировании сетей с большим количеством узлов наиболее распространёнными на данный момент методами.

Во второй главе «Математическая модель маршрутизации в сверхбольшой сети» сформулирована математическая модель, описывающая маршрутизацию в беспроводной сети через «макроскопические» характеристики передачи информации, характеризующие сеть не дискретными параметрами, описывающими состояние каждого узла в отдельности, а интегральными функциями, непрерывными в области развертывания сети:

- векторной функцией плотности информационного потока, направление которой совпадает с направлением передачи информации, а модуль равен скорости, с которой информационный поток пересекает бесконечно малый отрезок, расположенный в указанной точке перпендикулярно к направлению функции, и её потенциалом;

- функция плотности производства / потребления информации, принимающая положительные или отрицательные значения в зависимости от того, производится или потребляется пользовательская информация в данной точке области, занимаемой сетью.

Математическая модель представляет собой краевую задачу математической физики для уравнения в частных производных второго порядка. Рассмотрены варианты модели для неадаптивной сети, узлы которой оборудованы антеннами с изотропной в горизонтальной плоскости диаграммой направленности; сети с адаптивным изменением скорости передачи информации в зависимости от отношения сигнал / шум в канале и изотропными диаграммами направленности антенн узлов; сети с адаптивными антеннами с автоматически регулируемой кардиоидоподобной диаграммой направленности и аналогичным методом адаптации скорости передачи информации. Показано, что в последнем случае имеет место краевая задача для вырождающегося эллиптического уравнения.

В первом разделе второй главы приведён вывод основной модели, описывающей маршрутизацию на основе макроскопических параметров сети.

Во втором разделе второй главы приведено обоснование предложенного физического смысла потенциальной функции информационного потока.

Третий разделе второй главы посвящен коэффициенту информопроводности – основному параметру рассматриваемой модели, позволяющему рассматривать сети с различными характеристиками, функционирующие в разных условиях.

В четвёртом разделе второй главы приведён метод расчета коэффициента информопроводности в случае, когда внутри области, занимаемой сетью, находятся несколько источников помех, а каждый узел компенсирует воздействие наиболее мощной помехи

В пятом разделе второй главы рассматриваются различные подходы к построению маршрутов в реальных сетях на основе результатов моделирования.

В третьей главе «Априорные оценки, существование и единственность решения задачи» сформулированы и доказаны априорные оценки, теоремы существования и единственности решения полученной во второй главе краевой задачи математической физики с вырождением. Показано, что рассматриваемая вырождающаяся задача является корректно поставленной задачей математической физики.

В четвертой главе «Численное моделирование» описаны численные методы, используемые для реализации рассматриваемой модели и приведены результаты численных экспериментов.

В первом разделе четвёртой главы описаны два варианта метода граничных элементов, приведены результаты ряда численных экспериментов на модельных задачах, подтверждающие эффективность предложенных методов.

Во втором разделе четвёртой главы описан метод конечных элементов, приведён вывод слабой интегральной формулировки рассматриваемой задачи, необходимый для использования данного метода.

Третий раздел четвёртой главы посвящён описанию и структуре разработанного комплекса программ.

В четвёртом разделе четвёртой главы приведены условия и результаты численных экспериментов.

В заключении обобщаются основные научные и практические результаты, полученные в диссертационной работе.

Научная новизна работы заключается в следующем:

– метод оценки коэффициента информопроводности для сети, адаптивно реагирующей на воздействие источника помехи, разработан впервые;

– предложена и исследована основанная на геометрии силовых линий потенциального поля усовершенствованная математическая модель маршрутизации в беспроводных сетях, позволяющая:

- строить маршруты с учетом наличия в сети одного или нескольких источников помех;
- учитывать адаптивное изменение скорости передачи информации в зависимости от отношения сигнал / шум;
- моделировать сети, узлы которых оборудованы антеннами с адаптивно изменяемой диаграммой направленности в зависимости от расположения и мощности источников помехи;

– впервые доказана корректность постановки соответствующей модели граничной задачи для рассматриваемого уравнения в частных производных второго порядка с сильным вырождением;

– сравнительный анализ по эффективности метода комплексных полиномов и комплексного метода граничных элементов друг с другом и с конечно-элементными методами на основе известных точных и приближенных решений задач математической физики выполнен впервые.

Практическая значимость работы заключается в следующем:

– предложенные алгоритмы предназначены для разработки энергоэффективных протоколы маршрутизации перспективных беспроводных ячеистых сетей;

– результаты моделирования позволяют уже на начальном этапе проектирования оценить энергетический выигрыш от применения в сети методов адаптации по скорости передачи информации и антенн с адаптивно изменяемой диаграммой направленности;

– даны практические рекомендации по использованию метода комплексных полиномов и комплексного метода граничных элементов;

– разработан комплекс программ для моделирования маршрутизации в адаптивных и неадаптивных беспроводных сетях.

В ходе теоретического анализа и моделирования получены следующие основные результаты.

1. Разработан метод оценки коэффициента информопроводности на основе характеристик сети, её узлов и источника помехи.

2. Разработана математическая модель маршрутизации, основанной на геометрии силовых линий потенциального поля в беспроводной адаптивной сети при наличии источников помех для двух видов адаптации беспроводной сети к наличию источника помех: изменение скорости передачи информации в зависимости от отношения сигнал / шум в канале при использовании приёмопередатчиками антенн с изотропной диаграммой направленности, и применение антенн, адаптивно режектирующих сигнал помехи с использованием аналогичного метода адаптации по скорости передачи информации.

3. Доказано, что математическая модель, описывающая маршрутизацию в сети, узлы которой оборудованы антеннами с анизотропной диаграммой направленности, является, в случае постоянных коэффициентов, корректно поставленной задачей математической физики.

4. Проведён сравнительный анализ по эффективности метода комплексных полиномов и комплексного метода граничных элементов, даны рекомендации по использованию методов.

5. Разработан комплекс программ для численной реализации предложенной модели, позволяющий рассчитывать векторное поле информационного потока и производить оценку энергоэффективности полученной схемы маршрутизации.

1 Маршрутизация в беспроводных сетях

1.1 Беспроводные ячеистые сети

Ячеистые сети, как правило, состоят из одинаковых элементов, называемых узлами. Узел представляет собой приёмопередатчик с оборудованием, позволяющим генерировать, принимать или ретранслировать информацию, осуществляя функционирование узла в соответствии с правилами работы (протоколами) сети. В беспроводных ячеистых сетях каждый узел может поддерживать непосредственную связь только с несколькими ближайшими узлами, называемыми соседями первого порядка. Передача информации другим узлам осуществляется с помощью множественных ретрансляций. Ячеистая архитектура может использоваться как для построения сетей связи, способных функционировать в условиях отсутствия инфраструктуры (базовых станций), так и для сенсорных сетей.

Ячеистые сети связи обеспечивают связь по принципу «каждый с каждым» и выход во внешние сети через выделенный портал. Принцип ячеистой организации сети реализуется в разрабатываемом стандарте беспроводных локальных сетей IEEE 802.11s. Также такие сети необходимы в областях с отсутствующей инфраструктурой, либо в случаях, когда эта инфраструктура нарушена (обеспечение связи при чрезвычайных ситуациях, связанных с природными катастрофами).

В сенсорных сетях узлы – автоматические устройства, в которых источником информации служит специализированный сенсор или их набор, осуществляющий периодический контроль определенных параметров окружающей среды или регистрирующих совершение некоторых событий. Полученная информация передаётся в выбранный узел или узлы-получатели, откуда потом поступает на обработку. В отличие от сетей связи, где необходимо обеспечить возможность связи «каждого с каждым», в сенсорных сетях можно выделить постоянные источники и получатели информации.

Диапазон применения сенсорных сетей чрезвычайно широк. Это мониторинг состояния окружающей среды с экологическими или научными целями, отслеживание появления и распространения опасных веществ в производственном процессе, наблюдение за состоянием почвы и посевов в сельском хозяйстве, обнаружение перемещения объектов на контролируемой территории в целях обеспечения безопасности и другие.

Одна из основных проблем при разработке ячеистых сетей – решение задачи маршрутизации, т. е. построение маршрута ретрансляций информации от источника к получателю.

1.2 Маршрутизация и протоколы маршрутизации

Проблема маршрутизации впервые появилась в проводных сетях связи с введением коммутации пакетов вместо коммутации каналов. Вместо единственного канала связи, сохранявшегося со времён первых телефонных сетей, стало возможно использовать различные маршруты для доставки отдельных частей сообщения. К тому времени сети уже имели весьма сложную структуру, и представляли собой объединения относительно небольших подсетей с простой архитектурой (типа «общая шина» или «кольцо»). В получившихся составных сетях с неполносвязной ячеистой топологией для передачи данных потребовались специальные меры, реализованные в виде механизмов маршрутизации.

Маршрутизация – ключевая функция сетевого уровня, состоящая в выборе наилучшего пути передачи пакетов данных между коммутационными узлами источника сообщения и адресата. Непосредственно маршрут представляется последовательностью маршрутизаторов, через которые должны пройти передаваемые пакеты данных [48].

Маршрутизатор представляет собой устройство, которое осуществляет сбор информации о текущей конфигурации и состоянии сети, ее анализ и пересылку данных в выбранном (в соответствии с определенным критерием) направлении.

Выбор маршрута следования пакета для доставки по заданному адресу сети назначения осуществляется в каждом маршрутизаторе на основе имеющейся информации о текущей конфигурации сети, данных, содержащейся в адресной части сетевого заголовка пакета, а также указанного критерия (метрики) выбора маршрута.

Маршрутизация в беспроводных сетях, которая имеет свои особенности. Если сети, состоящая из нескольких приемо-передатчиков, функционирует на единой частоте, то связь осуществляется через общую электромагнитную среду (беспроводный канал), разделяемую несколькими узлами. То есть информация, передаваемая узлом, является полезной, как правило, только для одного узла, для всех остальных, находящихся в зоне радиовидимости передатчика, она является помехой, мешающей осуществлять приём собственной полезной информации. Соответственно, работа на передачу любого другого узла в зоне радиовидимости создаст помехи приёмнику. Здесь же возникает известная проблема скрытого терминала [48], когда один и тот же узел оказывается адресатом передачи одновременно двух других узлов, которые не «слышат» друг друга. С точки зрения маршрутизации здесь важно отметить изменчивость параметров беспроводного соединения между узлами, существенно зависящих от естественных и искусственных помех. Более того, узлы беспроводной сети могут быть мобильными, что ведёт к постоянным динамическим изменениям сетевой топологии.

В настоящее время для беспроводных ячеистых сетей связи разработаны различные протоколы маршрутизации, которые можно классифицировать следующим образом (табл. 1) [49].

Таблица 1

Протоколы маршрутизации для адаптивных сетей с привязкой:						
к сетевой топологии			к местоположению			
Упреждающего типа или табличные	Реагирующего типа или с запросом по требованию	Гибридные	С зональным обслуживанием	С использованием ретрансляции		
				На основе принципа минимальной ретрансляции	Ограниченная направленная ретрансляция	Иерархическая маршрутизация
DSDV CGSR WRP RIP OSPF FSR TBRPF OLSR	AODV ABR DSR TORA SSR RDMAR SSA LMR	ZRP LAN MAR CEDAR	DREAM Quorum-based GLS Homezone	MFR NFP Compass GPSR	LAR	Terminodes Routing Grid Routing GeoCast

Протоколы с привязкой к местоположению применяются, как правило, при наличии в узлах сети соответствующей аппаратуры для определения собственных координат, в противном случае используются протоколы с привязкой к сетевой топологии. Проактивные протоколы более эффективны в сетях со стационарными узлами, а реактивные – с мобильными.

Ещё один важный параметр – наличие или отсутствие в сети определенной иерархии узлов. Как правило, выделение отдельных узлов не связано с техническими характеристиками их оборудования, а обусловлено либо их расположением, либо порядком начальной организации сети.

Приведём несколько примеров.

AODV (Ad Hoc On-Demand Distance Vector) – протокол маршрутизации, использующий реактивную стратегию построения маршрутов (по требованию) [50]. AODV предполагает построение таблиц маршрутизации на каждом узле сети для минимизации времени передачи информации между узлами. Маршруты поддерживаются только в том случае, если они действительно активны. Избежать использования несуществующих

маршрутов позволяет наличие в таблицах маршрутизации узлов специального таймера. По истечении указанного времени, при котором маршрут не используется, запись о нем удаляется. При построении маршрутов и для реакции на изменения топологии сети приводящей к разрывам маршрутов, AODV использует следующие типы пакетов: запрос на построение маршрута (RREQ), ответ на запрос построения маршрута (RREP), ошибка маршрута (RERR) [51, 52].

DSDV (Highly Dynamic Destination-Sequenced Distance-Vector Routing) – проактивный протокол маршрутизации, основанный на алгоритме Беллмана Форда [53]. Данный протокол реализует периодический обмен таблицами маршрутизации между соседними узлами. В качестве метрики маршрута DSDV использует число ретрансляций на пути от отправителя к получателю. Каждый беспроводной узел хранит таблицу маршрутизации, которая содержит все возможные узлы назначения, число ретрансляций до каждого из них и номер последовательности, привязанный к каждому узлу назначения. Номер последовательности позволяет идентифицировать более новые маршруты до получателя и избегать тем самым формирования маршрутных петель при построении маршрута [54].

Оба рассмотренных протокола являются протоколами с привязкой к сетевой топологии. Протоколы маршрутизации, основанные на привязке к местоположению узлов предназначены для сети, каждый узел которой может определить собственное положение (географические координаты) с высокой точностью, что стало возможным с развитием современных систем геопозиционирования. Такие протоколы могут использоваться как в сетях с мобильными узлами оснащенными системами геопозиционирования, так и в стационарных сетях, в которых местоположение узла может быть определено после его установки. Это позволяет использовать такие протоколы в том числе в сенсорных сетях. Рассмотрим теперь пример протокола с привязкой к местоположению узлов.

LAR (Location Aided Routing) – протокол маршрутизации с учетом местоположения строит маршрут лавинной рассылкой запросов, как и в случае AODV, но при этом учитывается информация о местоположении узла-адресата [55]. Узлы обладают информацией о собственных координатах и координатах других узлов (последние могут быть известны с некоторой степенью точности). Перед началом построения маршрута определяется ожидаемая зона нахождения адресата (круг, центром которого являются предполагаемые координаты адресата) и зона запроса – прямоугольник, включающий в себя точку с координатами отправителя и зону нахождения адресата (рис. 1). Если при построении маршрута запрос на построение маршрута поступает узлу, находящемуся вне зоны запроса – этот маршрут отбрасывается.

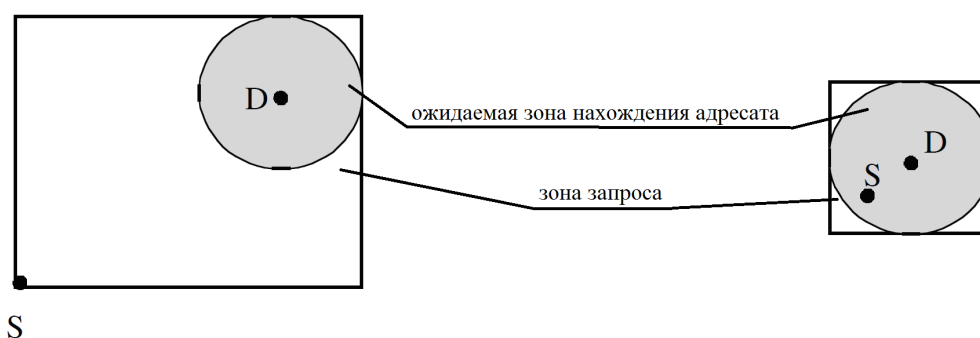


Рис. 1. Пространственные зоны, используемые протоколом маршрутизации LAR

Отметим, что алгоритмы маршрутизации с привязкой к сетевой топологии обладают определенными недостатками при работе в сети с очень большим количеством узлов. В этом случае процесс составления таблиц маршрутизации для проактивных протоколов и процесс построения маршрута по запросу для реактивных протоколов потребовали бы значительного времени и ресурсов сети, что приведёт к недопустимым задержкам в передачи пользовательской информации, или сделает её невозможной.

1.3 Сенсорные сети

Несмотря на сходство с беспроводными сетями связи, сенсорные беспроводные сети имеют ряд особенностей, обусловленных как спецификой используемого оборудования, так и условиями и способами их применения. Для обеспечения возможности покрытия сенсорными сетями значительных площадей потребуется большое количество узлов. Соответственно, конструкция узла сенсорной сети должна быть надёжной и дешевой, а значит максимально простой.

Отказоустойчивость. Сеть должна сохранять функциональность при выходе из строя части составляющих её узлов.

Масштабируемость. Необходимо обеспечить работоспособность сети при очень большом (до нескольких сотен тысяч) количестве узлов в сети, а также при высокой плотности их расположения (когда количество так называемых «соседей первого порядка» – узлов, способных непосредственно связываться с заданным узлом, достигает сотни).

Ограниченность ресурсов аппаратного обеспечения обусловлена с одной стороны, требованиями дешевизны узлов сети, а с другой – необходимостью обеспечения низкого энергопотребления

Низкое энергопотребление необходимо для экономии источников энергии узлов, которые в ряде случаев могут быть невозобновляемыми.

Перечисленные особенности обуславливают необходимость применения для них специализированных протоколов маршрутизации.

1.4 Классификация протоколов маршрутизации для сенсорных сетей

Приведём классификацию протоколов маршрутизации для беспроводных сенсорных сетей следуя [56]

Таблица 2

Протоколы маршрутизации для сенсорных сетей					
Основанные на признаке	Плоские	Географические	Иерархические	Много-путевые	Основанные на качестве обслуживания
Направленная диффузия EAD CSPEAR Молва	GRAB SAR MCFA	SPEED GRWNLI EEFSGR- LWSN GRLISN	LEACH PEGASIS TEEN APTEEN Агрегация данных	M-MPR HREEM- RWSN ReInForM	SER ARRIVE

Протоколы маршрутизации, основанные на признаке строят маршруты на основе данных, передаваемых в маршрутизируемых пакетах, поэтому иногда их называют протоколы, ориентированные на данные. В процессе передачи пакеты могут изменяться (объединяться, разделяться или сбрасываться). К протоколам, основанным на признаке относятся: направленная диффузия [57], ориентированная на данные маршрутизация с учетом расхода энергии (Energy-Aware Data-centric Routing – EAD) [58], ограниченная маршрутизация по кратчайшему маршруту с учетом расхода энергии (Constrained Shortest-Path Energy-Aware Routing – CSPEAR) [59], молва (Rumor) [60]. Рассмотрим подробнее протокол направленной диффузии. Узел – получатель лавинообразно распространяет по сети запрос к узлу – источнику, причём в запросе содержится параметр, названный авторами протокола «интерес» [57], убывающий с увеличением количества ретрансляций и сохраняющийся на узлах – ретрансляторах. По достижении запросом узла – источника обратный маршрут строится по градиенты значений «интереса».

Плоские протоколы предназначены для функционирования в одноранговых сетях, состоящих из большого количества узлов не имеющих уникальных идентификаторов. К таким протоколам относятся: градиентное вещание (Gradient Broadcast – GRAB) [61, 62], маршрутизация с последовательным присваиванием (Sequential Assignment Routing – SAR) [63,

64, 65], алгоритм с продвижением по минимальной стоимости (Minimum Cost Forwarding Algorithm – MCFA) [62]. Протокол градиентного вещания предусматривает разбиение всего множества узлов на группы, в каждой из которых выделяется лидирующий узел, определяемый по доступным ему энергоресурсам, который собирает информацию от узлов своей группы, а затем передаёт конечному получателю.

При использовании географических протоколов маршрутизации сначала определяется место положения узла – получателя (данные задаются предварительно или собираются путём последовательного опроса сети), а ретрансляторы выбираются в определённом направлении. К географическим протоколам можно отнести протокол без запоминания состояний с «мягкими» решениями для коммуникаций в режиме реального времени и сенсорных сетях (stateless protocol for soft real-time communication in sensor networks – SPEED) [66], географическая маршрутизация без данных о местоположении (Geographic Routing with No Location Information – GRWNL) [67], Энерго-эффективная стратегия продвижения (пакетов) для географической маршрутизации в беспроводных сенсорных сетях с потерями (Energy-Efficient Forwarding Strategies for Geographic Routing in Lossy Wireless Sensor Networks – EEFSGRLWSN) [68], географическая маршрутизация на основе ограниченной информации в сенсорных сетях (Geographic Routing with Limited Information in Sensor Networks – GRLISN) [69].

Иерархические протоколы предусматривают построение из узлов сенсорной сети виртуальной иерархии, в основе которой могут лежать принципы территориального, функционального или иного деления. Примеры протоколов – адаптивная кластерная иерархия с низким энергопотреблением (Low-Energy Adaptive Clustering Hierarchy – LEACH) [70], энерго-эффективное накопление (данных) в сенсорных информационных системах (Power-Efficient Gathering in Sensor Information Systems – PEGASIS) [71], энерго-эффективный протокол с пороговой чувствительностью для сенсорных сетей (Threshold-Sensitive Energy-Efficient Sensor Network Protocol

– TEEN) [72] и его адаптивная модификация (adaptive threshold-sensitive energy-efficient sensor network protocol – APTEEN) [73], агрегация данных – точные и приближенные алгоритмы [74].

Многопутевые протоколы предусматривают построение не одного, а нескольких маршрутов передачи данных от источника к получателю. Дополнительные маршруты могут использоваться одновременно с основным для повышения скорости передачи информации или находиться в резерве для максимально быстрого восстановления связи в случае разрыва основного маршрута. Многопутевыми являются протокол многопутевой маршрутизации в ячеистых сетях (Meshed Multipath Routing – M-MPR) [75], энергоэффективная многопутевая маршрутизация с высокой отказоустойчивостью для беспроводных сенсорных сетей (Highly Resilient, Energy-Efficient Multipath Routing in Wireless Sensor Networks – HREEMRWSN) [76], передача на основе достоверной информации с использованием множества маршрутов (reliable information forwarding using multiple paths – ReInForM) [77]

В связи с необходимостью обеспечения приоритизации передачи определённых данных и реализации потоковой передачи информации выжнущую роль начинают играть протоколы, в которых в качестве метрики выбрана не длина маршрута или его энергоэффективность, обеспечение необходимого качества обслуживания (QoS), например маршрутизация по включенным потокам (Stream-Enabled Routing – SER) [78] или алгоритм надежной маршрутизации в быстро меняющихся условиях (Algorithm for Robust Routing in Volatile Environments – ARRIVE) [79].

Следует отметить что приведённая классификация достаточно условна, и один и тот же протокол можно отнести сразу к нескольким из описанных шести классов.

1.5 Моделирование маршрутизации в беспроводных сетях

Моделирование позволяет оценить различные параметры сети, сопоставить различные алгоритмы работы и выбрать соответствующие характеристики используемого оборудования. Моделирование сетей обычно разделяют на аналитическое (математическое) и физическое (натурное). Последняя разновидность подразумевает использование реального оборудования и, как правило, используется либо в целях демонстрации реализуемости определенной концепции или протокола сети в виде лабораторного эксперимента, либо как пилотная сеть, развёртывание которой предшествует реализации широкомасштабных проектов.

Аналитическое моделирование подразумевает наличие математической модели сети, которую можно использовать для оценки определённого набора параметров, характеризующих работоспособность и эффективность сети при различных исходных данных. Разновидностью аналитического моделирования считается имитационное, при котором модель представляет собой компьютерную программу, которая содержит алгоритмы работы и взаимодействия элементов сети и последовательно имитирует работу сети, вообще говоря, в существенно ускоренном, по сравнению с реальным временем, режиме.

В настоящее время наиболее часто для моделирования беспроводных сетей применяется имитационное моделирование на основе различных коммерческих или свободно распространяемых программных продуктов. Несмотря на широкое распространение и популярность этого подхода, следует отметить и его определённые недостатки. Прежде всего, в результате имитационного моделирования мы получаем данные только о работоспособности и характеристиках сети в конкретной конфигурации, что хорошо для конкретных технических приложений, но требует значительного объёма экспериментов для выявления или анализа научно значимых закономерностей. Кроме того, рассмотрение сетей с большим количеством

узлов может потребовать значительных вычислительных ресурсов. Далее рассмотрен аналитический подход к моделированию определённых типов сетей с большим количеством узлов.

Выводы по главе 1

Беспроводные сети играют всё большую роль в жизни человека и общества, обеспечивая распространение и сбор информации. Помимо широко известных и повсеместно распространённых сетей связи в последнее десятилетие активно развиваются беспроводные сенсорные сети, обеспечивающие сбор информации или отслеживающие различные явления и события. Диапазон их применения огромен: от охранной сигнализации до глобальных систем мониторинга окружающей среды. Из-за дешевизны массового производства и унификации стандартов в последние годы растёт интерес к сетям, состоящим из идентичных (по функциональности, а иногда и по используемому оборудованию) узлов, обеспечивающих передачу информации путём множественных ретрансляций – так называемым сетям с ячеистой (mesh) топологией. В силу специфики архитектуры таких сетей одной из важнейших задач становится важнейшей осуществление маршрутизации – поиск последовательности ретрансляторов, обеспечивающих доставку данных от источника к получателю. В настоящее время разработаны ряд протоколов маршрутизации, как для сетей связи, так и для сенсорных сетей, которые имеют определённую специфику: стационарный характер сети, относительно низкая интенсивность информационного обмена, редко меняющиеся маршруты передачи информации. Имеется тенденция к использованию как в сенсорных сетях, так и в сетях связи всё большего количества узлов. Это может вызвать определённые сложности в применении многих известных протоколов маршрутизации в таких сетях. Это обуславливает актуальность задачи моделирования таких сетей, в том числе методами, отличными от

имитационного моделирования, которые также осложняются при наличии в сети большого количества узлов.

2 Математическая модель маршрутизации в сверхбольшой сети

2.1 Модель сети на основе векторной функции информационного потока

Модель сети и маршрутизации в ней как движение информационного потока в потенциальном поле была впервые предложена в [1] и, видимо, независимо от предыдущей работы, в [2]. Далее эта тематика развивалась в работах [80 –85]. Аналогичный подход, правда, изложенный описательно и без математической модели, приведён в [3].

При наличии в составе сети достаточного большого количества узлов, передачу информации можно рассматривать как векторное поле – информационный поток, а производителей и получателей информации – как источники и стоки соответственно. Силовые линии этого поля представляют собой возможные маршруты передачи информации посредством множественных ретрансляций между ближайшими к силовой линии узлами. Таким образом, вместо величин, характеризующих отдельные элементы сети (расположение каждого узла и его скорость передачи) рассматриваются обобщённые характеристики, практически не зависящие от конкретного размещения узлов, а определяющиеся плотностью их расположения.

Если рассматриваемое поле информационного потока потенциально, то, как показано в [83], информационные потоки распределены по области, занимаемой сетью оптимально по критерию «интенсивность нагрузки на маршрут обратно пропорциональна его длине», что позволяет увеличить общее время работы сети с ограниченными источниками энергии, не допуская в то же время значительных задержек при передаче информации.

Обозначим W функцию потока информации. Это непрерывная векторная функция, направление которой совпадает с направлением движения информации в данной точке сети, а её модуль равен интенсивности

передачи информации, то есть количеству информации, передаваемой через единичный отрезок, расположенный в указанной точке сети перпендикулярно к направлению передачи информации за единицу времени.

Размерность функции $\mathbf{W} - \frac{\text{бит}}{\text{м} \cdot \text{с}}$.

Функцию интенсивности источников или стоков информации обозначим ρ . Она принимает положительные или отрицательные значения в точках (областях) производства или потребления информации соответственно. Размерность функции $\rho - \frac{\text{бит}}{\text{м} \cdot \text{с}^2}$.

Будем рассматривать стационарный случай, т. е. когда функции \mathbf{W} и ρ постоянны и не зависят от времени. Это значит, что источники и потребители информации неподвижны, и источниками информации постоянно передается, а потребителями принимается определенное и неизменное во времени количество информации.

Беспроводная сеть занимает область A . Рассмотрим произвольный замкнутый контур $C \subset A$, ограничивающий подобласть $S(C) \subset A$. Так как информация должна быть доведена до потребителя, поток информации на границе области, определяется функцией источников внутри неё и количество поступающей или исходящей из области информации должно соответствовать суммарной разности между произведенной и потребленной внутри области, которая определяется функцией ρ . Таким образом, можно записать

$$\oint_C \mathbf{W} \cdot dn = \iint_{S(C)} \rho dx dy, \quad (1)$$

где n – внешняя нормаль к контуру C . Данное выражение является аналогом уравнения неразрывности.

По теореме Гаусса-Остроградского (о дивергенции) имеем:

$$\oint_C \mathbf{W} \cdot dn = \iint_{S(C)} \left(\frac{\partial \mathbf{W}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}_y}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2)$$

Приравнивая правые части выражений (1) и (2), в силу произвольности контура C , получим равенство подынтегральных выражений в области A :

$$\frac{\partial \mathbf{W}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{W}_y}{\partial y} = \rho, \quad (3)$$

что также можно записать как

$$\nabla \cdot \mathbf{W} = \rho. \quad (4)$$

Вся информация, появившаяся в сети, должна быть доставлена на базовую станцию, поэтому за пределы области, занимаемой сетью, информация не поступает: $\iint_A \rho dx dy = 0$, таким образом, информационный

поток через границы области A отсутствует:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial n} \right|_{\partial A} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (3) и граничное условие (5) не определяют единственным образом функцию потока информации \mathbf{W} .

Введём функционал

$$J(\mathbf{W}) = \iint_A |\mathbf{W}|^2 dx dy, \quad (6)$$

минимизация которого определяет функцию стоимости, характеризующую распределение информационного потока по области, занимаемой сетью. При выполнении условия $\min J(\mathbf{W})$ в сети не будет перегруженных областей, если другие области сети недогружены. Проиллюстрируем распределение нагрузки по области, занимаемой сетью при минимизации функционала (6).

Рассмотрим сеть, состоящую из двух маршрутов разных длин (l_1 и l_2) но равной ширины s . Обозначим пропускную способность первого и второго маршрутов θ_1 и θ_2 соответственно. Общая пропускная способность системы

$$\theta = \theta_1 + \theta_2. \quad (7)$$

Тогда информационный поток сети будет состоять из суммы потоков по каждому из маршрутов: $\mathbf{W} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$. Очевидно, что $|\mathbf{W}_1| = \frac{\theta_1}{s}$ и $|\mathbf{W}_2| = \frac{\theta_2}{s}$.

Тогда выражение (6) примет вид:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{W}) &= J(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) = \iint_A |\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2|^2 dx dy = \\ &= l_1 s |\mathbf{W}_1|^2 + l_2 s |\mathbf{W}_2|^2 = l_1 s^2 \theta_1^2 + l_2 s^2 \theta_2^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть второй маршрут длиннее первого, тогда можно записать $l_2 = k l_1$, где $k > 1$. Тогда

$$J(\mathbf{W}) = l_1 s^2 (\theta_1^2 + k \theta_2^2) \quad (9)$$

Используя (7) и тот факт, что $l_1 s^2 = const$ и $\theta = const$, минимизация функционала (9) сводится к минимизации выражения

$$\theta_1^2 + k \theta_2^2 = (\theta - \theta_2)^2 + k \theta_2^2 = (k+1)\theta_2^2 - 2\theta\theta_2 + \theta^2 \quad (10)$$

Тогда, так как минимум функции вида $ax^2 + bx + c$ с положительным коэффициентом a соответствует вершине параболы $x_{\min} = -\frac{b}{2a}$, то

$$\theta_2 = \frac{\theta}{k+1} \quad (11)$$

и, соответственно,

$$\theta_1 = \frac{k\theta}{k+1} \quad (12)$$

Так как $\theta_1 = k\theta_2$, то можно сказать, что объем информации, передаваемый по каждому маршруту обратно пропорционален длине этого маршрута.

В [1] показано, что условие минимизации функционала (6) при выполнении (4) эквивалентно условию потенциальности векторного поля \mathbf{W} :

$$\nabla \times \mathbf{W} = 0 \quad (13)$$

Следовательно, можно перейти к рассмотрению его потенциала U .

Тогда

$$\mathbf{W} = -\nabla U, \quad (14)$$

где U — функция потенциала.

Далее описана модификация данного метода, предложенная автором и описанная, совместно с соавторами, в [44 – 46, 89 – 110]. В работах [44, 89, 90, 93, 95] показано, что использование более сложного, чем постоянный или кусочно-постоянный, вида коэффициента при потенциале информационного потока позволит точнее учитывать при моделировании пространственную структуру сети и комплекс её характеристик, влияющих на быстроту доставки информации. В [91, 92, 94] проведены оценки пропускной способности конкретных реализаций ячеистых сетей с помощью средства имитационного моделирования – сетевого симулятора ns2, аналитические оценки максимальной пропускной способности даны в [104]. Использование рассматриваемой модели маршрутизации на основе геометрии силовых линий потенциального поля для ячеистой сети с адаптивным поведением узлов, находящейся под воздействием источника помех впервые рассмотрено в [96]. Энергетическая трактовка потенциальной функции и определение размерности коэффициента при нём приведены в [98]. Более полное комплексное изложение этих вопросов, в также оценки коэффициента информопродности для сети с узлами с изотропными антеннами даны в работах [45, 99 – 102, 106]. Математическое описание модели и теоремы существования и единственности решения рассматриваемой задачи сформулированы в [97, 103]. В [104] рассмотрены практические перспективы использования разрабатываемого метода. В [107] дан обзор методов построения конкретных маршрутов по полученному в результате моделирования векторному полю информационного потока. Оценки коэффициента информопродности при воздействии на сеть, узлы которой оборудованы антеннами с адаптивно изменяемой диаграммой направленности, источника помех, а также результаты моделирования приведены в [46, 108, 109, 110]. В [47] рассмотрен случай нескольких источников помех.

2.2 Потенциальная функция

В [84] потенциальной функции придан смысл количества ретрансляций. Однако варьируя плотность расположения узлов и мощность излучения на антенне, а соответственно и скорость передачи информации можно отметить, что различные комбинации этих параметров могут давать одинаковую скорость информационного потока, а значит количество ретрансляций, непосредственно зависящее от плотности расположения узлов является не достаточно общей характеристикой потенциала плотности информационного потока.

В качестве физического смысла потенциала в точке $(x, y) \in A$ рассмотрим количество энергии, необходимое для доставки ретранслируемой информации до базовой станции. Поток информации направлен против роста потенциала. Это справедливо при дополнительном условии, однозначно определяющим функцию потенциала: в области потребления информации $U = 0$.

Введём также, по аналогии с коэффициентами теплопроводности и диффузии, коэффициент информопродности K , определяющий свойства сети как среды распространения сигнала. Тогда, с учетом (14), уравнение (4) примет вид

$$\nabla \cdot (-K \nabla U) = \rho. \quad (15)$$

Размерность коэффициента K – $\frac{\text{бит}/\text{с}}{\text{Вт}}$ или $\frac{\text{бит}}{\text{Дж}}$, а его величина численно равна объему информации, пересекающему отрезок единичной длины, перпендикулярный направлению потока информации \mathbf{W} за единицу времени, если градиент энергии равен 1. Значение коэффициента K определяется всей совокупностью факторов, влияющих на скорость передачи информации в сети: он зависит от характеристик радиомодулей узлов (скорость передачи информации от узла к узлу, энерго-информационная эффективность передачи), способа доступа к разделяемой среде передачи

информации, плотностью расположения узлов на местности, уровня помех и т. д.

