

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Минина Анастасия Александровна

**Адиабатическое приближение для процессов  
нелинейной ионизации и генерации высших  
гармоник в интенсивных лазерных полях**

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доц.

Фролов Михаил Владимирович

Воронеж – 2019

# Оглавление

<b>Список сокращений и обозначений</b> . . . . .	4
<b>Введение</b> . . . . .	6
<b>Обзор литературы</b> . . . . .	15
<b>Глава 1. Метод эффективного радиуса для двухуровневой системы</b> . . . . .	22
1.1. Основные положения метода эффективного радиуса . . . . .	22
1.2. Амплитуда ГВГ в рамках МЭР . . . . .	25
1.3. Выводы к первой главе . . . . .	32
<b>Глава 2. Адиабатическое приближение для амплитуды фотоотрыва и кулоновских факторов</b> . . . . .	33
1. Амплитуда фотоотрыва в адиабатическом пределе . . . . .	34
2. Кулоновский фактор для парциальной амплитуды фотоотрыва в адиабатическом приближении . . . . .	38
3. Выводы ко второй главе . . . . .	50
<b>Глава 3. Адиабатическое приближение для ГВГ</b> . . . . .	52
1. Аналитическое выражение для индуцированного дипольного момента в адиабатическом приближении . . . . .	52
2. Связь адиабатического приближения с существующими аналитическими подходами . . . . .	59
2.1. Метод квантовых орбит . . . . .	59
2.2. Разложение амплитуды ГВГ в области каустик . . . . .	68
3. Кулоновская поправка для ГВГ в адиабатическом приближении	71

4.	Выводы к третьей главе . . . . .	75
<b>Глава 4. Генерация высших гармоник в бициркулярном лазерном поле . . . . .</b>		
<b>76</b>		
1.	ГВГ в бициркулярном поле: случай монохроматических компонент . . . . .	76
2.	Сравнение с результатами численного решения нестационарного уравнения Шрёдингера . . . . .	83
2.1.	Анализ замкнутых классических траекторий в бициркулярном поле . . . . .	88
2.2.	Генерация излучения в модели двух диполей и контроль над свойствами ГВГ . . . . .	93
3.	Выводы к четвёртой главе . . . . .	100
<b>Заключение . . . . .</b>		<b>102</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>		<b>105</b>

## Список сокращений и обозначений

ГВГ	—	генерация высших гармоник
ККЭС	—	квазистационарное квазиэнергетическое состояние
МЭР	—	метод эффективного радиуса
МКО	—	метод квантовых орбит
НПИ	—	надпороговая ионизация
НУШ	—	нестационарное уравнение Шрёдингера
ТМП	—	трехшаговая модель перерассеяния
$c$	—	скорость света
$I_p$	—	потенциал ионизации, $\kappa = \sqrt{2I_p}$
$C_\kappa$	—	безразмерный асимптотический коэффициент
$\gamma = \frac{\kappa\omega}{F}$	—	параметр Келдыша
$\epsilon$	—	комплексная квазиэнергия
$\omega$	—	несущая частота лазерного поля
$F$	—	напряженность лазерного поля
$\mathbf{A}(t)$	—	векторный потенциал лазерного поля
$\Omega$	—	частота генерируемой гармоники
$F_\Omega$	—	напряженность поля гармоники
$\tilde{\mathbf{A}}(t)$	—	векторный потенциал суммарного поля (лазерного поля и поля гармоники)
$\eta$	—	эллиптичность $-1 \leq \eta \leq 1$
$\xi$	—	степень циркулярной поляризации
$I = \frac{cF^2}{8\pi}$	—	интенсивность лазерного поля
$u_p = \frac{F^2}{4\omega^2}$	—	средняя колебательная энергия электрона в лазерном поле
$S(\mathbf{p}, t)$	—	действие свободного электрона с импульсом $\mathbf{p}$ в лазерном поле
$\mathbf{p}$	—	импульс фотоэлектрона

$V$	—	скорость фотоэлектрона
$A(\Omega)$	—	амплитуда генерации гармоник
$D(\Omega)$	—	Фурье компонента дипольного момента
$\rho(\Omega)$	—	спектральная плотность излучения
$d_j$	—	парциальный дипольный момент
$Q_j$	—	кулоновский фактор
$T = 2\pi/\omega$	—	характерный период лазерного импульса
$T_d$	—	временная задержка между компонентами импульсного бициркулярного поля

# Введение

## Актуальность работы

Исследования нелинейных процессов, возникающих при взаимодействии атомных и молекулярных мишеней с интенсивным лазерным излучением, представляют одну из актуальных проблем современной лазерной и теоретической физики. Актуальность данной проблематики в первую очередь вызвана возникновением нелинейных эффектов в сечениях элементарных процессов в сильном лазерном поле, таких как: нелинейная ионизация (включая одноэлектронную и многоэлектронную), генерация гармоник, тормозное излучение, модифицированное лазерным полем, и т.д. [1–7]. Один из наиболее значимых нелинейных эффектов состоит в возникновении платообразных структур в спектрах элементарных процессов в сильном лазерном поле, т.е. слабой зависимости вероятности элементарного процесса от энергии образованных в результате реакции электронов и фотонов [1–8]. Эффекты плато в спектрах генерации высших гармоник (ГВГ) представляются наиболее значимыми в связи с возможностью создания на основе ГВГ компактных источников когерентного ультрафиолетового и вакуумного ультрафиолетового излучения [9–12], импульсов предельно короткой длительности порядка  $\sim 10^{-18}$  сек. (аттоимпульсов) [6, 7, 13, 14], аттосекундной спектроскопии [15, 16] и спектроскопии сверхбыстрых процессов [8, 17], «затравочных» импульсов для лазерных установок на свободных электронах [18, 19]. В настоящее время под генерацией высших гармоник понимается нелинейное преобразование интенсивного низкочастотного лазерного поля во вторичное высокочастотное излучение.

Эксперименты в сильных лазерных полях показали, что наблюдаемые новые нелинейные эффекты не могут быть (даже качественно) описаны в рамках методов классической нелинейной оптики (т.е. разложением амплитуды

процесса в ряд по напряжённости поля), поэтому для их описания необходим концептуально новый подход. Несмотря на то, что первая модель, качественно описывающая эффект плато, была предложена более 25 лет назад [20–22], тем не менее развитие аналитических теорий и моделей для ГВГ, остаётся актуальным и по настоящее время. Этот факт определяется тем, что в созданных теоретических моделях присутствует ряд существенных недостатков, обусловленных необходимостью одновременного учёта (по возможности точно) взаимодействия оптически активного электрона с сильным лазерным полем и внутренней динамики атомной (молекулярной) мишени, включающей воздействие атомного остова на электрон.

Например, широко используемое приближение сильного поля [2, 23] качественно описывает поведение атомной системы в сильном лазерном поле и позволяет описать как общую структуру спектров ГВГ (положение отсечки высокоэнергетического плато), так и ряд интерференционных эффектов в спектрах ГВГ [24, 25]. Одним из недостатков данной модели можно считать отсутствие учёта кулоновского взаимодействия между электроном и атомным остовом на всех трёх этапах формирования гармоник (ионизация, распространение, рекомбинация) [20]. Кроме того данная модель построена в плосковолновом приближении, которая не позволяет более аккуратно учесть эффекты атомной (молекулярной) структуры мишени. Поэтому в случае применения этого приближения для расчёта спектров ГВГ возникают количественные, а порой и качественные расхождения с экспериментальными данными и численными расчётами [26–30]. Несмотря на указанные недостатки, данная модель оказалась весьма полезной для дальнейшего развития теорий ГВГ, а именно послужила основой для создания метода квантовых орбит (МКО) [8, 24, 31–33]. В рамках этого метода амплитуда представляется в виде суммы парциальных амплитуд, каждой из которых можно поставить в соответствие замкнутую комплексную траекторию. Данные траектории фор-

мально удовлетворяют уравнениям Ньютона с комплексными временами начала и окончания движения электрона. Несмотря на то, что в рамках данного метода с квазиклассической точностью можно учесть влияние кулонова поля на оптически активный электрон [34–40], физическая интерпретация спектров ГВГ в рамках данного подхода в ряде случаев весьма затруднительна.

Стоит отметить, что большой популярностью при расчёте спектров ГВГ пользуется численное моделирование, основанное на интегрировании нестационарного уравнения Шрёдингера (НУШ). Однако, получить точные решения в рамках этого метода удаётся лишь для ограниченного интервала параметров лазерного поля. Например, даже в приближении одного активного электрона [17, 41, 42] численное моделирование в низкочастотных ( $\lambda \gtrsim 2$  мкм) интенсивных ( $I > 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>) лазерных полях является крайне сложной задачей, особенно в случаях, когда поляризация лазерного импульса отлична от линейной [43–46]. Учёт многоэлектронных корреляционных эффектов в численных расчётах представляет ещё более сложную задачу, и как правило существующие алгоритмы развиты лишь для случая линейной поляризации и существенно ограничены по частоте и интенсивности поля [47–52]. Таким образом, в силу того, что численное моделирование может быть выполнено в ограниченной области лазерных параметров и обладает малой предсказательной силой, создание аналитических моделей становится ещё более актуальным.

В последнее время особо возрос интерес к генерации излучения атомными и молекулярными системами в бициркулярном лазерном поле (поле, представляющем собой суперпозицию двух циркулярно поляризованных импульсов с различными частотами), вызванный возможностью генерации излучения (включая короткие импульсы) с циркулярной или эллиптической поляризацией [53–65]. С практической точки зрения короткие лазерные импульсы ультрафиолетового или рентгеновского диапазона с контролируемой



степенью циркулярной поляризации используются для изучения взаимодействия излучения с веществом, например, с киральными материалами [56, 57, 60, 66–68] и многоатомными молекулами [55, 61, 69–71]. Следует отметить, что проблема контроля над поляризационными свойствами гармоник и коротких импульсов актуальна и на сегодняшний день.

**Цель диссертационной работы** – разработка учитывающей эффекты атомной структуры аналитической модели для описания процесса генерации высших гармоник в интенсивном низкочастотном лазерном поле с произвольной временной структурой, и её применение к задаче о ГВГ в импульсном бициркулярном лазерном поле.

В рамках поставленной цели решены следующие задачи:

1. Дано обобщение модели эффективного радиуса с двумя связанными состояниями на случай интенсивного лазерного поля с произвольной временной зависимостью.
2. В рамках адиабатического подхода предложен приближённый метод вычисления амплитуды ГВГ в интенсивном низкочастотном лазерном импульсе с произвольной огибающей.
3. Получены аналитические выражения для кулоновских факторов в амплитудах фотоотрыва и генерации высших гармоник в адиабатическом приближении для интенсивного низкочастотного лазерного поля.
4. Предложено обобщение модельных результатов для амплитуды ГВГ на случай реальных атомных систем, и установлена точность развитой модели посредством сравнения с результатами численного интегрирования нестационарного уравнения Шрёдингера.
5. В рамках развитой аналитической модели рассмотрена генерация высших гармоник в импульсном бициркулярном лазерном поле с целью ис-

следования зависимости выхода гармоник и их поляризационных свойств от временной задержки между двумя циркулярно поляризованными компонентами поля с несущими частотами  $\omega$  и  $2\omega$ .

**Научная новизна** В рамках диссертации предложено обобщение аналитической модели взаимодействия интенсивного монохроматического лазерного поля с атомной системой, основанное на теории эффективного радиуса и формализме квазистационарных квазиэнергетических состояний (ККЭС), на случай лазерного импульса с произвольной временной огибающей. Данная модель учитывает два связанных состояния с пространственной  $s$  и  $p$ -симметрией, а также динамический континуум, описываемый двумя парциальными фазами рассеяния в каналах с  $l = 0, 1$ , где  $l$ -орбитальный момент. Разработан теоретический подход для вычисления кулоновских факторов для парциальных амплитуд фотоотрыва и ГВГ в адиабатическом приближении. Развита обобщённая модель ГВГ нейтральными атомными системами (с валентным  $s$  электроном) в интенсивном низкочастотном лазерном поле и исследована её точность. Предложены новые каналы управления выходом гармоник и их поляризационными свойствами в импульсном бициркулярном лазерном поле посредством изменения временной задержки между циркулярными компонентами этого поля.

**Научная ценность и практическая значимость** состоит в разработке модельного подхода к описанию процесса ГВГ в интенсивном низкочастотном лазерном поле с произвольной временной структурой в рамках адиабатического приближения, и его дальнейшего обобщения на нейтральные атомные системы. Полученные аналитические результаты позволяют предсказать ряд новых эффектов в процессе ГВГ, в частности, усиление или подавление отдельной части спектра ГВГ и изменение поляризационного состояния генерируемых гармоник посредством изменения задержки по времени между

компонентами бициркулярного поля. Предложенный механизм управления выходом гармоник и их поляризационными свойствами путём изменения временной задержки между компонентами импульсного бициркулярного поля может быть использован для генерации коротких импульсов с циркулярной и эллиптической поляризацией. Практическое приложение полученных результатов напрямую связано с возможностью создания компактных источников интенсивного когерентного излучения и аттосекундных импульсов с контролируемым поляризационным состоянием, а также развития спектроскопии сверхбыстрых процессов. Результаты диссертации целесообразно использовать в научно-исследовательских организациях и центрах, занимающихся взаимодействием сильного лазерного излучения с веществом: Институт общей физики РАН, Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, РНЦ Курчатовский институт, Санкт-Петербургский государственный университет, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Институт прикладной физики РАН, Воронежский государственный университет.

**На защиту выносятся следующие основные положения:**

1. Обобщение модели эффективного радиуса для системы с двумя связанными состояниями на случай интенсивного лазерного поля с произвольной временной структурой.
2. Аналитические выражения для кулоновских факторов в парциальных амплитудах фотоотрыва и генерации гармоник в адиабатическом приближении.
3. Аналитические выражения для амплитуды ГВГ нейтральными атомными системами (с валентным  $s$  электроном) в интенсивном низкочастотном лазерном поле с произвольной огибающей.

4. Механизм управления выходом ГВГ и поляризационными свойствами гармоник в импульсном бициркулярном лазерном поле, основанный на изменении временной задержки между компонентами поля.

### **Апробация работы**

Основные результаты диссертации представлялись и докладывались на следующих конференциях:

1. 26th International Laser Physics Workshop (LPHYS' 17 ), July 17-21, 2017, Kazan, Russia.
2. 6th International Conference on Attosecond Physics (ATTO), 2-7 July 2017, Xi'an, China.
3. Нелинейные волны – 2018, XVIII научная школа, 26 февраля-4 марта, 2018, Нижний Новгород, Россия.
4. Научная сессия Воронежского государственного университета, 2019, Воронеж, Россия.

**Публикации** Результаты диссертации опубликованы в четырёх научных статьях, цитируемых базой данных Web of Science и входящих в перечень ВАК, а также пяти тезисах докладов на международных конференциях:

1. Туннельное приближение для оценки амплитуды генерации высших гармоник в интенсивных лазерных полях: анализ времен ионизации и рекомбинации / А. А. Минина, М. В. Фролов, А. Н. Желтухин, Н. В. Введенский // Квантовая Электроника. – 2017. – Т. 47, № 3. – С. 216 - 221.
2. Adiabatic-limit Coulomb factors for photoelectron and high-order-harmonic spectra / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. A. Minina [et al.] // Phys. Rev. A. – 2017. – Vol. 96. – P. 023406 (12 pp.).

3. Control of harmonic generation by the time delay between two-color, bicircular few-cycle mid-IR laser pulses / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. A. Minina [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2018. – Vol. 120. – P. 263203 (6 pp.).
4. Analytic description of high-order harmonic generation in the adiabatic limit with application to an initial  $s$ -state in an intense bicircular laser pulse / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. A. Minina [et al.] // Phys. Rev. A. – 2019. – Vol. 99. – P. 053403 (24 pp.).
5. Polarization control of high harmonic generation in a pulsed bicircular laser field / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. A. Minina [et al.] // ATTO 2017 : 6th International Conference on Attosecond Physics, Xian, China, July 2-7, 2017 : Book of Abstracts . – Xian, China, 2017. – 1 p.
6. Theory of high harmonic generation in the adiabatic limit / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. A. Minina [et al.] // ATTO 2017 : 6th International Conference on Attosecond Physics, Xian, China, July 2-7, 2017 : Book of Abstracts . – Xian, China, 2017. – 1 p.
7. Polarization control of high harmonic generation in a pulsed bicircular laser field / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. A. Minina [et al.] // 26th Annual International Laser Physics Workshop (LPHYS' 17), Kazan, July 17-21, 2017 : Book of Abstracts . – Kazan, 2017. – 1 p.
8. Theory of high harmonic generation in the adiabatic limit / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. A. Minina [et al.] // 26th Annual International Laser Physics Workshop (LPHYS' 17), Kazan, July 17-21, 2017 : Book of Abstracts . – Kazan, 2017. – 1 p.
9. Поляризационный контроль генерации высших гармоник в импульсном бициркулярном лазерном поле / А. А. Минина, М. В. Фролов, Н. Л. Ма-

наков [et al.] // Нелинейные волны – 2018: XVIII научная школа, 26 февраля-4 марта, Нижний Новгород : Тезисы докладов молодых учёных. – Нижний Новгород, 2018. – С. 104 - 106.