С учётом условия (5) получим задачу:

$$\begin{cases} \nabla \cdot (-K \nabla U) = \rho \\ K \nabla U_n|_{\partial A} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

2.3 Коэффициент информопроводности

Оценим значения коэффициента информопроводности. Согласно приведенному выше определению, нормируем пропускную способность W_1 $\left(\frac{\text{бит}}{\text{с}}\right)$ участка сети единичной площади при параллельном информационном потоке к затратам мощности P_1 (Вт) на передачу информации, т. е.

$$K = \frac{W_1}{P_1} \quad (17)$$

Пропускную способность участка сети с произвольным расположением узлов можно оценить сверху пропускной способностью квадратной решетчатой сети [84] (см рис. 2, 3).

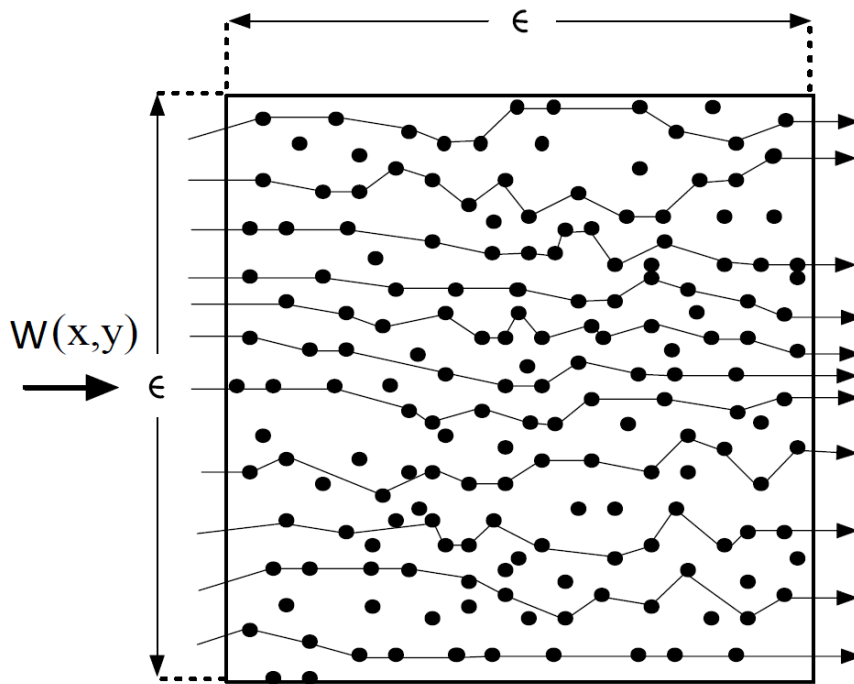


Рис. 2. Примерные маршруты передачи информации в области параллельного однонаправленного информационного потока.

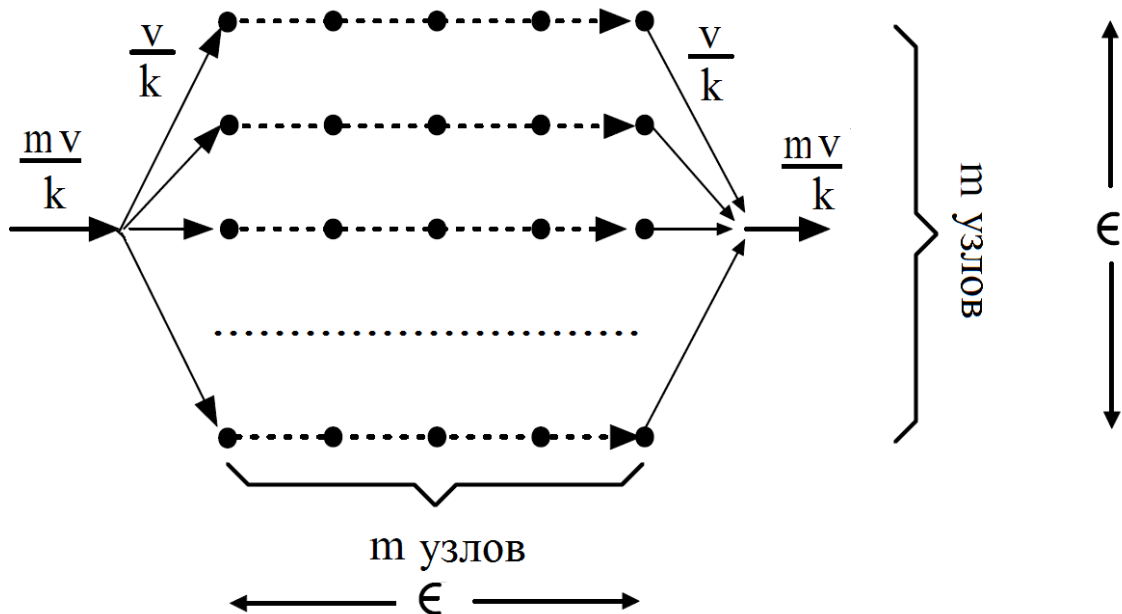


Рис. 3. Аппроксимация информационного потока в сети с большим количеством узлов параллельными маршрутами в решетчатой сети.

При плотности размещения узлов $d \left(\frac{\text{узлов}}{\text{м}^2} \right)$ в единичном квадрате решетчатой сети можно организовать максимум \sqrt{d} параллельных маршрутов, тогда пропускная способность единичного квадрата сети (между противоположными гранями, перпендикулярными направлению информационного потока) составит

$$W_1 = k\sqrt{d}v, \quad (18)$$

где $v \left(\frac{\text{бит}}{\text{с}} \right)$ – скорость передачи информации, k – коэффициент эффективности использования разделяемой среды передачи информации (радиоканала), численно равный части от общего количества узлов маршрута, которые может работать одновременно, не создавая помех другим приёмникам, а расходуемая на это мощность

$$P_1 = kdP_T, \quad (19)$$

где P_T (Вт) – мощность излучения передающей антенны. Для синхронной сети на единой частоте с оптимизацией мощности передачи k достигает $\frac{1}{3}$, при конкурентном доступе – значительно меньше.

Подставляя (18) и (19) в (17) получим:

$$K = \frac{v}{\sqrt{d}P_T}. \quad (20)$$

Для неадаптивной сети скорость передачи информации величина постоянная, в адаптивной её можно рассматривать как функцию отношения сигнал / шум.

Рассмотрим сеть, находящуюся под воздействием источника помех, функционирующего на одинаковой с сетью частоте и имеющего мощность P_{TN} (Вт). Рассмотрим характер изменения отношения сигнал / шум как функцию от расстояния до источника помех r (м). Рассчитаем мощность полезного сигнала на антенне приемника P_S (Вт). Для этого воспользуемся

двухлучевой моделью распространения радиоволн с отражением от поверхности [111]

$$P_S = \frac{P_T G_T G_R h_T h_R}{R^4}, \quad (21)$$

где R – расстояние от приемника до передатчика, которое в случае равномерного распределения узлов по площади, занимаемой сетью, можно оценить через плотность расположения узлов как $R = \frac{1}{\sqrt{d}}$, h_T и h_R – высоты расположения, а G_T и G_R – коэффициентами усиления антенн передатчика и приёмника соответственно. Если сеть состоит из идентичных узлов, расположение которых незначительно отличается по высоте, то можно считать $h_T = h_R$. В качестве шума здесь выступает помеха, мощность которой можно рассчитать аналогично:

$$P_N = \frac{P_{TN} G_{TN} G_{RN} h_{TN} h_R}{r^4}, \quad (22)$$

где h_{TN} – высота антенны источника помехи, G_{TN} , G_{RN} – коэффициенты усиления антенн источника помех и узла сети в направлении источника помех соответственно.

Тогда, пренебрегая естественным шумовым фоном, отношение сигнал / шум примет вид

$$\frac{P_S}{P_N} = \frac{P_T G_T G_R h_T r^4 d^2}{P_{TN} G_{TN} G_{RN} h_{TN}}. \quad (23)$$

Если узлы сети используют антенны с изотропной диаграммой направленности, то в формуле (23) все коэффициенты, кроме r , постоянны во всей области, занимаемой сетью.

Оценим сверху скорость передачи информации пропускной способностью канала связи C по формуле Шеннона-Таллера-Хартли [112]:

$$C = w \log_2 \left(\frac{P_S}{P_N} + 1 \right), \quad (24)$$

где w – полоса частот сигнала.

Тогда оценка коэффициента K примет вид функции от расстояния до источника помехи r :

$$K(r) = \frac{w}{\sqrt{dP_T}} \log_2 \left(\frac{P_T G_T G_R h_T d^2 r^4}{P_{TN} G_{TN} G_{RN} h_{TN}} + 1 \right). \quad (25)$$

Если на узлах сети и источнике помехи установлены антенны с изотропной (в горизонтальной плоскости) диаграммой направленности, то $G_T = G_R = G_{TN} = G_{RN} = 1$, и выражение (25) примет вид

$$K(r) = \frac{w}{\sqrt{dP_T}} \log_2 \left(\frac{P_T h_T r^4 d^2}{P_{TN} h_{TN}} + 1 \right). \quad (26)$$

Рассматривая сеть, внутри области, занимаемой которой, расположен источник помех удобно перейти к полярным координатам. Тогда уравнение (15) примет вид

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(rK \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \right) = \rho, \quad (27)$$

Рассмотрим теперь сеть с групповым поведением узлов. Пусть узлы оборудованы антеннами из двух вертикальных вибраторов с расстоянием между ними $\lambda/4$, где λ — длина волны используемой несущей. Тогда диаграмма направленности антенны в горизонтальной плоскости описывается уравнением

$$G(\tilde{\varphi}) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} \cos(\tilde{\varphi}) - \frac{\psi}{2} \right), \quad (28)$$

где $\tilde{\varphi}$ — угловая координата вспомогательной полярной системы с началом координат между вибраторами антенны, ψ — фазовый сдвиг токов между вибраторами. Максимум «выреза» диаграммы направленности достигается при $\tilde{\varphi} = \pi$. Меняя разность фаз ψ , в пределах $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ можно получить различную глубину «выреза».

Пусть антенны способны автоматически ориентироваться максимумом «выреза» в направлении источника помехи. Тогда взаимная диаграмма направленности двух узлов сети примет вид:

$$G_{TR}(\tilde{\varphi}) = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \tilde{\varphi} \right) + \cos \psi \right). \quad (29)$$

Аппроксимируем диаграмму взаимной направленности антенн вписанным в неё эллипсом. Короткая полуось эллипса направлена в направлении источника помехи. Соответственно, коэффициент усиления помехи

$$G(\pi) = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right), \quad (30)$$

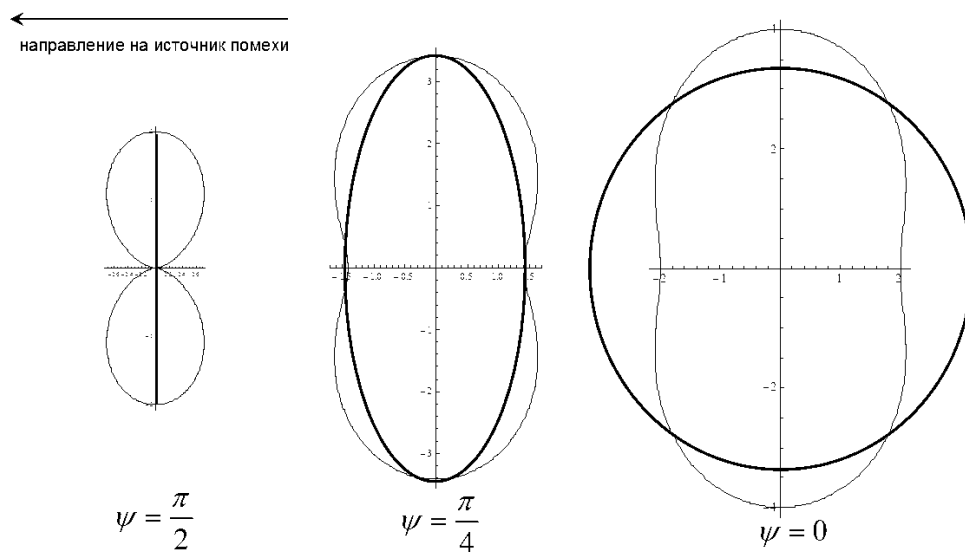


Рис. 4. Взаимная диаграмма направленности передающей и принимающей антенн узлов, ориентированных в направлении источника помехи, и их аппроксимации

Коэффициент усиления полезного сигнала по направлению короткой оси составит

$$G_{TR}(\pi) = 2 \cos \psi, \quad (31)$$

а по направлению длинной оси –

$$G_{TR} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 2(\cos \psi + 1). \quad (32)$$

Заметим, что $G_{TR} \left(\frac{\pi}{2} \right) = G_{TR}(\pi) + 2$. Тогда уравнение (26) примет вид

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r K_r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K_\varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \right) = \rho, \quad (33)$$

причём коэффициенты K_r и K_φ будут определяться формулами

$$K_r = \frac{w}{\sqrt{d} P_T} \log_2 \left(\frac{P_T h_R r^4 d^2 \cos(\psi)}{P_{TN} h_{TN} \cos\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + 1 \right), \quad (34)$$

$$K_\varphi = \frac{w}{\sqrt{d} P_T} \log_2 \left(\frac{P_T h_R r^4 d^2 (\cos(\psi) + 1)}{P_{TN} h_{TN} \cos\left(\frac{\psi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + 1 \right), \quad (35)$$

Зададимся минимальным отношением сигнал / шум SN_1 , при котором становится возможна передача информации и максимальным SN_2 , при превышении которого скорость передачи информации больше не увеличивается. Тогда характер изменения ψ как функции от r можно определить из уравнения

$$\frac{P_T h_T r^4 d^2 (\cos(\psi_a(r)) + 1)}{P_{TN} h_{TN} \cos\left(\frac{\psi_a(r)}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = SN_2. \quad (36)$$

Определив из (36) $\psi_a(r)$, его следует подставить в (34). Обозначим

$$A = \frac{SN_2 P_{TN} h_{TN}}{P_T h_T d^2}. \quad (37)$$

Тогда (36) можно записать как

$$\frac{r^4 (\cos(\psi_a(r)) + 1)}{\cos\left(\frac{\psi_a(r)}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = A. \quad (38)$$

Заметим, что, с учетом того, что $\psi_a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, справедливы равенства

$$\frac{\cos(\psi_a) + 1}{\cos\left(\frac{\psi_a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{\left(1 - \operatorname{tg} \frac{\psi_a}{2}\right) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\psi_a}{2}}}, \quad (39)$$

$$\frac{\cos(\psi_a)}{\cos\left(\frac{\psi_a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\psi_a}{2}\right)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\psi_a}{2}}}, \quad (40)$$

Введём замену переменной $v = \operatorname{tg}\frac{\psi_a}{2}$, причём заметим, что $\operatorname{tg}\frac{\psi_a}{2} \in [0,1]$. Тогда уравнение (38) примет вид

$$\frac{2\sqrt{2}r^4}{(1-v)\sqrt{1+v^2}} = A. \quad (41)$$

Обозначим

$$z = \frac{A^2 - 24r^8 + \left(A^3 + 18Ar^8 + 6\sqrt{3}r^4\sqrt{A^4 - 13A^2r^8 + 128r^{16}}\right)^2}{A^3\sqrt{A^3 + 18Ar^8 + 6\sqrt{3}r^4\sqrt{A^4 - 13A^2r^8 + 128r^{16}}}}, \quad (42)$$

Тогда интересующее нас решение уравнения (41) при условии, что $v \in [0,1]$ имеет вид

$$v = \frac{1}{6} \left(3 + \sqrt{3}\sqrt{2z-1} - \sqrt{6}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2z-1}} - z - 1} \right). \quad (43)$$

Очевидно, данное решение имеет смысл при r от 0 (заметим, что $v(r)|_{r=0} = 1$) до точки, в которой $v(r) = 0$. Таким образом, решение уравнения (36), с учётом (42) имеет вид,

$$\psi_a(r) = 2\operatorname{arctg} \left(\frac{1}{6} \left(3 + \sqrt{3}\sqrt{2z-1} - \sqrt{6}\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2z-1}} - z - 1} \right) \right). \quad (44)$$

Очевидно, что при найденных значениях $\psi_a(r)$, $K_\varphi = \operatorname{const}$. Соответственно, скорость передачи информации в направлении K_φ всегда будет максимальной. В силу наложенных ограничений функция K_r будет иметь вид

$$K_r = \begin{cases} 0 & , r \leq r_1 \\ \frac{w}{\sqrt{d}P_T} \log_2 \left(\frac{P_T h_T (r - r_1)^4 d^2 \cos(\psi_a)}{P_{TN} h_{TN} \cos\left(\frac{\psi_a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + 1 \right) & , r_1 < r \leq r_2, \\ \frac{w}{\sqrt{d}P_T} \log_2(SN_2 + 1) & , r > r_2 \end{cases} \quad (45)$$

где значения r_1 и r_2 можно найти из уравнений

$$\frac{P_T h_T r_1^4 d^2 \cos(\psi_a(r_1))}{P_{TN} h_{TN} \cos\left(\frac{\psi_a(r_1)}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = SN_1, \quad (46)$$

$$\frac{P_T h_T r_2^4 d^2 \cos(\psi_a(r_2))}{P_{TN} h_{TN} \cos\left(\frac{\psi_a(r_2)}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = SN_2 \quad (47)$$

соответственно, а

$$K_\varphi = \begin{cases} 0 & , r \leq r_1 \\ \frac{w}{\sqrt{d}P_T} \log_2(SN_2 + 1) & , r > r_1 \end{cases} \quad (48)$$

Таким образом, при $r > r_2$, т. е. вне пределов области влияния помехи, $K_r = K_\varphi$. Это оправданно, так как, хотя диаграмма направленности антенны узла в соответствии с формулой (28) при $\psi = \frac{\pi}{2}$ имеет форму, близкую к эллиптической, но в отсутствие помехи все антенны будут ориентированы произвольно и, соответственно, можно считать их диаграммы направленности изотропными.

В некоторых случаях может быть полезно рассмотреть дополнительное семейство маршрутов которое, не являясь оптимальным в описанном выше смысле, в то же время близко к оптимальному. Это позволит получить дополнительный набор маршрутов, на который можно перейти при истощении энергетических ресурсов основного набора. Для

получения этого дополнительного набора модифицируем уравнение (33) введением дополнительного слагаемого

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(K_r(r) \frac{\partial U}{\partial r} + L_r U \right) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K_\varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \right) = \rho, \quad (49)$$

В простейшем случае $L_r = const$.

Будем рассматривать задачу в кольце, ограниченном концентрическими кругами радиусов r_1 и r_2 соответственно. Как отмечалось выше $0 < r_1 < r_2$. Заметим, что из (45) следует, что

$$K_r(r) \Big|_{r=r_1} = K_r'(r) \Big|_{r=r_1} = 0. \quad (50)$$

Так как при $r < r_1$ передача информации и работа сети невозможна, то информационный поток должен огибать круг радиуса r_1 . Соответственно, граничное условие при $r = r_1$ будет иметь вид

$$\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = 0. \quad (51)$$

На внешней границе круга $r = r_2$ информационный поток будет переходить в область, не подверженную влиянию источника помех. Без ограничения общности можно считать, что на границе выполняется условие

$$U \Big|_{r=r_2} = g(r, \varphi). \quad (52)$$

2.4 Случай нескольких источников помех

Если внутри области, занимаемой сетью, находятся несколько источников помех, имеющих, вообще говоря, различные мощности излучения $P_{TN1}, P_{TN2}, \dots, P_{TNk}$, где k – общее количество источников помех, то, при условии сохранения ранее принятых предположений о типе используемых адаптивных антенн и алгоритмов адаптации узлов относительно источников помех, можно дать следующие рекомендации по

оценке коэффициента информопроводности внутри области, занимаемой такой сетью.

Для каждого источника помех мощностью P_{TNi} , где $i = 1, \dots, k$ следует определить свои величины радиусов r_{1i} и r_{2i} по формулам (46), (47), которые могут существенно отличаться за счёт различных мощностей источников.

Если круги радиусов r_{2i} , $i = 1, \dots, k$ нигде не пересекаются между собой, то внутри каждого из них для вычисления коэффициента информопроводности следует пользоваться формулами (45), (48), а вне их $K = const$ и определяется по формуле

$$K = \frac{w}{\sqrt{d}P_T} \log_2(SN_2 + 1). \quad (53)$$

Отметим, что в этом случае математическая модель несколько усложняется, так как невозможно воспользоваться удобными полярными координатами.

Если же два или более кругов с радиусами r_{2i} , $i = 1, \dots, k$ пересекаются, возникает более сложная ситуация.

Исходя из приведённого выше алгоритма автономной работы узлов сети, будем полагать, что, если узел сети находится в области воздействия сразу нескольких источников помех, то он способен компенсировать влияние только одного, причём наиболее мощного. Тогда для получения адекватной модели достаточно корректно учесть влияние других, менее мощных источников помех.

Вначале необходимо разделить область, занимаемую сетью, на подобласти по линиям, на которых мощности помех каждой пары соседних источников с пересекающимися областями влияния, равны. Рассмотрим источники с мощностями P_{TNi} и P_{TNj} , расположенные в точках с координатами (x_i, y_i) и (x_j, y_j) соответственно и с пересекающимися областями влияния на сеть. Воспользовавшись формулой (22), учитывая, что в данном случае $G_{TNj} = G_{TNi} = 1$, и полагая $G_{RNj} = G_{RNi}$ получим, что геометрическое место

точек, в которых мощности воздействия двух рассматриваемых источников помех одинаковы, определяется уравнением

$$\frac{P_{TNi}h_{TNi}}{\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right)^2}=\frac{P_{TNj}h_{TNj}}{\left((x-x_j)^2+(y-y_j)^2\right)^2}, \quad (54)$$

Отметим, что если $P_{TNi}=P_{TNj}$, то линией раздела областей воздействия двух источников помех будет прямая, проходящая через центр отрезка, соединяющего точки (x_i, y_i) и (x_j, y_j) и перпендикулярная ему. Её уравнение

$$y=-\frac{x_j-x_i}{y_j-y_i}x+\frac{(y_j-y_i)^2-(x_j-x_i)^2}{2(y_j-y_i)}, \quad (55)$$

В противном случае формулу (54) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} &\left(x-\frac{\sqrt{P_{TNj}h_{TNj}}x_i-\sqrt{P_{TNi}h_{TNi}}x_j}{\sqrt{P_{TNj}h_{TNj}}-\sqrt{P_{TNi}h_{TNi}}}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{P_{TNj}h_{TNj}}y_i-\sqrt{P_{TNi}h_{TNi}}y_j}{\sqrt{P_{TNj}h_{TNj}}-\sqrt{P_{TNi}h_{TNi}}}\right)^2= \\ &=\left(\frac{\sqrt[4]{P_{TNi}h_{TNi}}\sqrt[4]{P_{TNj}h_{TNj}}}{\sqrt{P_{TNi}h_{TNi}}-\sqrt{P_{TNj}h_{TNj}}}\sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2}\right)^2, \end{aligned} \quad (56)$$

что представляет собой уравнение окружности с центром в точке

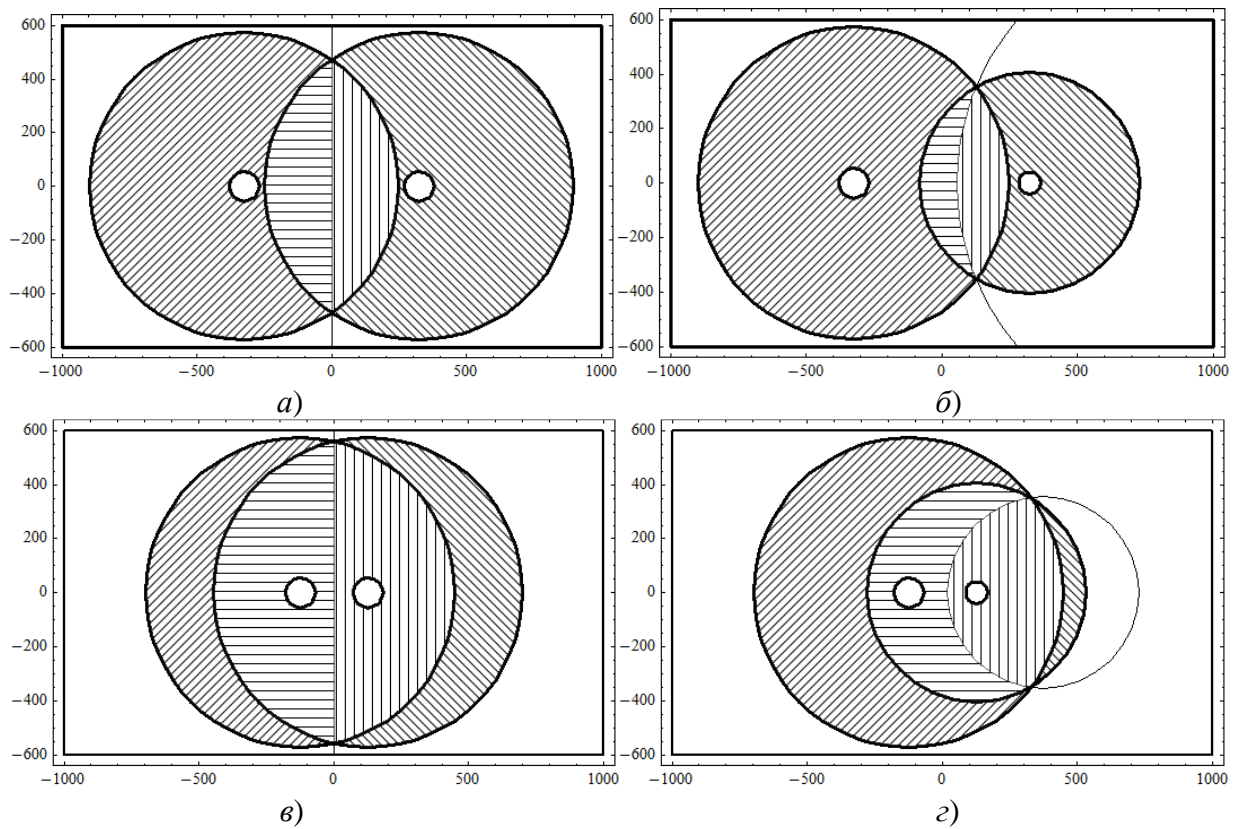
$$\left(\frac{\sqrt{P_{TNj}h_{TNj}}x_i-\sqrt{P_{TNi}h_{TNi}}x_j}{\sqrt{P_{TNj}h_{TNj}}-\sqrt{P_{TNi}h_{TNi}}}, \frac{\sqrt{P_{TNj}h_{TNj}}y_i-\sqrt{P_{TNi}h_{TNi}}y_j}{\sqrt{P_{TNj}h_{TNj}}-\sqrt{P_{TNi}h_{TNi}}}\right) \quad \text{и} \quad \text{радиусом}$$

$$\frac{\sqrt[4]{P_{TNi}h_{TNi}}\sqrt[4]{P_{TNj}h_{TNj}}}{\sqrt{P_{TNi}h_{TNi}}-\sqrt{P_{TNj}h_{TNj}}}\sqrt{(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2}.$$

Более мощный источник помех будет лежать вне этой окружности, а менее мощный – внутри. Пересечения внешней и внутренней областей, разделённых этой окружности с кольцами, ограниченными радиусами r_{1i}, r_{2i} , и r_{1j}, r_{2j} и определит области, в которых узлы сети, компенсирующие влияние источника помехи, расположенного в точке с координатами (x_i, y_i) будут испытывать воздействие источника помехи, расположенного в точке с координатами (x_j, y_j) , и узлы, компенсирующие влияние источника помехи, расположенного в точке

(x_j, y_j) будут испытывать воздействие источника помехи, расположенного в точке (x_i, y_i) соответственно.

В качестве примера на рисунке 5 приведены изображения зон влияния на беспроводную сеть, занимающую область прямоугольной формы, двух источников помех одинаковой или различной мощности при различных вариантах их взаимного расположения. Для определённости будем считать расположенный слева источник помех – первым, а расположенный справа – вторым.







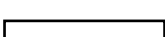
-  – область сети, в которой компенсируется воздействие первого источника помехи;
-  – область сети, в которой компенсируется воздействие второго источника помехи;
-  – область сети, в которой компенсируется воздействие первого источника помехи, и не компенсируется воздействие второго;
-  – область сети, в которой компенсируется воздействие второго источника помехи, и не компенсируется воздействие первого;
-  – область сети, свободная от воздействия источников помех.

Рис. 5. Области воздействия на сеть двух источников помех:

- а) равномошные источники помех, разнесённые на расстояние большее, чем радиус области влияния источника;
- б) источники помех различной мощности, разнесённые на расстояние большее, чем радиус области влияния источника,
- в) равномошные источники помех, разнесённые на расстояние меньшее, чем радиус области влияния источника;
- г) источники помех различной мощности, разнесённые на расстояние меньшее, чем радиус области влияния источника.

Оценим теперь коэффициенты K_{ri} и $K_{\varphi i}$, которые соответствуют коэффициентам K_r и K_φ для области, внутри которой наиболее мощным источником помехи является источник, расположенный в точке с координатами (x_i, y_i) . Пусть индексы всех источников помех, включая и наиболее мощный, расположенный в точке с координатами (x_i, y_i) , влияющих на рассматриваемую область, составляют множество L . Тогда, по аналогии с ранее рассмотренным случаем, определим сначала отношение сигнал / шум в рассматриваемой области.

Вновь воспользуемся двухлучевой моделью распространения радиоволн с отражением от поверхности. Тогда полезный сигнал будет вновь вычисляться по формуле (21), а воздействие помех вместо формулы (22) будет определяться как сумма всех помех от различных источников, индексы которых входят в множество L :

$$P_N = \sum_{l \in L} P_{Nl} = \sum_{l \in L} \frac{P_{TNI} G_{TNI} G_{RNI} h_{TNI} h_R}{r_l^4}, \quad (57)$$

где $r_l = \sqrt{(x - x_l)^2 + (y - y_l)^2}$, P_{TNI} – мощности источников помех, G_{TNI} и G_{RNI} – коэффициенты усиления антенн источников помех и приёмника узла сети соответственно (с учётом взаимного расположения и конфигурации диаграмм направленности), h_{TNI} – высоты подвеса антенн источников помех. Соответственно

$$\frac{P_S}{P_N} = \frac{P_T G_T G_R h_T d^2}{\sum_{l \in L} \frac{P_{TNI} G_{TNI} G_{RNI} h_{TNI}}{r_l^4}}. \quad (58)$$

Как и в случае единственного источника помех (см. (30) – (32)), с учётом аппроксимации взаимной диаграммы направленности антенн узлов сети вписанным эллипсом, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{ri} = \frac{w}{\sqrt{d} P_T} \log_2 \left(\frac{2 P_T h_T d^2 \cos \psi_a}{\sum_{l \in L} \frac{P_{TNI} G_{TNI} G_{RNI} h_{TNI}}{r_l^4}} + 1 \right) \\ K_{\phi i} = \frac{w}{\sqrt{d} P_T} \log_2 \left(\frac{2 P_T h_T d^2 (\cos \psi_a + 1)}{\sum_{l \in L} \frac{P_{TNI} G_{TNI} G_{RNI} h_{TNI}}{r_l^4}} + 1 \right). \end{array} \right. \quad (59)$$

Здесь ψ_a определяется по формуле (44). Из (30) следует, что произведение коэффициентов взаимного усиления для антенн узла сети и компенсируемого, наиболее мощного источника помехи

$$G_{TNI} G_{RNI} = 2 \cos \left(\frac{\psi_a}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \quad (60)$$

а для других источников помех, воздействие которых не компенсируется диаграммой направленности антенн узлов сети:

$$G_{TNm} G_{RNm} \Big|_{\substack{m \in L \\ m \neq i}} = 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{r_i^2 + r_m^2 + r_{mi}^2}{2 r_m r_i} + \frac{\psi_a}{2} \right), \quad (61)$$

где $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$, $r_m = \sqrt{(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2}$,
 $r_{mi} = \sqrt{(x_m - x_i)^2 + (y_m - y_i)^2}$.

Подставляя (60) и (61) в (59) получим искомые оценки K_{ri} и $K_{\phi i}$:

$$\left\{ \begin{array}{l}
K_{ri} = \frac{w}{\sqrt{d}P_T} \times \\
\left(\frac{P_T h_T d^2 \cos \psi_a}{\frac{P_{TNi} G_{TNi} \cos\left(\frac{\psi_a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{r_i^4} + \sum_{\substack{m \in L \\ m \neq i}} \frac{P_{TNm} h_{TNm} \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{r_i^2 + r_m^2 + r_{mi}^2}{2r_m r_i} + \frac{\psi_a}{2}\right)}{r_m^4}} + 1 \right) \\
K_{\varphi i} = \frac{w}{\sqrt{d}P_T} \times \\
\left(\frac{2P_T h_T d^2 (\cos \psi_a + 1)}{\frac{P_{TNi} G_{TNi} \cos\left(\frac{\psi_a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{r_i^4} + \sum_{\substack{m \in L \\ m \neq i}} \frac{P_{TNm} h_{TNm} \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{r_i^2 + r_m^2 + r_{mi}^2}{2r_m r_i} + \frac{\psi_a}{2}\right)}{r_m^4}} + 1 \right)
\end{array} \right. \quad (62)$$

2.5 Построение маршрутов

Задача перехода от векторной функции информационного потока к реальным маршрутам от узла к узлу решалась разными группами исследователей различными способами. В одной из первых работ, посвященных данному методу маршрутизации [1], предполагалось, что источником информации являются все узлы сети, кроме единственного приёмника. Рассматривалась стационарная сеть, занимающая квадратную область с равномерно и произвольно распределенными по ней узлами. Базовая станция (приёмник), находилась в центре сети. Построенные на основе векторной функции информационного потока маршруты строились

по принципу выбора в качестве ретранслятора ближайшего узла, расположенного в направлении, определяемом функцией W (рис. 6, б). Данная сеть сопоставлялась с сетью, маршруты которой построены по принципу кратчайшего расстояния (рис. 6, а).

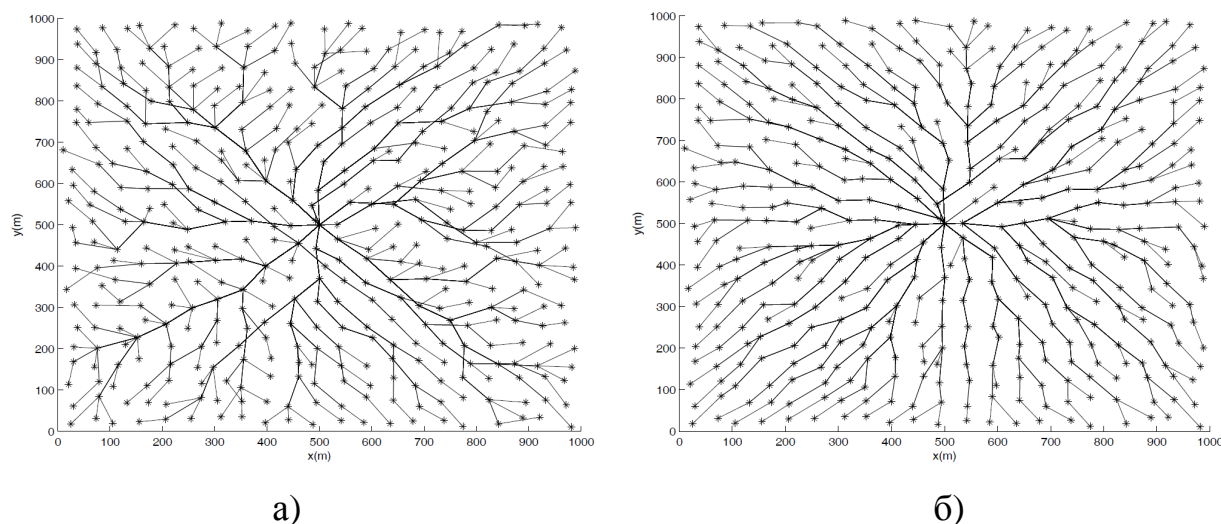


Рис. 6. Маршруты, построенные по принципу кратчайшего расстояния (а) и на основе геометрии силовых линий потенциального поля (б) – по [1].

В [1] указано, что при использовании маршрутизации на основе силовых линий потенциального поля время функционирования модели сети увеличивается в среднем на 27 %. Очевидно, это связано с тем, что непосредственно к базовой станции подходит большее количество маршрутов, чем в случае использования маршрутизации по кратчайшим расстояниям, а также с меньшим количеством ответвлений на маршрутах.

В своей следующей работе [80] те же авторы рассмотрели схему с ограниченным числом источников и одним получателем информации. В этом случае большинство узлов сети являются только ретрансляторами и далеко не все узлы сети используются для её работы. Сопоставление вновь осуществлялось со случаем маршрутизации по кратчайшим расстояниям. Полученные маршруты приведены на рис. 7.

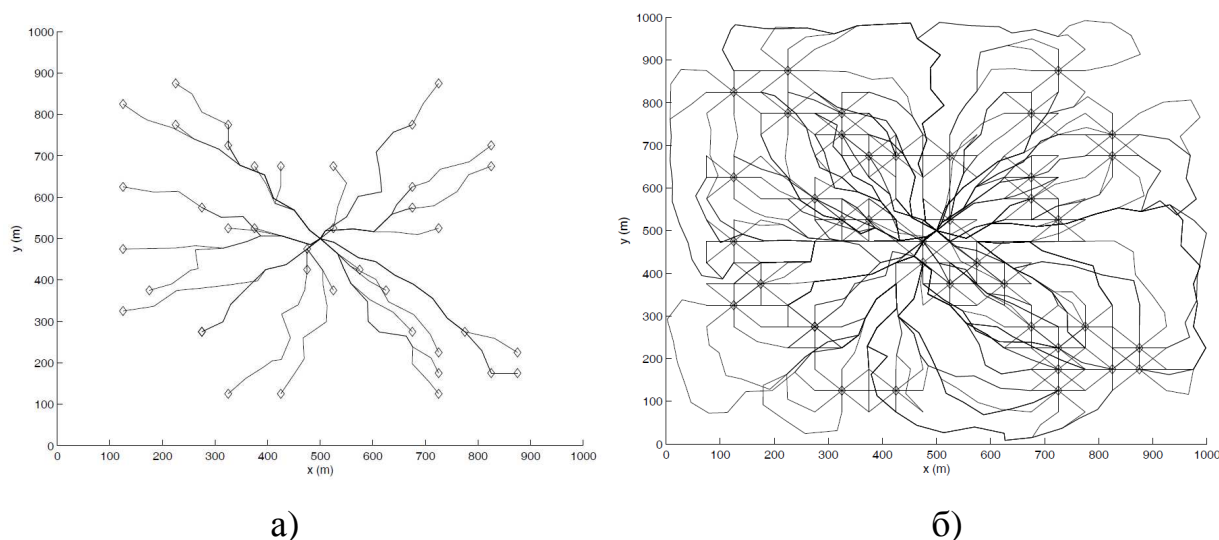
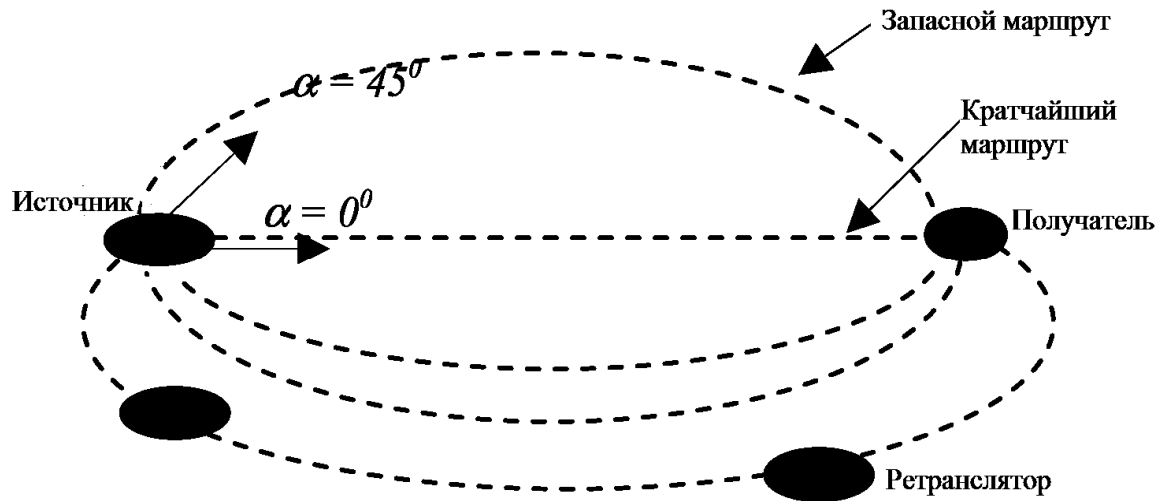


Рис. 7. Маршруты сети с ограниченным числом источников, построенные по принципу кратчайшего расстояния (а) и на основе геометрии силовых линий потенциального поля (б) – по [80] (ромбами отмечены источники информации).

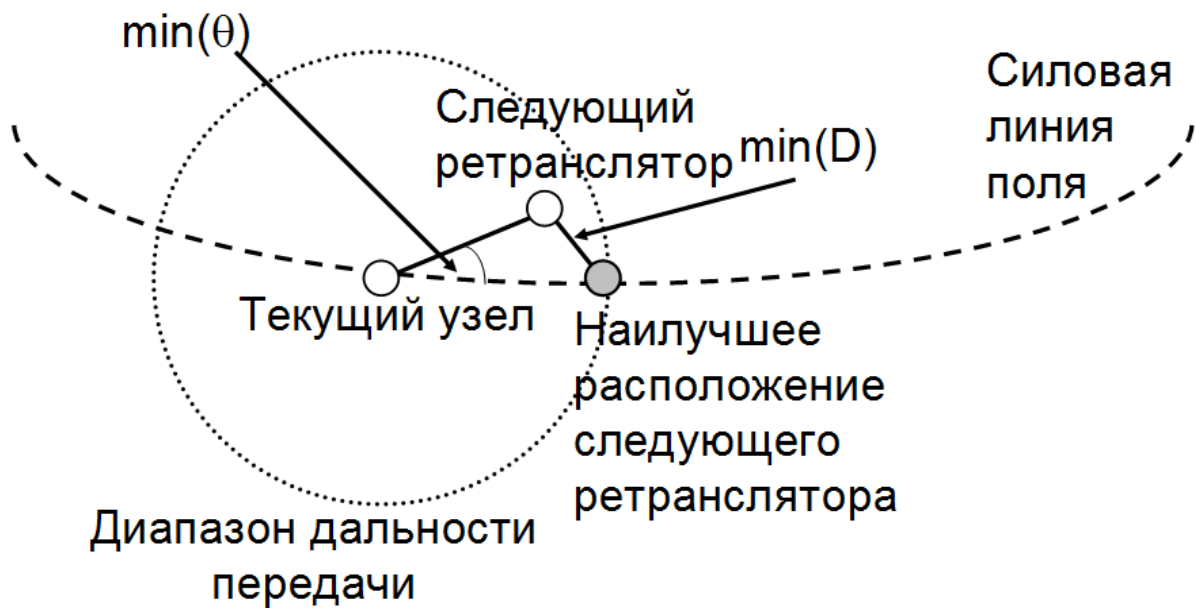
Для рассматриваемого случая время работы сети при использовании маршрутизации на основе силовых линий потенциального поля увеличилось в среднем на 34 %. Заметим, что теперь от каждого источника отходит фиксированное количество маршрутов – 8, хотя в дальнейшем они могут проходить через одни и те же узлы-ретрансляторы.

Во многом аналогичный подход представлен и в работе другой группы авторов: [3]. Впрочем, они рассматривали сеть состоящую из подвижных узлов, а дополнительные маршруты от источника к получателю рассматривали прежде всего как резервные. Семейство маршрутов строилось на основании силовых линий, отстоящих на определенный угол от кратчайшего маршрута (см. рис. 8, а), а последующий узел-ретранслятор выбирался как ближайший к силовой линии и границе зоны действия передатчика предыдущего ретранслятора (рис. 8, б). Следует особенно отметить, что в случае, если все узлы сети обладают данными о своём текущем местоположении, такой способ построения маршрутов может существенно сократить объем служебной информации в ретранслируемых

сообщениях (достаточно указать координаты отправителя и получателя, и каждый принявший данную информацию узел может самостоятельно определяет, относится ли он к данному маршруту), более того, по мере перемещения одни и те же узлы могут в разное время относиться к разным маршрутам.



а)



б)

Рис. 8. Построение основного и резервных маршрутов (а) и выбор следующего ретранслятора на маршруте (б) – по [3].

Следующая группа авторов, работы которых [2, 84] необходимо отметить, говоря о маршрутизации в беспроводных сетях на основе геометрии силовых линий потенциального поля, решали обратную задачу, не строить маршруты через имеющихся узлы, а построив маршруты, распределить по ним узлы. Согласно их выводам, узлы, распределенные по силовым линиям потенциального поля (очевидно, на расстоянии радиуса действия передатчиков) составляют минимально необходимое количество узлов, обеспечивающее пропускную способность при заданной интенсивности производства / потребления информации.

Рассмотрим ещё один способ построения конкретных маршрутов, объединяющий достоинства описанных выше. В этом способе разделение маршрута на два или более может происходить не только в источнике информации, но и далее, в процессе второй, третьей и последующих ретрансляций. А по мере приближения маршрута к получателю происходит слияние нескольких маршрутов, как в первом из рассмотренных случаев [1]. Физически разделение маршрута может быть организовано следующим образом: сообщение, переданное одним узлом, ретранслируется принявшими его несколькими узлами не полностью, но каждый узел ретранслирует далее только часть этого сообщения, экономя свой энергетический ресурс, а при приближении к узлу-получателю информация постепенно аккумулируется. Этот способ построения конкретных маршрутов позволит максимально приблизиться к распределению информационного потока, описываемого моделью, хотя сам маршрут будет сложнее и потребует больше служебного трафика для доведения его до всех задействованных в нём узлов.

Отметим, что точность оценки энергопотребления для реальной сети по значению потенциала U будет существенно зависеть от соответствия реальных маршрутов модельному распределению информационных потоков.

Для беспроводных сетей, состоящих из мобильных узлов, предпочтительно построение набора непересекающихся и неветвящихся маршрутов. Этот подход отличается простотой реализации, и любой узел

сети по небольшому объему служебной информации может определить свою принадлежность к маршруту. Для стационарных, прежде всего сенсорных сетей, состоящих из очень большого количества узлов, предпочтительным является подход с ветвлением маршрутов. Он обеспечивает участие в передаче информации большей части узлов сети, снижает информационную нагрузку на узел и продлевает время функционирования сети.

Заметим, что при построении маршрутов первым, из указанных выше способов, а именно выбор набора непересекающихся и неветвящихся путей ретрансляции, полезно рассмотреть способ построения набора непересекающихся маршрутов, смещенных относительно оптимальных. Это позволит задействовать в передаче информации ранее не используемые узлы. Построить семейство таких маршрутов можно, введя в уравнения (15) дополнительные слагаемые.

Выводы по главе 2

Маршрутизация по геометрии силовых линий потенциального поля – перспективный метод маршрутизации для сетей с большим количеством узлов и информацией о собственном местоположении и местоположении источника и получателя информации. Маршрутизация осуществляется на основе моделирования макроскопических характеристик сети: векторного поля плотности информационного потока и функции плотности производства / потребления информации. Дополнительным преимуществом метода является возможность моделирования сети с оценкой энергоэффективности различных семейств маршрутов. Задавая различными способами коэффициент информопроводности можно учитывать при моделировании параметры узлов сети и воздействия на сеть источника помех. Рассмотрены модели маршрутизации при воздействии помехи для сети с адаптивным изменением скорости передачи информации в зависимости от отношения сигнал / шум в канале и изотропными диаграммами направленности антенн узлов и для сети с адаптивными

антеннами с автоматически регулируемой кардиоидоподобной диаграммой направленности и аналогичным методом адаптации скорости передачи информации. Приведён метод оценки коэффициента информопроводности для таких сетей на основе параметров узлов и источника помех. Рассмотрен случай, когда на сеть влияют несколько источников помех, имеющих, вообще говоря, различные характеристики. Приведён метод оценки коэффициента информопроводности, исходя из компенсации воздействия наиболее мощного, в данной области сети, источника помехи. Построение конкретных маршрутов по векторному полю плотности информационного потока имеет свою специфику для различных разновидностей беспроводных сетей. Рассмотрены различные методы построения маршрутов, различающиеся сложностью реализации. Даны рекомендации по использованию описанных методов в зависимости от назначения и специфики беспроводной сети.

3 Априорные оценки, существование и единственность решения задачи

Рассмотрим граничную задачу для уравнения (49) с граничными условиями (51, 52).

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(K_r(r) \frac{\partial U}{\partial r} + L_r U \right) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K_\varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \right) = \rho \\ \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{r=r_1} = 0 \\ U|_{r=r_2} = g(\varphi) \end{cases} \quad (63)$$

Выполним взаимно-однозначную замену переменных

$$x = r - r_1, \quad y = \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} \right) \quad (64)$$

(при $-\pi < \varphi \leq \pi$). Тогда задача будет рассматриваться в полосе $0 \leq x \leq r_2 - r_1$, а уравнение (49) примет вид

$$\begin{aligned} & K_r \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + K_\varphi \left(\frac{1+y^2}{2(x+r_1)} \right)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \left(\frac{K_r}{x+r_1} + K_r' + L_r \right) \frac{\partial U}{\partial x} + \\ & + K_\varphi \frac{y(1+y^2)}{2(x+r_1)^2} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{L_r}{x+r_1} U = \rho \end{aligned} \quad (65)$$

Обозначим $\alpha(x) = \sqrt{K_r(x)}$

Введём дифференциальные операторы

$$D_{\alpha,x} = \frac{1}{i} \sqrt{\alpha(x)} \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\alpha(x)}. \quad (66)$$

$$D_y = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y}. \quad (67)$$

Тогда (65) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
& -D_{\alpha,x}^2 U - K_\varphi \left(\frac{1+y^2}{2(x+r_1)} \right)^2 D_y^2 U + \left(\frac{\alpha^2}{x+r_1} + L_r \right) \frac{\partial U}{\partial x} + \\
& + iK_\varphi \frac{y(1+y^2)}{2(x+r_1)^2} D_y U + \left(\frac{L_r}{x+r_1} - \frac{\alpha\alpha'}{2} - \left(\frac{a'}{2} \right)^2 \right) U = \rho.
\end{aligned} \tag{68}$$

Введём дифференциальный оператор

$$\begin{aligned}
M_2(D_{\alpha,x}, D_y) = & -D_{\alpha,x}^2 - K_\varphi \left(\frac{1+y^2}{2(x+r_1)} \right)^2 D_y^2 + iK_\varphi \frac{y(1+y^2)}{2(x+r_1)^2} D_y + \\
& + \frac{L_r}{x+r_1} - \frac{\alpha\alpha'}{2} - \left(\frac{a'}{2} \right)^2
\end{aligned} \tag{69}$$

и обозначим

$$b = - \left(\frac{\alpha^2}{x+r_1} + L_r \right) \tag{70}$$

Тогда (68) примет вид

$$M_2(D_{\alpha,x}, D_y)U - b \frac{\partial U}{\partial x} = \rho, \tag{71}$$

причём

$$\alpha(x) = A \sqrt{\log_2(B \cdot x^4 + 1)}, \tag{72}$$

где $A = \sqrt{\frac{w}{\sqrt{d}P_T}}$, а $B = \frac{P_T h_R d^2 \cos(\psi_a)}{2P_{TN} h_{TN} \cos\left(\frac{\psi_a}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$, и, соответственно

$$\alpha(0) = \alpha'(0) = 0.$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\bar{b} M_2(\xi, \eta)) = & \left(\frac{\alpha^2}{x+r_1} + L_r \right) \times \\
& \times \left(-\xi^2 - K_\varphi \left(\frac{1+y^2}{2(x+r_1)} \right)^2 \eta^2 + \frac{L_r}{x+r_1} - \frac{\alpha\alpha'}{2} - \left(\frac{a'}{2} \right)^2 \right)
\end{aligned} \tag{73}$$

При постоянном $L_r < -\frac{\alpha^2}{x+r_1}$, существует такое $c > 0$, что

$$\operatorname{Re}(\bar{b} \cdot M_2(\xi, \eta)) \geq c(1 + |\xi| + |\eta|)^2.$$

Граничные условия (51, 52) после замены переменных (64) примут вид

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (74)$$

и

$$U|_{x=r_2-r_1} = g_1(y) \quad (75)$$

соответственно, где $g_1(y) = g(2 \arctg(y))$. Обозначим $d = r_2 - r_1$, тогда условие (75) примет вид

$$U|_{x=d} = g_1(y). \quad (76)$$

Введём также оператор A

$$AU = M_2(D_{\alpha,x}, D_y)U - b \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (77)$$

Тогда система (63) примет вид

$$\begin{cases} AU = \rho \\ \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \\ U|_{x=d} = g_1(y) \end{cases} \quad (78)$$

Выполним преобразование Фурье $F_{y \rightarrow \eta}$. Получим следующую граничную задачу, зависящую от параметра $\eta \in R$:

$$\begin{cases} Av = \rho \\ \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \\ v|_{x=d} = g_2(\eta) \end{cases}, \quad (79)$$

где $v(x, \eta) = F_{y \rightarrow \eta}[U(x, y)]$, $g_2(\eta) = F_{y \rightarrow \eta}[g_1(y)]$,

$$Av = M_2(D_{\alpha,x}, \eta)v - b \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Запишем выражение $Av = \rho$ из системы (79) положив $x = 0$.

Учитывая, что $D_{\alpha,x}v|_{x=0} = 0$ получим.

$$M_2(0, \eta)v(0, \eta) - b \frac{\partial v(0, \eta)}{\partial x} = \rho(0, \eta)$$

$$\frac{\partial v(0, \eta)}{\partial x} = \frac{1}{b}(M_2(0, \eta)v(0, \eta) - \rho(0, \eta))$$

Но так как $\frac{\partial v(0, \eta)}{\partial x} = 0$, то

$$M_2(0, \eta)v(0, \eta) = \rho(0, \eta),$$

и

$$v(0, \eta) = \frac{\rho(0, \eta)}{M_2(0, \eta)}.$$

Обозначим $g_3(\eta) = \frac{\rho(0, \eta)}{M_2(0, \eta)}$.

Тогда рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} Av = \rho \\ v|_{x=0} = g_3(\eta) \\ v|_{x=d} = g_2(\eta) \end{cases}$$

Обозначим $u(x, \eta) = v(x, \eta) - g_2(\eta)$. Тогда $v(x, \eta) = u(x, \eta) + g_2(\eta)$.

$$Av(x, \eta) = Au(x, \eta) + Ag_2(\eta) =$$

$$M_2(D_{\alpha, x}, \eta)u(x, \eta) - b \frac{\partial u}{\partial x} + M_2(D_{\alpha, x}, \eta)g_2(\eta) - b \frac{\partial g_2(\eta)}{\partial x}.$$

Так как $\frac{\partial g_2(\eta)}{\partial x} = 0$, то

$$M_2(D_{\alpha, x}, \eta)u(x, \eta) - b \frac{\partial u}{\partial x} + M_2(D_{\alpha, x}, \eta)g_2(\eta) = \rho(x, \eta),$$

$$M_2(D_{\alpha, x}, \eta)u(x, \eta) - b \frac{\partial u}{\partial x} = \rho(x, \eta) - M_2(D_{\alpha, x}, \eta)g_2(\eta).$$

Обозначим $\rho_1(x, \eta) = \rho(x, \eta) - M_2(D_{\alpha, x}, \eta)g_2(\eta)$. Тогда

$$Au(x, \eta) = \rho_1(x, \eta).$$

Рассмотрим граничные условия:

$v(0, \eta) = u(0, \eta) + g_2(\eta)$, но в то же время $v(0, \eta) = g_3(\eta)$. Тогда

$$u(0, \eta) = g_2(\eta) - g_3(\eta).$$

Обозначим $g_4(\eta) = g_2(\eta) - g_3(\eta)$. Тогда

$$u(0, \eta) = g_4(\eta).$$

Аналогично:

$$v(d, \eta) = u(d, \eta) + g_2(\eta) \text{ и } v(d, \eta) = g_2(\eta). \text{ Тогда}$$

$$u(d, \eta) = 0.$$

Получаем задачу:

$$\begin{cases} Au = \rho \\ u|_{x=0} = g_4(\eta). \\ u|_{x=d} = 0 \end{cases} \quad (80)$$

В полосе $R_d^2 = \{y \in R^1, 0 < x < d\}$, где $d > 0$ – некоторое число, рассматривается дифференциальный оператор

$$A(x, y, D_y, D_{\alpha, x}, \partial_x) = L_2(x, y, D_y, D_{\alpha, x}) - b(x, y)\partial_x.$$

$$\text{где } L_2(x, y, D_y, D_{\alpha, x}) = \sum_{|\tau|+j \leq 2} a_{\tau j}(x, y) D_y^\tau D_{\alpha, x}^j, \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x},$$

$D_{\alpha, x} = i\sqrt{\alpha(x)}\partial_x\sqrt{\alpha(x)}$, $D_y^\tau = (i)^{|\tau|}\partial_y^\tau$. Функция $\alpha(x)$ достаточно гладкая при $x \in [0; d]$, $\alpha(x) > 0$ при $x > 0$, $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$. Коэффициенты $a_{\tau j}(x, y)$, $b(x, y)$

– комплекснозначные, достаточно гладкие функции в $\overline{R_d^2}$

Рассмотрим задачу

$$A(x, y, D_y, D_{\alpha, x}, \partial_x)v(x, y) = F(x, y). \quad (81)$$

$$v(x, y)|_{x=0} = G(y), \quad (82)$$

$$v(x, y)|_{x=d} = 0. \quad (83)$$

Отметим, что оператор M_2 является частным случаем оператора L_2 , и, соответственно, задача (81), (82), (83) является обобщением задачи (80).

Обозначим через L_2^0 главную часть оператора L_2 , то есть

$$L_2^0(x, y, D_y, D_{\alpha, x}) = \sum_{|\tau|+j=2} a_{\bar{q}}(x, y) D_y^\tau D_{\alpha, x}^j$$

Условие 1. При любых $(x, y) \in R_d^2$, $(\xi, \eta) \in R^2$ справедлива оценка

$$\operatorname{Re} \bar{b}(0, y) L_2(x, y, \xi, \eta) \geq c(1 + |\xi| + |\eta|)^2$$

с константой $c > 0$ не зависящей от (x, y) , (ξ, η) .

Условие 2. При любых $(x, y) \in R_d^2$ выполняется равенство $\operatorname{Im}(\bar{b}(x, y) a_{0,2}(x, y)) = 0$.

Условие 3. Для некоторого $s \geq 2$ функция $\alpha(x)$ принадлежит $C^{s-1}[0; d]$; коэффициенты оператора $A(x, y, D_y, D_{\alpha, x}, \partial_x)$ принадлежат $C^s(R_d^2)$, причём существует такая постоянная $c > 0$, что

$$\left| D_y^{\tau'} \partial_x^{j'} a_{\bar{q}}(x, y) \right| + \left| D_y^{\tau'} \partial_x^{j'} b(x, y) \right| \leq c$$

при любых $(x, y) \in R_d^2$, $|\tau| + j \leq 2$, $|\tau'| + j' \leq s$.

Условие 4. При всех $x \in [0; d]$ существуют пределы

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} a_{\bar{q}}(x, y) = a_{\bar{q}}(x), \quad |\tau| + j \leq 2,$$

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} b(x, y) = b(x).$$

Четвертое условие позволяет рассматривать операторы A_∞ , L_2^∞ , которые получаются из операторов A , L_2 с помощью предельного перехода в коэффициентах при $|y| \rightarrow \infty$:

$$L_2^\infty(x, D_y, D_{\alpha, x}, \partial_x) = L_2(\infty, x, D_y, D_{\alpha, x}),$$

$$A_\infty(x, D_y, D_{\alpha, x}, \partial_x) = L_2^\infty(x, D_y, D_{\alpha, x}) + b(x) \partial_x.$$

Следующее условие аналогично условию 1, но относится к операторам A_∞ , L_2^∞ .

Условие 5. При любых $(\xi, \eta) \in R^2$ справедлива оценка

$$\operatorname{Re} \bar{b}(0) L_2^\infty(0, \xi, \eta) \geq c(1 + |\xi| + |\eta|)^2$$

с постоянной $c > 0$ не зависящей от ξ, η .

Рассмотрим пространства, в которых будет изучаться задача.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha}(R_d^2)$ состоит из всех функций $v(x, t)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha} = \left\| F_\alpha^{-1} F_{\xi \rightarrow y}^{-1} \left[(1 + |\xi| + |\eta|)^s F_{y \rightarrow \xi} F_\alpha[v] \right] \right\|_{L_2(R_d^2)}.$$

Здесь $F_{y \rightarrow \xi}$ ($F_{\xi \rightarrow y}^{-1}$) – прямое (обратное) преобразование Фурье. Преобразование F_α было введено в работе [113]. Это преобразование переводит оператор дифференцирования $D_{\alpha,x}$ в оператор умножения на двойственную переменную η . На функциях $u(x) \in C_0^\infty([0, d])$ оно может быть записано в виде

$$F_\alpha[u(x)](\eta) = \int_0^d u(x) \exp\left(i\eta \int_x^p \frac{dz}{\alpha(z)}\right) dx, \quad (84)$$

где $p > 0$ – некоторое число.

F_α^{-1} – преобразование, обратное к F_α . Это преобразование можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(x)}} F_{x \rightarrow \tau}^{-1}[w(\eta)]_{\tau=\varphi(x)}$, где $\tau = \varphi(x) = \int_x^p \frac{dz}{\alpha(z)}$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,2}(R_d^2)$ состоит из всех функций $v(x, y)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,2} = \left\{ \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor} \left\| F_\alpha^{-1} F_{\xi \rightarrow y}^{-1} \left[(1 + |\xi| + |\eta|)^{s-2j} F_{y \rightarrow \xi} F_\alpha[\partial_x^j v] \right] \right\|_{L_2(R_d^2)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (85)$$

Определение 3. Пространство $H_s(R^1)$ ($s \in R^1$) состоит из всех функций $g(y)$, для которых конечна норма

$$\langle\langle g \rangle\rangle_s = \left\| F_{\xi \rightarrow y}^{-1} \left[(1 + |\xi|)^s F_{y \rightarrow \xi} [g(t)] \right] \right\|_{L_2(R^1)}.$$

Рассмотрим вначале граничную задачу вида

$$A_\infty(x, D_y, D_{\alpha,x}, \partial_x)v = F(x, y). \quad (86)$$

$$v(x, y)|_{x=0} = G(y), \quad (87)$$

$$v(x, y)|_{x=d} = 0. \quad (88)$$

Рассмотрим также уравнение

$$A_\infty(+0, D_y, D_{\alpha, x}, \partial_x)v = F(x, y). \quad (89)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $s \geq 2$ – целое число, $F(x, y) \in H_{s-2, \alpha, 2}(R_d^2)$, $G(x) \in H_{s-1}(R^1)$. Если выполнены условия 2, 4, 5, то существует единственное решение $v(x, y)$ задачи (89), (87), (88), принадлежащее пространству $H_{s, \alpha, 2}(R_d^2)$, для которого справедлива оценка

$$\|v\|_{s, \alpha, 2} \leq c(\|F\|_{s-2, \alpha, 2} + \langle\langle G \rangle\rangle_{s-1}). \quad (90)$$

Если кроме того выполнено условие 3, то задача (86), (87), (88) также имеет единственное решение $v(x, y) \in H_{s, \alpha, 2}(R_d^2)$, для которого справедлива оценка (90).

Рассмотрим теперь граничную задачу

$$A(x, y, D_y, D_{\alpha, x}, \partial_x)v(x, y) = F(x, y). \quad (91)$$

$$v(x, y)|_{x=0} = G(y), \quad (92)$$

$$v(x, y)|_{x=d} = 0. \quad (93)$$

Оператор $A(x, y, D_y, D_{\alpha, x}, \partial_x)$ в силу условия 4 «стабилизируется» при $|y| \rightarrow \infty$ к оператору $A_\infty(x, D_y, D_{\alpha, x}, \partial_x)$.

Пусть выполнены следующие условия

Условие 6. Для целого s , определённого в условии 3, коэффициенты операторов $A(x, y, D_y, D_{\alpha, x}, \partial_x)$, $A_\infty(x, D_y, D_{\alpha, x}, \partial_x)$ удовлетворяют условиям

$$\limsup_{|y| \rightarrow \infty} \left(\max_{0 \leq x \leq d} |D_y^{\tau'} D_{\alpha, x}^{j'} \partial_x^{l'} (a_{\bar{q}}(x, y) - a_{\bar{q}}(x))| + \max_{0 \leq x \leq d} |D_y^{\tau'} D_{\alpha, x}^{j'} \partial_x^{l'} (b(x, y) - b(x))| \right) = 0$$

$$|\tau'| + j' + l' \leq s - 2, \quad |\tau'| + j \leq 2.$$

Справедлива оценка

Теорема 2. Пусть $s \geq 2$ – целое число, выполнены условия 1 – 6. Тогда для задачи (91), (92), (93) существует правый (левый) регуляризатор R , то есть оператор R определённый $H_{s-2,\alpha,2}(R_d^2) \times H_{s-1}(R^1)$, действующий в пространство $H_{s,\alpha,2}(R_d^2)$, такой, что функция $v(x, y) = R(F, G)$ удовлетворяет условиям

$$A(x, y, D_y, D_{\alpha,x}, \partial_x)v(x, y) = F(x, y) + T^0(F, G),$$

$$v(x, y)|_{x=0} = G(y) + T^1(F, G),$$

$$v(x, y)|_{x=d} = 0.$$

При этом оператор $T = \{T^0, T^1\}$ – вполне непрерывный оператор в $H_{s-2,\alpha,2}(R_d^2) \times H_{s-1}(R^1)$.

Доказательство теоремы 1. С помощью преобразования Фурье $F_{y \rightarrow \xi}$ задачу (86), (87), (88) сведём к задаче на отрезке $[0; d]$ следующего вида

$$A_\infty(x, \xi, D_{\alpha,x}, \partial_x)u(x, \xi) = f(x, \xi). \quad (94)$$

$$u(x, \xi)|_{x=0} = g(x), \quad (95)$$

$$u(x, \xi)|_{x=d} = 0. \quad (96)$$

где $u(x, \xi) = F_{y \rightarrow \xi}[v(x, y)]$, $f(x, \xi) = F_{y \rightarrow \xi}[F(x, y)]$, $g(\xi) = F_{y \rightarrow \xi}[G(y)]$.

Используя методы работ [114] и [115] можно доказать, что существование и единственность решения задачи (94), (95), (96) при выполнении условий 1 – 5 вытекает из существования и единственности задачи

$$A_\infty(+0, \xi, D_{\alpha,x}, \partial_x)u(x, \xi) = f(x, \xi). \quad (97)$$

$$u(x, \xi)|_{x=0} = g(\xi), \quad (98)$$

$$u(x, \xi)|_{x=d} = 0. \quad (99)$$

Докажем существование и единственность решения задачи (97), (98), (99).

По определению оператора A

$$A_{\infty}(+0, \xi, D_{\alpha, x}, \partial_x)u(x, \xi) = L_2(\xi, D_{\alpha, x})u(x, \xi) - b\partial_x u(x, \xi). \quad (100)$$

Здесь $L_2(D_y, D_{\alpha, x}) = \sum_{|\tau|+j \leq 2} a_{\bar{\eta}} D_y^{\tau} D_{\alpha, x}^j$. С учётом (100) запишем задачу

(97), (98), (99) в виде

$$L_2(\xi, D_{\alpha, x})u(x, \xi) - b\partial_x u(x, \xi) = f(x, \xi). \quad (101)$$

$$u(x, \xi)|_{x=0} = g(\xi), \quad (102)$$

$$u(x, \xi)|_{x=d} = 0. \quad (103)$$

Докажем существование решения задачи (101), (102), (103).