**Личный вклад автора** Определение целей и задач диссертации осуществлялось научным руководителем. Аналитическая модель разработана автором совместно с научным руководителем. Автором лично проведены все аналитические вычисления и созданы программы для численных расчётов, интерпретированы результаты, представленные в диссертации. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причём вклад диссертанта был существенным. Положения диссертационной работы, выносимые на защиту, получены автором лично.

### **Структура и объём диссертации**

Диссертация состоит из Введения, Обзора литературы, 4 глав, Заключение и Списка литературы. Общий объём диссертации 130 страниц, из них 99 страниц текста, включая 21 рисунок, 1 таблицу. Список литературы включает 172 наименования на 26 страницах.

## Обзор литературы

В теоретическом описании ГВГ и других нелинейных процессов в сильном лазерном излучении даже спустя более полувека после создания теоретических основ физики сильного поля [72, 73] имеется ряд неразрешенных задач. Одна из основных проблем заключается в необходимости одновременного учёта (по возможности точно) взаимодействия оптически активного электрона с сильным лазерным полем и внутренней динамики атомной (молекулярной) мишени, включающей воздействие атомного остова на валентный электрон. Несмотря на то, что данная задача решается путём численного интегрирования нестационарного уравнения Шрёдингера (НУШ), получить точные *численные* решения в рамках этого метода удаётся лишь в ряде случаев. Например, даже в приближении одного активного электрона численное моделирование в низкочастотных ( $\lambda \gtrsim 2$  мкм) интенсивных ( $I > 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>) лазерных полях является крайне сложной задачей [17, 41, 42, 74, 75], особенно в случаях, когда поляризация лазерного импульса отлична от линейной [43–46]. Учёт многоэлектронных корреляционных эффектов в численных расчётах представляет ещё более сложную задачу, и как правило существующие алгоритмы развиты лишь для случая линейной поляризации и существенно ограничены по частоте и интенсивности поля [47–52, 76, 77]. Таким образом, в силу того, что численное моделирование может быть выполнено в ограниченной области лазерных параметров и обладает малой предсказательной силой, создание аналитических моделей представляет актуальную задачу физики нелинейного взаимодействия интенсивного лазерного излучения с веществом.

Одним из основополагающих приближений является приближение сильного поля [2, 23], основные идеи которого были сформулированы в 60-х и 70-х годах [78–82]. Идея этого приближения состоит в точном учёте взаимодействия лазерного поля с активным атомным электроном, при этом элек-

трон-атомное взаимодействие рассматривается пертурбативно. Такой подход приводит к формальному борноподобному ряду (по атомному потенциалу) для амплитуд перехода, сходимость которого остаётся открытым математическим вопросом. На практике, однако, первые несколько членов такого ряда достаточны для описания общих эффектов в физике нелинейного взаимодействия лазерного поля с атомами и молекулами [2, 7, 24, 64, 83, 84].

Приближение сильного поля определило теоретическую основу для метода квантовых орбит (МКО) [24, 31–33], который позволил теоретически описать процесс ГВГ в сильном низкочастотном лазерном поле с использованием квазиклассического приближения. В рамках описываемого подхода амплитуда ГВГ представляется в виде суммы парциальных амплитуд, ассоциированных с замкнутыми траекториями электрона в лазерном поле. Эти траектории формально удовлетворяют уравнениям Ньютона, хотя соответствуют комплексным временам начала и окончания движения по траектории, которые находятся из условий адиабатичности перехода электрона из связанного состояния в континуум и обратно [8, 24, 31–33]. В пределе сильного поля МКО хорошо согласуется с приближением сильного поля [32]. В большинстве случаев для физической интерпретации спектров ГВГ необходимо получить классический предел уравнений на времена ионизации и рекомбинации [20, 85]. Как правило этот предел получают формальным устремлением потенциала ионизации к нулю. В случае, когда внешнее поле обладает линейной поляризацией, такой предельный переход, означает, что электрон высвобождается из атома с нулевой начальной скоростью, распространяется в лазерном поле по замкнутой классической траектории и испустив фотон с энергией  $\Omega$  образует связанное состояние. Таким образом, в этом классическом пределе система уравнений на времена ионизации и рекомбинации даёт теоретическое обоснование классической модели перерассеяния [20, 85]. Однако, в случае двухкомпонентных лазерных полей этот классический предел не да-



ёт возможность найти классические замкнутые траектории и, в этом случае, интерпретация спектров ГВГ основывается на формализме незамкнутых траекторий («missed trajectories»). В этом случае утверждается, что отсутствие замкнутых траекторий с нулевой начальной энергией вызывает эффективное подавление рекомбинации электрона в процессе ГВГ [26–28,86,87]. Существенным недостатком такой интерпретации является то, что процесс рекомбинации является чисто квантовым процессом и его вероятность зависит только от свойств атомной мишени.

Основным достоинством МКО является то, что в рамках квазиклассической теории возмущений [88] этот подход позволяет наиболее естественным образом найти кулоновские поправки к амплитуде ГВГ. (В квазиклассическом пределе можно факторизовать вероятность процесса ГВГ в виде произведения множителей, описывающих каждый из этапов трёхшаговой модели перерассеяния (ТМП): ионизации, распространения, рекомбинации.) Действительно, в рамках приближения сильного поля движение фотоэлектрона в континууме описывается волковской функцией, которая является точным решением уравнения Шрёдингера для свободного электрона в поле плоской электромагнитной волны [89,90]. Фаза волковской функции совпадает с классическим действием для электрона  $S$ , движущегося в лазерном поле. Характерное действие кулонова поля, вычисленное на траекториях свободного электрона в лазерном поле, существенно меньше действия  $S$ , и поэтому на большей части его траектории лазерное поле преобладает над кулоновским. Таким образом, кулоновское поле может быть учтено как поправка к действию вдоль траектории электрона в лазерном поле. Стоит отметить, что поправка к действию на кулоново поле имеет характерные логарифмические расходимости, которые устраняются в результате сшивки фазы «уточнённого» решения с фазой невозмущённого состояния в кулоновском поле [40,88,91–94].

Аналогичная картина квантовых орбит естественным образом возника-

ет в рамках аналитического R-матричного подхода [34–38], который учитывает воздействие кулоновского потенциала на динамику оптически активного электрона в сильном лазерном поле путём использования квазиклассической теории возмущений для вычисления действия. Используя МКО и квазиклассическую теорию возмущений или R-матричный подход, можно вычислить кулоновскую поправку для первых двух этапов процесса ГВГ [38–40], включая кулоновскую поправку к временам ионизации и рекомбинации. Таким образом, МКО позволяет исправить основной недостаток приближения сильного поля—отсутствие учёта кулоновского потенциала в амплитуде процесса в сильном лазерном поле. В рамках МКО предлагается введение *ad hoc* поправок к амплитуде, полученной в приближении сильного поля, используя хорошо известную параметризацию амплитуды ГВГ [95, 96]. Основная идея заключается в замене сечения фоторекомбинации, рассчитанного в плосковолновом приближении сильного поля, на точное значение сечения фоторекомбинации [7, 64, 95–98] и использование амплитуды ионизации с учётом кулоновских поправок [39, 99]. В настоящее время этот подход успешно используется для описания процессов ГВГ в молекулах, с учётом многоэлектронных эффектов, возникающих в процессах ионизации, движения активного электрона в континууме, рекомбинации [8, 28, 69, 100–103]. Практическое применение включает в себя также анализ ГВГ в киральных молекулах [104–106], описание ГВГ атомами, находящимися в начальном *p*-состоянии [107, 108], управление поляризацией спина сталкивающихся электронов [109].

Исследование процессов в сильном лазерном поле существенно продвинулось с помощью точно-решаемых аналитических моделей. Первой аналитической моделью, описывающей процессы в сильном лазерном поле стала модель потенциала нулевого радиуса ( $\delta$ -потенциал) [110]. Изначально эта модель использовалась для описания отрыва слабосвязанного электрона от отрицательного иона, помещённого в сильное переменное поле [111–113]. Даль-

нейшее развитие метода на случай процесса ГВГ было проделано в работах [21, 22]. Основным недостатком модели  $\delta$ -потенциала является то, что она применима только для системы со слабосвязанными электронами в начальном  $s$ -состоянии. Развитие этого подхода на случай начальных связанных состояний с ненулевым орбитальным моментом было предложено в рамках метода эффективного радиуса (МЭР) [114–119]. МЭР основан на теории эффективного радиуса для описания непертурбативного взаимодействия электрона с атомным остовом [115–117] и формализме квазистационарных квазиэнергетических состояний [111, 120, 121]. Стоит отметить, что метод эффективного радиуса совпадает с моделью  $\delta$ -потенциала в соответствующем предельном случае.

В периодическом лазерном поле процесс ГВГ может быть описан в рамках МЭР с использованием связи между комплексной квазиэнергией и амплитудой ГВГ [122]. Однако в случае коротких импульсов невозможно напрямую применить формализм Флоке. Соответствующее развитие МЭР на случай коротких лазерных импульсов было проделано в работах [123, 124]. Стоит отметить, что одномерные модели также были успешно применены к описанию генерации высших гармоник [125].

Основным преимуществом аналитических моделей является возможность их применения в низкочастотном пределе (например в инфракрасных лазерных полях), именно в этой области численное моделирование становится крайне затратным. С помощью аналитических методов была детально изучена структура амплитуды ГВГ в этом режиме [96, 124–129]. Эти результаты показали, что для случая линейной поляризации амплитуда ГВГ может быть факторизована в виде произведения электронного волнового пакета и точного сечения фоторекомбинации [96, 124–128], как было предложено в работах [95, 97, 130] на основании результатов численного решения НУШ. Однако, для случая эллиптически поляризованного монохроматического поля [46, 128]

и двухкомпонентного лазерного поля, состоящего из ортогональных линейно поляризованных монохроматических компонент [129], параметризация амплитуды ГВГ отлична от той, что возникает в случае линейной поляризации.

В 80-х годах на основе приближения нулевого радиуса в рамках формализма квазистационарных квазиэнергетических состояний (ККЭС) было развито адиабатическое (низкочастотное) приближение для случая слабосвязанного электрона в эллиптически поляризованном поле [113]. Недавно был предложен альтернативный подход, основанный на развитии адиабатического приближения для ионизации [131] и ГВГ [125] в линейно поляризованном поле, а в последнее время и в бициркулярном лазерном поле [64]. Основные допущения адиабатического приближения аналогичны тем, которые используются в методе Капицы для описания частицы в быстро осциллирующем поле [132, 133]. В частности, зависящая от времени (периодическая по времени) волновая функция разделяется на медленно и быстро меняющиеся части, где последняя часть находится на основе, невозмущенной лазерным полем волновой функции, а медленно меняющаяся часть находится посредством усреднения быстроменяющейся части. Как было показано в [134] такое разделение волновой функции на медленные и быстрые части справедливо в случае медленно меняющегося лазерного поля.

Изучение ГВГ в бициркулярном лазерном поле началось около 20 лет назад [53, 54]. Однако наибольшее развитие эта тема получила в последние годы, ввиду появления интереса к поляризационным свойствам генерируемых гармоник. Во многих работах было показано, что использование бициркулярного поля может привести к возникновению циркулярно и эллиптически поляризованных гармоник и аттосекундных импульсов. [53–64]. Также были предложены и экспериментально продемонстрированы способы контроля над поляризационными свойствами генерируемого излучения [53, 54, 56, 57, 59–63, 70, 99, 107, 135–140]. С практической точки зрения короткие лазерные импульсы ульт-

трафиолетового или рентгеновского диапазона с контролируемой степенью циркулярной поляризации используются для изучения взаимодействия излучения с веществом, например, с киральными материалами [56, 57, 60, 66–68] и многоатомными молекулами [55, 61, 69–71].

В существующих теоретических исследованиях процесса ГВГ в бициркулярном поле опускается проблема учёта кулоновского потенциала. Так аналитическое описание, представленное в работах [54, 58, 107, 108, 138, 141], основано на приближении сильного поля и не учитывает влияние кулоновского потенциала. В недавней работе [64] амплитуда ГВГ была проанализирована в рамках низкочастотного приближения, и было показано как точная амплитуда фоторекомбинации (для рассматриваемой атомной системы) появляется в этой амплитуде. Несмотря на то, что в этом случае кулоновские поправки вводятся *ad hoc*, такой анализ подходит в основном для короткодействующих потенциалов, ввиду того, что граничные условия для волновой функции на больших расстояниях не учитывают дальнедействующего кулоновского потенциала. В работах [39, 40] была показана необходимость расчёта кулоновских факторов для парциальных амплитуд ГВГ (с учётом ионизации и распространения в кулоновском поле).

## Глава 1

## Метод эффективного радиуса для двухуровневой системы

### 1.1. Основные положения метода эффективного радиуса

Метод эффективного радиуса (МЭР) основывается на граничных условиях для ККЭС  $\Phi_\epsilon(\mathbf{r}, t)$  [120, 142], сформулированных на малых расстояниях [118, 119] (в диссертации используется атомная система единиц):

$$\begin{aligned} & \iint \Phi_\epsilon(\mathbf{r}, t) Y_{lm}^*(\Omega) e^{in\omega_\tau t} d\Omega dt \\ &= f_n^{(l,m)} \left[ (r^{-l-1} + \dots) + \mathcal{B}_l(\epsilon + n\omega_\tau) (r^l + \dots) \right], \quad (1.1) \\ & (2l-1)!!(2l+1)!! \mathcal{B}_l(\epsilon) = k^{2l+1} \text{ctg } \delta_l(k), \quad k = \sqrt{2\epsilon}, \end{aligned}$$

где  $Y_{lm}(\Omega)$  — сферическая функция  $f_n^{(l,m)}$  — Фурье коэффициент периодической функции  $f^{(l,m)}(t) = f^{(l,m)}(t + \mathcal{T}) = \sum_n f_n^{(l,m)} e^{-in\omega_\tau t}$  с периодом  $\mathcal{T} = 2\pi/\omega_\tau$ ,  $\epsilon$  — комплексная квазиэнергия,  $\delta_l(k)$  — фаза рассеяния,  $l$  — орбитальный момент. Искомая волновая функция, удовлетворяющая граничному условию (1.1), может быть построена с помощью парциальных волновых функций,  $\Phi_\epsilon^{(l,m)}(\mathbf{r}, t)$  [119]:

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon^{(l,m)}(\mathbf{r}, t) &= -2\pi(-i)^l \int_{-\infty}^t e^{i\epsilon(t-t')} f^{(l,m)}(t') \\ &\times \mathcal{Y}_{lm} \left[ \frac{\mathbf{r}}{t-t'} + \mathbf{K}'(t, t') \right] G(\mathbf{r}, t; 0, t') dt', \quad (1.2) \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}'(t, t') = \mathbf{A}(t') - \frac{1}{t-t'} \int_{t'}^t \mathbf{A}(\xi) d\xi, \quad (1.3)$$

где  $G(\mathbf{r}, t; 0, t')$  — функция Грина свободного электрона в лазерном поле с векторным потенциалом  $\mathbf{A}(t)$  [142],  $\mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{n})$  — шаровая функция. Динамику оптического электрона будем учитывать в приближении двух фаз рассеяния с  $l = 0$  и  $l = 1$ . В соответствии с этим волновая функция ККЭС может быть представлена в виде суммы парциальных функций с  $l = 0$  и  $l = 1$ :

$$\Phi_\epsilon(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=0,1} \sum_{m=-l}^l \Phi_\epsilon^{(l,m)}(\mathbf{r}, t). \quad (1.4)$$

Выражения для парциальных волновых функций с  $l = 0$  и  $l = 1$  на малых расстояниях имеют вид [119]:

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon^{(0,0)}(\mathbf{r}, t) &\approx Y_{0,0}(\Omega) \sum_n \left( \frac{1}{r} + i\chi_n \right) f_n^{(0,0)} e^{-in\omega_\tau t} \\ &+ Y_{0,0}(\Omega) \int_{-\infty}^t \mathcal{G}'_\epsilon(t, t') f^{(0,0)}(t') dt' \\ &+ ir \sum_{\mu=-1}^1 \frac{(-1)^\mu Y_{1,\mu}(\Omega)}{\sqrt{3}} \int_{-\infty}^t \mathcal{G}_\epsilon(t, t') f^{(0,0)}(t') K_{-\mu} dt', \end{aligned} \quad (1.5a)$$

$$\begin{aligned} \Phi_\epsilon^{(1,m)}(\mathbf{r}, t) &\approx Y_{1,m}(\Omega) \sum_n \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\chi_n^2}{2} + \frac{i\chi_n^3 r}{3} \right) f_n^{(1,m)} e^{-in\omega_\tau t} \\ &- iY_{0,0}(\Omega) \sqrt{3} \int_{-\infty}^t \mathcal{G}_\epsilon(t, t') f^{(1,m)}(t') K'_m dt' - irY_{1,m}(\Omega) \int_{-\infty}^t \frac{\mathcal{G}'_\epsilon(t, t') f^{(1,m)}(t')}{t - t'} dt' \\ &+ r \sum_{\mu=-1}^1 (-1)^\mu Y_{1,\mu}(\Omega) \int_{-\infty}^t \mathcal{G}_\epsilon(t, t') f^{(1,m)}(t') K'_m K_{-\mu} dt', \end{aligned} \quad (1.5b)$$

$$\mathcal{G}'_\epsilon(t, t') = \frac{[e^{i\Delta(t, t')} - 1] e^{i\epsilon(t-t')}}{\sqrt{2\pi i}(t-t')^{3/2}}, \quad (1.6a)$$

$$\mathcal{G}_\epsilon(t, t') = \frac{e^{i\Delta(t, t') + i\epsilon(t-t')}}{\sqrt{2\pi i}(t-t')^{3/2}}, \quad (1.6b)$$

$$\Delta(t, t') = -\frac{1}{2} \int_{t'}^t \left[ \mathbf{A}(\xi) - \frac{1}{t-t'} \int_{t'}^t \mathbf{A}(\xi') d\xi' \right]^2 d\xi, \quad (1.6c)$$

$$\mathbf{K}(t, t') = \mathbf{A}(t) - \frac{1}{t-t'} \int_{t'}^t \mathbf{A}(\xi) d\xi, \quad (1.6d)$$

где  $m = 0, \pm 1$ ,  $\varkappa_n = \sqrt{2(\epsilon + n\omega_\tau)}$  (квадратный корень берётся на верхней части листа римановой поверхности),  $K'_m, K_m$  — циркулярные компоненты векторов  $\mathbf{K}'$  и  $\mathbf{K}$ , которые задаются выражением  $n_{\pm 1} = \mp(n_x \pm in_y)/\sqrt{2}$ ,  $n_0 = n_z$ , где под вектором  $\mathbf{n}$  подразумевается либо вектор  $\mathbf{K}'$ , либо  $\mathbf{K}$ . Стоит отметить, что первые слагаемые в уравнениях (1.5a) и (1.5b) соответствуют нескольким слагаемым из разложения сферической функции Ханкеля  $h_l(i\kappa_n r)$ , которая является решениями уравнения Шрёдингера для свободного электрона с заданным  $l$  [143]. Лазерное поле не влияет на эти нерегулярные слагаемые, а регулярные по  $r$  слагаемые из (1.5a) и (1.5b) являются лазерно-индуцированными и при выключении лазерного поля обращаются в ноль.

Учитывая разложения (1.5), удовлетворим волновую функцию (1.4) граничным условиям (1.1) и получим уравнение для комплексной квазиэнергии  $\epsilon$  и коэффициентов  $f_n^{(l, m)}$ , определяющих периодическую функцию  $f^{(l, m)}(t)$ :

$$\begin{aligned} [\mathcal{B}_0(\epsilon + n\omega_\tau) - i\varkappa_n] f_n^{(0, 0)} &= \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} \int_{-\infty}^t \mathcal{G}'_\epsilon(t, t') f^{(0, 0)}(t') e^{in\omega_\tau t} dt' dt \\ -i \frac{\sqrt{3}}{\mathcal{T}} \sum_{m'} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} \int_{-\infty}^t \mathcal{G}_\epsilon(t, t') f^{(1, m')}(t') K'_{m'} e^{in\omega_\tau t} dt' dt, \end{aligned} \quad (1.7a)$$



$$\begin{aligned}
\left[ \mathcal{B}_1(\epsilon + n\omega_\tau) - \frac{i\chi_n^3}{3} \right] f_n^{(1,m)} &= \frac{(-1)^m}{\mathcal{T}} \sum_{m'} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} \int_{-\infty}^t \mathcal{G}_\epsilon(t, t') f^{(1,m')}(t') K_{m'}' K_{-m} \\
&\times e^{in\omega_\tau t} dt' dt - \frac{i}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} \int_{-\infty}^t \frac{\mathcal{G}'_\epsilon(t, t')}{(t-t')} f^{(1,m)}(t') e^{in\omega_\tau t} dt' dt \\
&+ i \frac{(-1)^m}{\sqrt{3}\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} \int_{-\infty}^t \mathcal{G}_\epsilon(t, t') f^{(0,0)}(t') K_{-m} e^{in\omega_\tau t} dt' dt. \tag{1.7b}
\end{aligned}$$

Хотя уравнения (1.7a) и (1.7b) имеют громоздкий вид, их решения существенно упрощаются в адиабатическом приближении (см. [113, 134, 144]). Для простоты рассмотрим случай отсутствия резонанса между двумя атомными уровнями. В адиабатическом приближении для начального  $s$ -состояния, Фурье коэффициенты  $f_n^{(0,0)}$  и  $f_n^{(1,m)}$  могут быть получены из (1.7a) и (1.7b) путём подстановки в уравнения  $f^{(0,0)}(t) = f_0^{(0,0)}$  и  $f^{(1,m)}(t) = 0$ :

$$f_n^{(0,0)} = \frac{f_0^{(0,0)}}{\mathcal{T}} [\mathcal{B}_0(\epsilon + n\omega_\tau) - i\chi_n]^{-1} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} \int_{-\infty}^t \mathcal{G}'_\epsilon(t, t') e^{in\omega_\tau t} dt' dt, \tag{1.8a}$$

$$\begin{aligned}
f_n^{(1,m)} &= \frac{i(-1)^m f_0^{(0,0)}}{\sqrt{3}\mathcal{T}} \left[ \mathcal{B}_1(\epsilon + n\omega_\tau) - \frac{i\chi_n^3}{3} \right]^{-1} \\
&\times \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} \int_{-\infty}^t \mathcal{G}_\epsilon(t, t') K_{-m} e^{in\omega_\tau t} dt' dt. \tag{1.8b}
\end{aligned}$$

Стоит отметить, что для  $n \neq 0$   $\mathcal{G}'_\epsilon(t, t')$  в интеграле (1.8a) может быть заменено на  $\mathcal{G}_\epsilon(t, t')$ .

## 1.2. Амплитуда ГВГ в рамках МЭР

Лазерно-индуцированный дипольный момент в сильном периодическом лазерном поле может быть найден как первая производная от комплексной

квазиэнергии в двухкомпонентном лазерном поле [122], первая компонента которого задаётся сильным периодическим лазерным полем, а вторая — слабым полем гармоника с вектором напряжённости  $\mathbf{F}_\Omega(t) = F_\Omega \text{Re}[\mathbf{e}_\Omega e^{-i\Omega t}]$ ,  $\mathbf{e}_\Omega$  — вектор поляризации гармоника:

$$\mathbf{D}_\Omega = -4 \frac{\partial \Delta \epsilon}{\partial \mathbf{F}_\Omega^*}, \quad \mathbf{F}_\Omega^* = F_\Omega \mathbf{e}_\Omega^*, \quad (1.9)$$

где  $\Delta \epsilon$  — линейная по  $F_\Omega$  поправка к комплексной квазиэнергии в сильном лазерном поле. Для лазерного импульса произвольной формы амплитуда ГВГ может быть найдена с помощью представления поля в виде последовательности коротких импульсов, разделённых между собой периодом  $\mathcal{T} = 2\pi/\omega_\tau$ . Искомое выражение для амплитуды ГВГ получается как предельный случай  $\omega_\tau \rightarrow 0$  при фиксированном  $\Omega = N\omega_\tau$  [124]:

$$\mathcal{A}(\Omega) = \mathbf{e}_\Omega^* \cdot \mathbf{D}(\Omega), \quad \mathbf{D}(\Omega) = \lim_{\omega_\tau \rightarrow 0} \mathbf{D}_\Omega / \omega_\tau. \quad (1.10)$$

Уравнение для комплексной квазиэнергии  $\epsilon$  в сильном периодическом лазерном поле и слабом поле гармоника может быть получено из уравнения (1.7) путём замены в векторе  $\mathbf{K}$  векторного потенциала  $\mathbf{A}(t) \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}(t)$ , который представляет собой векторный потенциал суммарного поля, состоящий из потенциала лазерного поля и поля гармоника:

$$\tilde{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{A}_\tau(t) + \frac{F_\Omega}{\Omega} \text{Im} [\mathbf{e}_\Omega e^{-i\Omega t}], \quad (1.11)$$

$\mathbf{A}_\tau(t)$  — векторный потенциал периодического лазерного поля, представляющего последовательность коротких импульсов сдвинутых относительно друг друга на время  $\mathcal{T}$ .

В сильном лазерном поле (несущая частота лазерного поля меньше потенциала ионизации)  $\Delta(t, t') \gg 1$  и интегралы, содержащие  $e^{i\Delta(t, t')}$  [см. (1.7) и (1.8)] имеют экспоненциальную малость. В адиабатическом приближении рассматриваются члены только первого порядка экспоненциальной малости и

пренебрегается более высокими порядками [125, 131, 134]. Поэтому уравнение для комплексной квазиэнергии и начального  $s$ -состояния в полях типа (1.11) может быть получено из (1.7а) (для  $n = 0$ ) путём замены  $f^{(0,0)}(t) = f_0^{(0,0)}$  и  $\mathcal{G}_\epsilon(t, t') \rightarrow e^{i\epsilon(t-t')}/[\sqrt{2\pi i}(t-t')^{3/2}]$ . Действительно, следуя работе [113], интегралы, содержащие функцию Грина  $\mathcal{G}_\epsilon(t, t')$  или  $\mathcal{G}'_\epsilon(t, t')$ , определяются экспоненциально малыми членами (определяемыми перевальными точками) и слагаемыми  $\propto F^2(t)$  (определяемыми вкладом от верхней границы интегрирования по  $t'$ ). Однако, для вычисления линейной поправки по  $F_\Omega$ , необходимой для вычисления  $\Delta\epsilon$ , слагаемые  $\propto F^2$  не дают вклада из-за существенной разницы между несущими частотами лазерного поля и частотой поля гармоники. Таким образом, основной вклад в  $\Delta\epsilon$ , будет определяться только экспоненциально малыми членами. Соответственно, учитывая экспоненциальную малость коэффициентов  $f_n^{(0,0)}$  ( $n \neq 0$ ) и функции  $f_n^{(1,m)}(t)$  и ограничиваясь только членами первого порядка малости в уравнении (1.7а) можно пренебречь коэффициентами Фурье функции  $f_n^{(0,0)}(t)$  и зависимостью ядра второго члена в (1.7а) от суммарного поля. В результате в адиабатическом приближении уравнение для комплексной квазиэнергии (1.7а) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0(\epsilon) - i\chi_0 &= \frac{1}{\mathcal{T}} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} \int_{-\infty}^t \frac{[e^{i\tilde{\Delta}(t,t')} - 1] e^{i\epsilon(t-t')}}{\sqrt{2\pi i}(t-t')^{3/2}} dt' dt \\ &- \sum_m \frac{i\sqrt{3}}{\mathcal{T} f_0^{(0,0)}} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} \int_{-\infty}^t \frac{e^{i\epsilon(t-t')} f^{(1,m)}(t')}{\sqrt{2\pi i}(t-t')^{3/2}} \tilde{K}'_m dt' dt, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $\tilde{\Delta}(t, t')$  и  $\tilde{K}'_m$  задаются уравнениями (1.6с) и (1.3) соответственно с заменой  $\mathbf{A}(t) \rightarrow \tilde{\mathbf{A}}(t)$ . Учитывая, что  $F_\Omega$  мало, представим  $\epsilon$  в виде суммы  $\epsilon = \epsilon_0 + \Delta\epsilon$ , где  $\epsilon_0$  — комплексная квазиэнергия для сильного периодического поля с векторным потенциалом  $\mathbf{A}_\tau(t)$  и  $F_\Omega = 0$  [ $\epsilon_0$  удовлетворяет уравнению (1.12) для  $F_\Omega = 0$ ],  $\Delta\epsilon \propto F_\Omega$  — линейная по  $F_\Omega$  поправка, обусловленная

полем гармоник. Для того, чтобы получить выражение для  $\Delta\epsilon$ , разложим левую и правую части уравнения (1.12) в ряд по  $F_\Omega$  и  $\Delta\epsilon$  до первого порядка, что приводит выражение для  $\Delta\epsilon$  к виду:

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon = & -\frac{1}{\mathcal{N}\mathcal{T}}\sqrt{\frac{i}{2\pi}}\int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2}\int_{-\infty}^t\frac{e^{i\Delta_\tau(t,t')+i\epsilon_0(t-t')}}{(t-t')^{3/2}}[\mathbf{F}_\Omega\cdot\mathbf{G}(\Omega)+\mathbf{F}_\Omega^*\cdot\mathbf{G}(-\Omega)]dt'dt \\ & -\frac{\sqrt{3}}{\mathcal{N}f_0^{(0,0)}}\sum_m\left[a(\Omega)(\mathbf{F}_\Omega)_mf_{-N}^{(1,m)}+a(-\Omega)(\mathbf{F}_\Omega^*)_mf_N^{(1,m)}\right], \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} a(\Omega) = & \frac{1}{2\Omega\sqrt{2\pi i}}\int_0^\infty\frac{e^{i\epsilon_0\tau}}{\tau^{3/2}}\left(1+\frac{e^{-i\Omega\tau}-1}{i\Omega\tau}\right)d\tau = \\ & \frac{i}{2\Omega}\left\{\sqrt{2\epsilon_0}+\frac{(2\epsilon_0-2\Omega)^{3/2}}{3\Omega}-\frac{(2\epsilon_0)^{3/2}}{3\Omega}\right\}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = & \frac{\partial\mathcal{B}(\epsilon_0)}{\partial\epsilon_0}-\frac{1}{\sqrt{-2\epsilon_0}}-\sqrt{\frac{i}{2\pi}}\frac{1}{\mathcal{T}}\int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2}\int_{-\infty}^t\frac{[e^{i\Delta_\tau(t,t')}-1]e^{i\epsilon_0(t-t')}}{(t-t')^{1/2}}dt'dt \\ & -\sum_m\frac{\sqrt{3}}{\mathcal{T}}\int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2}\int_{-\infty}^t\frac{e^{i\epsilon_0(t-t')}f^{(1,m)}(t')}{\sqrt{2\pi i}(t-t')^{1/2}}K'_m dt'dt, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\Omega;t,t') \equiv \mathbf{G}(\Omega) = & \frac{1}{2i\Omega}\int_{t'}^t\mathbf{A}_\tau(\xi)e^{-i\Omega\xi}d\xi \\ & -\frac{1}{t-t'}\int_{t'}^t\mathbf{A}_\tau(\xi)d\xi\frac{e^{-i\Omega t}-e^{-i\Omega t'}}{2\Omega^2}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где  $\Delta_\tau(t,t') = \widetilde{\Delta}_\tau(t,t')|_{F_\Omega=0}$ . Отметим, что точность адиабатического приближения позволяет заменить точную комплексную квазиэнергию её невозмущённым значением ( $\epsilon_0 \rightarrow -I_p$ ) в интегралах (1.13)-(1.15) [113]. Нормировочная константа (1.15) практически без потери точности может быть оценена в пределе нулевого лазерного поля, для которого два последних интеграла обращаются в ноль:

$$\mathcal{N} \approx r_0 - \kappa^{-1} = -2C_\kappa^{-2}\kappa^{-1}. \quad (1.17)$$

где  $\mathcal{B}(\epsilon_0)$  было заменено разложением  $\mathcal{B}(\epsilon_0) \approx a_0^{-1} + r_0\epsilon_0$  (здесь  $a_0$ —длина рассеяния,  $r_0$ —эффективный радиус) [143],  $C_\kappa$ —безразмерный асимптотический коэффициент, который определяет поведение связанного состояния в случае нулевого лазерного поля на больших расстояниях:

$$\psi_0(\mathbf{r}) \approx \sqrt{\kappa} C_\kappa \frac{e^{-\kappa r}}{r} Y_{00}(\hat{\mathbf{r}}), \quad \kappa = \sqrt{2I_p}. \quad (1.18)$$

Подставляя явный вид коэффициентов  $f_N^{(1,m)}$  из (1.8b) в уравнение (1.13) и учитывая, что  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \sum_{m=-1}^1 (-1)^m a_m b_{-m}$ , получаем  $\Delta\epsilon$  в виде:

$$\Delta\epsilon = -\frac{1}{N\mathcal{T}} \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \int_{-\mathcal{T}/2}^{\mathcal{T}/2} \int_{-\infty}^t dt' dt \frac{e^{i\Delta_\tau(t,t') - iI_p(t-t')}}{(t-t')^{3/2}} \times \left[ \mathbf{F}_\Omega \cdot \mathbf{G}(\Omega) + \mathbf{F}_\Omega^* \cdot \mathbf{G}(-\Omega) + \frac{e^{-i\Omega t} a(\Omega) \mathbf{F}_\Omega \cdot \mathbf{K}_\tau(t, t')}{\mathcal{B}_1(-I_p - \Omega) - i\kappa_N^3/3} + \frac{e^{i\Omega t} a(-\Omega) \mathbf{F}_\Omega^* \cdot \mathbf{K}_\tau(t, t')}{\mathcal{B}_1(-I_p + \Omega) - i\kappa_N^3/3} \right], \quad (1.19)$$

где  $\kappa_{\pm N} = \sqrt{2(-I_p \pm \Omega)}$ ,  $\Omega = N\omega_\tau$  и  $\mathbf{K}_\tau(t, t')$  задаётся уравнением (1.6d) с заменой  $\mathbf{A}(t) \rightarrow \mathbf{A}_\tau(t)$ .