Введем следующее обозначение

$$\gamma(x) = (i\alpha(x))^2.$$

Тогда

$$D_{\alpha, x}^k u = \sum_{j=0}^k \psi_{kj}(x) \gamma^{1-\frac{j}{2}}(x) \cdot \gamma^{j-1}(x) \partial_x^j, \quad k = 0, 1, 2, \quad (104)$$

где функции $\psi_{kj}(t)$, $0 \leq j \leq k$ находятся по рекуррентным

соотношениям

$$\begin{cases} \psi_{k+1, k+1}(x) = \psi_{k, k}(x), \quad \psi_{0, 0}(x) = 1 \\ \psi_{j+1, 0}(x) = \alpha(x) \partial_x \psi_{j, 0}(x) + \frac{1}{2} \alpha'(x) \psi_{j, 0}(x) \\ \psi_{j+1, \chi}(x) = \alpha(x) \partial_x \psi_{j, \chi-1}(x) + \left(\chi + \frac{1}{2} \right) \alpha'(x) \psi_{j, \chi}(x), \quad 1 \leq \chi \leq j-1 \\ \psi_{j+1, j}(x) = \psi_{j, j-1}(x) + \left(j + \frac{1}{2} \right) \alpha'(x) \end{cases} \quad (105)$$

Подставляя равенство (104) в уравнение (101) получим

$$b_0(x, \xi) \gamma(x) \partial_x^2 u + \sum_{k=0}^1 b_{2-k}(x, \xi) \partial_x^k u = f(x, \xi) \quad (106)$$

Действительно

$$\sum_{|\tau|+k \leq 2} a_{\bar{\eta}} \xi^{\tau} D_{\alpha, x}^k u + b \partial_x u = f$$

$$\sum_{|\tau|+k \leq 2} a_{\tau k} \xi^\tau \sum_{j=0}^k \psi_{kj}(x) \gamma^{1-\frac{j}{2}}(x) \cdot \gamma^{j-1}(x) \partial_x^j u + b \partial_x u = f$$

$$\sum_{|\tau|+k \leq 2} \sum_{j=0}^k a_{\tau k} \xi^\tau \psi_{kj}(x) \gamma^{1-\frac{j}{2}}(x) \cdot \gamma^{j-1}(x) \partial_x^j u + b \partial_x u = f \quad (107)$$

$$\sum_{k=1}^2 b_{2-k}(x, \xi) \gamma^{k-1}(x) \partial_x^k u + b_2(x, \xi) u = f \quad (108)$$

где

$$b_0(x, \xi) = a_{0,2} \psi_{2,2} \gamma^{\frac{2-2}{2}}(x) = a_{0,2} \quad (109)$$

$$b_1(x, \xi) = \sum_{j=1}^2 \sum_{|\tau| \leq 2m-j} a_{\tau j} \xi^\tau \psi_{j,1}(x) \gamma^{1-\frac{j}{2}}(x) - b \quad (110)$$

$$b_2(x, \xi) = \sum_{j=1}^{2m} \sum_{|\tau| \leq 2m-j} a_{\tau j} \xi^\tau \psi_{j,0}(x) \quad (111)$$

Обозначим

$$w_2(x, \xi) = u(x, \xi), \quad w_1(x, \xi) = \partial_x u(x, \xi), \quad w_0(x, \xi) = \gamma \partial_x^2 u(x, \xi) \quad (112)$$

$$\begin{cases} \gamma(x) \partial_x w_1 - w_0 = 0 \\ \partial_x w_2 - w_1 = 0 \end{cases} \quad (113)$$

Уравнение (108) имеет вид

$$b_{2-1}(x, \xi) \gamma^{1-1} \partial_x^1 u + b_{2-2}(x, \xi) \gamma^{2-1} \partial_x^2 u + b_2(x, \xi) u = f$$

$$b_1(x, \xi) \partial_x^1 u + b_0(x, \xi) \gamma \partial_x^2 u + b_2(x, \xi) u = f$$

$$b_0(x, \xi) \gamma \partial_x^2 u + b_1(x, \xi) \partial_x^1 u + b_2(x, \xi) u = f \quad (114)$$

Обозначим $u_1 = w_1$, $u_2 = w_2$.

Тогда с учетом (113) можно записать (114) ((108)) в виде системы

$$\begin{cases} \gamma(x) \frac{du_1}{dt} + B_{11} u_1 + B_{12} u_2 = f \\ \frac{du_2}{dx} + B_{22} u_2 + B_{21} u_1 = 0 \end{cases} \quad (115)$$

Найдём коэффициенты B_{ij}

$$B_{22} \equiv 0, \quad B_{21} \equiv -1$$

$$\gamma \partial_x^2 u = \gamma \partial_x (\partial_x u) = \gamma \partial_x w_1$$

Т. е. уравнение (108) можно записать в виде

$$b_0(x, \xi) \gamma \partial_x w_1 + b_1(x, \xi) w_1 + b_2(x, \xi) w_2 = 0$$

$$b_0(x, \xi) \gamma \partial_x u_1 + b_1(x, \xi) u_1 + b_2(x, \xi) u_2 = 0$$

$$b_0(x, \xi) = a_{02}, \text{ т. е. получим уравнение}$$

$$\gamma(x) \partial_x u_x + \frac{b_1(x, \xi)}{a_{02}} u_1 + \frac{b_2(x, \xi)}{a_{02}} u_2 = 0$$

Итак, уравнение (108) можно записать в виде системы (115), где

$$B_{11} = \frac{b_1(x, \xi)}{a_{02}}, \quad B_{12} = \frac{b_2(x, \xi)}{a_{02}}, \quad B_{22} = 0, \quad B_{21} = -1:$$

$$\begin{cases} \gamma(x) \frac{du_1}{dt} + \frac{b_1(x, \xi)}{a_{02}} u_1 + \frac{b_2(x, \xi)}{a_{02}} u_2 = f \\ \frac{du_2}{dx} - u_1 = 0 \end{cases} .$$

Рассмотрим наряду с системой (115) систему уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \gamma(x) \frac{du_1}{dx} + (B_{11}^0(0, \xi) + \gamma'(x)) u_1 + B_{12}^0(0, \xi) u_2 = f \\ \frac{du_2}{dx} - u_1 = 0 \end{cases} . \quad (116)$$

Здесь $B_{12}^0(0, \xi) = \frac{b_2^0(0, \xi)}{a_{02}}$, где $b_2^0(0, \xi)$ - главная часть многочлена

$b_2(0, \xi)$, т. е.

$$b_2^0(0, \xi) = \sum_{|\tau|=2m} a_{\tau 0} \xi^\tau \psi_{00}(0) = \sum_{|\tau|=2m} a_{\tau 0} \xi^\tau$$

Как известно [115], наличие решений системы (116) связано с расположением комплексного коэффициента $B_{11}(0, \xi)$ на комплексной плоскости.

$$\text{Но } B_{11}(0, \xi) = \frac{b_1(0, \xi)}{a_{02}} = \frac{-b}{a_{02}} = \frac{-|b|^2}{\bar{b} a_{02}} .$$

По условию 2 $\text{Im}ba_{02}=0$. Из условия 1 при $\xi=0$ получим $\text{Re}(\bar{b}L_2(0,\eta)) \geq c(1+|\eta|)^2$ или

$$\text{Re} \left(\bar{b} \left(\sum_{\substack{|\tau|+j \leq 2m \\ |\tau| \geq 1}} a_{\bar{q}} \xi^\tau \eta^j \Big|_{\xi=0} + a_{02} \eta^2 \right) \right) = \text{Re} \bar{b} a_{02} \eta^2 \geq c(1+|\eta|)^2.$$

Отсюда $\text{Re} \bar{b} a_{02} < 0$

Итак, из условий 1 и 2 получаем, что $\text{Re} \bar{b} a_{02} < 0$ и $\text{Im}ba_{02}=0$ или

$$\text{Im}B_{11}(0,\xi)=0, \text{Re}B_{11}(0,\xi)<0. \quad (117)$$

Учитывая условие $u|_{x=d}=0$ получим, что

$$u_2 = - \int_x^d u_1(s) ds.$$

Запишем уравнение (116) в виде

$$\gamma(x) \frac{du_1}{dx} + (B_{11}^0(0,\xi) + \gamma'(x))u_1 = f - B_{12}^0(0,\xi)u_2 \quad (118)$$

Рассмотрим уравнение

$$\gamma \frac{du}{dx} + (b + \gamma')u = f \quad (119)$$

Запишем его в виде

$$\frac{du}{dx} + \frac{b + \gamma'}{\gamma} u = \frac{f}{\gamma} \quad (120)$$

или

$$\frac{du}{dx} + a(x)u = f_1(x) \quad (121)$$

где

$$a(x) = \frac{b + \gamma'}{\gamma}, \quad f_1(x) = \frac{f(x)}{\gamma} \quad (122)$$

Рассмотрим вначале однородное уравнение

$$\frac{du}{dx} + a(x)u = 0$$

$$\frac{du}{u} = -a(x)dx$$

$$\ln|u| = \int_x^d a(s)ds.$$

Т. е. общее решение однородного уравнения можно записать в виде

$$u_{oo}(t) = ce^{\int_x^d a(s)ds}, \text{ где } c \text{ – произвольная постоянная.}$$

Будем искать общее решение в виде

$$u(x) = u_{oo}(x) + u_{чн}(x),$$

где $u_{чн}(x)$ будем искать в виде

$$u_{чн}(t) = e^{\int_x^d a(s)ds} \int_0^x f_1(\tau) e^{-\int_x^d a(s)ds} d\tau.$$

Покажем, что эта функция удовлетворяет уравнению (121).

$$\begin{aligned} \frac{du_{чн}(x)}{dx} &= \left(e^{\int_x^d a(s)ds} \right)' \int_0^x f_1(\tau) e^{-\int_x^d a(s)ds} d\tau + e^{\int_x^d a(s)ds} f_1(x) e^{-\int_x^d a(s)ds} = \\ &= -a(x) e^{\int_x^d a(s)ds} \int_0^x f_1(\tau) e^{-\int_x^d a(s)ds} d\tau + f_1(x) \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{du_{чн}(tx)}{dt} + a(t)u_{чн}(t) &= -a(t)e^{\int_x^d a(s)ds} \int_0^t f_1(\tau) e^{-\int_x^d a(s)ds} d\tau + f_1(t) + \\ &+ a(t)e^{\int_x^d a(s)ds} \int_0^t f_1(\tau) e^{-\int_x^d a(s)ds} d\tau = f_1(t) \end{aligned}$$

Т. е. $u_{чн}(x)$ есть частное решение уравнения (121), а значит, функция

$$u(x) = ce^{\int_x^d a(s)ds} + e^{\int_x^d a(s)ds} \int_0^x f_1(\tau) e^{-\int_x^d a(s)ds} d\tau \quad (123)$$

является общим решением уравнения (121).

Значит, общее решение уравнения (119) можно записать в виде

$$u(x) = c \exp\left(\int_x^d \frac{b + \gamma'(s)}{\gamma(s)} ds\right) + \exp\left(\int_x^d \frac{b + \gamma'(s)}{\gamma(s)} ds\right) \int_0^x \frac{f(\tau)}{\gamma(\tau)} \exp\left(-\int_\tau^d \frac{b + \gamma'(s)}{\gamma(s)} ds\right) d\tau \quad (124)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_x^d \frac{b + \gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)} d\tau &= \int_x^d \frac{b}{\gamma(\tau)} d\tau + \int_x^d \frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)} d\tau = \int_x^d \frac{b}{\gamma(\tau)} d\tau + \ln|\gamma(\tau)| \Big|_x^d \\ &= b \int_x^d \frac{d\tau}{\gamma(\tau)} + \ln|\gamma(d)| - \ln|\gamma(x)| \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \exp\left(\int_x^d \frac{b + \gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)} d\tau\right) &= \exp(\ln|\gamma(d)| - \ln|\gamma(x)|) \cdot \exp\left(\int_x^d \frac{b}{\gamma(\tau)} d\tau\right) = \\ &= \frac{|\gamma(d)|}{|\gamma(x)|} \exp\left(\int_x^d \frac{b}{\gamma(\tau)} d\tau\right) \end{aligned}$$

Т. к. в нашем случае $\gamma(x) \geq 0$ при всех $x \in [0, d]$, то получаем, что

$$\exp\left(\int_x^d \frac{b + \gamma'(\tau)}{\gamma(\tau)} d\tau\right) = \frac{\gamma(d)}{\gamma(x)} \exp\left(\int_x^d \frac{b}{\gamma(\tau)} d\tau\right) \quad (125)$$

Подставляя (125) в (124), получим решение уравнения (119) в виде

$$\begin{aligned} u(x) &= c \frac{\gamma(d)}{\gamma(x)} \exp\left(\int_x^d \frac{b}{\gamma(\tau)} d\tau\right) + \\ &+ \frac{\gamma(d)}{\gamma(x)} \exp\left(\int_x^d \frac{b}{\gamma(\tau)} d\tau\right) \cdot \int_0^x \frac{f(\tau) \gamma(\tau)}{\gamma(\tau) \gamma(d)} \exp\left(-\int_\tau^d \frac{b}{\gamma(s)} ds\right) d\tau \end{aligned} \quad (126)$$

или

$$\begin{aligned} u(x) &= c \frac{\gamma(d)}{\gamma(x)} \exp\left(b \int_x^d \frac{d\tau}{\gamma(\tau)}\right) + \\ &+ \frac{1}{\gamma(x)} \exp\left(b \int_x^d \frac{d\tau}{\gamma(\tau)}\right) \cdot \int_0^x f(\tau) \exp\left(-b \int_\tau^d \frac{ds}{\gamma(s)}\right) d\tau \end{aligned}$$

Заметим, что это равенство можно записать в виде

$$u(x) = c \frac{\gamma(d)}{\gamma(x)} \exp\left(b \int_x^d \frac{d\tau}{\gamma(\tau)}\right) + \frac{1}{\gamma(x)} \int_0^x f(\tau) \exp\left(b \int_\tau^d \frac{ds}{\gamma(s)}\right) d\tau \quad (127)$$

Формально обращая оператор (118), получим, что формально решение уравнения (118) можно записать в виде.

$$u_1(x, \xi) = \frac{\gamma(d)}{\gamma(x)} \exp\left(B_{11}(0, \xi) \int_x^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) \cdot q + \\ + \frac{1}{\gamma(x)} \int_0^x (f(\tau) - B_{12}^0(0, \xi) u_2) \cdot \exp\left(B_{11}(0, \xi, 0) \int_x^\tau \frac{ds}{\gamma(s)}\right) d\tau$$

или

$$u_1(x, \xi) = \frac{\gamma(d)}{\gamma(x)} \exp\left(B_{11}(0, \xi) \int_c^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) \cdot q + \\ + \frac{1}{\gamma(x)} \int_0^x \left(f(\tau) \exp\left(B_{11}(0, \xi) \int_x^\tau \frac{ds}{\gamma(s)}\right) \right) d\tau - \\ - B_{12}^0(0, \xi) \cdot \frac{1}{\gamma(x)} \int_0^x \left(f(\tau) \exp\left(B_{11}(0, \xi) \int_x^\tau \frac{ds}{\gamma(s)}\right) \cdot u_2(\tau) \right) d\tau$$

где q – произвольная постоянная.

Заметим, что $u_2 = -\int_x^d u_1(s) ds$. Тогда получим

$$u_1(x, \xi) = \frac{\gamma(d)}{\gamma(x)} \exp\left(B_{11}(0, \xi) \int_x^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) \cdot q + \int_0^x \Phi(x, \tau) f(\tau) d\tau - \\ - B_{12}^0(0, \xi) \cdot \int_0^x \Phi(x, \tau) \int_x^\tau u_1(s) ds d\tau \quad (128)$$

где

$$\Phi(x, \tau) = \frac{1}{\gamma(x)} \exp\left(B_{11}(0, \xi) \int_x^\tau \frac{ds}{\gamma(s)}\right) \quad (129)$$

Заметим, что в силу обозначений справедливо равенство

$$u(x, \xi) = -\int_x^d \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau \quad \text{или} \quad u(x, \xi) = -\int_x^d u_1(x, \xi) d\tau.$$

Отметим, что здесь уже использовано условие

$$u|_{x=d} = 0.$$

Начальное условие (102) теперь можно записать в виде.

$$u|_{x=0} = g(\xi) \text{ или } - \int_x^d u_1(\tau) d\tau \Big|_{t=0} = g(\xi) \text{ или}$$

$$\int_0^x u_1(\tau) d\tau = -g(\xi) \quad (130)$$

Найдём постоянную q в (128) так, чтобы выполнялось условие (130).

Из (128) получим

$$- \int_{\tau_0}^d u_1(x, \xi) dx = - \int_{\tau_0}^d \frac{\gamma(d)}{\gamma(x)} \exp\left(B_{11}(0, \xi) \int_x^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)} \right) dx \cdot q - \int_{\tau_0}^d \int_0^x \Phi(x, \tau) f(\tau) d\tau dx -$$

$$- B_{12}^0(0, \xi) \int_{\tau_0}^d \int_0^x \Phi(x, \tau) \int_{\tau}^x u_1(s) ds d\tau dx$$

Полагая в этом равенстве $\tau_0 = 0$ и учитывая (130), получим

$$- \int_0^d u_1(x, \xi) dx = - \int_0^d \frac{\gamma(d)}{\gamma(x)} \exp\left(B_{11}(0, \xi) \int_x^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)} \right) dx \cdot q - \int_0^d \int_0^x \Phi(x, \tau) f(\tau) d\tau dx -$$

$$- B_{12}^0(0, \xi) \int_0^d \int_0^x \Phi(x, \tau) \int_{\tau}^x u_1(s) ds d\tau dx = g(\xi)$$

или

$$\int_0^d \frac{\gamma(d)}{\gamma(x)} \exp\left(B_{11}(0, \xi) \int_x^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)} \right) dx \cdot q = g(\xi) + \int_0^d \int_0^x \Phi(x, \tau) f(\tau) d\tau dx +$$

$$+ B_{12}^0(0, \xi) \int_0^d \int_0^x \Phi(x, \tau) \int_{\tau}^x u_1(s) ds d\tau dx \quad (131)$$

Посчитаем интеграл в левой части (131).

$$\gamma(d) \int_0^d \frac{1}{\gamma(x)} \exp\left(B_{11} \int_x^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)} \right) dx = \left. \begin{array}{l} t = \int_x^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}, \quad dt = \frac{dx}{\gamma(x)} \\ x = 0, \quad t = +\infty \\ x = d, \quad t = 0 \end{array} \right| =$$

$$= -\gamma(d) \int_{+\infty}^0 \exp(B_{11}t) dt = \frac{\gamma(d)}{B_{11}} \exp(B_{11}t) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = -\frac{\gamma(d)}{B_{11}(0, \xi)}$$

Здесь мы учтем, что по условию $B_{11}(0, \xi) < 0$ (см. (117)).

Подставляя это равенство в (131), получим

$$-\frac{\gamma(d)}{B_{11}(0, \xi)} \cdot q = g(\xi) + \int_0^d \int_0^x \Phi(x, \tau) f(\tau) d\tau dx +$$

$$+ B_{12}^0(0, \xi) \int_0^d \int_0^x \Phi(x, \tau) \int_{\tau}^x u_1(s) ds d\tau dx$$

Отсюда

$$q = -\frac{B_{11}(0, \xi)}{\gamma(d)} \cdot g(\xi) - \frac{B_{11}(0, \xi)}{\gamma(d)} \int_0^d \int_0^x \Phi(x, \tau) f(\tau) d\tau dx -$$

$$- \frac{B_{11}(0, \xi)}{\gamma(d)} \int_0^d \int_0^x \Phi(x, \tau) \int_{\tau}^x u_1(s) ds d\tau dx \cdot B_{12}^0(0, \xi)$$
(132)

Подставляя теперь найденное значение q в формулу для решения (128) получим

$$u_1(x, \xi) = \frac{\gamma(d)}{\gamma(x)} \exp\left(B_{11}(0, \xi) \int_x^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)} \right) \left[-\frac{B_{11}(0, \xi)}{\gamma(d)} \cdot g(\xi) - \right.$$

$$\left. - \frac{B_{11}(0, \xi)}{\gamma(d)} \int_0^d \int_0^x \Phi(x, \tau) f(\tau) d\tau dx - B_{12}^0(0, \xi) \frac{B_{11}(0, \xi)}{\gamma(d)} \int_0^d \int_0^x \Phi(x, \tau) \int_{\tau}^x u_1(s) ds d\tau dx \right] +$$

$$+ \int_0^x \Phi(x, \tau) f(\tau) d\tau + B_{12}^0(0, \xi) \cdot \int_0^x \Phi(x, \tau) \int_{\tau}^d u_1(s) ds d\tau$$

или

$$u_1(x, \xi) = \frac{B_{11}}{\gamma(x)} \exp\left(B_{11}(0, \xi) \int_x^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)} \right) g(\xi) +$$

$$+ \left[\frac{B_{11}(0, \xi)}{\gamma(x)} \int_0^d \int_0^x \Phi(x, \tau) f(\tau) d\tau dx \cdot \exp\left(B_{11}(0, \xi) \int_x^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)} \right) + \int_0^x \Phi(x, \tau) f(\tau) d\tau \right] +$$
(133)

$$+ \left[-B_{12}^0(0, \xi) \frac{B_{11}(0, \xi)}{\gamma(d)} \exp\left(B_{11}(0, \xi) \int_x^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)} \right) \int_0^d \int_0^x \Phi(x, \tau) \int_{\tau}^d u_1(s) ds d\tau dx + \right.$$

$$\left. + B_{12}^0(0, \xi) \int_0^d \int_0^x \Phi(x, \tau) \int_{\tau}^d u_1(s) ds d\tau dx \right]$$

То есть

$$u_1(x, \xi) = \tilde{F} + B_{12}^0 \cdot \tilde{M}u_1(x, \xi)$$
(134)

где

$$\begin{aligned} \tilde{F} = & \frac{B_{11}}{\gamma(x)} \exp\left(B_{11}(0, \xi) \int_x^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) g(\xi) + \\ & + \frac{B_{11}(0, \xi)}{\gamma(x)} \int_0^d \int_0^x \Phi(x, \tau) f(\tau) d\tau dx \cdot \exp\left(B_{11}(0, \xi) \int_x^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) + \int_0^x \Phi(x, \tau) f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (135)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}u_1(0, \xi) = & -B_{12}^0(0, \xi) \frac{B_{11}(0, \xi)}{\gamma(d)} \exp\left(B_{11}(0, \xi) \int_x^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) \int_0^d \int_0^x \Phi(x, \tau) \int_\tau^d u_1(s) ds d\tau dx + \\ & + B_{12}^0(0, \xi) \int_0^d \int_0^x \Phi(x, \tau) \int_\tau^d u_1(s) ds d\tau dx \end{aligned} \quad (136)$$

Покажем, что интегральное уравнение (134) имеет решение.

Докажем вначале, его разрешимость при дополнительных условиях

$$B_{11}(0, \xi) + \max_{0 \leq x \leq d} \gamma'(x) \leq -\delta_- < 0 \quad (137)$$

В этом случае доказательство разрешимости в $L_2(0, d)$ уравнения (134) основано на следующих оценках.

$$\left\| \int_0^d \Phi(x, \tau) f(\tau) d\tau \right\|_{L_2(0; d)} \leq \frac{1}{\delta_-} \|f\| \quad (138)$$

$$\left\| \frac{1}{\gamma(x)} \exp\left(B_{11}(0, \xi) \int_t^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) \right\|_{L_2(0; d)} \leq \left(\frac{1}{\delta_-}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (139)$$

$$\sup_{0 \leq s \leq d} \left\| \int_0^x \Phi(s, \tau) d\tau \right\|_{L_2(0; d)} \leq \frac{3}{\delta_-} \sqrt{d} \quad (140)$$

Эти неравенства доказаны в работе [115] (см. теоремы 2.7, 2.8 и лемму 2.4) при выполнении условий (137).

Из (138) – (140) выводим, что функция \tilde{F} , определенная в (135) принадлежит пространству $L_2(0; d)$, а оператор \tilde{M} , определенный в (136), является ограниченным оператором в $L_2(0; d)$. Выберем теперь $\delta > 0$ настолько малым, чтобы $\forall |\xi| \leq \delta$ выполнялось условие

$$B_{12}^0(0, \xi) \|\tilde{M}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \frac{1}{2} \quad (141)$$

Тогда уравнение (134) имеет единственное решение

$$u_1(x, \xi) = (I - B_{12}^0(0, \xi)\tilde{M})^{-1} \cdot \tilde{F} \quad (142)$$

причем

$$\|u_1\|_{L_2(0;d)} \leq 2\|\tilde{F}\|_{L_2(0;d)}$$

Таким образом, функция $u_1(x, \xi)$, заданная в (142) и функция $u_2 = -\int_x^d u_1(\tau) d\tau$ удовлетворяют системе уравнений (116). Причем функция $u_2(x, \xi)$ удовлетворяет условиям $u_2|_{x=d} = 0$ и $u_2|_{x=0} = g(\xi)$.

С помощью простых оценок можно доказать неравенство $\|u_1\|_{L_2(0;d)} \leq c\|f\|$.

Рассмотрим теперь существование и единственность решения задачи (101) – (103).

Выясним какому уравнению удовлетворяет функция u_2 , удовлетворяющая системе уравнений (116) и условиям

$$u_2|_{x=d} = 0 \text{ и } u_2|_{x=0} = g(\xi).$$

Т. к. $\gamma(x) = -\alpha^2(x)$, то система (116) имеет вид

$$\begin{aligned} -\alpha^2(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \left(-\frac{b}{a_{02m}} + \gamma'(x) \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \sum_{|\tau|=2m} a_{\tau 0} \xi^\tau u_1 &= f \\ -a_{02m} \alpha^2(x) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - 2\alpha\alpha' \frac{\partial u_1}{\partial x} \cdot a_{02m} - b \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{02m} \sum_{|\tau|=2m} a_{\tau 0} \xi^\tau u_1 &= f \end{aligned} \quad (143)$$

Воспользуемся формулами

$$D_{\alpha, x} u = i\sqrt{\alpha(x)} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{\alpha(x)} u) = i \left(\alpha(x) \partial_x u + \frac{1}{2} \alpha'(x) u \right)$$

$$D_{\alpha, x}^2 u = -\alpha^2(x) \partial_x^2 u - \frac{3}{2} \alpha(x) \alpha'(x) \partial_x u - \left(\frac{1}{2} \alpha(x) \alpha''(x) + \frac{1}{4} (\alpha'(x))^2 \right) u$$

Получим

$$-\alpha^2(x)\partial_x^2 u = D_{\alpha,x}^2 u + \frac{3}{2}\alpha(x)\alpha'(x)\partial_x u - \left(\frac{1}{2}\alpha(x)\alpha''(x) + \frac{1}{4}(\alpha'(x))^2\right)u$$

$$\alpha(x)\partial_x u = \frac{1}{i}D_{\alpha,x}u - \frac{1}{2}\alpha'(x)u$$

Подставив эти формулы в (143), получим, что функция $u(x, \xi)$ удовлетворяет уравнению

$$D_{\alpha,x}^2 u + \frac{3}{2}\alpha(x)\alpha'(x)\partial_x u - \left(\frac{1}{2}\alpha(x)\alpha''(x) + \frac{1}{4}(\alpha'(x))^2\right)u - \left[\frac{2\alpha'(x)}{i}D_{\alpha,x}u - \frac{(\alpha'(x))^2}{i}\right]a_{02m} - b\partial_x u + a_{02m} \sum_{|\tau|=2m} a_{\tau 0} \xi^\tau u = f$$

или

$$A^0 u \equiv D_{\alpha,x}^2 u + a_{02m} \sum_{|\tau|=2m} a_{\tau 0} \xi^\tau u - b\partial_x u + M_1 u = f \quad (144)$$

где

$$M_1 u = \frac{3}{2}\alpha(x)\alpha'(x)\partial_x u + \left(\frac{1}{2}\alpha(x)\alpha''(x) + \frac{1}{4}(\alpha'(x))^2\right)u - \left[\frac{2\alpha'(x)}{i}D_{\alpha,x}u - \frac{(\alpha'(x))^2}{i}\right]a_{02m}$$

Рассмотрим оператор $A^\mu = \mu A + (1-\mu)A^0$, где оператор

$$A u = L_2(\xi, D_{\alpha,x})u - b\partial_x u.$$

Можно показать, что для оператора A^μ справедлива априорная оценка при $|\xi| \leq \delta$ с постоянной, которая не зависит от $\mu \in [0;1]$

По доказанному выше, уравнение (144) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (102), (103) при $|\xi| \leq \delta$. С помощью метода продолжения по параметру μ и априорной оценки устанавливаем, что при $|\xi| \leq \delta$ уравнение (101) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (102), (103).

Рассмотрим теперь оператор $A(\lambda \xi, D_{\alpha,x}, \partial_x)$, где $|\xi| = \delta$.

Воспользовавшись априорной оценкой, применим метод продолжения по

параметру λ . В результате из уже установленной разрешимости задачи (102), (103) для уравнения

$$A(\lambda \xi, D_{\alpha, x}, \partial_x)u = f \quad (145)$$

при $\lambda = 1$ выводим, что задача (145), (102), (103) имеет единственное решение при любом $\lambda > 0$. Если взять теперь $\lambda = |\xi| \cdot \frac{1}{\delta}$, то получим существования и единственность решения задачи (101) – (103) при любом $\xi \in R^{n-1}$.

Существование и единственность решения установлена нами при дополнительном ограничении (137). Если условие (137) не выполнено, то рассмотрим оператор $\tilde{A}(\xi, D_{\alpha, x}, \partial_x) = L_{2m}(\xi, D_{\alpha, x}) - \tilde{b} \partial_x$, где коэффициент \tilde{b} удовлетворяет условию $\text{Im} \tilde{b} a_{02m} = 0$ и $\text{Re} \tilde{b} a_{02m} < 0$. Тогда оператор \tilde{A} удовлетворяет тем же условиям, что и оператор A . Возьмем \tilde{b} так, чтобы выполнялось условие (137). Тогда, как показано выше, для уравнения $\tilde{A}u = f$ существует единственное решение, удовлетворяющее условиям (102), (103). Анализ доказательства однородной оценки показывает, что она справедлива и для оператора

$$\tilde{A}^\mu = L_{2m}(\xi, D_{\alpha, x}) - (b\mu + (1 - \mu)\tilde{b}) \partial_x,$$

Причем константа в априорной оценке не будет зависеть от $\mu \in [0; 1]$. Это позволяет вновь применить метод продолжения по параметру μ и из разрешимости задачи (102), (103) для уравнения $\tilde{A}^\mu u = f$ при $\mu = 0$ вывести её разрешимость для этого уравнения при $\mu = 1$. Но так как $\tilde{A}^1 = A$, то тем самым доказана разрешимость задачи (101) – (103).

Докажем априорную оценку (90).

Норма (85) эквивалентна норме

$$\|v\|_{s,\alpha,2} = \left\{ \sum_{k=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \sum_{|\tau|+j+2k \leq s} \left\| D_y^\tau D_{\alpha,x}^j \partial_x^k v(x,y) \right\|_{L_2(\mathcal{R}_d^2)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (146)$$

Вначале докажем вспомогательные леммы.

Лемма 1. Пусть выполнены условия 1, 2. Тогда справедливо неравенство

$$\left(1 + |\xi|^2\right)^2 \|u\|^2 + \left(1 + |\xi|^2\right) \|D_{\alpha,x} u\|^2 \leq c \left(\|f\|^2 + b \left(1 + |\xi|^2\right) |g| \right), \quad (147)$$

где постоянная c не зависит от x, ξ .

Доказательство леммы 1. Помножим выражение

$$L_2 u - b \frac{\partial u}{\partial x} = f$$

скалярно на $\left(1 + |\xi|^2\right) u(x, \xi)$ и возьмём его вещественную часть.

$$\left(1 + |\xi|^2\right) \operatorname{Re}(L_2 u, u) - b \left(1 + |\xi|^2\right) \operatorname{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial x}, u\right) = \left(1 + |\xi|^2\right) \operatorname{Re}(f, u)$$

Воспользуемся аналогом равенства Парсеваля в развёрнутой форме для преобразования F_α

$$\int_0^d a \cdot \bar{b} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^d F_\alpha[a] \cdot F_\alpha[\bar{b}] d\eta.$$

Тогда.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(L_2(D_{\alpha,x}, \xi)u, u) &= c_1 \operatorname{Re}(F_\alpha[L_2(D_{\alpha,x}, \xi)u], F_\alpha[u]) = \\ &= c_1 \operatorname{Re}(L_2(\xi, \eta)F_\alpha[u], F_\alpha[u]) \geq c_2 \operatorname{Re}\left(\left(1 + |\xi|^2 + |\eta|^2\right)F_\alpha[u], F_\alpha[u]\right) = \\ &= c_2 \operatorname{Re}\left(\left(1 + |\xi|^2\right)F_\alpha[u], F_\alpha[u]\right) + \left(\eta^2 F_\alpha[u], F_\alpha[u]\right) = \\ &= c_2 \operatorname{Re}\left(\left(1 + |\xi|^2\right)F_\alpha[u], F_\alpha[u]\right) + \left(\eta F_\alpha[u], \eta F_\alpha[u]\right) = \\ &= c_2 \operatorname{Re}\left(\left(1 + |\xi|^2\right)\|F_\alpha[u]\|^2 + \|\eta F_\alpha[u]\|^2\right) = \\ &= c_2 \left(\left(1 + |\xi|^2\right)\|F_\alpha[u]\|^2 + \|F_\alpha[D_{\alpha,x}u]\|^2\right) = \\ &= c_3 \left(\left(1 + |\xi|^2\right)\|u\|^2 + \|D_{\alpha,x}u\|^2\right) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, u\right) = (u\bar{u})_0^d - \left(u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \|u\|_0^d - \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}, u\right)}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, u\right) + \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}, u\right)} = \|u\|_0^d$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial x}, u\right) = \frac{\|u\|_0^d}{2} = \frac{|g|}{2}$$

Воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского и известным неравенством $2ab \leq a^2 + b^2$

$$(1 + |\xi|^2) \operatorname{Re}(f, u) \leq (1 + |\xi|^2) \frac{1}{\varepsilon} \|f\| \cdot \varepsilon \|u\| \leq \frac{1}{2} \left(\varepsilon^2 (1 + |\xi|^2)^2 \|u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|f\|^2 \right)$$

$$(1 + |\xi|^2) c_3 \left((1 + |\xi|^2) \|u\|^2 + \|D_{\alpha,t} u\|^2 \right) - b (1 + |\xi|^2) \frac{\|u\|_0^d}{2} \leq$$

$$\frac{1}{2} \left(\varepsilon^2 (1 + |\xi|^2)^2 \|u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \|f\|^2 \right)$$

$$(1 + |\xi|^2)^2 \|u\|^2 + (1 + |\xi|^2) \|D_{\alpha,x} u\|^2 \leq c \left(\|f\|^2 + b (1 + |\xi|^2) \|u\|_0^d \right)$$

Учитывая, что $u(d) = 0$,

$$(1 + |\xi|^2)^2 \|u\|^2 + (1 + |\xi|^2) \|D_{\alpha,x} u\|^2 \leq c \left(\|f\|^2 + b (1 + |\xi|^2) |g| \right)$$

Лемма 2. Если выполнены условия леммы 1, справедливо неравенство:

$$\|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 \leq c(\varepsilon) \left(\|f\|^2 + (1 + |\xi|^2) \|D_{\alpha,x} u\|^2 + (1 + |\xi|^2)^2 \|u\|^2 \right) + \varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2. \quad (148)$$

Доказательство леммы 2. Помножим выражение

$$L_2 u - b \frac{\partial u}{\partial x} = \rho$$

скалярно на $D_{\alpha,x}^2 u$ и возьмём его действительную часть.