Проинтегрировав первое слагаемое из (1.16) по частям, и используя определение вектора напряжённости  $\mathbf{F}(t) = -\partial\mathbf{A}(t)/\partial t$  и ранее введённых векторов  $\mathbf{K}_\tau$  и  $\mathbf{K}'_\tau$ , получим:

$$\mathbf{G}(\Omega) = \frac{e^{-i\Omega t}}{2\Omega^2} \mathbf{K}_\tau(t, t') - \frac{e^{-i\Omega t'}}{2\Omega^2} \mathbf{K}'_\tau(t, t') + \frac{1}{2\Omega^2} \int_{t'}^t \mathbf{F}_\tau(\xi) e^{-i\Omega\xi} d\xi, \quad (1.20)$$

где

$$\mathbf{K}_\tau(t, t') = \mathbf{A}_\tau(t) - \frac{1}{t-t'} \int_{t'}^t \mathbf{A}_\tau(\xi) d\xi, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{K}'_\tau(t, t') = \mathbf{A}_\tau(t') - \frac{1}{t-t'} \int_{t'}^t \mathbf{A}_\tau(\xi) d\xi, \quad (1.22)$$

$$\mathbf{F}_\tau(t) = -\frac{\partial\mathbf{A}_\tau(t)}{\partial t}. \quad (1.23)$$

С учётом вышеописанных приближений подставим (1.19) в (1.9) и, вычислив предел (1.10), получим  $\mathbf{D}(\Omega)$  в виде трёх слагаемых, каждое из которых определяется в соответствии с выражением (1.20):

$$\mathbf{D}(\Omega) = \mathbf{D}_1(\Omega) + \mathbf{D}_2(\Omega) + \mathbf{D}_3(\Omega). \quad (1.24)$$

Первое слагаемое в (1.24) имеет вид:

$$\mathbf{D}_1(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}_1(t) e^{i\Omega t} dt, \quad (1.25a)$$

$$\mathbf{D}_1(t) = -i\mathcal{C}g(\Omega) \int_{-\infty}^t \mathcal{G}_{-I_p}(t, t') \mathbf{K}(t, t') dt', \quad (1.25b)$$

$$S(t, t') = -\frac{1}{2} \int_{t'}^t \left[ \mathbf{A}(\xi) - \frac{1}{t-t'} \int_{t'}^t \mathbf{A}(\xi') d\xi' \right]^2 d\xi - I_p(t-t'), \quad (1.25c)$$

$$\mathbf{K}(t, t') = \mathbf{A}(t) - \frac{1}{t-t'} \int_{t'}^t \mathbf{A}(\xi) d\xi, \quad (1.25d)$$

$$g(\Omega) = \frac{1}{2\Omega^2} + \frac{a(-\Omega)}{\mathcal{B}_1(-I_p + \Omega) - i\kappa_\Omega^3/3},$$

$$a(-\Omega) = \frac{1}{2\Omega} \left[ \kappa + i \frac{(2\Omega - 2I_p)^{3/2}}{3\Omega} - \frac{\kappa^3}{3\Omega} \right],$$

$$\kappa_\Omega = \sqrt{2(\Omega - I_p)}, \quad \mathcal{C} = C_\kappa^2 \kappa / \pi,$$

где  $\mathbf{A}(t)$ —векторный потенциал лазерного импульса,  $\mathcal{G}_{-I_p}(t, t')$  задаётся уравнением (1.6b),  $I_p = \kappa^2/2$ —потенциал ионизации.

Второе слагаемое имеет вид:

$$\mathbf{D}_2(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}_2(t) dt, \quad (1.26)$$

$$\mathbf{D}_2(t) = -i \frac{\mathcal{C}}{2\Omega^2} \int_{-\infty}^t \mathcal{G}_{-I_p}(t, t') \mathbf{K}'(t, t') e^{i\Omega t'} dt', \quad (1.27)$$

$$\mathbf{K}'(t, t') = \mathbf{A}(t') - \frac{1}{t - t'} \int_{t'}^t \mathbf{A}(\xi) d\xi. \quad (1.28)$$

Для случая  $I_p \gg \omega$  ( $\omega$  — несущая частота поля) интеграл по  $t'$  в выражениях, определяющих  $\mathbf{D}_1(\Omega)$  и  $\mathbf{D}_2(\Omega)$ , может быть оценён методом перевала. Уравнения для нахождения точек перевала вытекают из условия равенства нулю первой производной по  $t'$  подынтегрального выражения в (1.27):

$$\mathbf{K}'^2(t, t')/2 = -(I_p + \Omega), \quad (1.29)$$

и подынтегрального выражения в (1.25b):

$$\mathbf{K}'^2(t, t')/2 = -I_p. \quad (1.30)$$

Видно, что решение уравнения (1.29) имеет большую мнимую часть, чем соответствующее решение уравнения (1.30), из чего следует экспоненциальная малость  $\mathbf{D}_2(t)$  относительно  $\mathbf{D}_1(t)$ , соответственно в (1.24) слагаемое  $\mathbf{D}_2(\Omega)$  можно опустить. Физически дипольный момент  $\mathbf{D}_2(\Omega)$  описывает генерацию гармоник в канале, в котором связанный электрон испускает гармонику, а затем недостающую энергию набирает из сильного лазерного поля. Очевидно, что такой канал существенно подавлен [84].

Третье слагаемое имеет вид:

$$\mathbf{D}_3(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{D}_3(t) dt, \quad (1.31)$$

$$\mathbf{D}_3(t) = -i \frac{c}{2\Omega^2} \int_{-\infty}^t \mathcal{G}_{-I_p}(t, t') \int_{t'}^t \mathbf{F}(\xi) e^{i\Omega\xi} d\xi dt', \quad (1.32)$$

где  $\mathbf{F}(t) = -\partial\mathbf{A}(t)/\partial t$ . В случае  $\Omega \gg I_p \gg \omega$  интеграл (1.32) также имеет малость по сравнению с интегралом (1.25b). Потенциал внешнего лазерного поля  $\mathbf{A}(t)$  имеет порядок  $F/\omega$ , а интеграл по  $\xi$  в (1.32) имеет порядок  $F/\Omega$ . Таким образом,  $\mathbf{D}_3(t)$  меньше  $\mathbf{D}_1(t)$  в  $\Omega/\omega$  раз, а значит в (1.24) слагаемое  $\mathbf{D}_3(\omega)$  также можно опустить.

Таким образом, основной вклад в дипольный момент, представленный в виде суммы трёх слагаемых (см. (1.24)), даёт только первое слагаемое.

### 1.3. Выводы к первой главе

В первой главе развита модель эффективного радиуса с двумя связанными состояниями в сильном лазерном поле с произвольной огибающей, в рамках которого получены общие уравнения на комплексную квазиэнергию (1.7a), (1.7b). Предложен адиабатический подход для нахождения комплексной квазиэнергии. Получено выражение для амплитуды генерации высших гармоник в низкочастотном пределе. Основные результаты данной главы опубликованы в работе [145].



## Глава 2

## Адиабатическое приближение для амплитуды фотоотрыва и кулоновских факторов

Процессы надпороговой ионизации (НПИ) и генерации высших гармоник возникают в результате нелинейного взаимодействия интенсивного лазерного излучения с атомными и молекулярными системами. Для корректного описания процессов НПИ и ГВГ, необходимо учитывать как взаимодействие оптического электрона с лазерным излучением, так и взаимодействие с атомным остовом. Учёт обоих взаимодействий возможен при численном интегрировании уравнения Шредингера, однако в случае низкочастотных интенсивных лазерных полей такое интегрирование является крайне временнотратным процессом. Основным подходом для теоретического описания процессов в сильном лазерном поле является приближение сильного поля [2]. В рамках этого подхода взаимодействие оптического электрона с лазерным полем учитывается точно, а с атомным остовом — пертурбативно. Впервые на возможность непертурбативного учёта взаимодействия электрона с атомным остовом было указано в статье [88], а в дальнейшем такой подход был развит в работах [94] и [93]). Основная идея этого подхода заключается в «коррекции» квазиклассических траекторий, определяющих вклад в вероятность ионизации, за счёт учёта взаимодействия электрона с атомным остовом. В данной главе в рамках адиабатического приближения ( $\gamma \ll 1$ , где  $\gamma = \frac{\kappa\omega}{F}$  — параметр Келдыша) аналитически вычисляется кулоновская поправка к вероятности ионизации атома сильным низкочастотным лазерным полем [88,91,93,94,146].

# 1. Амплитуда фотоотрыва в адиабатическом пределе

Рассмотрим амплитуду фотоотрыва в сильном лазерном поле в приближении Келдыша [78–82, 94, 144]:

$$\mathcal{A}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_l(\mathbf{p}, t) e^{iS(\mathbf{p}, t)} dt, \quad (2.1)$$

$$S(\mathbf{p}, t) = \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{p} + \mathbf{A}(t')]^2 + I_p \right\} dt', \quad (2.2)$$

где  $f_l(\mathbf{p}, t)$  — некоторая гладкая предэкспоненциальная функция, явный вид которой зависит от пространственной симметрии электрона в начальном состоянии ( $l$  — орбитальный момент электрона в начальном состоянии),  $\mathbf{p}$  — импульс фотоэлектрона,  $\mathbf{A}(t)$  — векторный потенциал лазерного поля,  $I_p$  — потенциал ионизации. В низкочастотном пределе интеграл (2.1) можно оценить методом перевала:

$$\mathcal{A}(\mathbf{p}) = \sum_{\nu} a_{\nu}(\mathbf{p}), \quad (2.3)$$

$$a_{\nu}(\mathbf{p}) = \frac{f_l(\mathbf{p}, t_{\nu}) e^{iS(\mathbf{p}, t_{\nu})}}{\sqrt{2\pi i (\mathbf{V}(t_{\nu}) \cdot \mathbf{F}(t_{\nu}))}}, \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{V}(t) = \mathbf{p} + \mathbf{A}(t)$  — обобщённый импульс электрона,  $\mathbf{F}(t) = -\partial \mathbf{A}(t) / \partial t$  — напряжённость лазерного поля, индекс  $\nu$  нумерует перевальные решения, удовлетворяющие уравнению:

$$[\mathbf{p} + \mathbf{A}(t_{\nu})]^2 + 2I_p = 0. \quad (2.5)$$

Решениями уравнения (2.5) могут быть только комплексные числа,  $t_{\nu}(\mathbf{p}) \equiv t_{\nu} = \bar{t}_{\nu} + i\Delta_{\nu}$ , где  $\bar{t}_{\nu}$  и  $\Delta_{\nu}$  вещественны. Отметим, что только корни с положительной мнимой частью ( $\Delta_{\nu} > 0$ ) должны быть включены в сумму (2.3), так как переход происходит из низколежащего в высоколежащее состояние [147].

Адиабатическое приближение основывается на малости параметра Келдыша  $\gamma$  [78]. В туннельном пределе ( $\gamma \ll 1$ ) время подбарьерного движения электрона мало, поэтому  $\omega\Delta_\nu \ll 1$  [80, 125, 131, 134, 148]. Разложим уравнение (2.5) в ряд по адиабатическому параметру  $\Delta_\nu$ . Сохраняя члены до второго порядка, получим:

$$\mathbf{V}_\nu^2 - 2i\Delta_\nu \mathbf{V}_\nu \cdot \mathbf{F}_\nu - \Delta_\nu^2 \left( \mathbf{F}_\nu^2 - \mathbf{V}_\nu \cdot \dot{\mathbf{F}}_\nu \right) + \kappa^2 = 0, \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{V}_\nu \equiv \mathbf{V}(\bar{t}_\nu)$ ,  $\mathbf{F}_\nu \equiv \mathbf{F}(\bar{t}_\nu)$ , и  $\dot{\mathbf{F}}_\nu \equiv \partial \mathbf{F}(t)/\partial t|_{t=\bar{t}_\nu}$ . Приравнивая по отдельности мнимую и действительную части уравнения (2.6) к нулю, мы получим соответственно уравнение для  $\bar{t}_\nu$ :

$$\mathbf{V}_\nu \cdot \mathbf{F}_\nu = 0, \quad (2.7)$$

и выражение для  $\Delta_\nu$ :

$$\Delta_\nu = \frac{\varkappa_\nu}{\mathcal{F}_\nu}, \quad (2.8)$$

где

$$\varkappa_\nu = \sqrt{\kappa^2 + \mathbf{V}_\nu^2}, \quad (2.9a)$$

$$\mathcal{F}_\nu = \sqrt{\mathbf{F}_\nu^2 - \mathbf{V}_\nu \cdot \dot{\mathbf{F}}_\nu}. \quad (2.9b)$$

Так как  $\Delta_\nu$  должно оставаться вещественным, то необходимо выполнение условия  $\mathbf{F}_\nu^2 - \mathbf{V}_\nu \cdot \dot{\mathbf{F}}_\nu > 0$ . С математической точки зрения это означает, что вторая производная от левой части уравнения (2.7) будет больше нуля. Уравнение (2.7) в свою очередь представляет собой условие на экстремум кинетической энергии фотоэлектрона в лазерном поле. Таким образом, из вышеупомянутых условий видно, что в момент времени  $t = \bar{t}_\nu$  кинетическая энергия электрона минимальна. Раскладывая выражение (2.2) в ряд по  $\Delta_\nu$  и сохраняя члены до третьего порядка, получим:

$$S(\mathbf{p}, t_\nu) \approx S(\mathbf{p}, \bar{t}_\nu) + i \frac{\varkappa_\nu^3}{3\mathcal{F}_\nu}. \quad (2.10)$$

Также разложим в ряд (2.4) по  $\Delta_\nu$  до первого порядка и с учётом уравнения (2.7) получим:

$$\mathbf{V}(t_\nu) \cdot \mathbf{F}(t_\nu) \approx -i\Delta_\nu \mathcal{F}_\nu^2. \quad (2.11)$$

Принимая во внимание выражения (2.8), (2.10), и (2.11), получим соотношение для парциальной амплитуды фотоотрыва в адиабатическом пределе:

$$a_\nu(\mathbf{p}) = \frac{f_l(\mathbf{p}, \bar{t}_\nu) e^{iS(\mathbf{p}, \bar{t}_\nu)}}{\sqrt{2\pi \kappa_\nu \mathcal{F}_\nu}} e^{-\kappa_\nu^3/(3\mathcal{F}_\nu)}. \quad (2.12)$$

Рассматривая взаимосвязь скорости фотоэлектрона с адиабатическим параметром

$$\omega^2 \Delta_\nu^2 \sim \gamma^2 + \mathbf{V}_\nu^2/p_F^2 \quad (2.13)$$

и учитывая малость  $\omega \Delta_\nu \ll 1$ , видим, что кинетическая энергия электрона в момент выхода в континуум мала:  $\mathbf{V}_\nu^2 \ll p_F^2$ , где  $p_F = F/\omega$ . Как правило, в практических вычислениях, квадрат скорости  $\mathbf{V}_\nu^2$  не значительно превышает значение  $\kappa^2$ .

В качестве примера рассмотрим два случая: линейная поляризация поля (ЛП) и циркулярная поляризация поля (ЦП). Для ЛП поля  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{e}_z F \cos \omega t$ , и уравнение (2.7) принимает вид:

$$p_z - p_F \sin \omega \bar{t}_\nu = 0, \quad (2.14)$$

где  $p_z = (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_z)$ ,  $p_F = F/\omega$  — импульс поля. Решения уравнения (2.14) имеют вид:

$$\omega \bar{t}_\nu^{(+)} = \arcsin \frac{p_z}{p_F} + 2\pi\nu, \quad (2.15a)$$

$$\omega \bar{t}_\nu^{(-)} = \pi - \arcsin \frac{p_z}{p_F} + 2\pi\nu. \quad (2.15b)$$

В этом случае, для любого  $\nu$ :

$$\mathbf{V}_{\text{lin}}^2 = \mathbf{V}_\nu^2 = p_\perp^2 = p^2 - p_z^2, \quad (2.16a)$$

$$\varkappa_{\text{lin}} = \varkappa_\nu = \kappa \sqrt{1 + (p_\perp/\kappa)^2}, \quad (2.16b)$$

$$\mathcal{F}_{\text{lin}} = \mathcal{F}_\nu = F \sqrt{1 - (p_z/p_F)^2}, \quad (2.16c)$$

$$\omega \Delta_{\text{lin}} = \omega \Delta_\nu = \gamma \sqrt{\frac{1 + (p_\perp/\kappa)^2}{1 - (p_z/p_F)^2}}. \quad (2.16d)$$

Из выражений для  $\mathcal{F}_\nu$  и  $\varkappa_\nu$  видно, что распределение фотоэлектронов по импульсам, определяемое квадратом модуля парциальной амплитуды  $|a_\nu(\mathbf{p})|^2$  [см. вид  $a_\nu(\mathbf{p})$  в (2.12)], будет иметь максимум при  $p_\perp = 0$  и  $p_z = 0$ . В пределе  $p_\perp \ll \kappa$ ,  $p_z \ll p_F$ , выражение (2.16b) и (2.16c) может быть разложено в ряд по степеням  $(p_z/p_F)^2$  и  $(p_\perp/\kappa)^2$ . Нетрудно убедиться, что в этом случае распределение по импульсам имеет гауссовский вид [80, 149, 150].

Для ЦП поля,  $\mathbf{F}(t) = F(\mathbf{e}_x \cos \omega t + \mathbf{e}_y \sin \omega t)$ , уравнение для  $\bar{t}_\nu$ , вытекающее из (2.7), упрощается, т.к.  $\mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{A}(t) = 0$ :

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{F}_\nu = p_{\parallel} F \cos(\omega \bar{t}_\nu - \varphi) = 0, \quad (2.17)$$

где  $\varphi$  — угол между осью  $X$  и проекцией импульса фотоэлектрона на плоскость поляризации ( $\mathbf{p}_{\parallel}$ ). Искомое решение уравнения (2.17)

$$\omega \bar{t}_\nu = \frac{\pi}{2} + \varphi + 2\pi\nu, \quad (2.18)$$

приводит к следующему результату:

$$\mathbf{V}_\nu^2 = (p_{\parallel} - p_F)^2 + p_\perp^2, \quad \mathcal{F}_\nu = F \sqrt{p_{\parallel}/p_F}, \quad (2.19a)$$

$$\omega \Delta_\nu = \sqrt{\frac{\gamma^2 + (1 - p_{\parallel}/p_F)^2 + (p_\perp/p_F)^2}{p_{\parallel}/p_F}}, \quad (2.19b)$$

$$\varkappa_\nu = \sqrt{\kappa^2 + p_\perp^2 + (p_{\parallel} - p_F)^2}, \quad (2.19c)$$

где  $p_\perp^2 = p^2 - p_z^2$ . Видно, что в отличие от случая линейной поляризации, парциальная амплитуда  $a_\nu(\mathbf{p})$  для поля с циркулярной поляризацией име-

ет максимум при  $p_{\parallel} = p_F$ ,  $p_{\perp} = 0$  [79, 80]. Около  $p_{\parallel} = p_F$  распределение является гауссовским и обладает осевой симметрией относительно направления распространения лазерного поля. Отметим, что полученные соотношения применимы, если  $p_{\perp} < \kappa$  и  $p_{\parallel} < p_F$ .

## 2. Кулоновский фактор для парциальной амплитуды фотоотрыва в адиабатическом приближении

Учёт кулоновского взаимодействия возможен в рамках квазиклассического приближения [88], подробное описание которого приведено в работах [94, 150, 151]. Общий алгоритм вычисления кулоновского фактора может быть разбит на четыре шага.

Первым шагом является определение траектории электрона,  $\mathbf{r}(t)$ , удовлетворяющей граничным условиям в лазерном поле,  $\mathbf{F}(t)$ . В уравнении (2.4) функция в показателе экспоненты,  $S(\mathbf{p}, t_{\nu})$ , определяет классическое действие электрона, движущегося в лазерном поле  $\mathbf{F}(t)$  вдоль траектории, удовлетворяющей уравнению Ньютона и граничным условиям:

$$\left. \left( \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} \right)^2 \right|_{t=t_{\nu}} = -\kappa^2, \quad \mathbf{r}(t_{\nu}) = \mathbf{0}. \quad (2.20)$$

В адиабатическом пределе ( $\omega\Delta_{\nu} \ll 1$ ) траекторию движения электрона достаточно рассмотреть в пределе малых времён, ограниченных лазерным периодом  $T$ :  $|t - t_{\nu}| \ll T$ . Разложим скорость частицы в окрестности точки  $t = \bar{t}_{\nu}$  по параметру  $\tau = t - \bar{t}_{\nu}$ :

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{p} + \mathbf{A}(t) \approx \mathbf{V}_{\nu} - \mathbf{F}_{\nu}\tau - \dot{\mathbf{F}}_{\nu}\frac{\tau^2}{2}. \quad (2.21)$$

Интегрируя уравнение (2.21) по  $\tau$  и учитывая начальное условие для  $\tau = i\Delta_{\nu}$ ,

получим искомую траекторию:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{V}_\nu(\tau - i\Delta_\nu) - \frac{\mathbf{F}_\nu}{2}(\tau^2 + \Delta_\nu^2) - \frac{\dot{\mathbf{F}}_\nu}{6}(\tau^3 + i\Delta_\nu^3). \quad (2.22)$$

Следующим шагом является нахождение точек ветвления,  $t^{(\text{bp})}$ , функции  $\sqrt{\mathbf{r}^2(t)}$  в комплексной плоскости, удовлетворяющих условию  $\mathbf{r}^2(t^{(\text{bp})}) = 0$ . Для удобства введем новую переменную  $\xi$ :  $\tau = i\xi$ , так что  $\mathbf{r}_c(\xi) \equiv \mathbf{r}(\bar{t}_\nu + i\xi)$  принимает вид:

$$\mathbf{r}_c(\xi) = i\mathbf{V}_\nu(\xi - \Delta_\nu) + \frac{\mathbf{F}_\nu}{2}(\xi^2 - \Delta_\nu^2) + i\frac{\dot{\mathbf{F}}_\nu}{6}(\xi^3 - \Delta_\nu^3). \quad (2.23)$$

Используя уравнения (2.7)–(2.9) и (2.23), представим  $\mathbf{r}_c^2(\xi)$  в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_c^2(\xi) = & (\xi - \Delta_\nu)^2 \left[ \kappa^2 + (\xi - \Delta_\nu)\Delta_\nu\mathcal{F}_\nu^2 + \right. \\ & \left. \frac{(\xi - \Delta_\nu)^2}{4} \left( \mathcal{F}_\nu^2 - \frac{\mathbf{V}_\nu \cdot \dot{\mathbf{F}}_\nu}{3} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.24)$$

в котором все члены  $\Delta_\nu$  (а также  $\omega\Delta_\nu$ ) были отброшены (если они не определяют главный член разложения). Уравнение (2.24) явно показывает, что  $\mathbf{r}_c^2(\xi)$  ведет себя квадратично при  $\xi \rightarrow \Delta_\nu$ :

$$\mathbf{r}_c^2(\xi) \approx \kappa^2(\xi - \Delta_\nu)^2. \quad (2.25)$$

Кроме того, функция в квадратной скобке в (2.24) равна нулю при  $\xi = \xi_{\pm}^{(\text{bp})}$ :

$$\xi_{\pm, \nu}^{(\text{bp})} = -\Delta_\nu \frac{\mathcal{F}_\nu^2 + \mathbf{V}_\nu \cdot \dot{\mathbf{F}}_\nu/3}{\mathcal{F}_\nu^2 - \mathbf{V}_\nu \cdot \dot{\mathbf{F}}_\nu/3} \pm 2 \frac{\sqrt{\mathbf{V}_\nu^2 \mathcal{F}_\nu^2 + \kappa^2 \mathbf{V}_\nu \cdot \dot{\mathbf{F}}_\nu/3}}{\mathcal{F}_\nu^2 - \mathbf{V}_\nu \cdot \dot{\mathbf{F}}_\nu/3}. \quad (2.26)$$

Используя соотношение (2.9b), преобразуем знаменатель в (2.26) к виду:

$$\mathcal{F}_\nu^2 - \frac{\mathbf{V}_\nu \cdot \dot{\mathbf{F}}_\nu}{3} = \frac{4}{3} \left( \mathcal{F}_\nu^2 - \frac{\mathbf{F}_\nu^2}{4} \right).$$

Таким образом, мы получили выражение для точек ветвления  $t_{\pm, \nu}^{(\text{bp})} = \bar{t}_\nu + i\xi_{\pm, \nu}^{(\text{bp})}$ .

Третий шаг в определении кулоновского фактора заключается в вычислении действия вдоль найденной траектории  $\mathbf{r}(t)$ :

$$\delta S(\zeta) = \int_{\mathcal{C}} \frac{Z}{\sqrt{\mathbf{r}^2(t)}} dt, \quad (2.27)$$

где  $Z$  — заряд атомного остова ( $Z = 0$  и  $1$  для отрицательных ионов и нейтральных атомов соответственно). Полубесконечный контур интегрирования,  $\mathcal{C}$ , выбирается так, чтобы он не пересекал линии разрезом, исходящих от точек ветвления  $t^{(\text{bp})}$ . Интеграл (2.27) является логарифмически расходящимся в седловой точке, поэтому путь интегрирования должен стартовать с комплексного времени  $t = \zeta$  близкого к  $t_\nu$ . Значение  $\zeta$  будет исключено из окончательного результата с помощью процедуры регуляризации [94, 150, 151]. Регуляризация  $\delta S$  состоит в вычислении предела:

$$\Delta S_\nu(\mathbf{p}) = \lim_{\zeta \rightarrow t_\nu} \left( \delta S(\zeta) + i \frac{Z}{\kappa} \ln |\kappa^2(\zeta - t_\nu)| \right); \quad (2.28)$$

Выбор контура интегрирования  $\mathcal{C}$  является сложной задачей, так как при его построении необходимо обойти все точки ветвления. Примеры анализа расположения точек ветвления и полюсов можно найти в работах [152, 153]. Из выражения для  $\mathbf{r}_c^2(\xi)$  (2.24) видно, что интеграл (2.27) расходится логарифмически при  $\zeta \rightarrow t_\nu$  [88]. За исключением этой седловой точки,  $t_\nu$ , которая определяет устранимый полюс первого порядка посредством процедуры регуляризации, большая часть нулей функции  $\mathbf{r}^2(t)$  связаны с возможностью перерасеяния электрона на атомном остове [153]. Как показано в [153], вклад эффектов перерасеяния может существенно повлиять на спектр фотоэлектронов. В нашем анализе можно пренебречь вкладом от этих точек ветвления, так как в рассматриваемом адиабатическом пределе эти эффекты малы.

Найденные точки ветвления,  $t_{\pm, \nu}^{(\text{bp})} = \bar{t}_\nu + i \xi_{\pm, \nu}^{(\text{bp})}$ , располагаются на вертикальной линии  $\text{Re } t = \bar{t}_\nu$ . Для решений, обозначенных индексом “+”, с увеличением  $V_\nu$  точки ветвления движутся вдоль этой линии в положительном



направлении, а для решений с индексом “—” — в отрицательном направлении (см. рисунок 2.1). Таким образом, чтобы сделать подынтегральную функцию  $1/\sqrt{r^2(t)}$  однозначной, проведём в комплексной плоскости разрез, ограниченный точками  $t_{\pm, \nu}^{(\text{bp})}$  (см. рисунок 2.1).

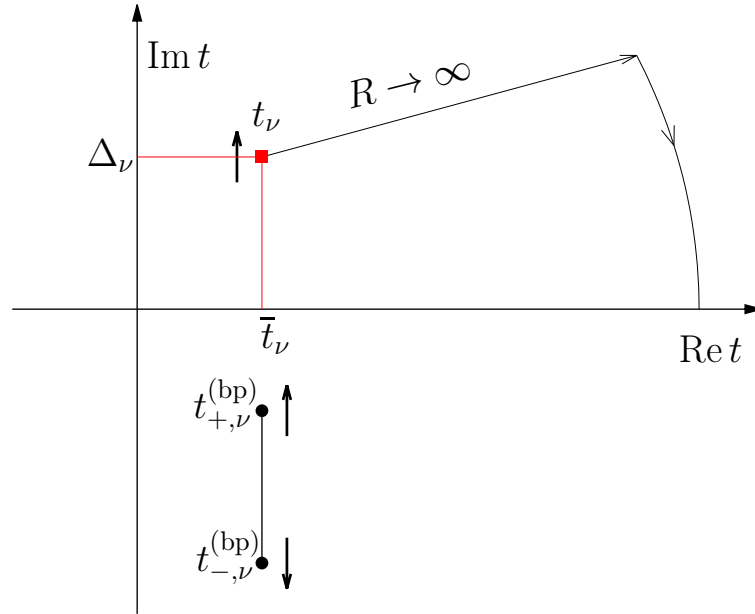


Рис. 2.1. Изображение седловой точки ( $t_\nu$ ) и точек ветвления ( $t_{\pm, \nu}^{(\text{bp})}$ ) на комплексной плоскости  $t$ . Вертикальный сегмент с конечными точками  $t_{\pm, \nu}^{(\text{bp})}$  является разрезом римановой поверхности. Стрелки показывают направления, в которых седловая точка и точки ветвления движутся с увеличением  $\mathbf{V}_\nu$ . Дуга, показанная тонкой сплошной линией, представляет собой возможный путь интегрирования

Поскольку  $1/\sqrt{r^2(t)} \propto 1/t^3$  для больших  $t$ , мы имеем право выбрать произвольный путь интегрирования, который позволяет избежать пересечения с разрезом. Данный контур должен начинаться вблизи точки  $t_\nu$  и заканчиваться в любой отдалённой точке на действительной оси. Например, путь интегрирования, показанный на рисунке 2.1 состоит из прямой полубесконечной линии, начинающейся с  $\zeta \approx t_\nu$ , и дуги бесконечно большого радиуса. Очевидно, что такое расположение седловых точек, ветвей и разрезов имеет

место только в случае  $\mathcal{F}_\nu^2 > \mathbf{F}_\nu^2/4$  и предполагает справедливость кубического приближения для  $\mathbf{r}(t)$ .

Если же  $\mathcal{F}_\nu^2 < \mathbf{F}_\nu^2/4$ , то положение точек ветвления изменится: точка  $t_{-, \nu}^{(\text{bp})}$  будет находиться над седловой точкой  $t_\nu$ , а точка  $t_{+, \nu}^{(\text{bp})}$  — ниже  $t_\nu$ . В особом случае, когда  $\mathcal{F}_\nu^2 = \mathbf{F}_\nu^2/4$ , одна точка ветвления ( $t_{-, \nu}^{(\text{bp})}$ ) находится на бесконечности, тогда как  $t_{+, \nu}^{(\text{bp})}$  находится чуть ниже седловой точки  $t_\nu$  в первом квадранте комплексной плоскости. С убыванием  $\mathbf{V}_\nu$ , точки ветвления движутся друг к другу по вертикальной линии  $t = \bar{t}_\nu$ , так что разрезы могут быть нарисованы как вертикальные линии от точек  $t_{-, \nu}^{(\text{bp})}$  (прямо вверх) и  $t_{+, \nu}^{(\text{bp})}$  (прямо вниз). Однако, этот случай реализуется только для  $\omega\Delta_\nu > 1$ , где адиабатическое приближение неприменимо.