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}(L_2 u, D_{\alpha,x}^2 u) = \\
& = \operatorname{Re}(a_{02} D_{\alpha,x}^2 u + (a_{01} - a_{11} i \xi) D_{\alpha,x} u + (a_{00} - a_{20} \xi^2 - a_{10} i \xi) u, D_{\alpha,x}^2 u) = \\
& = \operatorname{Re}(a_{02} (D_{\alpha,x}^2 u, D_{\alpha,x}^2 u)) + \operatorname{Re}((a_{01} - a_{11} i \xi) (D_{\alpha,x} u, D_{\alpha,x}^2 u)) + \\
& + \operatorname{Re}((a_{00} - a_{20} \xi^2 - a_{10} i \xi) (u, D_{\alpha,x}^2 u)) \\
& (D_{\alpha,x}^2 u, D_{\alpha,x}^2 u) = \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 \\
& \operatorname{Re}(a_{02} (D_{\alpha,x}^2 u, D_{\alpha,x}^2 u)) = a_{02} \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 \\
& \operatorname{Re}(a_{02} (D_{\alpha,x}^2 u, D_{\alpha,x}^2 u)) = \operatorname{Re}(f, D_{\alpha,x}^2 u) + \operatorname{Re}((a_{11} i \xi - a_{01}) (D_{\alpha,x} u, D_{\alpha,x}^2 u)) + \\
& + \operatorname{Re}((a_{20} \xi^2 + a_{10} i \xi - a_{00}) (u, D_{\alpha,x}^2 u)) + b \operatorname{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial x}, D_{\alpha,x}^2 u\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}(f, D_{\alpha,x}^2 u) \leq \frac{1}{\varepsilon_1} \|f\| \cdot \varepsilon_1 \|D_{\alpha,x}^2 u\| \leq \frac{1}{2} \left(\varepsilon_1^2 \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1^2} \|f\|^2 \right) \leq \\
& \leq \varepsilon_1^2 \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1^2} \|f\|^2
\end{aligned} \tag{149}$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}((a_{11} i \xi - a_{01}) (D_{\alpha,x} u, D_{\alpha,x}^2 u)) \leq \operatorname{Re}\left(c_1 \sqrt{1 + |\xi|^2} (D_{\alpha,x} u, D_{\alpha,x}^2 u)\right) \leq \\
& \leq \frac{1}{\varepsilon_2} c_1 \sqrt{1 + |\xi|^2} \|D_{\alpha,x} u\| \cdot \varepsilon_2 \|D_{\alpha,x}^2 u\| \leq \\
& \leq \frac{1}{2} \left(\varepsilon_2^2 \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_2^2} c_1^2 (1 + |\xi|^2) \|D_{\alpha,x} u\|^2 \right) \leq \\
& \leq \varepsilon_2^2 \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + c_2 (\varepsilon_2) (1 + |\xi|^2) \|D_{\alpha,x} u\|^2
\end{aligned} \tag{150}$$

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}((a_{20} \xi^2 + a_{10} i \xi - a_{00}) (u, D_{\alpha,x}^2 u)) \leq \operatorname{Re}(c_3 (1 + |\xi|^2) (u, D_{\alpha,x}^2 u)) \leq \\
& \leq \frac{1}{\varepsilon_3} c_3 (1 + |\xi|^2) \|u\| \cdot \varepsilon_3 \|D_{\alpha,x}^2 u\| \leq \frac{1}{2} \left(\varepsilon_3^2 \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_3^2} c_3^2 (1 + |\xi|^2)^2 \|u\|^2 \right) \leq \\
& \leq \varepsilon_3^2 \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + c_4 (\varepsilon_3) (1 + |\xi|^2)^2 \|u\|^2
\end{aligned} \tag{151}$$

Рассмотрим теперь $\operatorname{Re}\left(\frac{\partial u}{\partial x}, D_{\alpha,x}^2 u\right)$.

Преобразуем вначале собственно $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, D_{\alpha,x}^2 u\right)$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial x}, D_{\alpha,x}^2 u\right) &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{1}{i} \sqrt{\alpha} \frac{\partial \sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{i} \sqrt{\alpha} \frac{\partial \sqrt{\alpha} u}{\partial x}\right)}{\partial x}\right) = \\
&= -\frac{1}{i} \left(\sqrt{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial \sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{i} \sqrt{\alpha} \frac{\partial \sqrt{\alpha} u}{\partial x}\right)}{\partial x}\right) = \\
&= -\frac{1}{i} \left(\left(\sqrt{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} \overline{\sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{i} \sqrt{\alpha} \frac{\partial \sqrt{\alpha} u}{\partial x}\right)}\right)\Big|_0^d - \left(\frac{\partial \sqrt{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x}, \sqrt{\alpha} \left(\frac{1}{i} \sqrt{\alpha} \frac{\partial \sqrt{\alpha} u}{\partial x}\right)\right)\right) = \\
&= -\left(\sqrt{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} \overline{D_{\alpha,x} u}\right)\Big|_0^d + \left(\frac{1}{i} \sqrt{\alpha} \frac{\partial \sqrt{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x}}{\partial x}, \frac{1}{i} \sqrt{\alpha} \frac{\partial \sqrt{\alpha} u}{\partial x}\right) = \\
&= -\left(\sqrt{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} \overline{D_{\alpha,x} u}\right)\Big|_0^d + \left(D_{\alpha,x} \frac{\partial u}{\partial x}, D_{\alpha,x} u\right) = \\
&= -\sqrt{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} \overline{D_{\alpha,x} u(d)} + \left(D_{\alpha,x} \frac{\partial u}{\partial x}, D_{\alpha,x} u\right)
\end{aligned}$$

Будем также рассматривать коммутатор операторов $D_{\alpha,x}$ и $\frac{\partial}{\partial x}$.

$$R\left(D_{\alpha,x}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u = D_{\alpha,x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial D_{\alpha,x} u}{\partial x} = \sum_{j=0}^1 c_j(t) \frac{\partial^j u}{\partial x^j}$$

Далее будем обозначать $R\left(D_{\alpha,x}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u = Ru$

$$\begin{aligned}
& \left(D_{\alpha,x} \frac{\partial u}{\partial x}, D_{\alpha,x} u \right) = \left(D_{\alpha,x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial D_{\alpha,x} u}{\partial x} + \frac{\partial D_{\alpha,x} u}{\partial x}, D_{\alpha,x} u \right) = \\
& \left(D_{\alpha,x} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial D_{\alpha,x} u}{\partial x}, D_{\alpha,x} u \right) + \left(\frac{\partial D_{\alpha,x} u}{\partial x}, D_{\alpha,x} u \right) = \\
& = \left(\frac{\partial D_{\alpha,x} u}{\partial x}, D_{\alpha,x} u \right) + (Ru, D_{\alpha,x} u) \\
& \left(\frac{\partial D_{\alpha,x} u}{\partial x}, D_{\alpha,x} u \right) = D_{\alpha,x} u \overline{D_{\alpha,x} u} - \left(D_{\alpha,x} u, \frac{\partial D_{\alpha,x} u}{\partial t} \right) = \\
& = |D_{\alpha,x} u|^2 \Big|_0^d - \overline{\left(\frac{\partial D_{\alpha,x} u}{\partial x}, D_{\alpha,x} u \right)} \\
& \left(\frac{\partial D_{\alpha,x} u}{\partial x}, D_{\alpha,x} u \right) + \overline{\left(\frac{\partial D_{\alpha,x} u}{\partial x}, D_{\alpha,x} u \right)} = |D_{\alpha,x} u|^2 \Big|_0^d \\
& \operatorname{Re} \left(\frac{\partial D_{\alpha,x} u}{\partial t}, D_{\alpha,x} u \right) = \frac{|D_{\alpha,x} u|^2}{2} \Big|_0^d \\
& \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, D_{\alpha,x}^2 u \right) = \operatorname{Re} \left(D_{\alpha,x} \frac{\partial u}{\partial x}, D_{\alpha,x} u \right) + \operatorname{Re} \left(-\sqrt{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} \overline{D_{\alpha,x} u(d)} \right) = \\
& = \operatorname{Re} \left(\frac{\partial D_{\alpha,x} u}{\partial x}, D_{\alpha,x} u \right) + \operatorname{Re}(Ru, D_{\alpha,x} u) + \operatorname{Re} \left(-\sqrt{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} \overline{D_{\alpha,x} u(d)} \right) = \\
& = \operatorname{Re}(Ru, D_{\alpha,x} u) + \frac{|D_{\alpha,x} u|^2}{2} \Big|_0^d + \operatorname{Re} \left(-\sqrt{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} \overline{D_{\alpha,x} u(d)} \right)
\end{aligned}$$

Воспользуемся также аналогом неравенства Эрлинга-Ниренберга

$$\begin{aligned}
& \|D_{\alpha,x} u\|^2 \leq \varepsilon \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + c(\varepsilon) \|u\|^2 \\
& \operatorname{Re}(Ru, D_{\alpha,x} u) \leq \frac{1}{2} \left(\varepsilon_4 \|Ru\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} \|D_{\alpha,x} u\|^2 \right) \leq \\
& \leq \varepsilon_4 \left\| \sum_{j=0}^1 c_j(t) \frac{\partial^j u}{\partial x^j} \right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} \|D_{\alpha,x} u\|^2 \leq \\
& \leq c_5 \cdot \varepsilon_4 \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + \|u\|^2 \right) + \frac{1}{\varepsilon_4} \left(\varepsilon_5 \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + c_6(\varepsilon_5) \|u\|^2 \right)
\end{aligned}$$

Выберем $\varepsilon_6 = \max\{c_5 \cdot \varepsilon_4, \frac{\varepsilon_5}{\varepsilon_4}\}$. Тогда

$$\operatorname{Re}(Ru, D_{\alpha,x}u) \leq \varepsilon_6 \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 \right) + c_7(\varepsilon_6)(1 + |\xi|^2)^2 \|u\|^2$$

$$|D_{\alpha,x}u(0)| = 0$$

$$\begin{aligned} |D_{\alpha,x}u(d)|^2 &\leq c_8 \sum_{j=0}^1 \left| \frac{\partial^j u(d)}{\partial x^j} \right|^2 \leq c_9 \left| \frac{\partial u(d)}{\partial x} \right|^2 \leq \varepsilon_7 \int_{\frac{d}{2}}^d \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx + c_{10}(\varepsilon_7) \int_{\frac{d}{2}}^d |u|^2 dx \leq \\ &\leq \varepsilon_7 \cdot c_{11} \int_{\frac{d}{2}}^d |D_{\alpha,x}^2 u|^2 dx + c_{12}(\varepsilon_7) \|u\|^2 \leq \varepsilon_8 \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + c_{13}(\varepsilon_8)(1 + |\xi|^2)^2 \|u\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(-\sqrt{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x} \overline{D_{\alpha,x}u(d)} \right) &\leq c_{14} \sum_{j=0}^1 \left| \frac{\partial^j u(d)}{\partial x^j} \right|^2 \leq c_{15} \left| \frac{\partial u(d)}{\partial x} \right|^2 \leq \\ &\leq \varepsilon_9 \int_{\frac{d}{2}}^d \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx + c_{16}(\varepsilon_9) \int_{\frac{d}{2}}^d |u|^2 dx \leq \varepsilon_9 \cdot c_{17} \int_{\frac{d}{2}}^d |D_{\alpha,x}^2 u|^2 dx + c_{18}(\varepsilon_9) \|u\|^2 \leq \\ &\leq \varepsilon_{10} \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + c_{19}(\varepsilon_{10})(1 + |\xi|^2)^2 \|u\|^2 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, D_{\alpha,x}^2 u \right) &\leq \varepsilon_6 \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 \right) + c_7(\varepsilon_6)(1 + |\xi|^2)^2 \|u\|^2 + \\ &+ \varepsilon_8 \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + c_{13}(\varepsilon_8)(1 + |\xi|^2)^2 \|u\|^2 + \varepsilon_{10} \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + c_{19}(\varepsilon_{10})(1 + |\xi|^2)^2 \|u\|^2 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, D_{\alpha,x}^2 u \right) \leq c_{20}(\varepsilon_{11})(1 + |\xi|^2)^2 \|u\|^2 + \varepsilon_{11} \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 \right)$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}(f, D_{\alpha,x}^2 u) + \operatorname{Re}((a_{11}i\xi - a_{01})(D_{\alpha,x}u, D_{\alpha,x}^2 u)) + \\ &+ \operatorname{Re}((a_{20}\xi^2 + a_{10}i\xi - a_{00})(u, D_{\alpha,x}^2 u)) + b \operatorname{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial x}, D_{\alpha,x}^2 u \right) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \varepsilon_1^2 \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1^2} \|f\|^2 + \varepsilon_2^2 \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + c_2(\varepsilon_2)(1+|\xi|^2) \|D_{\alpha,x} u\|^2 + \\
&+ \varepsilon_3^2 \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + c_4(\varepsilon_3)(1+|\xi|^2)^2 \|u\|^2 + \varepsilon_{11} \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 \right) + \\
&+ c_{20}(\varepsilon_{11})(1+|\xi|^2)^2 \|u\|^2 \\
a_{02} \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 &\leq \varepsilon_7 \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon_1^2} \|f\|^2 + c_2(\varepsilon_2)(1+|\xi|^2) \|D_{\alpha,x} u\|^2 + \varepsilon_6 \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 + \\
&+ c_{21}(\varepsilon_{12})(1+|\xi|^2)^2 \|u\|^2 \\
\|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 &\leq c(\varepsilon) \left(\|f\|^2 + (1+|\xi|^2) \|D_{\alpha,x} u\|^2 + (1+|\xi|^2)^2 \|u\|^2 \right) + \varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2
\end{aligned}$$

Лемма 3. При выполнении условий леммы 1 справедливо неравенство:

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 \leq c \left(\|f\|^2 + b(1+|\xi|^2) |g| \right) \quad (152)$$

Доказательство леммы 3. Из уравнения $L_2 u - b \frac{\partial u}{\partial x} = f$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{b} (f - L_2 u) \\
L_2 u &= a_{02} D_{\alpha,x}^2 u + (a_{01} - a_{11} i \xi) D_{\alpha,x} u + (a_{00} - a_{20} \xi^2 - a_{10} i \xi) u \\
\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\| &\leq c_1 (\|f\| + \|L_2 u\|) \leq \\
&\leq c_2 \left(\|f\| + \|D_{\alpha,x}^2 u\| + \sqrt{1+|\xi|^2} \|D_{\alpha,x} u\| + (1+|\xi|^2) \|u\| \right) \\
\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 &\leq c_3 \left(\|f\|^2 + \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + (1+|\xi|^2) \|D_{\alpha,x} u\|^2 + (1+|\xi|^2)^2 \|u\|^2 \right)
\end{aligned}$$

Воспользуемся леммой 1.

$$\begin{aligned}
(1+|\xi|^2)^2 \|u\|^2 + (1+|\xi|^2) \|D_{\alpha,x} u\|^2 &\leq c \left(\|f\|^2 + b(1+|\xi|^2) |g| \right) \\
\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 &\leq c_3 \left(\|f\|^2 + \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + c_4 \left(\|f\|^2 + b(1+|\xi|^2) |g| \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 \leq c_5 \left(\|f\|^2 + \|D_{\alpha,x}^2 u\|^2 + b(1 + |\xi|^2)|g| \right)$$

Воспользуемся леммой 2 и получим

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 \leq c_4 \left(\|f\|^2 + b(1 + |\xi|^2)|g| \right).$$

Вернёмся к доказательству неравенства (90). Просуммировав неравенства (147), (148) и (152), учитывая эквивалентность норм (85) и (146), и воспользовавшись обратным преобразованием Фурье получим доказываемое неравенство (90).

Доказательство теоремы 2 выводится из теоремы 1 аналогично тому, как это сделано в работах [114, 115]

Выводы по главе 3

При введении в модель дополнительного члена L_r при вырождающемся на границе коэффициента при второй производной потребовалось дополнительное исследование корректности постановки краевой задачи математической физики, описывающей рассматриваемую модель. Сформулированы и доказаны теоремы о существовании и единственности решения, а также получены априорные оценки, доказывающие непрерывную зависимость полученного решения от его параметров. Таким образом доказана корректность постановки рассматриваемой задачи.

4 Численное моделирование

4.1 Методы граничных элементов

Метод комплексных полиномов

Будем использовать комплекснозначную функцию

$$\omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad z = x + iy \quad (153)$$

являющуюся аналитической в односвязной области Ω , ограниченной замкнутым контуром Γ . МКП основан на применении интегральной формулы Коши [116]

$$\omega(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\omega(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta, \quad z_0 \in \Omega \quad (154)$$

позволяющей вычислять значение функции $\omega(z_0)$ в любой внутренней точке области Ω по ее значениям на границе Γ . Пусть на контуре Γ задана $n + 1$ узловая точка z_i , в каждой из которых известно значение вещественных функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$. Значения функции $\omega(z)$ на Γ можно аппроксимировать значениями комплексного полинома n -й степени $p_n(z)$. По построению $p_n(z)$ принимает в узловых точках те же значения, что и аппроксимируемая функция. Если подставить $p_n(\zeta)$ в (154) вместо $p_n\omega(\zeta)$, то получим, что $\omega(z_0) = p_n(z_0)$ [117]. Таким образом, для приближенного вычисления значения функции $\omega(z_0)$ в любой точке $z_0 \in \Gamma \cup \Omega$ достаточно вычислить значение полинома $p_n(z_0)$. В результате решение граничной задачи для уравнения Лапласа сводится к определению коэффициентов комплексного полинома $p_n(z)$ из системы линейных уравнений, получаемой путем подстановки узловых значений функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в $\text{Re}(p_n(z))$ и $\text{Im}(p_n(z))$ соответственно.

Комплексный метод граничных элементов

В основе комплексного метода граничных элементов (КМГЭ) так же, как и в МКП, лежит интегральная формула Коши (154). На границе

выбирается n узловых точек z_i , в каждой из которых известно значение функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$. Узловые точки z_i , выбранные на контуре Γ , соединяются конечнозвенной ломанной $\Gamma' = \bigcup_{j=1}^n \Gamma_j$, которая состоит из граничных элементов $\Gamma_j = \{z \in \Gamma : z = (1-s)z_j + sz_{j+1}; 0 \leq s \leq 1\}$, $z_{n+1} = z_1$, $\Gamma_{j-1} \cap \Gamma_j = z_j$ (рис. 9). Затем искомая граничная функция $\omega(z)$ заменяется пробной (интерполирующей) функцией $G_k(z)$. Ясно, что на каждом отрезке Γ_j пробная функция представляет собой комплексный полином степени k .

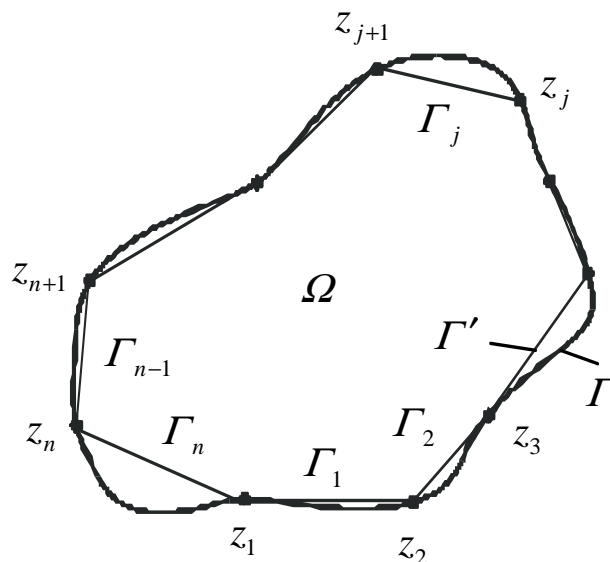


Рис. 9. Контур Γ , узловые точки z_i и конечнозвенная ломанная Γ' из граничных элементов Γ_j .

В дальнейшем для простоты будем рассматривать случай $k = 1$.

Область, ограниченную ломанной Γ' , обозначим Ω' . Пробная функция может быть записана в виде

$$G_1(z) = \sum_{j=1}^n N_j(z) \bar{\omega}_j \quad (155)$$

где $\bar{\omega}_j$ – значения функции $\omega(z)$ в узловых точках z_j ($j = 1 \dots n$), а коэффициенты $N_j(z)$ определяются согласно линейной интерполяции

$$N_j(z) = \begin{cases} \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}}, & z \in \Gamma_{j-1} \\ 0, & z \in \Gamma_{j-1} \cup \Gamma_j \\ \frac{z_{j+1} - z}{z_{j+1} - z_j}, & z \in \Gamma_j \end{cases}$$

Функция для приближенного определения значений $\omega(z)$ получается путем подстановки $G_1(\zeta)$ в (154) вместо $\omega(\zeta)$. В результате будем иметь так называемую H_1 -аппроксимирующую функцию

$$\hat{\omega}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{G_1(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad (z \notin \Gamma', z \in \Omega') \quad (156)$$

Значения этой функции будут являться приближенными решениями комплексной граничной задачи для уравнения Лапласа [117]. С учетом кусочно-линейного представления (2) получается следующее выражение для H_1 -аппроксимирующей функции

$$\hat{\omega}(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{h_j (\bar{\omega}_{j+1} (z - z_j) - \bar{\omega}_j (z - z_{j+1}))}{z_{j+1} - z_j} \right) \quad (157)$$

где $z \notin \Gamma', z \in \Omega'$, $h_j = \ln \left| \frac{z_{j+1} - z}{z_j - z} \right| + i\theta(j+1, j)$; $\theta(j+1, j)$ – угол между

отрезками, соединяющими узлы z_{j+1} и z_j с точкой $z \in \Omega$ (рис. 10).

Отметим, что известен Лапласа [117] вариант КМГЭ, позволяющий решить граничную задачу для уравнения Лапласа, если в каждом узле известно значение только одной из функций $\varphi(x, y)$ или $\psi(x, y)$.

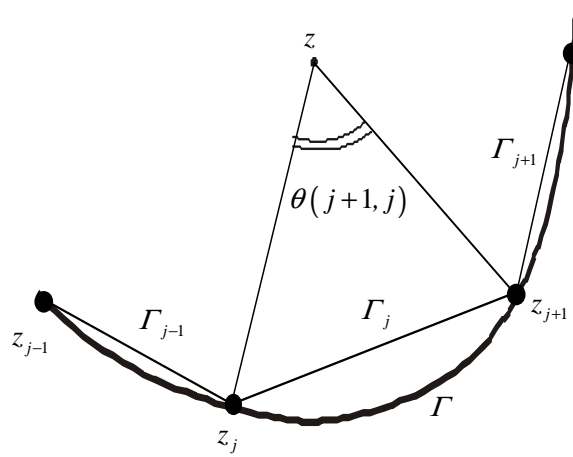


Рис. 10. Схема к определению узлов и углов в КМГЭ.

Программная реализация алгоритмов МКП и КМГЭ осуществлена на языке программирования Pascal [118, 119]. В приложениях приведены процедуры из комплекса программ, используемые при численном решении граничных задач (Дирихле, Неймана или смешанной граничной задачи) для уравнения Лапласа в односвязных областях сложной формы. Программа предоставляет пользователю возможность автоматически расположить узлы равномерно по контуру границы или по полярному углу. Кроме того, координаты узловых точек можно ввести непосредственно из файла. В узлах задается $\text{Re}(\omega(z))$ или $\text{Im}(\omega(z))$. В результате работы программы формируются файлы, содержащие координаты узлов с рассчитанными в них значениями функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, а также файлы, содержащие значения этих функций и их производных в произвольно выбранных точках внутри области и на ее границе. Полученные данные используются для визуализации полученного решения. Результаты численных экспериментов приведены в [43].

4.2 Метод конечных элементов

Основанный на проекционных или вариационных методах приближенного решения дифференциальных уравнений в частных

производных и возможностях современной вычислительной техники, позволяющей эффективно решать даже очень громоздкие системы линейных уравнений, метод конечных элементов (МКЭ) в настоящее время является фактическим стандартом в данной области.

В основе метода лежит интегральная формулировка решаемого дифференциального уравнения в частных производных, которая может быть получена как проекционными методами, самым распространенным из которых является метод Галёркина (называемый также методом Бубнова-Галёркина), так и вариационно-энергетическими методами, основанными на методе Ритца (называемый также методом Релея-Ритца). Далее решение полученного интегрального уравнения ищется в виде линейной комбинации аппроксимирующих функций, каждая из которых является полиномом над одним из элементов, на которые разбита область, в которой решается уравнение, и равна нулю над всеми другими элементами области. В качестве простейших аппроксимирующих функций используются полиномы первого порядка. Как правило, область разбивается на треугольные элементы по алгоритмам, основанным на триангуляции Делоне.

Метод Галёркина является вариантом метода взвешенных невязок, в котором весовые функции совпадают с базисными. Для решения уравнения вида

$$L(u) = p, \quad (158)$$

в области Ω с границей Γ где L – дифференциальный оператор, p – известная, а u – неизвестная функции соответственно и граничным условием

$$F(u) = q, \quad u \in \Gamma, \quad (159)$$

аппроксимируем функцию u следующим образом:

$$u \approx \hat{u} = w + \sum_{m=1}^M a_m N_m. \quad (160)$$

Здесь N_m , $m = 1, 2, \dots, M$ – базисные функции, причём

$$N_m|_{\Gamma} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M; \quad (161)$$

$a_m, m = 1, 2, \dots, M$ – некоторые параметры, определяемые так, чтобы получить наилучшее приближение, а функция w подбирается таким образом, что

$$w|_{\Gamma} = u|_{\Gamma}. \quad (162)$$

Невязка

$$\varepsilon = L\left(w + \sum_{m=1}^M a_m N_m\right) - p \quad (163)$$

ортгонализуется по отношению к набору весовых функций W_m , в качестве которых в методе Галёркина используются базисные функции N_m , $m = 1, 2, \dots, M$. Получаем систему интегральных уравнений

$$\iint_{\Omega} \left(L\left(w + \sum_{m=1}^M a_m N_m\right) - p \right) N_i dV = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (164)$$

Сформулируем основные уравнения МКЭ для уравнения (33).

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r K_r \frac{\partial U}{\partial r} + L_r U \right) \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K_{\varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) - \rho \right) W_i r dr d\varphi + \int_s K_r \frac{\partial U}{\partial r} \overline{W}_i ds = 0, \quad (165)$$

где $i = 1, 2, \dots, M$

Перейдём от двойных интегралов к повторным и раскроем криволинейный интеграл первого рода по границе и проинтегрируем по частям первое слагаемое в формуле (165):

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(r K_r \frac{\partial U}{\partial r} + L_r U \right) \right) \right) W_i r dr d\varphi + \\ & + \iint_{\Omega} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K_{\varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) \right) \right) W_i r dr d\varphi + \iint_{\Omega} (-\rho) W_i r dr d\varphi + \int_s K_r \frac{\partial U}{\partial r} \overline{W}_i ds = 0 \end{aligned} \quad (166)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{\partial}{\partial r} \left(r K_r \frac{\partial U}{\partial r} + L_r U \right) W_i dr d\varphi + \\ & + \iint_{\Omega} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K_{\varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) W_i dr d\varphi - \iint_{\Omega} \rho W_i r dr d\varphi + \int_s K_r \frac{\partial U}{\partial r} \overline{W}_i ds = 0 \end{aligned} \quad (167)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi r_1}^{\pi r_2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r K_r \frac{\partial U}{\partial r} + L_r U \right) W_i dr d\varphi + \int_{-\pi r_1}^{\pi r_2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K_\varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) W_i dr d\varphi - \\
& - \int_{-\pi r_1}^{\pi r_2} \rho W_i r dr d\varphi + \int_{-\pi}^{\pi} K_r \frac{\partial U}{\partial r} \overline{W}_i \sqrt{(r_2)^2 + (r_2')^2} d\varphi - \\
& - \int_{-\pi}^{\pi} K_r \frac{\partial U}{\partial r} \overline{W}_i \sqrt{(r_1)^2 + (r_1')^2} d\varphi = 0
\end{aligned} \tag{168}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi r_1}^{\pi r_2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r K_r \frac{\partial U}{\partial r} + L_r U \right) W_i dr d\varphi + \int_{-\pi r_1}^{\pi r_2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(K_\varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) W_i dr d\varphi - \\
& - \int_{-\pi r_1}^{\pi r_2} \rho W_i r dr d\varphi + \int_{-\pi}^{\pi} K_r \frac{\partial U}{\partial r} \overline{W}_i r_2 d\varphi - \int_{-\pi}^{\pi} K_r \frac{\partial U}{\partial r} \overline{W}_i r_1 d\varphi = 0
\end{aligned} \tag{169}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} \left(\left(r K_r \frac{\partial U}{\partial r} + L_r U \right) W_i \Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} \left(r K_r \frac{\partial U}{\partial r} + L_r U \right) \frac{\partial W_i}{\partial r} dr \right) d\varphi + \\
& + \int_{r_1}^{r_1} \left(K_\varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} W_i \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{K_\varphi}{r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial W_i}{\partial \varphi} d\varphi \right) dr - \\
& - \int_{-\pi r_1}^{\pi r_2} \rho W_i r dr d\varphi + \int_{-\pi}^{\pi} K_r \frac{\partial U}{\partial r} \overline{W}_i r_2 d\varphi - \int_{-\pi}^{\pi} K_r \frac{\partial U}{\partial r} \overline{W}_i r_1 d\varphi = 0
\end{aligned} \tag{170}$$

Положим теперь $W_i = N_i$, $\overline{W}_i = -N_i$, $i = 1, 2, \dots, M$, и, учитывая, что

$$K_\varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} W_i \Big|_{\varphi=-\pi}^{\varphi=\pi} = K_\varphi \frac{\partial U}{\partial \varphi} W_i \Big|_{\varphi=\pi}^{\varphi=-\pi} \text{ получим:}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} \left(L_r U N_i \Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} \left(r K_r \frac{\partial U}{\partial r} + L_r U \right) \frac{\partial N_i}{\partial r} dr \right) d\varphi + \\
& + \int_{r_1}^{r_1} \left(-\frac{K_\varphi}{r} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial N_i}{\partial \varphi} d\varphi \right) dr - \\
& - \int_{-\pi r_1}^{\pi r_2} \rho N_i r dr d\varphi = 0
\end{aligned} \tag{171}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} \left(L_r U N_i \Big|_{r_1}^{r_2} \right) d\varphi - \int_{-\pi}^{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left(r K_r \frac{\partial U}{\partial r} + L_r U \right) \frac{\partial N_i}{\partial r} dr d\varphi - \\
& - \int_{-\pi}^{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{K_\varphi}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial N_i}{\partial \varphi} dr d\varphi - \int_{-\pi}^{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \rho N_i r dr d\varphi = 0
\end{aligned} \tag{172}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} \left(L_r U N_i \Big|_{r_1}^{r_2} \right) d\varphi - \int_{-\pi}^{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left(\left(r K_r \frac{\partial U}{\partial r} + L_r U \right) \frac{\partial N_i}{\partial r} + \frac{K_\varphi}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial N_i}{\partial \varphi} \right) dr d\varphi - \\
& - \int_{-\pi}^{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \rho N_i r dr d\varphi = 0
\end{aligned} \tag{173}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left(\left(r K_r \frac{\partial U}{\partial r} + L_r U \right) \frac{\partial N_i}{\partial r} + \frac{K_\varphi}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \frac{\partial N_i}{\partial \varphi} \right) dr d\varphi + \\
& + \int_{-\pi}^{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \rho N_i r dr d\varphi - \int_{-\pi}^{\pi} \left(L_r U N_i \Big|_{r_1}^{r_2} \right) d\varphi = 0
\end{aligned} \tag{174}$$

Подставляя в (174) аппроксимацию U по выражению (160) получим необходимую слабую интегральную формулировку задачи.

Разбиение области, в которой рассматривается задача на треугольные элементы производится по алгоритму, основанному на триангуляции Делоне.

В качестве функций формы для треугольных элементов будем использовать полиному Лагранжа второго порядка. Такие треугольные конечные элементы называются, соответственно, лагранжевыми элементами второго порядка. Рассмотрим такой элемент и его функции формы.

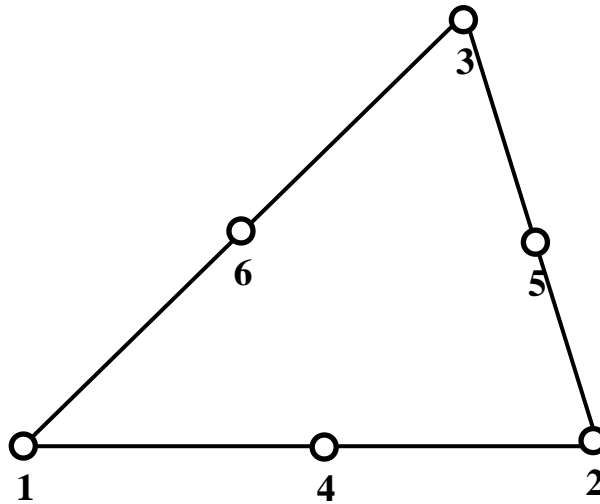


Рис. 11. Нумерация узлов треугольного лагранжева конечного элемента

Введём вспомогательную систему треугольных координат L_1 , L_2 и L_3 , называемых также координатами площади или барицентрическими. Треугольные координаты связаны с декартовыми выражениями

$$\begin{aligned} x &= L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3 \\ y &= L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 \\ 1 &= L_1 + L_2 + L_3 \end{aligned} \quad (175)$$

Функции формы для лагранжева элемента второго порядка имеют вид

$$\begin{aligned} N_1 &= (2L_1 - 1)L_1; \quad N_2 = (2L_2 - 1)L_2; \quad N_3 = (2L_3 - 1)L_3; \\ N_4 &= 4L_1L_2; \quad N_5 = 4L_2L_3; \quad N_6 = 4L_1L_3 \end{aligned} \quad (176)$$

4.3 Комплекс программ

Для проведения численного моделирования разработан комплекс проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительных экспериментов. В рамках данного комплекса использовались как вновь разработанные программы, написанные на языке Pascal и реализующие гарнично-элементные методы МКП и КМГЭ, так и элементы свободно

распространяемого программного продукта FreeFEM++, с помощью которых реализован метод конечных элементов. Структура комплекса программ представлена на рисунке 12.