Подставляя соотношение (2.24) в выражение (2.27), аналитически вычисляем интеграл (2.27) (см. [154]) и, используя уравнение (2.28), в пределе  $\zeta \rightarrow t_\nu$  получаем:

$$\Delta S_\nu = -i \frac{Z}{\kappa} \ln \left| \frac{4\kappa^3}{\mathcal{F}_\nu \left[ \sqrt{1 + \frac{\mathbf{V}_\nu^2}{\kappa^2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{F}_\nu^2}{4\mathcal{F}_\nu^2}} \right]} \right|. \quad (2.29)$$

Последним шагом является вычисление непосредственно самого кулоновского фактора. Если кулоновская поправка к действию является чисто мнимой величиной, то для всех веток решения  $\nu$  (как в случае монохроматических полей), кулоновский фактор для амплитуды фотоотрыва будет зависеть от импульса:

$$Q_\nu(\mathbf{p}) = e^{-\text{Im}\Delta S_\nu(\mathbf{p})}.$$

Подставляя в выражение для кулоновского фактора вычисленное действие, получим:

$$Q_\nu = Q_{\text{stat}}^{(\nu)} \mathcal{R}^{(\nu)}, \quad (2.30)$$

где

$$Q_{\text{stat}}^{(\nu)} = \left( \frac{2\kappa^3}{F_\nu} \right)^{Z/\kappa}, \quad F_\nu = \sqrt{\mathbf{F}_\nu^2}, \quad (2.31)$$

$$\mathcal{R}^{(\nu)} = \left( \frac{2F_\nu}{\mathcal{F}_\nu \left[ \sqrt{1 + \frac{\mathbf{V}_\nu^2}{\kappa^2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{F}_\nu^2}{4\mathcal{F}_\nu^2}} \right]} \right)^{Z/\kappa}. \quad (2.32)$$

Учёт эффектов кулонова поля производится путём умножения каждой парциальной амплитуды  $a_\nu(\mathbf{p})$ , определяемой выражением (2.12) на коэффициент  $Q_\nu$ :

$$\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{p}) = \sum_\nu Q_\nu a_\nu(\mathbf{p}), \quad (2.33)$$

В пределе  $\mathbf{V}_\nu \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{R}^{(\nu)} \rightarrow 1$ , а  $Q_{\text{stat}}^{(\nu)}$  в (2.30) принимает вид известного кулоновского фактора в случае статического электрического поля [80, 155], но взятой для амплитуды поля в момент времени  $\bar{t}_\nu$ .

Для определения явного вида кулоновского фактора для ЛП и ЦП из общего результата (2.32) необходимо найти скалярное произведение  $\mathbf{V}_\nu \cdot \dot{\mathbf{F}}_\nu$ . Для ЛП это произведение имеет вид:

$$\mathbf{V}_\nu \cdot \dot{\mathbf{F}}_\nu = -F\omega \sin \omega \bar{t}_\nu (p_z - p_F \sin \omega \bar{t}_\nu), \quad (2.34)$$

и с учётом найденных решений (2.15) обращается в ноль:

$$\mathbf{V}_\nu \cdot \dot{\mathbf{F}}_\nu = 0, \quad (2.35)$$

Соответственно для ЦП с учётом (2.17) имеем:

$$\mathbf{V}_\nu \cdot \dot{\mathbf{F}}_\nu = F^2 \left( 1 - \frac{p_{\parallel}}{p_F} \right). \quad (2.36)$$

Используя тот факт, что для ЛП  $\mathbf{V}_\nu^2 = p_\perp^2$  [см. (2.16а)] и  $F_\nu^2 = \mathcal{F}_\nu^2$ , для случая

ЛП преобразуем уравнение (2.32) к виду :

$$\mathcal{R} = \left( \frac{2}{1 + \sqrt{1 + (p_{\perp}/\kappa)^2}} \right)^{Z/\kappa}, \quad (2.37)$$

Поскольку для ЛП поля выполняется соотношение (2.35) и  $\mathbf{V}_{\nu}$  имеет нулевую проекцию на ось поляризации, то из соотношения (2.26) следует, что  $\xi_{\pm, \nu}^{(\text{bp})} < 0$ , тогда контур интегрирования можно провести стандартным образом: вертикально вниз к реальной оси, а затем вдоль неё [93].

Исходя из того, что для ЛП  $F_{\nu}^2 = \mathcal{F}_{\nu}^2$ , преобразуем коэффициент  $Q_{\text{stat}}$  из (2.31) к виду:

$$Q_{\text{stat}}^{(\text{lin})} = \left( \frac{2\kappa^3}{F \sqrt{1 - (p_z/p_F)^2}} \right)^{Z/\kappa}. \quad (2.38)$$

Заметим, что  $Q_{\text{stat}}$  имеет особенность для  $p_z = p_F$ . Эта особенность указывает на ограничение адиабатического приближения для нахождения седловых точек. Действительно, для  $p_z > p_F$  уравнение (2.14) не может быть решено в действительных числах. Для  $p_z \rightarrow p_F$ ,  $\mathcal{F}_{\nu}$  стремится к нулю и условие адиабатичности нарушается [поскольку, согласно (2.16d),  $\omega\Delta_{\nu} \rightarrow \infty$ ]. В адиабатическом режиме с ростом  $p_z$  значения  $\omega\Delta_{\nu}$  и  $Q_{\text{stat}}^{(\text{lin})}$  увеличиваются. На рисунке 2.2(a) представлена зависимость  $\omega\Delta_{\nu}$  от  $p_z$  для трех значений  $p_{\perp}$ . Видно, что точность адиабатического кулоновского фактора уменьшается с увеличением  $p_{\perp}$  из-за увеличения параметра  $\omega\Delta_{\nu}$  (см. (2.16d)). На рисунке 2.2(b) представлена зависимость  $Q_{\text{stat}}^{(\text{lin})}$  от  $p_z$  (для ЛП статистический коэффициент не зависит от  $p_{\perp}$ ). Поскольку коэффициент  $\mathcal{R}$  уменьшается с увеличением  $p_{\perp}$  [и не зависит от  $p_z$  (2.37), см. рисунок 2.2(c)], кулоновский фактор уменьшается с увеличением  $p_{\perp}$ .

Для случая ЦП преобразуем коэффициент  $\mathcal{R}^{\nu}$  из (2.32), используя соот-

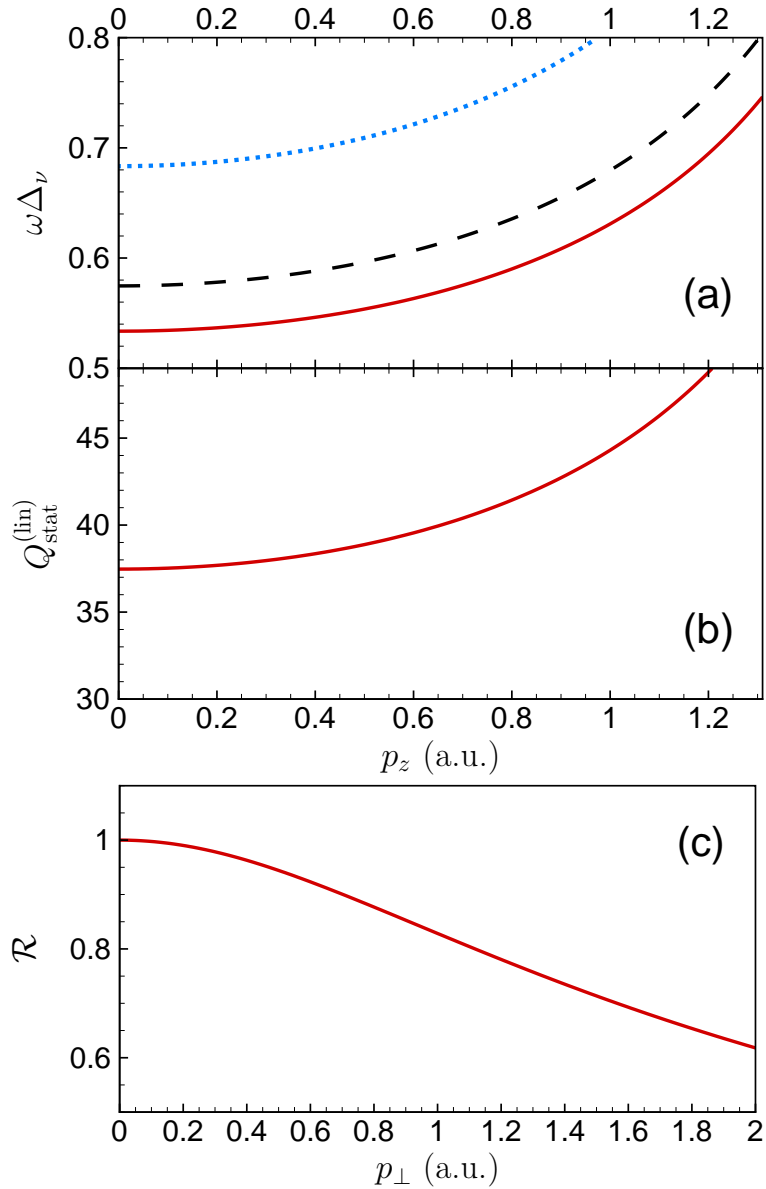


Рис. 2.2. Зависимость адиабатического параметра и кулоновских факторов для монохроматического ЛП поля от импульса фотоэлектрона. (а) Зависимость  $\omega\Delta\nu$  от  $p_z$  для трех значений  $p_{\perp}$  [см. (2.16d)]: Сплошная (красная) линия:  $p_{\perp} = 0$ ; пунктирная (чёрная) линия:  $p_{\perp} = 0.4\kappa$ ; прерывистая (синяя) линия:  $p_{\perp} = 0.8\kappa$ . (б) Зависимость  $Q_{\text{stat}}^{(\text{lin})}$  от  $p_z$  [см. (2.38)]. (с) Зависимость  $\mathcal{R}$  от  $p_{\perp}$  [см. (2.37)]. Расчёты приведены для следующих параметров:  $I = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\lambda = 1.6$  мкм,  $Z = 1$ ,  $\kappa = 1$  ат.ед., и  $\gamma = 0.53$

ношения (2.19a) и (2.19b), а также то, что  $\gamma = \kappa/p_F$ , и получим:

$$\mathcal{R} = \left( \frac{2\gamma}{\omega\Delta_\nu \frac{p_{\parallel}}{p_F} + \gamma \sqrt{\frac{4p_{\parallel}}{3p_F} - \frac{1}{3}}} \right)^{Z/\kappa}, \quad (2.39)$$

Заметим, что для  $p_{\parallel} = p_F$  результат (2.39) совпадает с  $\mathcal{R}$  для ЛП поля [см. (2.37)]. При выводе соотношения (2.39) было учтено, что для ЦП поля  $\mathbf{F}_\nu^2 = F^2$ . Это выражение также говорит о том, что  $Q_{\text{stat}}$  для ЦП поля не зависит от импульса в отличие от случая ЛП поля. Однако фактор  $\mathcal{R}$  имеет особенность при  $p_{\parallel} = p_F/4$ , так как в этом случае параметр  $\omega\Delta_\nu$  становится больше единицы, и адиабатическое приближение становится неприменимым.

На рисунке 2.3 представлена зависимость  $\omega\Delta_\nu$  и  $\mathcal{R}$  от  $p_{\parallel}$  для трех значений  $p_{\perp}$ . Ни одно из них не является симметричным по отношению к импульсу  $p_{\parallel} = p_F$ . Более того, минимум  $\omega\Delta_\nu$  при увеличении  $p_{\perp}$  смещается в сторону больших импульсов относительно  $p_{\parallel} = p_F$  [см. рисунок 2.3(a)].

Вероятность надпороговой ионизации (НПИ) определяется квадратом фактора (2.38). В случае ЛП поля эта величина задаётся выражением  $(1 - p_z^2/p_F^2)^{-Z/\kappa}$ , а значит влияние кулоновских факторов на спектры НПИ наиболее существенно для продольной электронной эмиссии. В качестве примера на рисунке 2.4 мы приводим сравнение экспериментальных данных по туннельной ионизации Ne [156] и Ar [157] с полученными аналитическими результатами с учетом и без учета кулоновских факторов. В расчетах использовалась гауссова огибающая для лазерных импульсов с пиковыми интенсивностями, длительностями импульсов и длинами волн лазеров, используемых в эксперименте:  $10^{15}$  Вт/см<sup>2</sup>, 50 фс, и 795 нм для [156], и  $1.5 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>, 25 фс, и 2 мкм для [157]. Теоретические результаты на рисунке 2.4(a) были проинтегрированы по импульсу  $p_{\parallel}$  и усреднены по фокусу. Представленные результаты на

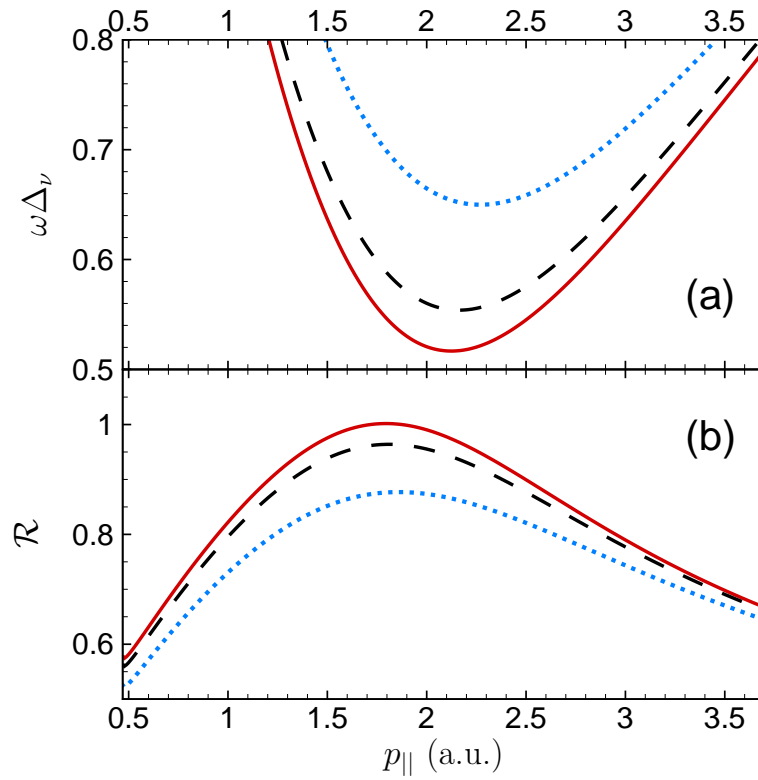


Рис. 2.3. Зависимость (а) параметра адиабатичности  $\omega\Delta_\nu$  (2.19b) и (б) кулоновского фактора  $\mathcal{R}$  (2.39) от  $p_{||}$  для монохроматического ЦП поля при фиксированных значениях  $p_{\perp}$ . Сплошная (красная) линия:  $p_{\perp} = 0$ ; пунктирная (чёрная) линия:  $p_{\perp} = 0.4\kappa$ ; прерывистая (синяя) линия  $p_{\perp} = 0.8\kappa$ . Расчёты приведены для следующих параметров:  $I = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\lambda = 1.6$  мкм,  $Z = 1$ ,  $\kappa = 1$  ат.ед.,  $\gamma = 0.53$ ,  $p_F = 1.87$  ат.ед., и  $Q_{\text{stat}}^{(\text{circ})} = 37.47$

рисунке 2.4(b) фокально усреднены для  $p_{\perp} = 0$ . Результаты теоретических расчётов были приведены к экспериментальным данным путём умножения абсолютных значений теоретических результатов на некоторые значения.

Экспериментальные фотоэлектронные спектры бесструктурны, т.е. не содержат интерференционных структур и четко определенных пиков НПИ, из-за фокального усреднения [156, 157]. Такие данные наиболее удобны для проверки точности адиабатического приближения, поскольку монотонное уменьшение выхода электронов [для  $p_{||} > 0.4$  ат.ед. на рисунке 2.4(a) и для  $p^2/2 > 0.3$  ат.ед. на рисунке 2.4(b)] позволяет сравнить наклоны теоретических и

экспериментальных спектров. На рисунке 2.4 мы видим расхождение результатов в низкоэнергетической области спектра, выраженных в виде широкого резонансноподобного пика. Это вызвано тем, что в этой области неприменимо адиабатическое приближение, в рамках которого пренебрегается вкладом от связанных атомных состояний и эффектов перерассеяния, порождающих появление резонансноподобного пика [92,158]. Из рисунка 2.4 и таблицы 1 видно, что теоретические результаты с учётом кулоновского фактора улучшают согласование с экспериментальными данными в диапазоне энергий электронов от нескольких эВ до  $\sim u_p = p_F^2/4$ . Для более высоких энергий фотоэлектронов (за пределами шкалы рисунке 2.4), адиабатическое приближение перестаёт правильно описывать поведение спектра.

Для атомов благородных газов с потенциалом ионизации сравнимым с потенциалом ионизации водорода эффективное главное квантовое число, определяющее величину кулоновских факторов,  $n^* = Z/\kappa$  порядка единицы, поэтому адиабатические кулоновские эффекты, показанные на рисунке 2.2–2.4, незначительны. Напротив, для щелочных атомов, которые имеют относительно небольшие потенциалы ионизации, ввиду увеличения эффективных главных квантовых чисел (например,  $n^* = 1.59, 1.63$  и  $1.87$  для Li, Na и Cs соответственно), возрастает роль кулоновских эффектов. Это увеличение ещё больше в случае многозарядных ионов, для которых  $n^* \simeq 3 - 4$ .



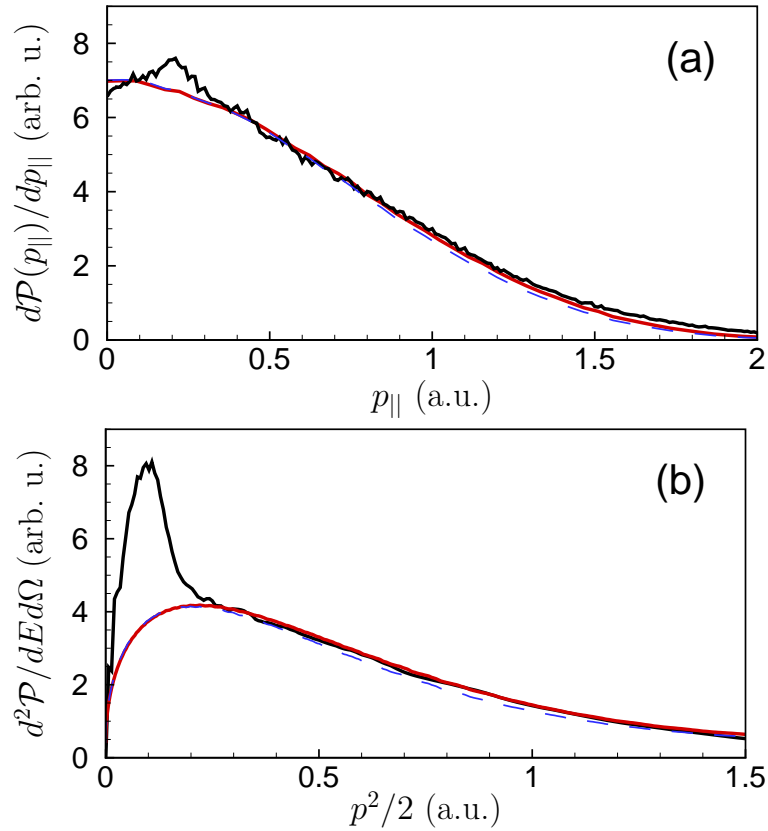


Рис. 2.4. Сравнение теоретических результатов с экспериментальными фотоэлектронными спектрами. (a) Продольное распределение импульсов фотоэлектронов для ионизации Ne линейно поляризованным лазерным полем с  $\lambda = 795$  нм и пиком интенсивности  $10^{15}$  Вт/см<sup>2</sup>. (b) Продольное распределение энергии фотоэлектронов для ионизации Ag линейно поляризованным лазерным полем с  $\lambda = 2$  мкм и пиком интенсивности  $1.5 \times 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>. Сплошные (чёрные) линии: экспериментальные данные, из (a) [157] (b) из [156]). Гладкие (красные) сплошные линии: представляют усреднённые фокальные результаты с учётом кулоновского фактора [см. (2.33)]. Пунктирные (синие) линии: представляют усреднённые фокальные результаты без учёта кулоновского фактора [см. (2.3) и (2.12)]

Таблица 1. Сравнение теоретических результатов с экспериментальными фотоэлектронными спектрами для Ne [157] и для Ar [156] для трех конкретных импульсов и трёх конкретных энергий фотоэлектронов. Теоретические результаты приведены с учётом кулоновского фактора (КФ) и без него. Параметры для расчётов те же, что на рис. 2.4.

$p_{  }$ (ат. ед.)	Эксп. данные [157]	С учётом КФ	Без учёта КФ
0.5	5.63	5.59	5.47
1	3.00	2.83	2.68
1.5	0.90	0.79	0.68

$p^2/2$ (ат. ед.)	Эксп. данные [156]	С учётом КФ	Без учёта КФ
0.5	3.22	3.31	3.13
1	1.43	1.45	1.28
1.5	0.52	0.64	0.57

### 3. Выводы ко второй главе

Во второй главе приведены основные положения о расчёте амплитуды фотоотрыва в адиабатическом пределе для случая низкочастотного интенсивного лазерного поля, когда параметр Келдыша  $\gamma$  мал. В адиабатическом пределе получено явное выражение для кулоновского фактора для амплитуды фотоотрыва и проведён топологический анализ расположения точек ветвления функции  $1/\sqrt{r^2(t)}$  в комплексной плоскости времени. Найдены траектории движения точек ветвления, и на их основании построен контур интегрирования для вычисления кулоновского фактора. Рассмотрены случаи линейной и циркулярной поляризации, для которых приведены явные выра-

жения для кулоновского фактора. Проведено сравнение развитой адиабатической теории с существующими экспериментальными данными [156,157], которое указывает на высокую точность адиабатического подхода. Основные результаты главы опубликованы в работе [39].

## Глава 3

## Адиабатическое приближение для ГВГ

## 1. Аналитическое выражение для индуцированного

## дипольного момента в адиабатическом приближении

Интеграл, определяющий дипольный момент (1.25b), выражение для которого было получено в первой главе, может быть вычислен приближённо методом перевала. Перевальные точки ( $t'_\nu$ ) находятся из уравнения:

$$\left. \frac{\partial S(t, t')}{\partial t'} \right|_{t'=t'_\nu} = 0, \text{ или } \mathbf{K}'^2(t, t'_\nu) = -2I_p, \quad (3.1)$$

где  $t'_\nu \equiv t'_\nu(t)$ —это  $\nu$ -ый комплексный корень уравнения. Отметим, что мы рассматриваем только те корни  $t'_\nu$ , которые имеют положительную мнимую часть, так как адиабатический переход в состояние континуума осуществляется из связанного состояния с отрицательной энергией  $-I_p$  [143].

После интегрирования методом перевала по  $t'$ ,  $\mathbf{D}(t)$  принимает вид:

$$\mathbf{D}(t) \approx -i \frac{C_{\kappa\kappa}^2}{\pi} \sum_{\nu} \frac{e^{iS(t, t'_\nu)} \mathbf{K}(t, t'_\nu)}{(t - t'_\nu)^{3/2} \sqrt{\alpha_\nu(t)}} g(\Omega), \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \alpha_\nu(t) &= \left. \frac{\partial^2 S(t, t')}{\partial t'^2} \right|_{t'=t'_\nu(t)} = \mathbf{K}'(t, t') \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{K}'(t, t')}{\partial t'} \right|_{t'=t'_\nu(t)} \\ &= - \left[ \mathbf{F}(t'_\nu) \cdot \mathbf{K}'(t, t'_\nu) + \frac{2I_p}{t - t'_\nu} \right]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подставляя (3.2) в (1.25а), получим:

$$\mathbf{D}(\Omega) = -i \frac{C_{\kappa\kappa}^2}{\pi} \sum_{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iS_\nu(t)} \mathbf{K}(t, t'_\nu)}{(t - t'_\nu)^{3/2} \sqrt{\alpha_\nu(t)}} g(\Omega) dt, \quad (3.4)$$

где

$$\mathcal{S}(t, t') = S(t, t') + \Omega t, \quad (3.5)$$

$$S(t, t') = -\frac{1}{2} \int_{t'}^t \left[ \mathbf{A}(\xi) - \frac{1}{t-t'} \int_{t'}^t \mathbf{A}(\xi') d\xi' \right]^2 d\xi - I_p(t-t'), \quad (3.6)$$

Так как вклад корней  $t'_\nu(t)$  в сумму по  $\nu$  в уравнении (3.4) определяется их мнимой частью, то наибольший вклад дают корни с наименьшей мнимой частью. Поэтому удобно представить время  $t'_\nu$  в виде суммы  $t'_\nu = \bar{t}'_\nu + i\Delta t'_\nu$ , где  $\bar{t}'_\nu$  и  $\Delta t'_\nu$  — действительные числа,  $0 < \omega \Delta t'_\nu \ll 1$ ,  $\omega$  — несущая частота лазерного импульса. Подставляя  $t'_\nu$  в уравнение (3.1) и раскладывая левую часть этого уравнения по  $i\Delta t'_\nu$  до второго порядка, получаем:

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}'(t, \bar{t}'_\nu)^2 + i2\Delta t'_\nu \mathbf{K}'(t, \bar{t}'_\nu) \cdot \dot{\mathbf{K}}'(t, \bar{t}'_\nu) \\ & - (\Delta t'_\nu)^2 \left[ \dot{\mathbf{K}}'(t, \bar{t}'_\nu)^2 + \mathbf{K}'(t, \bar{t}'_\nu) \cdot \ddot{\mathbf{K}}'(t, \bar{t}'_\nu) \right] = -\kappa^2, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где  $\dot{\mathbf{K}}'(t, \bar{t}'_\nu) = \partial \mathbf{K}'(t, t') / \partial t' |_{t'=\bar{t}'_\nu}$ , и  $\ddot{\mathbf{K}}'(t, \bar{t}'_\nu) = \partial^2 \mathbf{K}'(t, t') / \partial t'^2 |_{t'=\bar{t}'_\nu}$ . Разделяя действительную и мнимую части в (3.7), получаем два уравнения:

$$\mathbf{K}'(t, \bar{t}'_\nu) \cdot \dot{\mathbf{K}}'(t, \bar{t}'_\nu) = \frac{\partial^2 S(t, t')}{\partial t'^2} \Big|_{t'=\bar{t}'_\nu} = 0, \quad (3.8a)$$

$$(\Delta t'_\nu)^2 \mathcal{F}^2 = \varkappa(t, \bar{t}'_\nu)^2, \quad (3.8b)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \sqrt{\dot{\mathbf{K}}'(t, \bar{t}'_\nu)^2 + \mathbf{K}'(t, \bar{t}'_\nu) \cdot \ddot{\mathbf{K}}'(t, \bar{t}'_\nu)}, \\ \varkappa(t, \bar{t}'_\nu) &= \sqrt{\kappa^2 + \mathbf{K}'(t, \bar{t}'_\nu)^2}. \end{aligned}$$

Уравнение (3.8b) определяет время движения под барьером:

$$\Delta t'_\nu = \frac{\varkappa(t, \bar{t}'_\nu)}{\mathcal{F}}. \quad (3.9)$$

Упрощение  $\mathcal{F}$  достигается с помощью уравнения (3.8a) и соотношений:

$$\dot{\mathbf{K}}'(t, \bar{t}'_\nu) = -\mathbf{F}(\bar{t}'_\nu) + \frac{\mathbf{K}'(t, \bar{t}'_\nu)}{t - t'_\nu}, \quad (3.10)$$

$$\ddot{\mathbf{K}}'(t, \bar{t}'_\nu) = -\dot{\mathbf{F}}(\bar{t}'_\nu) - \frac{\mathbf{F}(\bar{t}'_\nu)}{t - t'_\nu} + \frac{2\mathbf{K}'(t, \bar{t}'_\nu)}{[t - t'_\nu]^2}, \quad (3.11)$$

которые приводят  $\mathcal{F}$  к виду:

$$\mathcal{F} = \sqrt{\mathbf{F}(\bar{t}'_\nu)^2 - \mathbf{K}'(t, \bar{t}'_\nu) \cdot \dot{\mathbf{F}}(\bar{t}'_\nu)}, \quad (3.12)$$

$$\dot{\mathbf{F}}(t) = \frac{\partial \mathbf{F}(t)}{\partial t}. \quad (3.13)$$

Отметим, что подкоренное выражение в  $\mathcal{F}$  положительно, так как оно задаётся второй производной от  $\mathbf{K}'^2(t, t')$  по  $t'$ , которая положительна в точке минимума  $\mathbf{K}'^2(t, t')$ :

$$\left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{K}'^2(t, t')}{\partial t'^2} \right|_{t'=t'_\nu} = \dot{\mathbf{K}}'(t, \bar{t}'_\nu)^2 + \mathbf{K}'(t, \bar{t}'_\nu) \cdot \ddot{\mathbf{K}}'(t, \bar{t}'_\nu) > 0. \quad (3.14)$$

Для случая линейной поляризации  $\mathbf{K}'(t, \bar{t}'_\nu) = 0$ , поэтому соотношение (3.9) совпадает с хорошо известным результатом  $\Delta t'_\nu = \kappa / |\mathbf{F}(\bar{t}'_\nu)|$ .

Для малых  $\Delta t'_\nu$  ( $\omega \Delta t'_\nu \ll 1$ ), вычислим  $\alpha_\nu(t)$  [см. уравнение (3.3)] и классическое действие  $S(t, t')$  [см. уравнение (3.6)] путём разложения их в ряд по  $\Delta t'_\nu$ :

$$\alpha_\nu(t) \approx i \Delta t'_\nu \mathcal{F}^2, \quad (3.15)$$

$$S(t, t'_\nu) \approx S(t, \bar{t}'_\nu) + \frac{i}{3} \frac{\varkappa(t, \bar{t}'_\nu)^3}{\mathcal{F}}. \quad (3.16)$$

Принимая во внимание уравнение (3.9)-(3.16), мы получаем  $\mathbf{D}(t)$  из (3.2) в виде:

$$\mathbf{D}(t) = -\sqrt{i} \frac{C_\kappa^2 \kappa}{\pi} \sum_\nu \frac{e^{-\frac{\varkappa^3(t, \bar{t}'_\nu)}{3\mathcal{F}}} e^{iS(t, \bar{t}'_\nu)} \mathbf{K}(t, \bar{t}'_\nu)}{\sqrt{\varkappa(t, \bar{t}'_\nu) \mathcal{F} (t - \bar{t}'_\nu)^{3/2}}} g(\Omega). \quad (3.17)$$

Дипольный момент (3.17) содержит две быстро меняющиеся экспоненты: одна из них «туннельная экспонента» определяет вероятность туннелирования в адиабатическом приближении, вторая экспонента определяется классическим (вещественным) действием электрона в лазерном поле, которое он набирает при движении по замкнутой классической траектории, начинающейся в момент времени  $\bar{t}'_\nu$  и заканчивающейся в момент  $t$ . Если  $2I_p \gtrsim \max[\mathbf{K}'(t, \bar{t}'_\nu)^2]$ , то скорость изменения туннельной экспоненты порядка  $\kappa F/\omega$ , в то время как вторая экспонента изменяется гораздо быстрее, и её скорость порядка  $F^2/\omega^2$  (здесь  $F$  задаёт порядок напряжённости лазерного поля). Таким образом, очевидно, что в туннельном режиме ( $\omega\kappa/F \ll 1$ ), фактор  $e^{iS(t, \bar{t}'_\nu)}$  меняется гораздо быстрее туннельного. Поэтому, при оценке Фурье компоненты  $\mathbf{D}(t)$  можно рассматривать туннельную экспоненту как медленно меняющуюся функцию. В результате, положение стационарной фазы интеграла (1.25а), где  $\mathbf{D}(t)$  задаётся уравнением (3.17), может быть найдено из уравнения:

$$\frac{\mathbf{K}(t, \bar{t}'_\nu)^2}{2} - \left( \frac{\mathbf{K}'(t, \bar{t}'_\nu)^2}{2} + I_p \right) \frac{d\bar{t}'_\nu}{dt} = E, \quad (3.18)$$

где  $E = \Omega - I_p$ . Дифференцируя (3.7) по  $t$ , получаем  $\frac{d\bar{t}'_\nu}{dt}$  в виде:

$$\frac{d\bar{t}'_\nu}{dt} = \frac{1}{(t - \bar{t}'_\nu)\mathcal{F}^2} \left\{ 2 \frac{\mathbf{K}(t, \bar{t}'_\nu) \cdot \mathbf{K}'(t, \bar{t}'_\nu)}{t - \bar{t}'_\nu} - \mathbf{F}(\bar{t}'_\nu) \cdot [\mathbf{K}(t, \bar{t}'_\nu) - \mathbf{K}'(t, \bar{t}'_\nu)] \right\}, \quad (3.19)$$

Таким образом, уравнение для точек стационарной фазы принимает вид:

$$\frac{\mathbf{K}(t, \bar{t}'_\nu)^2}{2} = E + \Delta E_\nu(t), \quad (3.20)$$

где

$$\Delta E_\nu(t) = -\frac{\mathbf{K}'(t, \bar{t}'_\nu)^2 + \kappa^2 \frac{d\bar{t}'_\nu}{dt}}{2(t - \bar{t}'_\nu)}, \quad (3.21)$$

и  $\Delta E_\nu(t)$  имеет значение квантовой поправки к энергии электрона, набранной в лазерном поле(см., например, [24]).