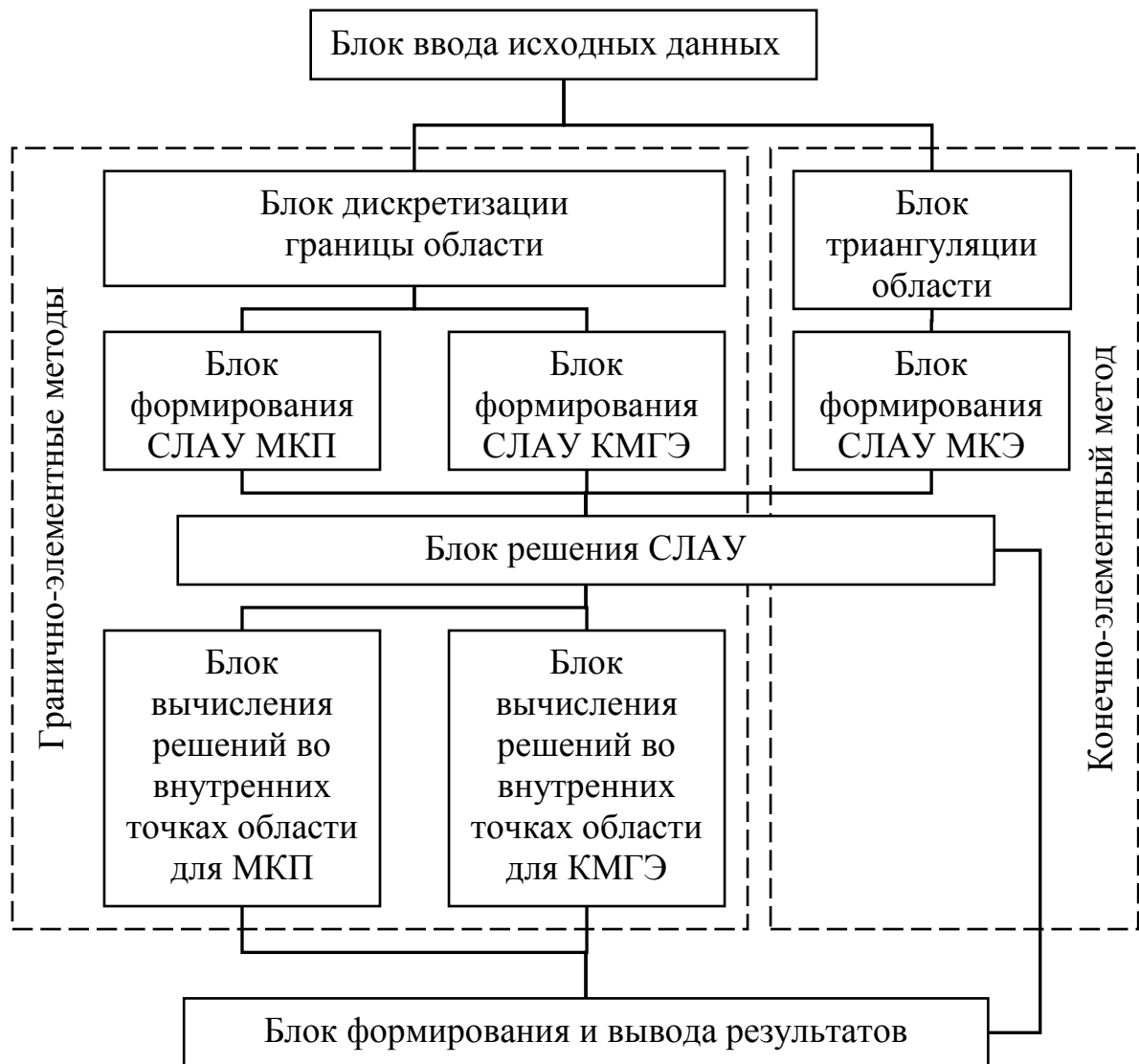


Рис. 12. Структура комплекса программ для проведения вычислительных экспериментов

Программные блоки, используемые в комплексе программ, можно разделить на общие, к которым относятся блоки ввода исходных данных, формирования и вывода результатов, и блок решения системы линейных уравнений (СЛАУ), а также блоки, специфичные для гранично-элементных

методов и метода конечных элементов. Рассмотрим блоки комплекса программ подробнее.

Блок ввода исходных данных предназначен для задания геометрии области, в которой решается граничная задача, а также граничных условий. Область может быть задана как одна из стандартных фигур (круг, эллипс), уравнением в полярных координатах (эпитрохоида, астроида), или в виде произвольной замкнутой ломанной, заданной вершинами составляющих её отрезков. На границе задаются граничные условия. При использовании гранично-элементных методов необходимо, чтобы на границе были заданы как аналоги функции тока, так и аналоги функций потенциала скоростей.

Блок дискретизации границы области используется для гранично-элементных методов. Заданное количество точек дискретизации распределяется по границе равномерно по её длине или по центральному углу. В каждой точке указывается соответствующее граничное условие.

Блок триангуляции области используется для метода конечных элементов. Область разбивается на треугольники в соответствии с алгоритмом Делоне. В составе блока используются элементы системы FreeFEM++.

Блок формирования СЛАУ МКП заполняет систему линейных уравнений для определения коэффициентов аппроксимирующей функцию комплексного полинома (аппроксимаций недостающих значений функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ в узловых точках).

Блок формирования СЛАУ КМГЭ заполняет систему линейных уравнений для определения аппроксимации неизвестных узловых значений функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, что позволяет определить H_1 -аппроксимирующую функцию для вычисления приближенного решения в произвольной внутренней точки области комплексным методом граничных элементов.

Блок формирования СЛАУ МКЭ формирует систему линейных алгебраических уравнений для метода конечных элементов на основании

выведенной слабой формулировки задачи для области, разбитой на треугольные элементы типа Лагранжа. В составе блока используются элементы системы FreeFEM++.

Блок решения СЛАУ реализует решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Блок вычисления решений во внутренних точках области для МКП предназначен для задания массива точек внутри области, в которых будут вычислены приближенные значения решения и собственно вычисления значения аппроксимирующего полинома в этих точках.

Блок вычисления решений во внутренних точках области для КМГЭ предназначен для задания массива точек внутри области, в которых будут вычислены приближенные значения решения и собственно вычисления приближенного решения задачи в этих точках посредством вычисления контурного интеграла от H_1 -аппроксимирующей функции.

Блок формирования и вывода результатов предназначен для формирования таблиц, содержащих значения приближенного решения в определённой точке и её координаты. Результаты работы блока используются для дальнейшей визуализации решений.

Результаты численных экспериментов, выполненных с использованием разработанного комплекса программ, приведены далее.

4.4 Численные эксперименты

4.4.1 Сравнительное исследование комплексных гранично-элементных методов

Результаты численных расчетов для областей различных форм были сопоставлены с известными аналитическими решениями [120, 121, 122] и с решениями, полученными различными численными методами (методом

конечных разностей [123], методом конечных элементов (МКЭ) [124, 125, 126], вещественным методом граничных элементов (МГЭ) [124, 127, 128]).

Результаты численных экспериментов и их обсуждение.

Теплопередача в бруске квадратного сечения. Рассмотрим двумерную задачу о теплопередаче в бруске квадратного сечения (рис. 13). На сторонах AB и CB температура изменяется по линейному закону, а две другие стороны теплоизолированы. Введем в рассмотрение функцию $P(x, y)$, называемую функцией тока тепла, связанную с температурой $T(x, y)$ условием Коши – Римана. Тогда на стороне OC будет $P(0, y) = 0$, на стороне OA – $P(x, 0) = 0$. Имеем смешанную граничную задачу для сопряженных функций $T(x, y)$ и $P(x, y)$. В [126] приведено решение этой задачи методом конечных элементов. Область $OABC$ была разбита на 50 трехузловых треугольных элементов, при этом общее число узлов было равно 36, из которых 20 находились на границе.

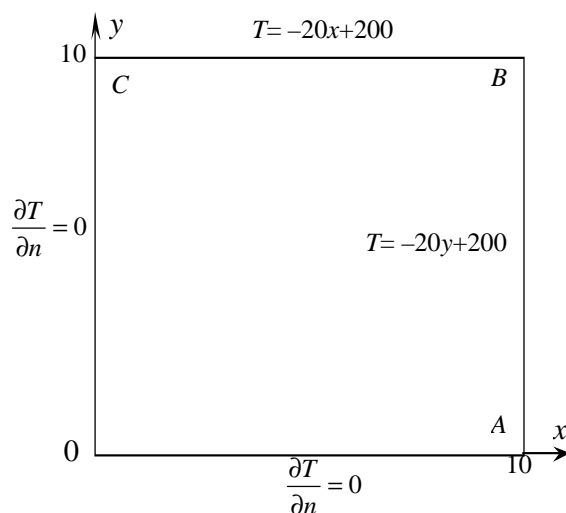


Рис. 13. Граничные условия задачи о теплопередаче в бруске квадратного сечения

На рис. 14 приведены изотермы, построенные МКП, КМГЭ и методом конечных элементов (МКЭ), при одинаковой степени дискретизации границы (20 узлов). Изотермы построенные МКП и КМГЭ графически неразличимы.

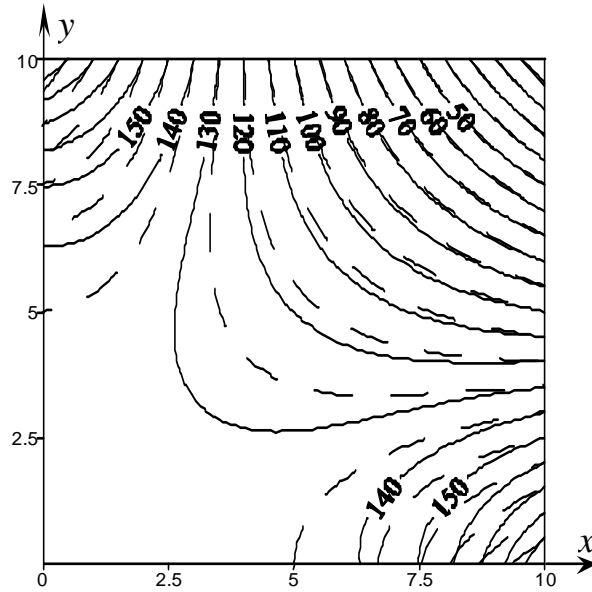


Рис. 14. Изотермы в поперечном сечении бруса, полученные различными численными методами (— МКП, МКЭ; - - - КМГЭ)

Кручение упругих призматических стержней. В качестве иллюстрации возможностей МКП и КМГЭ приведем решения задач кручения упругих стержней для поперечных сечений различных форм.

Как известно [122], кручение прямолинейного стержня описывается задачей Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta\phi(x, y) = -2G\theta \\ \phi|_{\Gamma} = 0 \end{cases}$$

где $\phi(x, y)$ – функция напряжений, G – модуль сдвига, θ – угол поворота стержня на единицу длины, Γ – контур поперечного сечения стержня. Если положить $G = 1$, $\theta = 1$ и произвести замену переменной

$$\varphi(x, y) = \phi(x, y) - \frac{x^2 + y^2}{2}$$

то будем иметь следующую задачу Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(x, y) = 0 \\ \varphi|_{\Gamma} = \frac{x^2 + y^2}{2} \end{cases}$$

На рис. 15 и 16 приведены схемы дискретизации границы и изолинии абсолютных касательных напряжений для стержней эллиптического и прямоугольного поперечного сечений (в силу симметрии представлены только четверти фигур). Все размеры указаны в сантиметрах. Абсолютное касательное напряжение T ($\text{кг}/\text{см}^2$) вычислялось по формуле

$$T = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} \quad (177)$$

где $\tau_{xz} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ и $\tau_{yz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ – компоненты касательного напряжения,

определяющего сдвиг [122].

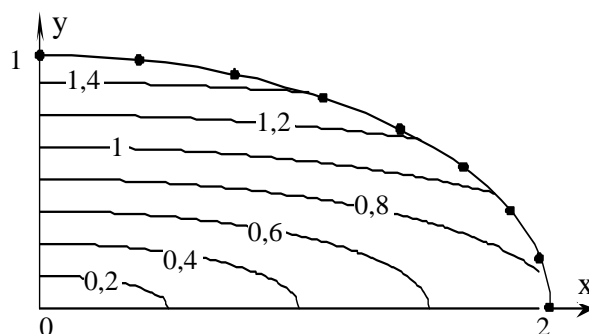


Рис. 15. Изолинии абсолютных касательных напряжений T при кручении стержня с эллиптическим поперечным сечением (МКП, 32 узла)

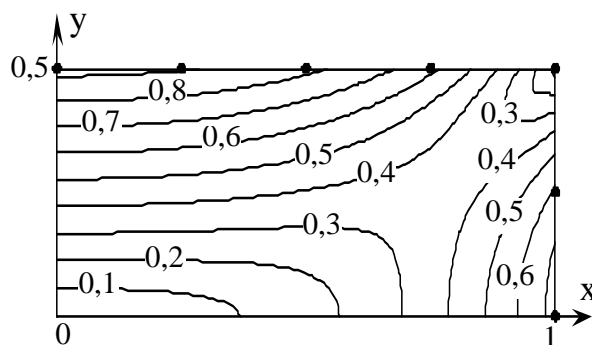


Рис. 16. Изолинии абсолютных касательных напряжений T при кручении стержня с прямоугольным поперечным сечением (МКП, 24 узла)

В табл. 3 приведены приближенные значения геометрической жесткости при кручении, определяемой по формуле

$$C = \iint_{\Omega} \phi(x, y) d\Omega$$

для стержня с поперечным сечением в виде эллипса, имеющего полуоси a и $2a$ соответственно (точное решение $C = 5,02654$ [122]) и даны относительные погрешности ε приближенных решений. Расчеты произведены МКП и КМГЭ при различной степени дискретизации границы.

Таблица 3

Жесткость при кручении (C/a^4) стержня эллиптического поперечного сечения

Число узлов на границе	МКП		КМГЭ	
	C/a^4	ε (%)	C/a^4	ε (%)
16	5,02082	0,11	5,26314	4,71
32	5,02613	0,01	5,08788	1,22
50	5,02651	0,0	5,05195	0,51
75	5,02649	0,0	5,03774	0,22
100	5,02648	0,0	5,03282	0,12
150	5,02649	0,0	5,02932	0,06
200	5,02648	0,0	5,02806	0,06
Экстраполяция	5,02652	0,0	5,02428	0,05
МКЭ [124], 16 узлов	4,560			
МГЭ [124], 16 узлов	4,487			

В табл. 4 приведены значения C для стержня с поперечным сечением в виде прямоугольника со сторонами a и $2a$ (точное решение $C = 0,45736$ [122]).

Таблица 4

Жесткость при кручении (C/a^4) стержня прямоугольного поперечного сечения

Число узлов на границе	МКП	КМГЭ	МГЭ [125]
8	0,66667	0,72366	0,4444
12	0,46377	0,57489	—
14	0,46301	0,54978	0,4503
32	0,45775	0,47456	0,4566
50	0,45742	0,46419	—
100	0,45737	0,45905	—
200	0,45736	0,45779	—
Экстраполяция	0,45736	0,45652	—

Для сравнения в табл. 3 и 4 даны также значения C , полученные другими численными методами.

В табл. 5 приведены абсолютные касательные напряжения T в точках, лежащих на стороне стержня, имеющего поперечное сечение в виде равностороннего треугольника со стороной 2 см.

На рис. 17 показана относительная погрешность расчета жесткости при кручении стержня прямоугольного поперечного сечения.

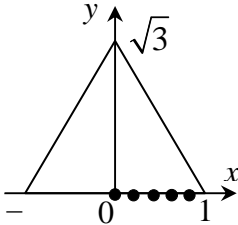
На рис. 18 и в табл. 6 приведено решение задачи кручения симметричного швеллера размерами $2a \times 4a$ с вырезом $a \times 2a$ (на рис. 18 в силу осевой симметрии представлена половина фигуры).

На рис. 19 и в табл. 7 приведено решение задачи кручения стержня эпитрохоидального поперечного сечения (радиус описанной окружности $a = 3,6$ см).

На рис. 20 и в табл. 8 дано решения задачи кручения стержня, имеющего поперечное сечение в виде астроиды (радиус описанной окружности $a = 1$ см).

Таблица 5

Абсолютные касательные напряжения T в точках, лежащих на стороне стержня с сечением в виде равностороннего треугольника (30 узлов)

	x	МКП	КМГЭ	МГЭ [127]	Точное решение [122]
	0	0,866	0,953	0,869	0,866
0,15	0,846	0,842	0,847	0,846	
0,325	0,774	0,763	0,775	0,774	
0,525	0,627	0,621	0,630	0,627	
0,75	0,379	0,404	0,380	0,379	

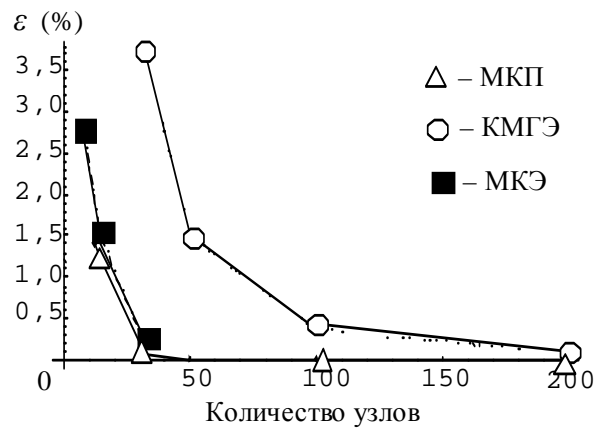


Рис. 17. Относительная погрешность при решении задачи кручения стержня прямоугольного поперечного сечения

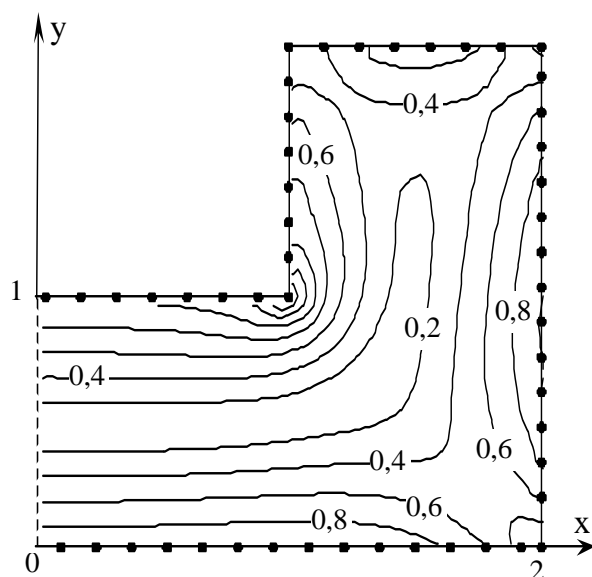


Рис. 18. Изолинии абсолютных касательных напряжений T при кручении стержня с поперечным сечением в виде швеллера (КМГЭ, 100 узлов)

Таблица 6

Жесткость при кручении швеллера (КМГЭ)

Количество узлов	C/a^4	ε (%)
14	3,16754	62,77
56	2,04405	5,04
100	1,96986	1,26
200	1,93962	0,33
300	1,93449	0,59
Экстраполяция	1,92423	1,12
Расчетно-теоретическое значение [122]	1,946	

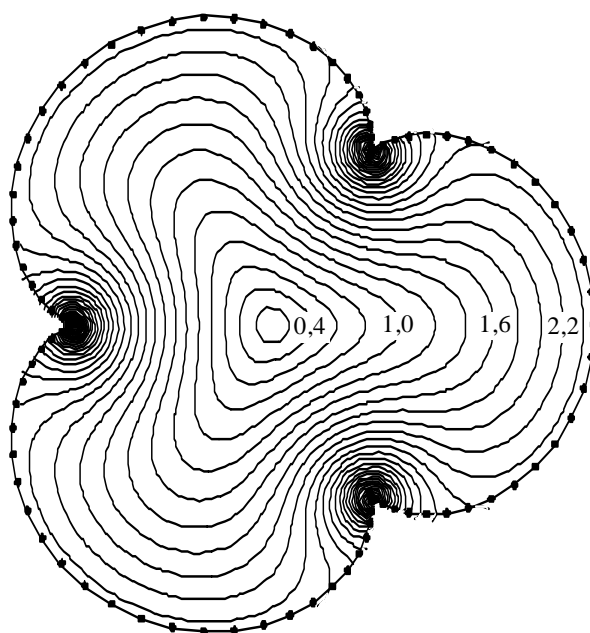


Рис. 19. Изолинии абсолютных касательных напряжений T при кручении стержня с эпитрохоидальным поперечным сечением (КМГЭ, 100 узлов)

Таблица 7

Жесткость при кручении стержня с эпитрохоидальным поперечным сечением

Количество узлов	КМГЭ	ε (%)
12	0,97228	1,41
50	0,96414	0,56
100	0,96112	0,25
200	0,95957	0,09
300	0,95902	0,03
Экстраполяция	0,95792	0,09
Точное решение [129]	0,95874	0

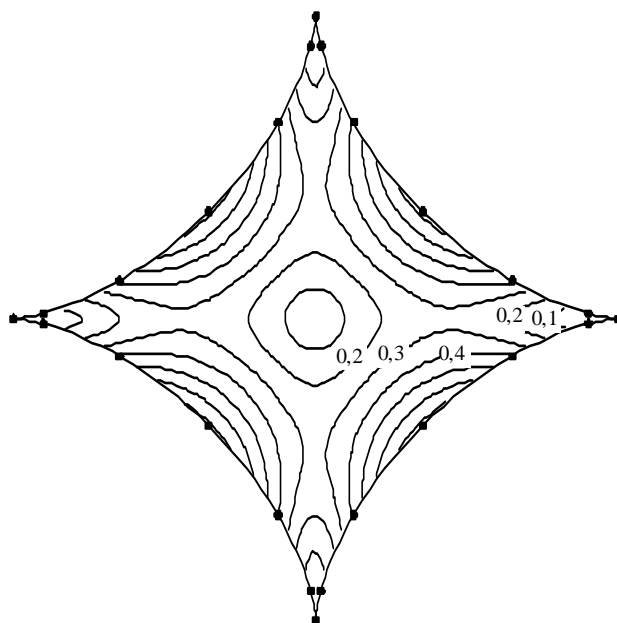


Рис. 20. Изолинии абсолютных касательных напряжений T при кручении стержня с поперечным сечением в виде астроида (МКП, 24 узла)

Таблица 8

Жесткость при кручении стержня с поперечным сечением в виде астроида

Кол-во узлов	МКП	КМГЭ
12	0,19209	0,33728
24	0,15965	0,20744
50	0,15959	0,17076
75	0,15960	0,16454
100	0,15960	0,16237
150	0,15960	0,16082
200	0,15960	0,16029
250	0,15960	0,16004
300	0,15960	0,15991
Экстраполяция	0,15960	0, 15926

Приведенные выше результаты численных экспериментов свидетельствуют, что МКП и КМГЭ могут эффективно применяться для решения задач кручения неупругих стержней с помощью методов упругих решений, переменных параметров упругости и т. д. [130, 132].

Течение жидкости в неоднородной пористой среде. Как известно [128], двухмерное течение несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде описывается уравнением

$$\nabla(K\nabla\phi)=0 \quad (178)$$

где $K(x, y)$ – влагопроводность, а ϕ – пьезометрический напор. В случае, когда влагопроводность является билинейной функцией, с помощью замены переменной

$$u(x, y) = [K(x, y)]^{\frac{1}{2}} \phi(x, y)$$

уравнение (178) сводится к уравнению Лапласа относительно функции $u(x, y)$.

В [128] приведены точное и полученное вещественным МГЭ решение задачи течения жидкости через неоднородную пористую среду в квадрате с единичной стороной (граница дискретизировалась 16-ю линейными элементами). Функция влагопроводности имеет вид

$$K(x, y) = (1 + 0,2x + 0,4y + 0,15xy)^2$$

На рис. 21 приведены изолинии пьезометрического напора, построенные МКП. Они совпадают с графическим представлением точного решения задачи. Изолинии пьезометрического напора, построенные с помощью КМГЭ и МГЭ [128] также графически неотличимы от точного решения.

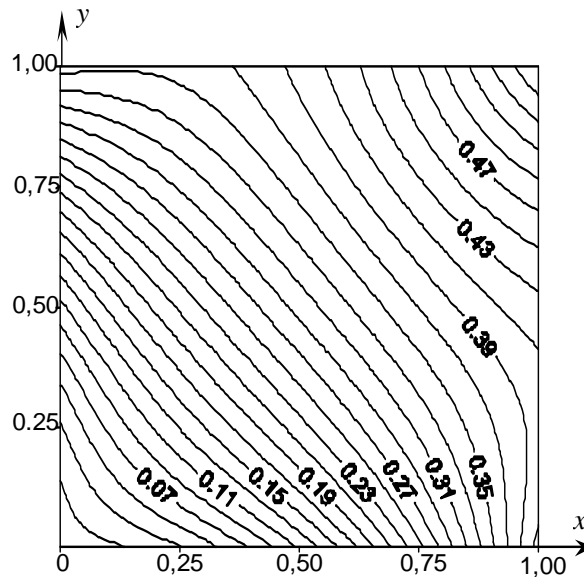


Рис. 21. Изолинии пьезометрического напора в единичном квадрате (задаче о течении жидкости в неоднородной пористой среде)

Проведенные численные эксперименты показали, что для выпуклых сечений и для областей, имеющих входящие углы, близкие к развернутым, результаты МКП и КМГЭ сходятся к точному решению (см. табл. 1 и 2).

Оба метода демонстрируют устойчивость даже при значительном увеличении степени дискретизации границы. Численные эксперименты показали, что МКП обладает более высокой скоростью сходимости, чем КМГЭ. Сказанное иллюстрируется рядом рассмотренных примеров, для которых решение является полиномом невысокой степени.

Так, в задаче о кручении стержня эллиптического сечения [122]

$$\phi(x, y) = \frac{a^2 b^2 G \theta}{2(a^2 + b^2)} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right),$$

а в задаче о кручении стержня с поперечным сечением в виде равностороннего треугольника [122]

$$\phi(x, y) = -G \theta \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{\sqrt{3}a}(x^3 - 3xy^2) - \frac{a^2}{18} \right]$$

В этих случаях решения, полученные МКП даже при малой степени дискретизации границы, практически не отличается от точного решения (см. табл. 1, 3, рис. 21).

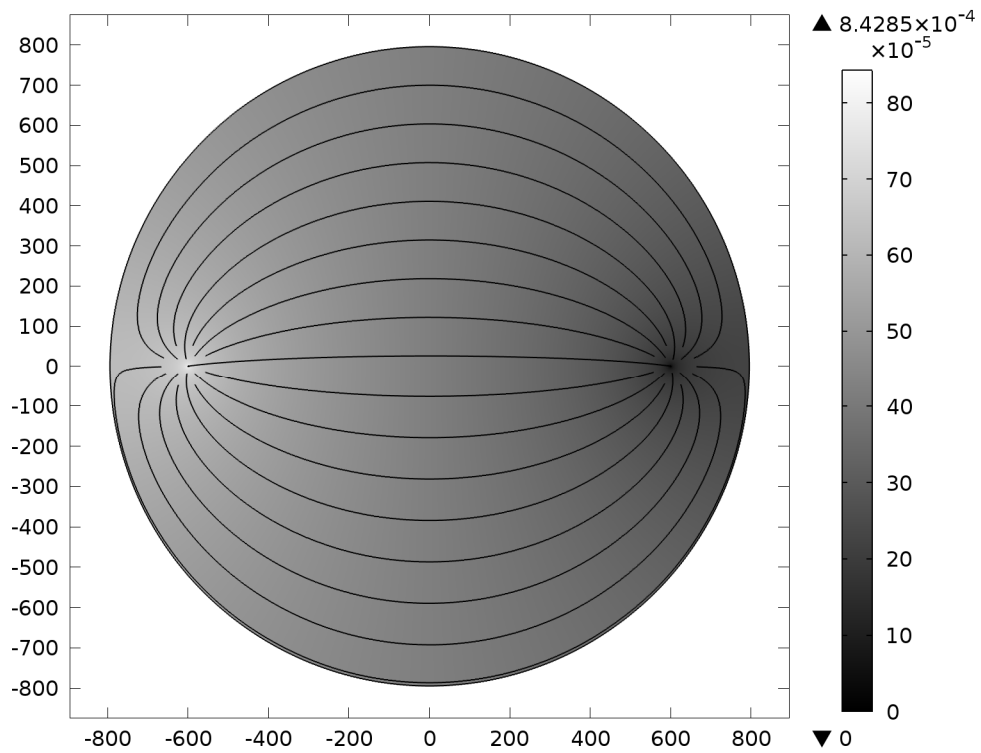
Анализ результатов многочисленных экспериментов показал невозможность применения МКП для невыпуклых областей, имеющих прямые и острые входящие углы. Это связано с недостаточной гладкостью аппроксимируемой функции во входящих углах, а также с тем, что точки, по которым производится построение интерполирующего многочлена расположены на границе области. Согласно теореме Кальмара–Уолша [133], необходимым и достаточным условием сходимости интерполирующего комплексного полинома к аппроксимируемой функции является равномерное распределение узлов интерполяции на компакте, что в данном случае не выполнено. Напротив, КМГЭ сходится к точному решению и демонстрирует устойчивость для областей, имеющих прямые или острые входящие углы.

4.4.2 Исследование модели беспроводной адаптивной ячеистой сети

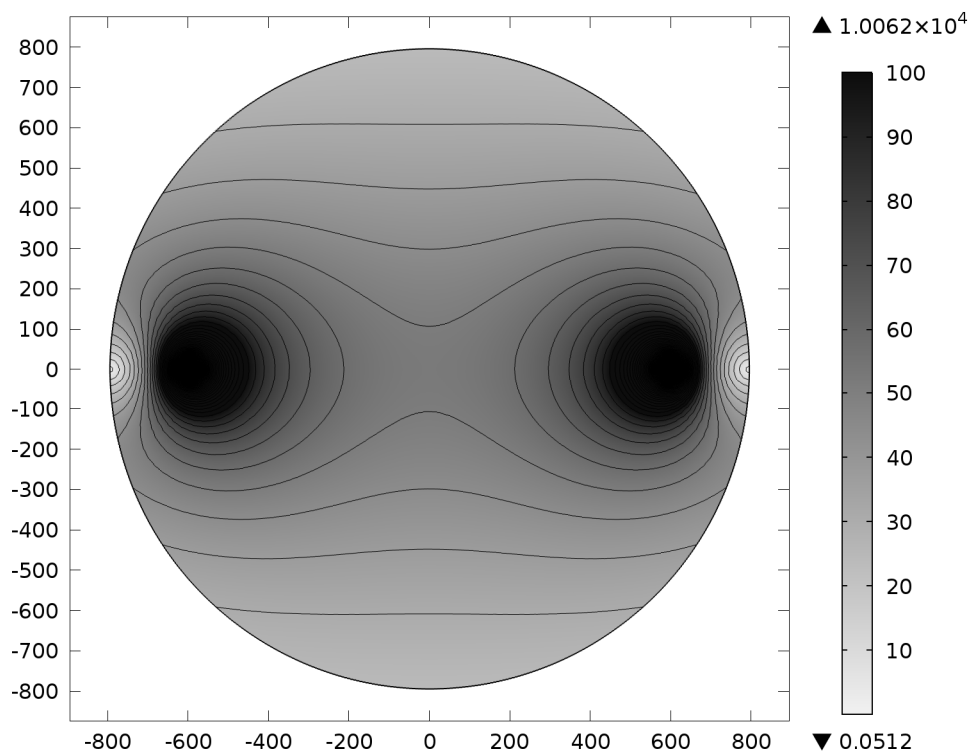
Рассмотрим пример. Пусть сеть функционирует на единой частоте, состоит из узлов с мощностью передатчика на антенне $P_T = 0,001 \text{ Вт}$, высота подвеса антенны $h_R = 0,1 \text{ м}$, плотность расположения узлов $d = 1 \frac{\text{узлов}}{\text{м}^2}$. Ширина полосы используемого радиоканала $w = 20000 \text{ Гц}$. В начале полярных координат находится источник помехи мощностью $P_{TN} = 1000 \text{ Вт}$, высота подвеса антенны $h_{RN} = 20 \text{ м}$. Источник и получатель информации расположены в точках с координатами $(-600,0)$ и $(600,0)$ соответственно. Установим $SN_1 = -10 \text{ дБ}$ $SN_2 = 30 \text{ дБ}$. Тогда $r_1 = 79,527 \text{ м}$ и $r_2 = 795,271 \text{ м}$. Будем решать задачу в круговой области радиуса r_2 . Рассмотрим четыре случая: когда помеха отсутствует, когда источник помехи, находящийся в начале координат, воздействует на узлы с изотропными (в горизонтальной плоскости) антеннами, адаптивно

изменяющими скорость передачи информации в зависимости от отношения сигнал / шум, когда антенны узлов адаптивно изменяют свою диаграмму направленности, как было описано выше, и случай построения дополнительного семейства маршрутов путём введения $L_r = -5 \cdot 10^5$. Ниже приведены интенсивности нагрузки на маршруты $|\mathbf{W}|$ для всех рассмотренных случаев.

Рассмотрим также результаты численного моделирования примера, когда внутри области, занимаемой сетью находятся два источника помех. Пусть сеть расположена внутри прямоугольника со сторонами 2000 м и 1200 м, центр которого находится в начале координат. Как и в предыдущих примерах, сеть функционирует на единой частоте, состоит из узлов с мощностью передатчика на антенне $P_T = 0,001 \text{ Вт}$, высота подвеса антенны $h_R = 0,1 \text{ м}$, плотность расположения узлов $d = 1 \text{ узлов/м}^2$. Ширина полосы используемого радиоканала $w = 20000 \text{ Гц}$. Внутри области находятся два источника помех со следующими параметрами: мощности: $P_{TN1} = 1000 \text{ Вт}$, $P_{TN2} = 500 \text{ Вт}$, высоты подвеса антенн $h_{TN1} = 20 \text{ м}$, $h_{TN2} = 10 \text{ м}$, расположение – в точках с координатами (-325,0) и (325,0) соответственно. Источник и получатель информации расположены в точках с координатами (-900,0) и (900,0) соответственно. Установим $SN_1 = -10 \text{ дБ}$ $SN_2 = 30 \text{ дБ}$. Результаты моделирования представлены на рисунке 26. Показаны изолинии потенциала U и интенсивность нагрузки на маршруты $|\mathbf{W}|$. Для наглядности диапазон визуализации $|\mathbf{W}|$ ограничен.



а)

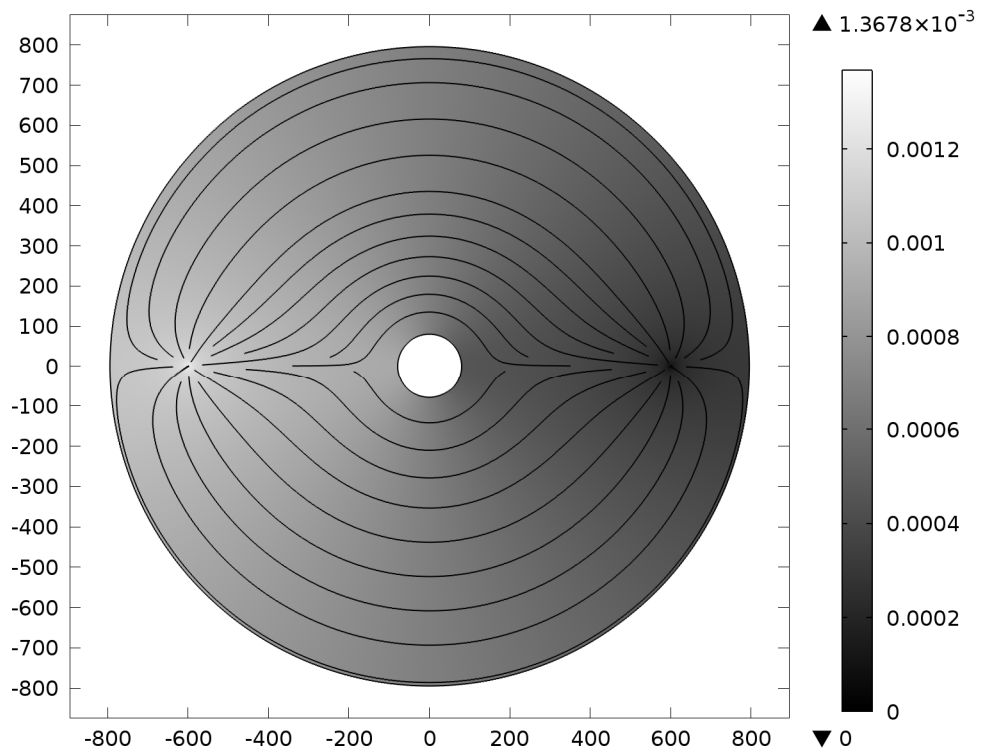


б)

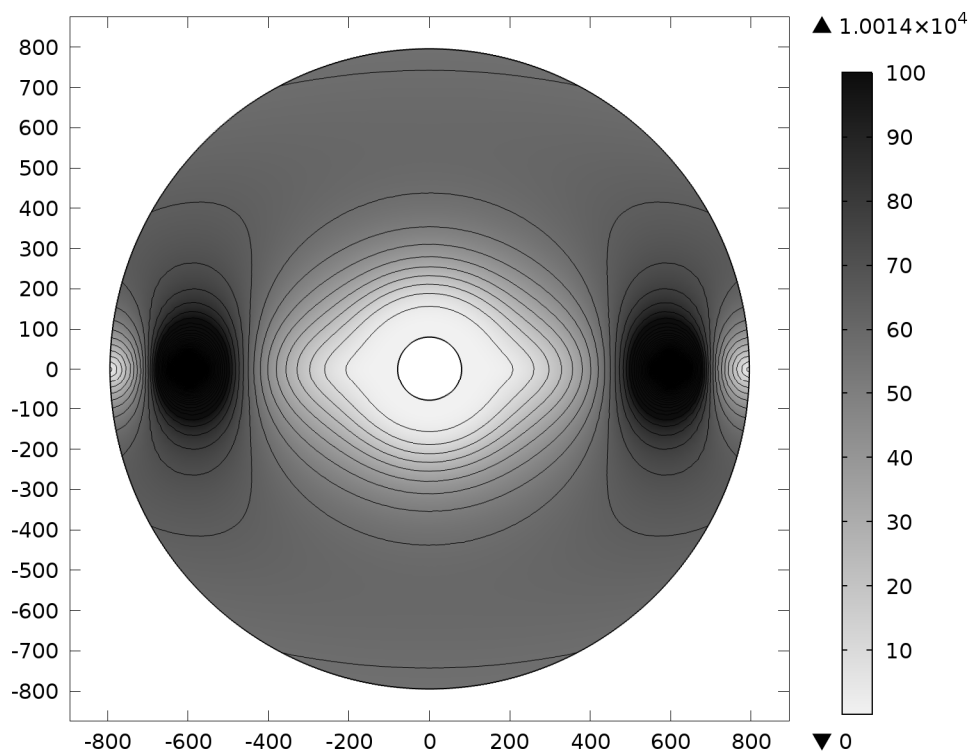
Рис. 22. Сеть без воздействия помехи:

а) линии плотности информационного потока \mathbf{W}

б) интенсивности нагрузки на маршруты $|\mathbf{W}|$



а)

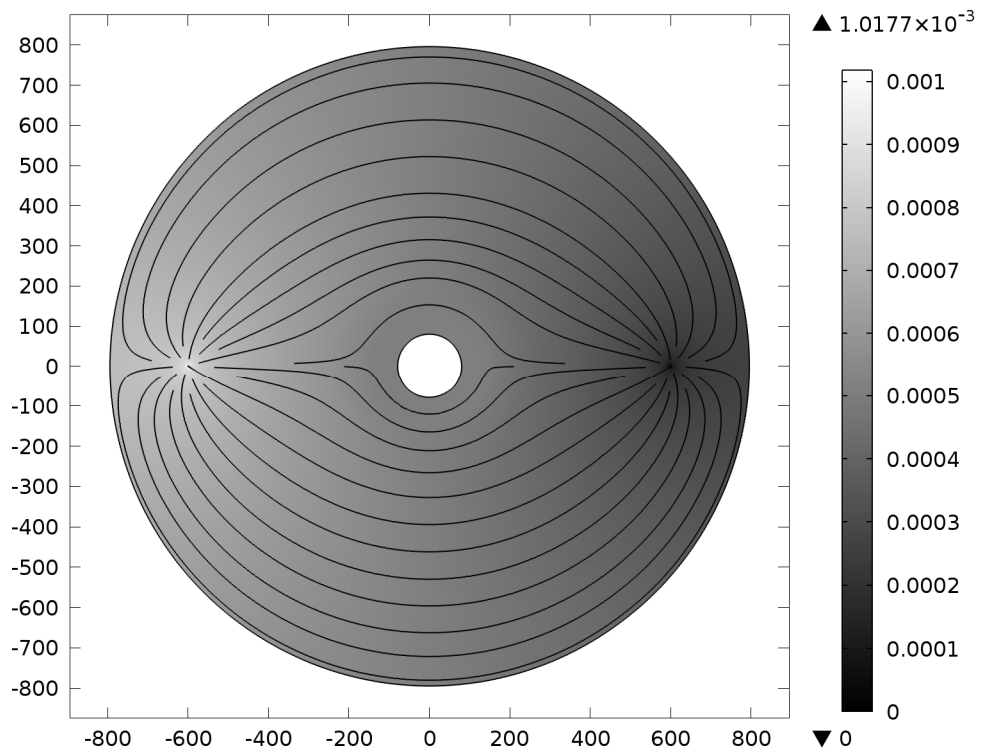


б)

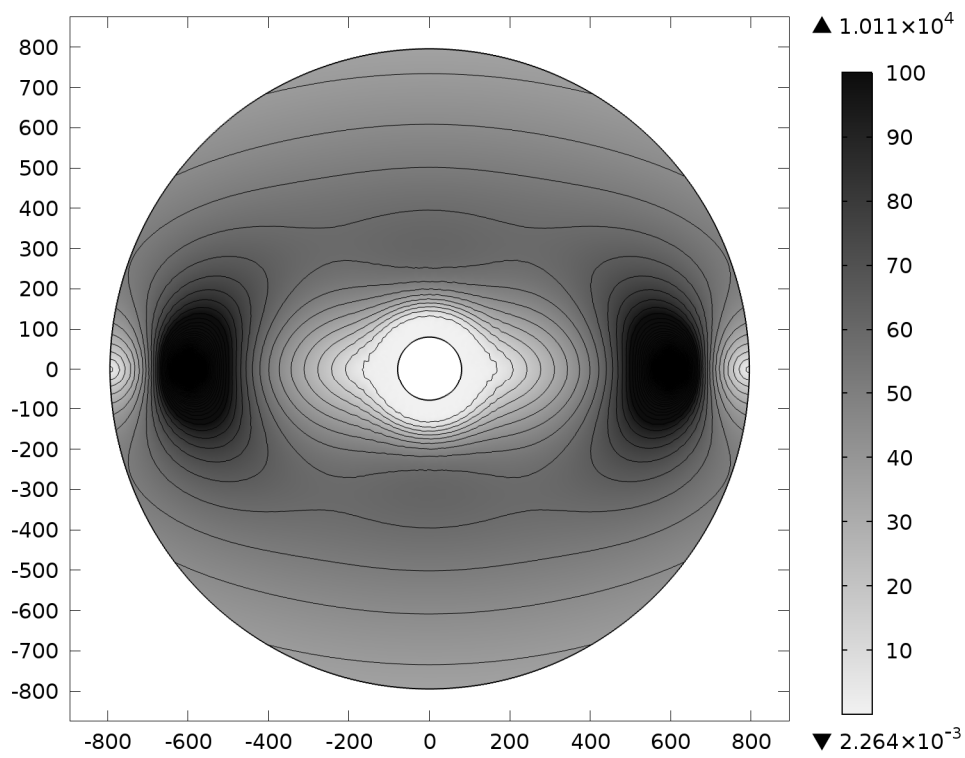
Рис. 23. Сеть с воздействием помехи и изотропными диаграммами направленности антенн узлов:

а) линии плотности информационного потока \mathbf{W}

б) интенсивности нагрузки на маршруты $|\mathbf{W}|$



а)

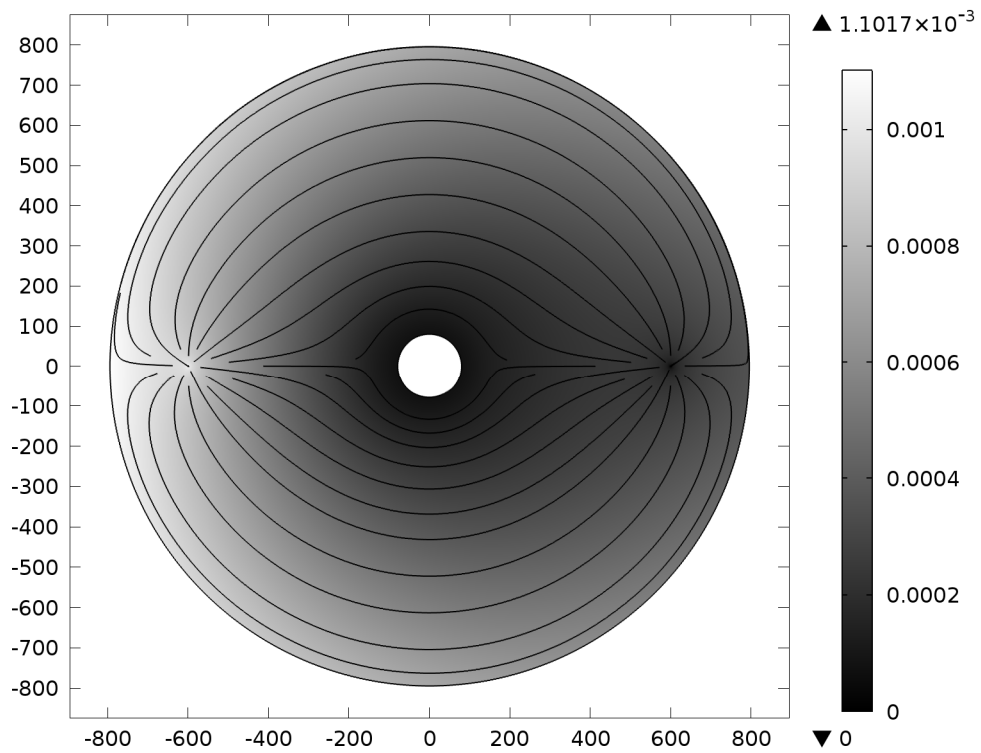


б)

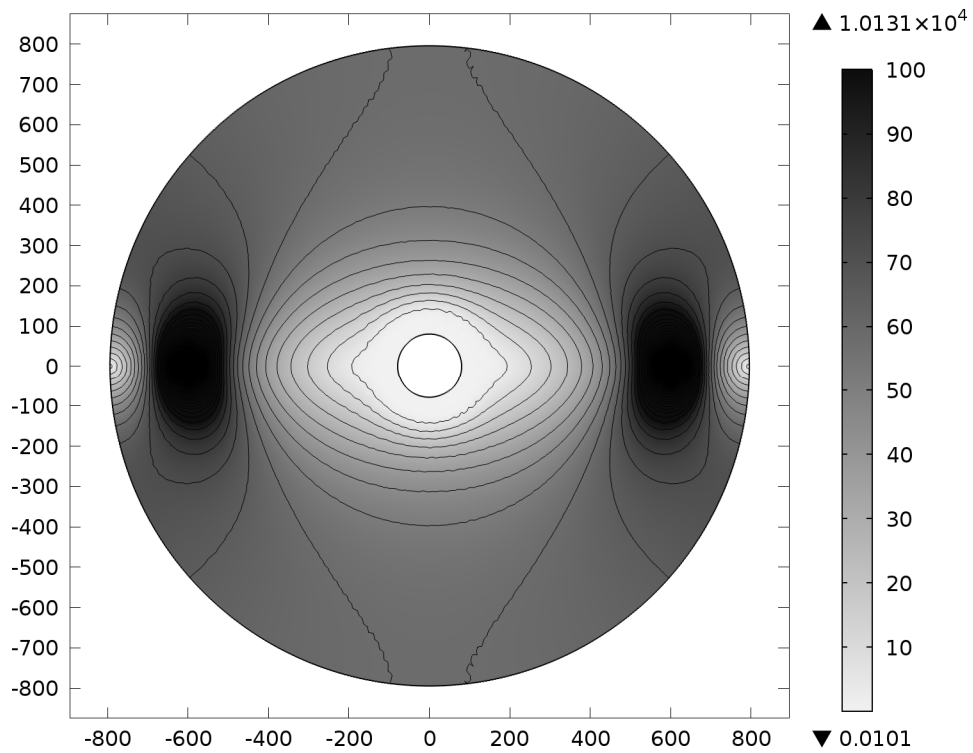
Рис. 24. Сеть с воздействием помехи и анизотропными диаграммами направленности антенн узлов

а) линии плотности информационного потока \mathbf{W}

б) интенсивности нагрузки на маршруты $|\mathbf{W}|$



а)



б)

Рис. 25. Сеть с воздействием помехи, анизотропными диаграммами направленности антенн узлов и $L_r = -5 \cdot 10^4$:

а) линии плотности информационного потока \mathbf{W}

б) интенсивности нагрузки на маршруты $|\mathbf{W}|$

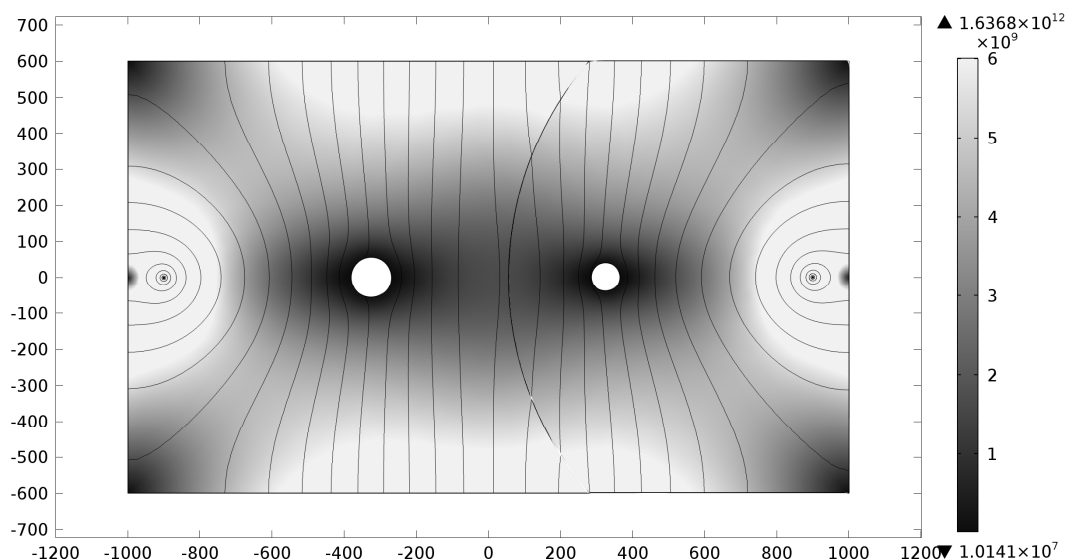


Рис. 26. Сеть под воздействием двух источников помех и анизотропными диаграммами направленности антенн узлов

Из приведённых результатов моделирования видно что, оптимальная схема маршрутизации существенно зависит от учёта влияния помехи и параметров адаптивных антенн.

Предложенные методы и результаты моделирования могут послужить основой для разработки алгоритмов маршрутизации в сенсорных сетях и сетях связи, использующих большое количество узлов.

Выводы по главе 4

Рассмотрены численные методы, пригодные для реализации рассматриваемой модели. В случае, когда коэффициент информопроводности постоянен для численной реализации модели рекомендуется использовать гранично-элементные методы. Рассмотрены метод комплексных полиномов и комплексный метод граничных элементов. Приведено описание методов и ряд модельных численных экспериментов, подтверждающие высокую численную эффективность рассматриваемых методов. Даны рекомендации по использованию того или другого метода в зависимости то формы области, занимаемой сетью

Если коэффициент информопроводности является функцией от координат следует применять метод конечных элементов. Приведён вывод слабой интегральной формулировки рассматриваемой задачи, необходимый для использования данного метода.

Приведены результаты численных экспериментов для:

- сети без воздействия помехи;
- неадаптивной сети с воздействием помехи;
- сети с адаптивным изменением скорости передачи информации в зависимости от отношения сигнал / шум в канале и изотропными диаграммами направленности антенн узлов;
- сети с адаптивными антеннами с автоматически регулируемой кардиоидоподобной диаграммой направленности и аналогичным методом адаптации скорости передачи информации;
- сети с адаптивными антеннами и адаптивно изменяемой скоростью передачи информации, находящейся под воздействием двцх источников помех различной мощности.

На приведённых иллюстрациях показаны линии информационного потока и его интенсивность.

Заключение

В представленной работе рассмотрена актуальная задача моделирования беспроводных сетей с помощью дифференциальных уравнений в частных производных.

Маршрутизация, то есть построение маршрута через множество узлов-ретрансляторов и доставка по нему необходимой информации, в одноранговых беспроводных сетях методами сопряжена с определёнными трудностями. Для протоколов с привязкой к сетевой топологии это трудно разрешимая задача, так как процесс прокладки маршрута (для реактивных протоколов) или опроса для построения таблиц связности (для проактивных протоколов) в сети с большим количеством узлов породит такое количество служебного трафика, которое потребует значительную часть, если не полный объём пропускной способности сети. Современные подходы к решению проблемы «плоской сети» заключается в различных видах её разбиения на подсети: кластеризация, временное разделение, гибридные зонные протоколы и т. д. Однако это ведёт в свою очередь к усложнению сетевой архитектуры, адресации сети, процедур поиска абонентов, что опять даёт рост, хотя и не такой значительный как в случае «плоской сети», служебного трафика.

Метод решения данной проблемы появился в связи с совершенствование систем навигации и позиционирования – методы маршрутизации с привязкой к физической топологии сети, то есть к расположению узлов на местности. В этой группе методов достаточно знать собственные координаты и координаты получателя для начала передачи информации. К данной группе относится и исследовавшийся метод маршрутизации на основе геометрии силовых линий потенциального поля. Его особенностью является построение не одного маршрута, а нескольких, которые могут использоваться как резервные или для «размазывания» объёма передаваемой информации по нескольким маршрутам. Эта

особенность полезна для сетей с низкой скоростью передачи информации «узел – узел», или использующих ограниченные источники энергопитания узлов. Другой интересной особенностью метода является применение к вопросам маршрутизации физических принципов. Информация, фактически должна течь подобно ламинарному потоку жидкости (или тепловому потоку, или распространяться как диффузирующее вещество или можно привести любую другую аналогию из большого количества физических процессов, описываемых уравнением вида $\nabla \cdot (-K \nabla U) = \rho$). Такое «течение» информации является оптимальным по критерию «нагрузка на маршрут обратно пропорциональна его длине» и обеспечивает распределение энергетической нагрузки на большее количество узлов сети с приемлемым уровнем временных задержек.

Определяющим вопросом в использовании рассматриваемой математической модели является оценка коэффициента K , который по аналогии с процессами теплопроводности и течения жидкости в пористой среде можно назвать коэффициентом информопроводности. Интерпретируя потенциал U в некоторой точке области, занимаемой сетью как количество энергии, необходимое для передачи информации из этой точки до получателя с учетом всех ретрансляций, получена оценка коэффициента информопроводности на основе характеристик узлов сети и плотности их расположения.

Современные методы и средства цифровой обработки сигнала позволили реализовать адаптивные системы связи с изменяющейся скоростью передачи информации в зависимости от помеховой обстановки, а наличие адаптивных антенн, даже простейшего типа, режектирующих направление на помеху, означает, что в различных направлениях передача будет вестись с разной скоростью. В рассмотренной математической модели удалось учесть все эти факторы.

Вопрос корректности поставленной в результате построения модели краевой задачи математической физики в данном случае особенно важен, так

как построенная модель отражает не природный физический процесс, а искусственную системы, управляемую алгоритмами, вырабатываемыми в процессе моделирования.

Для численной реализации математической модели предложено использовать две группы численных методов. В простейшем случае, когда коэффициент информопродности постоянен, использовались две разновидности метод граничных элементов: метод комплексных полиномов (МКП) и комплексный метод граничных элементов (КМГЭ). Проведено сопоставление МКП и КМГЭ по вычислительной эффективности на примерах модельных задач теплопередачи, кручения упругих призматических стержней со сложной формой поперечных сечений, течения жидкости в неоднородной пористой среде. Рассматриваемые методы основаны на использовании только граничных значений функции и требуют значительно меньшего объема вычислений, чем конечно-элементные и конечно-разностные методы. Приведены результаты численных экспериментов, в которых решались некоторые задачи математической физики, сводящиеся к граничным задачам для уравнения Лапласа в областях сложной формы. Численные результаты сопоставлены с известными аналитическими и приближенными решениями. Показано, что точность результатов, полученных МКП и КМГЭ, не ниже, а в ряде случаев даже выше, чем точность приближенных решений, полученных другими численными методами. Можно отметить некоторые характерные особенности использования комплексных численных методов. МКП достаточно прост в реализации и характеризуется небольшим объемом вычислений. Его следует рекомендовать только для выпуклых областей и областей, входящие углы которых близки к развернутым. Для таких областей метод имеет достаточно высокую точность уже при малой степени дискретизации границы и демонстрирует большую вычислительную эффективность, чем КМГЭ. Увеличение степени дискретизации не ведет к неустойчивости МКП. КМГЭ демонстрирует устойчивость и сходимост как

для выпуклых, так и для невыпуклых областей, в том числе с острыми входящими углами, что свидетельствует об его универсальности. Многочисленные расчеты показали, что КМГЭ с увеличением степени дискретизации границы характеризуется сходимостью решений в условиях незначительного роста числа обусловленности алгебраического аналога задачи. В качестве рекомендаций для практического использования укажем, что МКП следует применять для выпуклых областей и областей, входящие углы которых близки к развернутым; во всех остальных случаях следует отдать предпочтение КМГЭ. Если же коэффициент информопроводности является функцией, зависящей от координат, то следует применять метод конечных элементов.

Основные результаты диссертационной работы, полученные в ходе теоретического анализа и моделирования следующие.

1. Разработана математическая модель маршрутизации, основанной на геометрии силовых линий потенциального поля в беспроводной адаптивной сети при наличии источника помех для двух видов адаптации беспроводной сети к наличию источника помех: изменение скорости передачи информации в зависимости от отношения сигнал / шум в канале при использовании приёмопередатчиками антенн с изотропной диаграммой направленности, и применение антенн, адаптивно режектирующих сигнал помехи с использованием аналогичного метода адаптации по скорости передачи информации.

2. Разработан метод оценки коэффициента информопроводности на основе характеристик сети, её узлов и источника помехи.

3. Доказано, что математическая модель, описывающая маршрутизацию в сети, узлы которой оборудованы антеннами с анизотропной диаграммой направленности, является корректно поставленной задачей математической физики.

а) без воздействия помехи;

б) с воздействием помехи и изотропными д. н. антенн узлов;

в) с воздействием помехи и анизотропными д. н. антенн узлов;

г) с воздействием помехи, анизотропными д. н. антенн узлов и

4. Разработано программное обеспечение для численной реализации предложенной модели, позволяющее рассчитывать векторное поле информационного потока и производить оценку энергоэффективности полученной схемы маршрутизации

Литература

1. Kalantari M. Energy efficient routing in wireless sensor networks / M. Kalantari, M. Shayman // Proc. Conference on Information Sciences and Systems, Princeton University, NJ, Mar. 2004.
2. Toumpis S. Packetostatics: Deployment of massively dense sensor networks as an electrostatics problem / S. Toumpis, L. Tassiulas // Proc. IEEE INFOCOM, Miami, FL, Mar. 2005.
3. Nguyen Nam T. Electric-Field-Based Routing: A Reliable Framework for Routing in MANETs / Nam T. Nguyen, An-I A. Wang, Peter Reiher, Geoff. Kuenning // SIGMOBILE Mob. Comput. Commun. Rev., Vol. 8, No. 2. (April 2004), pp. 35-49.
4. Фрэнк Г. Сети связи и потоки / Г. Фрэнк, И. Фриш. М.: Связь, 1978. 448 с.
5. Захаров Г. П. Методы исследования сетей передачи данных / Г. П. Захаров. М.: Радио и связь, 1982. 208 с.
6. Мизин И. А. Сети коммутации пакетов / И. А. Мизин, В. А. Богатырев, А.П. Кулешов. М.: Радио и связь, 1986. 408 с.
7. Бертсекас Д. Сети передачи данных / Д. Бертсекас, Р. Галлагер. М.: Мир, 1989. 544 с.
8. Шварц М. Сети связи: протоколы, моделирование и анализ. В 2 ч. / М. Шварц. М.: Наука; Гл. ред. физ-мат. лит., 1992. Ч. 1. 336 с.
9. Вишнеvский В. М. Широкополосные беспроводные сети передачи информации / В. М. Вишнеvский, А. И. Ляхов, С. Л. Портной, И. В. Шахнович. М.: Техносфера, 2005 – 592 с.

10. Рошан П. Основы построения беспроводных локальных сетей стандарта 802.11 / П. Рошан, Д. Лизри. М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 304 с.
11. Осипов И. Е. Mesh-сети: технологии, приложения, оборудование / И. Е. Осипов // ТЕХНОЛОГИИ И СРЕДСТВА СВЯЗИ, 2006. - № 4. – С. 38-45.
12. Вишневский В. Mesh-сети: в ожидании стандарта IEEE 802.11s / В. Вишневский, Д. Лаконцев, А. Сафонов, С. Шпилев // ЭЛЕКТРОНИКА: Наука, Технология, Бизнес.- 2008. - №3. – С. 98-105.
13. Татополос Касавьер Реализация ячеистой сети с высокой дальностью действия // Касавьер Татополос, Петтери Коскинен / Беспроводные технологии №2, 2007 – С. 52-53.
14. Бражук А. Построение беспроводных локальных сетей на основе ячеистой топологии / А. Бражук // Беспроводные технологии №4, 2006 – С. 24-25.
15. Вишневский В. Маршрутизация в широкополосных беспроводных mesh-сетях стандарта IEEE 802.11s / В. Вишневский, Д. Лаконцев, А. Сафонов, С. Шпилев // ЭЛЕКТРОНИКА: Наука, Технология, Бизнес.- 2008. - №6. – С. 64-69.
16. Винокуров В. М. Маршрутизация в беспроводных мобильных Ad hoc сетях / В. М. Винокуров, А. В. Пуговкин, А. А. Пшенников, Д. Н. Ушарова, А. С. Филатов // Доклады ТУСУРа. – 2010. – № 2 (22), часть 1. – С. 288–292.
17. Вишневский В. М. Энциклопедия WiMAX. Путь к 4G. / В. М. Вишневский, С. Л. Портной, И. В. Шахнович // М.: Техносфера, 2009. 472 с.
18. Wu Shih-Lin Wireless ad hoc networking / Shih-Lin Wu, Yu-Chee Tseng // Auerbach Publications, 2007. – 640 p.

19. Нечаев Ю. Б. Вариант построения узкополосных радиосетей с ячеистой топологией / Ю. Б. Нечаев, С. И. Григорьев, М. Ю. Сидоров, А. А. Епифанцев // Тезисы докладов VIII Международной научно-технической конференции: Физика и технические приложения волновых процессов – Санкт-Петербург: 2009. – с. 44-46
20. Комашинский В. И. Системы подвижной радиосвязи с пакетной передачей информации. Основы моделирования. / В. И. Комашинский, А. В. Максимов // М.: Горячая линия - Телеком, 2007. – 173 с.
21. Wireless mesh networking. Architectures, Protocols and Standards. / ed. by Yan Zhang // Auerbach Publications, 2007.- 592 p.
22. Wang X. B. Wireless mesh networks / X. B. Wang, W. F. Wang // Computer Networks and ISDN Systems, 2003. - 487 p.
23. URL: <http://www.cisco.com/go/wirelessmesh> (дата обращения: 25.01.14)
24. Aguayo Daniel MIT Roofnet Implementation // Daniel Aguayo, John Bicket, Sanjit Biswas, Douglas S. J. De Couto, Robert Morris / URL: http://archiv.iwi.uni-hannover.de/lv/seminar_ss04/www/Jan_Gacnik/bibliography/MIT-ROOFNET.pdf (дата обращения: 25.01.14)
25. URL:http://sar.informatik.hu-berlin.de/research/projects/2005-BerlinRoofNet/berlin_roof_net.htm (дата обращения: 25.01.14)
26. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М. В. Келдыш // Докл. Академии наук. - 1951. -Т. 77, №2.-С. 181-183.
27. Олейник О. А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области / О. А. Олейник // Докл. Академии наук. - 1952. -Т. 87, № 6. - С. 885-887.
28. Михлин С. Г. Вырождающиеся эллиптические уравнения / С. Г. Михлин // Вестн. Ленинградского гос. ун-та. - 1954. - № 8. - С. 19-48.

29. Вишик М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик // Математический сб. - 1954. - Т. 35 (77), вып. 33. - С. 513-568.
30. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М. М. Смирнов. – М.: Наука, 1966. - 292 с.
31. Олейник О. А. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О. А. Олейник, Е. В. Радкевич // Итоги науки и техники / ВИНТИ. – М.: 1971. – Вып. Математический анализ. – С. 5-93.
32. Кондратьев В. А. Об асимптотических свойствах решений нелинейного уравнения теплопроводности / В. А. Кондратьев // Дифференциальные уравнения. - 1998. - Т. 34, № 2. - С. 246-255.
33. Кондратьев В. А. Об асимптотических свойствах решений полулинейных эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических областях / В. А. Кондратьев // Труды конференции им. И. Г. Петровского. - М., 2006. - Вып. 25. -С. 98-111.
34. Кондратьев В. А. О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка / В. А. Кондратьев, Е. М. Ландис // Математический сб. - 1988. - Т. 135 (177), № 3. - С. 346-360.
35. Егоров Ю. В. Асимптотическое поведение решений нелинейных эллиптических и параболических систем в цилиндрических областях / Ю. В. Егоров, В. А. Кондратьев, О. А. Олейник // Математический сб. – 1998. - Т. 189, № 3. - С. 45-68.
36. Олейник О. А. О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой / О. А. Олейник // Математический сб. - 1966. - Т. 69 (111), вып. 1.-С. 111-140.

37. Кон Д. Некоэрцитивные краевые задачи / Д. Кон, Л. Ниренберг // Псевдодифференциальные операторы: сб. науч. тр. - М., 1967. - С. 88-165.
38. Глушко В. П. Коэрцитивность в L_2 общих граничных задач для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка / В. П. Глушко // Функциональный анализ и его приложения. - 1968. - Т. 2, вып. 3. - С. 87-88.
39. Глушко В. П. Оценки в L_2 и разрешимость общих граничных задач для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка / В. П. Глушко // Труды Московского математического общества. - 1970. - Т. 23. - С. 113-178.
40. Рукавишников В. А. О коэрцитивности Rv -обобщенного решения первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных / В. А. Рукавишников, А. Г. Ереклинцев // Дифференциальные уравнения. - 2005. - Т. № 12.-С. 1680-1689.
41. Рукавишников В. А. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с несогласованным вырождением исходных данных / В. А. Рукавишников // Дифференциальные уравнения. - 1996. - Т. 32, № 3. - С. 402- 408.
42. Антонцев С. Н. О локализации решений эллиптических уравнений с неоднородным анизотропным вырождением / С. Н. Антонцев, С. И. Шмарев // Сибирский математический журн. - 2005. - Т. 46, № 5. - С. 963-984.
43. Aleynikov S.M. Comparison of complex methods for numerical solutions of boundary problems of the Laplace equation by efficiency / S.M. Aleynikov, A.V. Stromov // Engineering Analysis with Boundary Elements, 2004. – Vol. 28. – P. 615-622.

44. Нечаев Ю.Б. Маршрутизация в беспроводной сенсорной сети на основе геометрии силовых линий электростатического поля / Ю.Б. Нечаев, А.Д. Баев, А.В. Стромов // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии, 2010. – № 2. – С. 43-45.
45. Стромов А.В. Моделирование маршрутизации в беспроводной ячеистой сети, использующей простейшие адаптивные антенны / А.В. Стромов, Ю.Б. Нечаев, А.Д. Баев // Теория и техника радиосвязи, 2013. – Вып. 4. – С. 57-63.
46. Стромов А.В. Многопутевая маршрутизация в беспроводных сетях при наличии помехового воздействия на основе силовых линий потенциального поля / А.В. Стромов, Ю.Б. Нечаев, А.Д. Баев // Радиотехника, 2013. – № 12. – С. 136-142.
47. Стромов А.В. Моделирование маршрутизации в беспроводной ячеистой сети с адаптацией к воздействию нескольких источников помех / А.В. Стромов, Ю.Б. Нечаев, А.Д. Баев // Теория и техника радиосвязи, 2014. – Вып. 4. – С. 31-37.
48. Олифер В. Г. Компьютерные сети. Принципы, технологии, протоколы: Учебник для вузов / В. Г. Олифер, Н. А. Олифер // СПб.: Питер, 2006. – 958 с.
49. Разгуляев А. Перспективные мобильные адаптивные сети передачи информации для СВ США / А. Разгуляев // Зарубежное военное обозрение, 2008, - №1. – с. 35-39.
50. Perkins Charles E. Ad Hoc On Demand Distance Vector (AODV) Routing / Charles E. Perkins, Elizabeth M. Belding-Royer, and Samir Das. // IETF RFC 3561 URL: <http://tools.ietf.org/html/rfc3561> (дата обращения: 25.01.14)
51. Гоголева М. А. Классификация и анализ методов маршрутизации в mesh сетях / М. А. Гоголева // Радиотехника. – 2008. – Вып. 155. – С. 173–185.

52. Нечаев Ю. Б. Моделирование беспроводной мобильной адаптивной сети с использованием протоколов маршрутизации AODV и DSDV / Ю. Б. Нечаев, А. В. Стромов, А. А. Епифанцев // Телекоммуникации. – 2009. – № 7. – С. 21–25.
53. Perkins Charles E. Highly Dynamic Destination-Sequenced Distance-Vector Routing (DSDV) for Mobile Computers / Charles E. Perkins and Pravin Bhagwat // ACM SIGCOMM Computer Communication Review Homepage Volume 24 Issue 4, Oct. 1994 pp. 234 – 244.
54. Припутин В. С. Исследование эффекта масштабируемости в беспроводных ad-hoc сетях / В. С. Припутин, А. О. Жанкевич // Т•Comm – Телекоммуникации и транспорт. – 2010. – № 11. – С. 23–25.
55. Ko Young-Bae Location - Aided Routing (LAR) in mobile ad hoc networks / Young-Bae Ko, Nitin H. Vaidya // Wireless Networks 09-2000, Volume 6, Issue 4, pp. 307-321.
56. Algorithms and protocols for wireless sensor networks / ed. by Azzedine Boukerche // 2009 by John Wiley & Sons, Inc. 552 p.
57. Intanagonwiwat C. Directed diffusion: A scalable and robust communication paradigm for sensor networks / C. Intanagonwiwat, R. Govindan, and D. Estrin. // Proceedings of MOBICOM, 2000, pp. 56–67.
58. Boukerche A. Energy-aware data-centric routing in microsensor networks / A. Boukerche, X. Cheng, and J. Linus // MSWIM '03: Proceedings of the 6th ACM International Workshop on Modeling Analysis and Simulation of Wireless and Mobile Systems, 2003, pp. 42–49.
59. Youssef M. A. A constrained shortest-path energyaware routing algorithm for wireless sensor networks / M. A. Youssef, M. F. Younis, and K. Arisha. // Proceedings of WCNC, 2002, pp. 794–799.
60. Braginsky D. Rumor routing algorithm for sensor networks / D. Braginsky and D. Estrin // Proceedings of WSNA, 2002, pp. 22–31.

61. Ye F. Gradient broadcast: A robust data delivery protocol for large scale sensor networks / F. Ye, G. Zhong, S. Lu, and L. Zhang // *Wireless Networks*, 11(3):285–298, 2005.
62. Ye F. A scalable solution to minimum cost forwarding in large sensor networks / F. Ye, A. Chen, S. Liu, and L. Zhang. // *Proceedings of the Tenth International Conference on Computer Communications and Networks (ICCCN)*, 2001, pp. 304–309.
63. Sohrabi K. Protocols for self-organization of a wireless sensor networks / K. Sohrabi, J. Gao, V. Ailawadhi, and G. J. Pottie // *IEEE Personal Communications Magazine*, 7(5):16–27, 2005.
64. Sohrabi K. On low power wireless sensor networks. Ph.D. thesis / K. Sohrabi Electrical and Computer Engineering Department, UCLA, June 2000.
65. Gao J. L. Energy efficient routing for wireless sensor networks. Ph.D. thesis / J. L. Gao Electrical and Computer Engineering Department, UCLA, June 2000.
66. He T. SPEED: A stateless protocol for real-time communication in sensor networks / T. He, J. A. Stankovic, C. Lu, and T. F. Abdelzaher. // *Proceedings of ICDCS*, 2003, pp. 46–58.
67. Rao A. Geographic routing without location information / A. Rao, C. Papadimitriou, S. Shenker, and I. Stoica // *In Proceedings of MOBICOM*, 2003, pp. 96–108.
68. Seada K. Energy-efficient forwarding strategies for geographic routing in ossy wireless sensor networks / K. Seada, M. Zuniga, A. Helmy, and B. Krishnamachari // *Proceedings of SenSys*, 2004, pp. 108–121.
69. Subramanian S. Geographic routing with limited information in sensor networks / S. Subramanian and S. Shakkottai // *Proceedings of IPSN*, 2005, pp. 269–276.

70. Heinzelman W. R. Energy-efficient communication protocol for wireless microsensor networks / W. R. Heinzelman, A. Chandrakasan, and H. Balakrishnan // In Proceedings of HICSS, 2000.
71. Lindsey S. PEGASIS: Power-efficient gathering in sensor information systems / S. Lindsey and C. Raghavendra // Proceedings of IEEE Aerospace Conference, 2002, pp. 1125–1130.
72. Manjeshwar A. TEEN: A routing protocol for enhanced efficiency in wireless sensor network / A. Manjeshwar and D. P. Agrawal // Proceedings of IPDPS, 2001, pp. 2009–2015.
73. Manjeshwar A. APTEEN: A hybrid protocol for efficient routing and comprehensive information retrieval in wireless sensor networks / A. Manjeshwar and D. P. Agrawal // Proceedings of IPDPS, 2002, pp. 195–202.
74. Al-Karaki J. N. Data aggregation in wireless sensor networks - exact and approximate algorithms / J. N. Al-Karaki, R. Ul-Mustafa, and A. E. Kamal // Proceedings of IEEE Workshop on High Performance Switching and Routing (HPSR), 2004, pp. 241–245.
75. De S. Meshed multipath routing with selective forwarding: An efficient strategy in wireless sensor networks / S. De, C. Qiao, and H. Wu // Computer Networks, 43(4):481–497, 2003.
76. Ganesan D. Highly-resilient, energy-efficient multipath routing in wireless sensor networks / D. Ganesan, R. Govindan, S. Shenker, and D. Estrin // ACM Mobile Computing Communication Review, 5(4):10–24, 2001.
77. Deb B. ReInForM: Reliable information forwarding using multiple paths in sensor networks / B. Deb, S. Bhatnagar, and B. Nath // Proceedings of LCN, 2003, pp. 406–415.
78. Su W. A stream enabled routing (SER) protocol for sensor networks / W. Su and I. F. Akyildiz // Proceedings of Med-hoc-Net, 2002.

79. Karlof C. ARRIVE: Algorithm for robust routing in volatile environments / C. Karlof, Y. Li, and J. Polastre // Technical Report UCB/CSD-03-1233, Computer Science Division, UC Berkley, May 2003.
80. Kalantari M. Routing in wireless ad hoc networks by analogy to electrostatic theory / M. Kalantari, M. Shayman // Proc. IEEE ICC, Paris, France, June 2004.
81. Haghpanahi M. Numerical flow optimization in dense wireless sensor networks / M. Haghpanahi, M. Kalantari, M. Shayman // IEEE Globecom, New Orleans, LA, November 2008.
82. Kalantari M. A p-norm flow optimization problem in dense wireless sensor networks / M. Kalantari, M. Haghpanahi, M. Shayman // IEEE Infocom, Phoenix, AZ, April 2008.
83. Kalantari M. Design Optimization of Multi-sink Sensor Networks by Analogy to Electrostatic Theory / M. Kalantari, M. Shayman // IEEE Wireless Communications and Networking Conference, Las Vegas, Nevada, April 2006.
84. Toumpis S. Optimal Deployment of Large Wireless Sensor Networks / S. Toumpis, L. Tassiulas // IEEE Trans. on Inform. Theory, 2006, Vol. 52, No. 7, p.p. 2935–2953.
85. Toumpis S. Optimal Placement of Nodes in Wireless Sensor Networks under a General Physical Layer Model / S. Toumpis, G. A. Gupta // Proc. IEEE SECON, Santa Clara, CA, Sep. 2005.
86. Стромов А.В. Решение задачи кручения стержней комплексным методом граничных элементов / А.В. Стромов, С.М. Алейников // Труды 4-й Международной конференции молодых ученых и студентов Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки. Ч. 1-3: Математика. Механика. Машиностроение. – Самара: Изд-во СамГТУ, 2003. - С. 112-115.

87. Aleynikov S.M. Efficiency of complex methods for numerical solutions of some problems of continuum mechanics / S.M. Aleynikov, A.V. Stromov // Proceedings of the extended abstracts 9–th International Conference on Numerical Methods in Continuum Mechanics, Zilina, Slovak Republic 9-12-th September, 2003. – P.19-20.
88. Алейников С.М. Комплексные численные методы решения граничных задач для уравнения Лапласа / С.М. Алейников, А.В. Стромов // Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов / Тез. докл. XX Межд. конф. – Санкт-Петербург, 24 - 26 сентября, 2003 г. – С. 12-14.
89. Нечаев Ю.Б. Способ моделирования и оптимизации сверхбольших сенсорных сетей / Ю.Б. Нечаев, А.Д. Баев А.В. Стромов // Материалы X Международной научно-методической конференции «Информатика: проблемы, методология, технологии», Воронеж, 2010 г. – Воронеж: изд. ВГУ, 2010. – Т.2. – С. 66-67.
90. Нечаев Ю.Б. Математическая модель сверхбольшой сенсорной сети на основе дифференциального уравнения в частных производных второго порядка / Ю.Б. Нечаев, А.В. Стромов, А.Д. Баев // Материалы XVI Международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь» (RLNC – 2010), Воронеж, 2010 г. – Т. 2. – с. 1112-1116.
91. Нечаев Ю.Б. Определение удельного коэффициента прохождения информации сверхбольшой сенсорной сети / Ю.Б. Нечаев, А.В. Стромов, А.А. Епифанцев, Т.В. Левицкая // Информационные технологии в связи, вычислительной технике и энергетике: сборник трудов международной научной конференции. Ч. 1 – Воронеж: МИКТ, 2010. – С. 77–82.
92. Nechaev Yu.B., Wireless mesh network throughput vs. node transmitter power / Yu.B. Nechaev, A.V. Stromov, A.A. Epifancev // 20th Int. Crimean Conference “Microwave & Telecommunication Technology”

(CriMiCo'2010). 13-17 September, Sevastopol, Crimea, Ukraine, 2010. – Vol. 1 – P. 435 – 436.

93. Нечаев Ю.Б. Моделирование маршрутизации в беспроводной сверхбольшой сенсорной сети при наличии внешнего источника помех / Ю.Б. Нечаев, А.Д. Баев, А.В. Стромов // Физика и технические приложения волновых процессов: материалы IX Междунар. науч.-техн. конф. – Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2010. – С. 31.
94. Нечаев Ю.Б. Оценка зависимости пропускной способности беспроводной ячеистой сенсорной сети от связанности узлов сети / Ю.Б. Нечаев, А.В. Стромов, А.А. Епифанцев, Т.В. Левицкая // Физика и технические приложения волновых процессов: материалы IX Междунар. науч.-техн. конф. – Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2010. – С. 33.
95. Стромов А.В. Некоторые аспекты применения и моделирования сверхбольших сенсорных сетей. // Международная научно-практическая конференция «Общественная безопасность, законность и правопорядок в III тысячелетии»: сборник материалов. – Ч. 3. Естественные, математические и технические науки. – Воронеж: Воронежский институт МВД, 2010. – С. 166-170.
96. Нечаев Ю.Б. Модель маршрутизации в сверхбольшой беспроводной сенсорной сети с групповой реакцией узлов на помеховое воздействие / Ю.Б. Нечаев, А.Д. Баев, А.В. Стромов // Новые информационные технологии и системы: труды IX Международной научно-технической конференции (г. Пенза, 9–10 ноября 2010 г.): в 2 ч. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2010. – Ч. 1. – С. 181-186.
97. Баев А.Д. Об одном методе математического моделирования адаптивных сверхбольших сенсорных сетей. / А.Д. Баев, Ю.Б. Нечаев, А.В. Стромов // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы воронежской зимней математической школы. – Воронеж:

Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. – С. 33-34.

98. Нечаев Ю.Б. Энергетическая трактовка функции потенциала в математической модели сверхбольшой беспроводной сенсорной сети / Ю.Б. Нечаев, А.Д. Баев, А.В. Стромов // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XI Международной научно-методической конференции, Воронеж, 10–11 февраля 2011 г.: в 3 т. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2011. – Т.2. – С. 120-123.
99. Нечаев Ю.Б. Моделирование сверхбольшой сенсорной сети с адаптивной реакцией на источник помех / Ю.Б. Нечаев, А.В. Стромов, А.Д. Баев // Материалы XVII Международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь» (RLNC – 2011), Воронеж, 2011 г.– Т.2. – С. 1032-1039.
100. Нечаев Ю.Б. Маршрутизация в беспроводных мобильных ячеистых сетях с привязкой к местоположению узлов, учитывающая известные источники помех / Ю.Б. Нечаев, А.В. Стромов, А.Д. Баев // X Международная научно-техническая конференция «Физика и технические приложения волновых процессов»: материалы. – Самара: ООО «Книга», 2011. – С. 339.
101. Nechaev Yu.B. Routing in Wireless Networks With Creating Disjoint Multipath Topology on the Basis of the Force Lines of Potential Field / Yu.B. Nechaev, A.D. Baiev, A.V. Stromov // 21st Int. Crimean Conference “Microwave & Telecommunication Technology” (CriMiCo’2011). 12-16 September, Sevastopol, Crimea, Ukraine, 2011. – Vol. 1. – P. 509-510.
102. Баев А.Д. Модель сверхбольшой беспроводной сенсорной сети при наличии единственного источника помех. / А.Д. Баев, А.В. Стромов // Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования. Материалы IV Международной

научной конференции, Воронеж, 12-17 сентября 2011 г. – Воронеж, 2011. – С. 20-23.

103. Баев А.Д. Существование и единственность решения моделирующего уравнения сверхбольшой беспроводной сенсорной сети под влиянием помехи. / А.Д. Баев, Ю.Б. Нечаев, А.В. Стромов // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов Международной конференции. Воронеж, 26-28 сентября 2011 г. – Воронеж, 2011. – С. 55-58.
104. Нечаев Ю.Б. Оценка максимальной пропускной способности одноранговой одночастотной беспроводной ячеистой сети / Ю.Б. Нечаев, А.В. Стромов // Компьютерные науки и технологии: сборник трудов Второй Международной научно-технической конференции. 3 – 5 октября 2011, г. Белгород. – Белгород: ООО «Гик», 2011. – С. 492-496.
105. Стромов А.В. Маршрутизация в сенсорных сетях для «умной пыли» с учетом влияния источника помех / А.В. Стромов, Ю.Б. Нечаев, А.Д. Баев // 5-та Міжнародна науково-технічна конференція «Сенсорна електроніка та мікросистемні технології» (СЕМСТ-5) Україна, Одеса, 4–8 червня 2012 р.: тези доповідей. – Одеса: Астропринт, 2012. – С. 131.
106. Stromov A.V. Adaptation Simulation of the Wireless Sensor Network With Routing Based On the Geometry of Force Lines of Potential Field In the Presence of Interference Source / A.V. Stromov, A.D. Baev, Yu.B. Nechaev // 22nd Int. Crimean Conference “Microwave & Telecommunication Technology” (CriMiCo’2012). 10-14 September, Sevastopol, Crimea, Ukraine, 2012. – Vol. 1. – P. 326 – 327.
107. Стромов А.В. Маршрутизация в беспроводных сетях на основе геометрии силовых линий потенциального поля: проблема построения конкретных маршрутов // Прикладная математика, управление и информатика: сборник трудов Междунар. молодеж. конф., Белгород, 3-5

октября 2012 г.: в 2 т. – Белгород: ИД «Белгород», 2012. – Т. 1. – С. 285-288.

108. Стромов А.В. Моделирование маршрутизации в сверхбольшой беспроводной сети с адаптивным изменением скорости передачи данных / А.В. Стромов, Ю.Б. Нечаев, А.Д. Баев // Материалы XIX Международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь» (RLNC – 2013), Воронеж, 2013 г.– Т.1. – с. 532-538.
109. Нечаев Ю.Б. Моделирование многопутевой маршрутизации в беспроводной сети, узлы которой оборудованы адаптивными антеннами / Ю.Б. Нечаев, А.Д. Баев, А.В. Стромов // Сборник докладов XX Международной научно-технической конференции «Радиолокация, навигация, связь» (RLNC – 2014), Воронеж, 2014 г.– Т.2. – С. 864-871.
110. Стромов А.В. Моделирование работы беспроводной ячеистой сети с адаптивными антеннами / А.В. Стромов // 24-я Международная Крымская конференция «СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии» (КрыМиКо'2014). Севастополь, 7–13 сентября 2014 г.: материалы конф. в 2 т. – Севастополь: Вебер, 2014. – Т. 1. – С. 358-359.
111. Rappaport T. S. Wireless communications: principles and practice (2nd ed.). – Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall PTR, 2002.
112. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике.— М.: Издательство иностранной литературы, 1963. — 830 с.
113. Баев А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады академии наук. – 2008 – т. 422, № 6, с. 727-728.
114. Глушко В. П. Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения с частными производными. Труды семинара С. Л. Соболева, №2, 1978, С. 49-67.

115. Баев А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2008, 239 с.
116. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
117. Громадка П Т. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах. / Т. Громадка П, Ч. Лей – М.: Мир, 1990. – 303 с.
118. Стромов А.В., Алейников С.М. Программа решения граничной задачи для уравнения Лапласа методом комплексных полиномов / Отраслевой фонд алгоритмов и программ. Свид. о регистр. №1758. Гос. регистр. №50200100465, 15 января 2002.
119. Стромов А.В., Алейников С.М. Программа решения граничной задачи для уравнения Лапласа методом комплексных граничных элементов / Отраслевой фонд алгоритмов и программ. Свид. о регистр. №1759. Гос. регистр. №50200100466, 15 января 2002.
120. Арутюнян Н.Х. Кручение упругих тел. / Н.Х. Арутюнян, Б.Л. Абрамян – М.: Физматгиз, 1963. – 688 с.
121. Справочник по теории упругости. – Киев: Будівельник, 1971. – 420 с.
122. Тимошенко С.П. Теория упругости. / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер – М.: Наука, 1979. – 560 с.
123. Безухов Н.И. Приложение методов теории упругости и пластичности к решению инженерных задач. / Н.И. Безухов, О.В. Лужин – М.: Высшая школа, 1974. – 200 с.
124. Бреббия К. Применение метода граничных элементов в технике. / К. Бреббия, С. Уокер – М.: Мир, 1982. – 248 с.
125. Kämmler G. Einführung in die Methode der finiten Elemente. / G. Kämmler, H. Franek – Leipzig: Fahbuch-Verl., 1988. – 300 S.

126. Норри Д. Введение в метод конечных элементов. / Д. Норри, Ж. де Фриз – М.: Мир, 1981. – 304 с.
127. Цыбенко А.С. Прямая симметричная формулировка метода граничных интегральных уравнений / А.С. Цыбенко, С.А. Лавриков // Пробл. прочности. – 1984. – №11. – С. 48–50.
128. Wrobel L. C. The boundary Element Method. Vol.1. Applications in Thermo–Fluids and Acoustics / L.C. Wrobel. – John Wiley & sons, LTD., 2002. – 451 p.
129. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 708 с.
130. Мендельсон А. Применение метода граничных интегральных уравнений для решения упругопластических задач / А. Мендельсон, Л. Алберс / Механика: Новое в зарубежной науке // Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике. – М.: Мир, 1978. – С. 68–110.
131. Бенерджи П. Методы граничных элементов в прикладных науках. / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд – М.: Мир, 1984. – 497 с.
132. Герман К.А. Кручение односвязных неупругих стержней / К.А. Герман, Г.В. Тютюкин // Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов BEM & FEM 99 / Доклады XVII Межд. конф., СПб: 1999 г. – С. 82–87.
133. Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной области / Д. Гайер. – М.: Мир, 1986. – 216 с.
134. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация. / О. Зенкевич, К. Морган – М.: Мир, 1986. – 318 с.
135. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер – М.: Мир, 1984. – 428 с.

136. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 544 с.
137. Коннор Дж. Метод конечных элементов в механике жидкости. / Дж. Коннор, К. Бреббиа – Л.: Судостроение, 1979, 264 с.
138. Стренг Г. Теория метода конечных элементов. / Г. Стренг, Дж. Фикс – М.: Мир, 1977. – 352 с.
139. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. / Э. Митчелл, Р. Уэйт – М.: Мир, 1981. – 216 с.
140. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
141. Деклу Ж. Метод конечных элементов / Ж. Деклу. – М.: Мир, 1976. – 96 с.

Приложение 1 Процедура задания начальных данных для области, ограниченной произвольной замкнутой ломанной

```
procedure points;
```

```
{Процедура задает начальные данные для области, ограниченной произвольной замкнутой ломанной, вершины которой занесены в файл: координаты узловых точек и граничные значения}
```

```
var
```

```
  x1,y1,x2,y2,x_1,y_1,x_2,y_2,perim,shag,ost,x_l,y_l,xx_,yy_,ang_t: real;
```

```
  n_p_,i_i:integer;
```

```
  con_p:boolean;
```

```
begin
```

```
  perim:=0;
```

```
  reset(f3);
```

```
  readln(f3,x1,y1);
```

```
  x1:=x1+x_sm;
```

```
  y1:=y1+y_sm;
```

```
  x_l:=x1;
```

```
  y_l:=y1;
```

```
  while not(eof(f3)) do
```

```
  begin
```

```
    readln(f3,x2,y2);
```

```
    x2:=x2+x_sm;
```

```
    y2:=y2+y_sm;
```

```
    perim:=perim+sqrt((x2-x1)*(x2-x1)+(y2-y1)*(y2-y1));
```

```
    x1:=x2;
```

```
    y1:=y2;
```

```
  end;
```

```

perim:=perim+sqrt((x_1-x1)*(x_1-x1)+(y_1-y1)*(y_1-y1));
n_p_:=nnod div 2;
shag:=perim/nnod;
close(f3);
i_i:=1;
ost:=0;
reset(f3);
readln(f3,x1,y1);
x1:=x1+x_sm;
y1:=y1+y_sm;
xx_:=x1;
yy_:=y1;
while not(eof(f3)) do
begin
  readln(f3,x2,y2);
  x2:=x2+x_sm;
  y2:=y2+y_sm;
  cauch5(x2-x1,y2-y1,ang_t);
  con_p:=false;
  if ost>0 then
  begin
    xx_:=xx_+ost*cos(ang_t);
    yy_:=yy_+ost*sin(ang_t);
    ost:=0;
  end;
  if x1>x2 then
  begin
    x_1:=x2;
    x_2:=x1;
  end
end

```

```

else
begin
  x_1:=x1;
  x_2:=x2;
end;
if y1>y2 then
begin
  y_1:=y2;
  y_2:=y1;
end
else
begin
  y_1:=y1;
  y_2:=y2;
end;
while (x_1-eps<=xx_) and (xx_<=x_2+eps) and
(y_1-eps<=yy_) and (yy_<=y_2+eps) do
begin
  if (i_i=1) then con_p:=true
  else
  begin
    if (abs(xx_-x[i_i-1])>eps) or
    (abs(yy_-y[i_i-1])>eps) then con_p:=true;
  end;
  if con_p then
  begin
    con_p:=false;
    x[i_i]:=xx_;
    y[i_i]:=yy_;
    ktype[i_i]:=1;
  end;
end;

```



```

        value[i_i]:=ff(x[i_i],y[i_i]);
        inc(i_i);
    end;
    xx_:=xx_+shag*cos(ang_t);
    yy_:=yy_+shag*sin(ang_t);
end;
ost:=sqrt((xx_-x2)*(xx_-x2)+(yy_-y2)*(yy_-y2));
if ost>shag/2 then
begin
    x[i_i-1]:=x2;
    y[i_i-1]:=y2;
    value[i_i-1]:=ff(x[i_i-1],y[i_i-1]);
end
else
begin
    x[i_i]:=x2;
    y[i_i]:=y2;
    ktype[i_i]:=1;
    value[i_i]:=ff(x[i_i],y[i_i]);
    ost:=ost+shag;
    inc(i_i);
end;
x1:=x2;
y1:=y2;
xx_:=x2;
yy_:=y2;
end;
x2:=x_1;
y2:=y_1;
cauch5(x2-x1,y2-y1,ang_t);

```

```

con_p:=false;
if ost>0 then
begin
  xx_:=xx_+ost*cos(ang_t);
  yy_:=yy_+ost*sin(ang_t);
  ost:=0;
end;
if x1>x2 then
begin
  x_1:=x2;
  x_2:=x1;
end
else
begin
  x_1:=x1;
  x_2:=x2;
end;
if y1>y2 then
begin
  y_1:=y2;
  y_2:=y1;
end
else
begin
  y_1:=y1;
  y_2:=y2;
end;
while (x_1-eps<=xx_) and (xx_<=x_2+eps) and
(y_1-eps<=yy_) and (yy_<=y_2+eps) do
begin

```

```

if (i_i=1) then con_p:=true
else
begin
  if (abs(xx_-x[i_i-1])>eps) or
    (abs(yy_-y[i_i-1])>eps) then con_p:=true;
end;
if con_p then
begin
  con_p:=false;
  x[i_i]:=xx_;
  y[i_i]:=yy_;
  ktype[i_i]:=1;
  value[i_i]:=ff(x[i_i],y[i_i]);
  inc(i_i);
end;
xx_:=xx_+shag*cos(ang_t);
yy_:=yy_+shag*sin(ang_t);
end;
end;

```

Приложение 2 Процедура построения системы линейных алгебраических уравнений для метода комплексных полиномов

```
procedure comp11;  
{ Построение СЛАУ и нахождение коэффициентов  
полинома методом Гаусса }  
var  
  i,j,ii,im,jj:word;  
  m,b,summ:real;  
{ pp: array[1..mm,1..mm] of real;}  
begin  
  for i:=1 to nnod do  
    begin  
      for j:=1 to nnod do pp[i,j]:=p[i,j];  
      vect[i]:=s[i];  
    end;  
    i:=0;  
    j:=0;  
    for i:=1 to nnod do {col}  
      begin  
        m:=0;  
        for ii:=i to nnod do {row}  
          if abs(p[ii,i])>abs(m) then  
            begin  
              m:=p[ii,i];  
              im:=ii  
            end;  
          end;  
        for j:=i to nnod do
```

```

begin
    b:=p[im,j];
    p[im,j]:=p[i,j];
    p[i,j]:=b/m
end;
b:=s[im];
s[im]:=s[i];
s[i]:=b/m;
for ii:=i+1 to nnod do
begin
    b:=p[ii,i];
    for j:=i+1 to nnod do p[ii,j]:=p[ii,j]-b*p[i,j];
    s[ii]:=s[ii]-b*s[i]
end
end;
for i:=nnod-1 downto 1 do
    for ii:=i downto 1 do s[ii]:=s[ii]-p[ii,i+1]*s[i+1];
for jj:=1 to nnod do coef[jj]:=s[jj];

writeln(f5);
writeln(f5,'***** difference *****');
for i:=1 to nnod do
begin
    summ:=0;
    for j:=1 to nnod do summ:=summ+pp[i,j]*s[j];
    writeln(f5,i,' ',summ-vect[i],' ',s[i]);
end;

writeln(f5);
writeln(f5,'***** global polynomial coefficients *****');

```

```
for jj:=1 to nnod do writeln(f5,coef[jj]{:10:5});

writeln(f5,'*****');

);

end;
```

Приложение 3 Процедура построения матрицы p и правой части СЛАУ s для комплексного метода граничных элементов

```
procedure cauch2(j,m,n: integer; a,b,c,d,aj,bj: real);
{ Процедура осуществляет построение матрицы  $p$  и правой части
СЛАУ  $s$ . На входе получает  $j$  - номер узла, соответствующий
строке матрицы,  $m,n$  - номера изменяемых элементов в данной
строке, а также вспомогательные величины  $a,b,c,d,aj,bj$ ,
найденные процедурой cauch1 }
var
  c1,c2,c3,c4,cc1,cc2,cc3,cc4: real;
  g1,g2,g3,g4,f,az,bz: real;
begin
  f:=aj*aj+bj*bj;
  az:=-aj/f;
  bz:=-bj/f;
  if (m=j-1) or (n=j+1) then
  begin
    if ktype[j]=1 then { в узле  $j$  задано значение потенциала }
    begin
      p[j,j]:=p[j,j]-1;
      if ktype[n]=1 then
      begin
        p[j,n]:=p[j,n]+az;
        s[j]:=s[j]-bz*value[n];
      end
    else
    begin
```

```

    p[j,n]:=p[j,n]+bz;
    s[j]:=s[j]-az*value[n];
end;
if ktype[m]=1 then
begin
    s[j]:=s[j]+bz*value[m];
    p[j,m]:=p[j,m]-az;
end
else
begin
    s[j]:=s[j]+az*value[m];
    p[j,m]:=p[j,m]-bz;
end;
end
else
begin    { в узле j задано значение функции тока }
    p[j,j]:=p[j,j]-1;
    if ktype[n]=1 then
begin
    s[j]:=s[j]-az*value[n];
    p[j,n]:=p[j,n]-bz;
end
else
begin
    s[j]:=s[j]+bz*value[n];
    p[j,n]:=p[j,n]+az;
end;
if ktype[m]=1 then
begin
    s[j]:=s[j]+az*value[m];

```



```

        p[j,m]:=p[j,m]+bz;
    end
    else
    begin
        s[j]:=s[j]-bz*value[m];
        p[j,m]:=p[j,m]-az;
    end;
end
end
else
begin
    c1:=(x[j]-x[m])*c-(y[j]-y[m])*d+1;
    c2:=(x[j]-x[m])*d+(y[j]-y[m])*c;
    c3:=(x[j]-x[n])*c-(y[j]-y[n])*d+1;
    c4:=(x[j]-x[n])*d+(y[j]-y[n])*c;
    cc1:=c1*az-c2*bz;
    cc2:=c1*bz+c2*az;
    cc3:=c3*az-c4*bz;
    cc4:=c3*bz+c4*az;
    c1:=cc1;
    c2:=cc2;
    c3:=cc3;
    c4:=cc4;
    if ktype[j]=1 then
    begin
        g1:=-c4;
        g2:=-c3;
        g3:=c2;
        g4:=c1;
    end
end

```

```

else
begin
  g1:=-c3;
  g2:=c4;
  g3:=c1;
  g4:=-c2;
end;
if ktype[m]=1 then
begin
  s[j]:=s[j]-g1*value[m];
  p[j,m]:=p[j,m]+g2;
end
else
begin
  s[j]:=s[j]-g2*value[m];
  p[j,m]:=p[j,m]+g1;
end;
if ktype[n]=1 then
begin
  s[j]:=s[j]-g3*value[n];
  p[j,n]:=p[j,n]+g4;
end
else
begin
  s[j]:=s[j]-g4*value[n];
  p[j,n]:=p[j,n]+g3;
end;
end
end;

```

Приложение 4 Процедура вычисления значений Н1- аппроксимирующей функции в заданных узловых точках.

```
procedure НОМ(var rex,rey: mass; nnod: integer);
{ Процедура вычисляет значения Н1-аппр. функции в заданных узловых
точках. На входе получает rex и rey - значения действительной и мнимой
частей в узлах, и nnod - число узлов. Результаты помещаются в выходной
файл. }
var
  j,k,kk: integer;
  c1,c2,a,b,c,d: real;
  xln,xlm,temp,da,db: real;
begin
  for j:=1 to nnod do
    begin
      h1x[j]:=0;
      h1y[j]:=0;
    end;
  writeln(f5,' approximation function nodal values ');
  writeln(f5,' node      state      stream ');
  for j:=1 to nnod do
    begin
      for k:=1 to nnod do
        begin
          kk:=k+1;
          if kk>nnod then kk:=1;
          if (k<>j) and (kk<>j) then
            begin
              cauch1(j,k,kk,a,b,c,d);
```

```

c1:=rex[kk]*(x[j]-x[k])-rey[kk]*(y[j]-y[k])-
rex[k]*(x[j]-x[kk])+rey[k]*(y[j]-y[kk]);
c2:=rex[kk]*(y[j]-y[k])+rey[kk]*(x[j]-x[k])-
rex[k]*(y[j]-y[kk])-rey[k]*(x[j]-x[kk]);
h1x[j]:=h1x[j]+c1*c-c2*d;
h1y[j]:=h1y[j]+c1*d+c2*c;
end;
end;
k:=j-1;
if k<1 then k:=nnod;
kk:=j+1;
if kk>nnod then kk:=1;
xln:=sqrt(sqr(y[kk]-y[j])+sqr(x[kk]-x[j]));
xlm:=sqrt(sqr(y[k]-y[j])+sqr(x[k]-x[j]));
aj:=ln(xln/xlm);
bj:=(2*Pi-angle[j]);
h1x[j]:=h1x[j]+rex[j]*aj-rey[j]*bj;
h1y[j]:=h1y[j]+rex[j]*bj+rey[j]*aj;
temp:=h1x[j]; h1x[j]:=h1y[j]/(2*Pi);
h1y[j]:=-temp/(2*Pi);
writeln(f5,' ',x[j]:5:4,' ',y[j]:5:4,' ',h1x[j]:7:5,' ',
rex[j]:7:5,' ',ff(x[j],y[j]):7:5,' ',h1y[j]:7:5,' ',rey[j]:7:5,
' ',fi(x[j],y[j]):7:5,' ',
h1x[j]-(x[j]*x[j]-y[j]*y[j])/2);
end; { for j }
{ writeln(f2,' node      error values ');
for i:=1 to nnod do
begin
da:=rex[i]-h1x[i];
db:=rey[i]-h1y[i];

```

```
writeln(f2, ' ', i, ' ', da:10:15, ' ', db:10:15);  
end;}  
end;
```

Приложение 5 Процедура вычисления значений двойного интеграла по x и y от H1-аппроксимирующей функции по внутренним точкам области

```
procedure H1_INT;  
{ Процедура вычисляет значения двойного интеграла  
по x и y от H1-аппр. функции по внутренним точкам  
области. На входе получает x_x и y_y - координаты точки.  
Результаты - dxх и dyу. }  
var i,jj,k1,kkk,kkkk,qq,ss,pp,_i,_j,nd,nv,i_g,j_g,_i,mm: integer;  
    dx,dy,zmx,zmy,znx,zny,c1,c2,a,b,c,d,bpax,bpay: real;  
    f,xln,xlm,temp,da,db,anglen,anglem,rexх,reyу,chis_re1,chis_re2,chis_im1,  
    chis_im2,znam,h_gx,h_gy,xx_r,yy_r,dn,vn,dd,vv,g_rez,g_tec: real;  
    x_r,y_r:array[1..1000] of real;  
    ag,g:array[1..5] of real;  
    ccont: boolean;  
    f11:text;  
begin  
    xx_r:=x_min;  
    yy_r:=y_min;  
    assign(f11,'integr.txt');  
    reset(f11);  
    readln(f11,nd);  
    readln(f11,nv);  
    close(f11);  
{   nd:=10;  
    nv:=10;}  
{   nd:=4;  
    nv:=4;}
```

```

dn:=x_max-x_min;
vn:=y_max-y_min;
dd:=dn/nd;
vv:=vn/nv;
mm:=1;
{  writeln('ffff','xx_r=',xx_r,' yy_r=',yy_r);
  writeln('ffff','nd=',nd,' nv=',nv,' dn=',dn,' vn=',vn);
  writeln('ffff','dd=',dd,' vv=',vv);}
for _j:=1 to nv do
begin
  for _i:=1 to nd do
  begin
    x_r[mm]:=xx_r+_i*dd;
    y_r[mm]:=yy_r+_j*vv;
{    writeln('ffff,mm,' ',x_r[mm],' ',y_r[mm]);}
    inc(mm);
  end;
end;
dec(mm);
ag[1]:=0.2369268850; g[1]:=-0.9061798459;
ag[2]:=0.4786286705; g[2]:=-0.5384693101;
ag[3]:=0.5688888889; g[3]:=0.0;
ag[4]:=ag[2]; g[4]:=-g[2];
ag[5]:=ag[1]; g[5]:=-g[1];
g_rez:=0;
g_tec:=0;
for __i:=1 to mm do
begin
  bpax:=x_r[__i]-dd/2;
  bpay:=y_r[__i]-vv/2;

```

```

for i_g:=1 to 5 do
begin
  t_y:=bpay+vv/2*g[i_g];
  for j_g:=1 to 5 do
  begin
    t_x:=bpax+dd/2*g[j_g];
    piaob(t_x,t_y,ccont,g_tec,tper);
    if not(ccont) then g_tec:=0
    else g_tec:=g_tec-(t_x*t_x+t_y*t_y)/2;
  {
    h_gy[jj]:=-temp/(2*Pi);}
  {
    writeln(ffff,'dd=',dd,' vv=',vv);
    writeln(ffff,'__i=',__i,' i_g=',i_g,' j_g=',j_g,' bpax=',bpax,'
bpay=',bpay);}
    g_rez:=g_rez+g_tec*ag[i_g]*ag[j_g]*dd/2*vv/2;
  {
    writeln(ffff,'__i=',__i,' t_x=',t_x,' t_y=',t_y,' g_tec=',g_tec);
    writeln(ffff,'g_rez=',g_rez);
    writeln(ffff);}
  end;
end;
end;
writeln(f5);
writeln(f5,g_rez);
writeln(f5,'Вычислено:',2*g_rez);
end;

```