В рамках адиабатического приближения с использованием метода стационарной фазы дипольный момент можно представить в виде когерентной суммы парциальных дипольных моментов,  $\mathbf{d}_j$ , наведённых на различных полупериодах лазерного импульса:

$$\mathbf{D}(\Omega) = \sum_j \mathbf{d}_j. \quad (3.22)$$

Здесь для удобства вводится один индекс для нумерации совместных решений уравнений (3.8a) и (3.20). Индекс  $j$  нумерует действительные замкнутые траектории, вдоль которых происходит движение электрона, начинающееся с момента  $t'_j$  и заканчивающееся в момент  $t_j$ . Эти времена ионизации и рекомбинации удовлетворяют системе нелинейных уравнений:

$$\mathbf{K}'_j \cdot \dot{\mathbf{K}}'_j = 0, \quad (3.23a)$$

$$\frac{\mathbf{K}'_j{}^2}{2} = \Omega - I_p - \Delta\mathcal{E}_j, \quad (3.23b)$$

$$\Delta\mathcal{E}_j = -\frac{\mathbf{K}'_j{}^2 + \kappa^2}{2(t_j - t'_j)} \left[ \frac{2\frac{\mathbf{K}_j \cdot \mathbf{K}'_j}{t - t'_j} - \mathbf{F}'_j \cdot (\mathbf{K}_j - \mathbf{K}'_j)}{\mathbf{F}'_j{}^2 - \mathbf{K}'_j \cdot \dot{\mathbf{F}}'_j} \right],$$

где были введены следующие обозначения:

$$\mathbf{K}'_j = \mathbf{K}'(t'_j, t_j), \quad \dot{\mathbf{K}}'_j = \partial\mathbf{K}'(t_j, t'_j)/\partial t'_j,$$

$$\mathbf{F}'_j = \mathbf{F}(t'_j), \quad \dot{\mathbf{F}}'_j = \partial\mathbf{F}(t'_j)/\partial t'_j,$$

$$\mathbf{K}_j = \mathbf{K}(t_j, t'_j).$$

Первое уравнение (3.23a) с физической точки зрения является условием минимума кинетической энергии электрона в момент начала движения  $t'_j$ . Второе уравнение (3.23b) показывает, что в момент возврата электрона к атомному



остову его набранная в поле энергия равна  $E - \Delta\mathcal{E}_j$ , где  $E = \Omega - I_p$ . Величина  $\Delta\mathcal{E}_j$  имеет смысл квантовой поправки к классической набранной энергии [24].

Парциальные дипольные моменты из (3.22) можно представить в виде произведения трёх факторов, соответствующих трём этапам формирования гармоника в квазиклассической модели ГВГ [20]:

$$\mathbf{d}_j = a_j^{(\text{tun})} \mathbf{a}_j^{(\text{prop})} f_{\text{rec}}(E). \quad (3.24)$$

Первый фактор  $a_j^{(\text{tun})}$  — *туннельный* и соответствует процессу выхода электрона в континуум. Он определяется амплитудой фотоотрыва в адиабатическом пределе [39, 148] [см. выражение (2.12)]:

$$a_j^{(\text{tun})} = \frac{C_\kappa}{\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{2}} \frac{e^{-\frac{\varkappa_j^3}{3\mathcal{F}_j}}}{\sqrt{\varkappa_j \mathcal{F}_j}} e^{i\mathcal{S}(\mathbf{p}_j, t'_j)}, \quad (3.25)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_j &= \sqrt{\mathbf{F}'_j{}^2 - \mathbf{K}'_j \cdot \dot{\mathbf{F}}'_j}, \quad \varkappa_j = \sqrt{2I_p + \mathbf{K}'_j{}^2}, \\ \mathcal{S}(\mathbf{p}, t) &= \int_{-\infty}^t \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{p} + \mathbf{A}(t')]^2 + I_p \right\} dt', \\ \mathbf{p}_j &= -\frac{1}{t_j - t'_j} \int_{t'_j}^{t_j} \mathbf{A}(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Следующий фактор  $\mathbf{a}_j^{(\text{prop})}$  описывает распространение электрона в модифицированном поле континууме с момента выхода электрона в непрерывный спектр,  $t'_j$ , до момента рекомбинации,  $t_j$ , и определяется выражением:

$$\mathbf{a}_j^{(\text{prop})} = i \frac{e^{-i\mathcal{S}(\mathbf{p}_j, t_j) + i\Omega t_j} \hat{\mathbf{k}}_j}{(t_j - t'_j)^{3/2} \sqrt{\mathbf{K}_j \cdot \dot{\mathbf{K}}_j}}, \quad (3.26)$$

где  $\hat{\mathbf{k}}_j = \mathbf{K}_j / \sqrt{2E}$ .

Последний множитель в выражении для парциального дипольного момента  $\mathbf{d}_j$ ,  $f_{\text{rec}}(E)$ , в точности равен амплитуде фоторекомбинации (в рамках

модели МЭР) из состояния континуума с импульсом  $\mathbf{k}$  ( $k = \sqrt{2E}$ ), направленным вдоль вектора поляризации излучаемого линейного-поляризованного фотона, в основное состояние с  $l = 0$ :

$$f_{\text{rec}}(E) = iC_{\kappa} \frac{4k\sqrt{\pi\kappa}}{(k^2 + \kappa^2)^2} \times \left[ 1 - \frac{i}{4\tilde{k}^3} \left( 1 - 2i\tilde{k} \right) \left( 1 + i\tilde{k} \right)^2 \left( e^{2i\delta_1(k)} - 1 \right) \right], \quad (3.27)$$

где  $\tilde{k} = k/\kappa$ .

Предложенный аналитический подход не учитывает опустошения основного состояния, вызванного туннельным распадом системы в лазерном поле. Для учёта эффектов распада основного состояния введём фактор  $\mathcal{P}_j$  для каждого парциального дипольного момента  $\mathbf{d}_j$  [125]:

$$\mathcal{P}_j = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{t'_j} \Gamma(F(t)) dt - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{t_j} \Gamma(F(t)) dt \right], \quad (3.28)$$

где  $\Gamma(F)$ —вероятность туннельного распада в электрическом поле с напряжённостью  $|\mathbf{F}(t)|$ . С учётом этого фактора дипольный момент примет вид:

$$\mathbf{D}(\Omega) = \sum_j \mathcal{P}_j \mathbf{d}_j. \quad (3.29)$$

Спектральная плотность излучения связана с Фурье-образом дипольного момента  $\mathbf{D}(\Omega)$  соотношением [124] :

$$\rho(\Omega) = \frac{\Omega^4}{4c^3} |\mathbf{D}(\Omega)|^2, \quad (3.30)$$

где  $c \approx 137$ —скорость света.

Подставим явный вид дипольного момента (3.29) в выражение (3.30) и, принимая во внимание вид выражения для сечения фоторекомбинации

$$\sigma_{\text{rec}}(E) = \frac{\Omega^3}{2\pi k c^3} |f_{\text{rec}}(E)|^2, \quad (3.31)$$

в конечном счёте получим:

$$\rho(\Omega) = W(E)\sigma_{\text{rec}}(E), \quad \Omega = E + I_p \quad (3.32)$$

где лазерный фактор  $W(E)$  имеет вид:

$$W(E) = \frac{\pi}{2}\Omega k \left| \sum_j \mathcal{P}_j a_j^{(\text{tun})} a_j^{(\text{prop})} \right|^2. \quad (3.33)$$

## 2. Связь адиабатического приближения с

### существующими аналитическими подходами

#### 2.1. Метод квантовых орбит

Одним из наиболее распространённых методов анализа амплитуды ГВГ является метод квантовых орбит. Рассмотрим основные положения этого метода. Амплитуда ГВГ может быть представлена в виде интегралов от быстро осциллирующих функций:

$$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt' f(t, t') e^{i\mathcal{S}(t, t')}, \quad (3.34)$$

$$\mathcal{S}(t, t') = S(t, t') + \Omega t, \quad (3.35)$$

где  $f(t, t')$  – некоторая гладкая функция,  $S(t; t')$  – классическое действие частицы в лазерном поле [см. (1.25с)]. Интеграл (3.34) можно с хорошей точностью оценить с помощью метода перевала, если несущая частота лазерного импульса много меньше потенциала ионизации [1, 2, 24, 159], что позволит представить амплитуду ГВГ в виде суммы парциальных амплитуд  $\mathcal{A}_j$ :

$$\mathcal{A} = \sum_j \mathcal{A}_j, \quad (3.36)$$

где индекс  $j$  означает номер замкнутой траектории (квантовой орбиты), определяемой временами ионизации ( $t'_j$ ) и рекомбинации ( $t_j$ ) [24, 159]. Времена  $t'_j$  и  $t_j$  – это точки перевала подынтегральной функции (3.34), определяемые из условия равенства нулю первых производных по  $t$  и  $t'$  от фазовой функции подынтегрального выражения (3.34):

$$\mathbf{K}'^2(t, t')/2 = -I_p, \quad (3.37a)$$

$$\mathbf{K}^2(t, t')/2 = E, \quad (3.37b)$$

где  $E = \Omega - I_p$ , а векторы  $\mathbf{K}'$  и  $\mathbf{K}$  определяются соотношениями (1.25d) и (1.28).

С физической точки зрения система уравнений (3.37) определяет квазиклассические условия перехода электрона в континуум из связанного состояния [см. уравнение (3.37a)] и соответственно его рекомбинации с одновременным испусканием фотона с энергией  $\Omega$  [см. уравнение (3.37b)]. Из анализа системы уравнений (3.37) видно, что она может иметь только комплексные решения  $t_j$  и  $t'_j$ . Следовательно, соответствующая паре времён  $\{t'_j, t_j\}$  замкнутая траектория также комплексна. Представим время ионизации в виде суммы действительной и мнимой частей  $t' = \bar{t}' + i\Delta t'$  и разложим уравнение (3.37a) по  $\Delta t'$  до третьего порядка:

$$\mathbf{K}'^2 + \kappa^2 + i\Delta t' \dot{\mathbf{K}}'^2 - \frac{\Delta t'^2}{2} \ddot{\mathbf{K}}'^2 - i\frac{\Delta t'^3}{6} \ddot{\mathbf{K}}'^2 = 0, \quad (3.38)$$

где

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= -2I_p, \quad \mathbf{K}' \equiv \mathbf{K}'(t, \bar{t}'), \quad \dot{\mathbf{K}}'^2 \equiv \frac{\partial \mathbf{K}'^2}{\partial \bar{t}'}, \\ \ddot{\mathbf{K}}'^2 &\equiv \frac{\partial^2 \mathbf{K}'^2}{\partial^2 \bar{t}'}, \quad \ddot{\mathbf{K}}'^2 \equiv \frac{\partial^3 \mathbf{K}'^2}{\partial^3 \bar{t}'}. \end{aligned}$$

Заметим, что время подбарьерного движения электрона в низкочастотном поле, определяемое мнимой частью  $t'$ , может быть значительно меньше, чем

характерный период лазерного импульса  $T = 2\pi/\omega$ , где  $\omega$  – несущая частота [94, 148, 150, 160]. Оценим порядок  $n$ -ой производной в (3.38). Видно, что каждый последующий член разложения в (3.38) имеет малость по сравнению с предыдущим  $\propto \Delta t'/T$ , следовательно, порядок малости разложения уравнения (3.38) определяется отношением  $\propto \Delta t'/T$ . Уравнение (3.38) можно представить в виде системы двух уравнений, приравняв к нулю его действительную и мнимую части:

$$\mathbf{K}'^2 + \kappa^2 - \frac{\Delta t'^2}{2} \ddot{\mathbf{K}}'^2 = 0, \quad (3.39a)$$

$$\dot{\mathbf{K}}'^2 - \frac{\Delta t'^2}{6} \ddot{\mathbf{K}}'^2 = 0. \quad (3.39b)$$

Из первого уравнения (3.39a) выразим  $\Delta t'$ :

$$\Delta t' = \sqrt{\frac{2(\kappa^2 + \mathbf{K}'^2)}{\ddot{\mathbf{K}}'^2}}, \quad (3.40)$$

и подставляя его в (3.39b) получим:

$$\dot{\mathbf{K}}'^2 - \frac{1}{6} \ddot{\mathbf{K}}'^2 \sqrt{\frac{2(\kappa^2 + \mathbf{K}'^2)}{\ddot{\mathbf{K}}'^2}} = 0. \quad (3.41)$$

Решением уравнения (3.41) является начальное время движения по замкнутой траектории, которое также позволяет найти время подбарьерного движения электрона с помощью соотношения (3.40).

Исследуем качественно уравнение (3.41). Второе слагаемое в (3.41) определяется временем подбарьерного движения и имеет квантовую природу, поэтому будем называть это слагаемое квантовой поправкой. Тогда это слагаемое в нулевом приближении можно опустить как поправку к первому члену, и уравнение (3.41) примет вид:

$$\dot{\mathbf{K}}'^2 = 0. \quad (3.42)$$

Это уравнение является условием на экстремум энергии электрона в начальный момент  $\bar{t}'$  движения по замкнутой орбите. Фактически мы можем конкре-

тизировать, что это условие минимума энергии, так как в точке минимума вторая производная положительна,  $\ddot{\mathbf{K}}'^2 > 0$ , что обеспечивает положительное значение подкоренного выражения в (3.40). Из этого следует, что электрон начинает свое движение по замкнутой траектории в тот момент времени, когда энергия электрона в лазерном поле минимальна. Заметим, что в случае линейной поляризации условие (3.42) эквивалентно  $K' = 0$ .

Результат интегрирования методом перевала выражается через вторую производную фазовой функции в точке перевала, поэтому нам необходимо найти вторую производную от классического действия по времени  $t'$ :

$$\alpha(t) = \frac{\partial^2 S(t, t')}{\partial t'^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{K}'^2(t, t')}{\partial t'} \approx \frac{i}{2} \Delta t' \ddot{\mathbf{K}}'^2, \quad (3.43)$$

а также выделить действительные и мнимые части в фазовой функции. Раскладывая действие (3.35) в ряд по  $\Delta t'$  до третьего слагаемого получим:

$$\begin{aligned} S(t, t') &\approx S(t, \bar{t}') + i \frac{\Delta t'}{2} (\mathbf{K}'^2 + \kappa^2) - \frac{(\Delta t')^2}{4} \dot{\mathbf{K}}'^2 - i \frac{(\Delta t')^3}{12} \ddot{\mathbf{K}}'^2 \\ &= S(t, \bar{t}') + \frac{i}{3} \sqrt{\frac{2(\kappa^2 + \mathbf{K}'^2)}{\ddot{\mathbf{K}}'^2}} (\kappa^2 + \mathbf{K}'^2). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Отметим, что при выводе (3.44) следует учитывать соотношение (3.42), а не (3.41), так как учёт последнего приводит к превышению точности приближённых вычислений. В результате вычисления интеграла (3.34) методом перевала по  $t'$  для  $\mathcal{A}$  получим:

$$\mathcal{A} = \sqrt{2\pi} \sum \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{iS(t, \bar{t}') + i\Omega t} dt, \quad (3.45)$$

где

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{f(t, \bar{t}') e^{-\frac{\varkappa^3(t, \bar{t}')}{3\mathcal{F}(t, \bar{t}')}}}{\sqrt{\varkappa(t, \bar{t}') \mathcal{F}(t, \bar{t}')}}, \\ \varkappa(t, \bar{t}') &= \sqrt{\kappa^2 + \mathbf{K}'^2}, \quad \mathcal{F}(t, \bar{t}') = \sqrt{\frac{\ddot{\mathbf{K}}'^2}{2}}. \end{aligned}$$

Сумма в (3.45) подразумевает суммирование по всем решениям уравнения (3.41) (для упрощения записи мы не вводим индекс, нумерующий эти решения). Полагая, что предэкспоненциальная функция  $g(t)$  является медленно меняющейся функцией, оценим интеграл (3.45) методом стационарной фазы. Точки стационарной фазы находятся из решения уравнения:

$$\frac{\mathbf{K}^2(t)}{2} - \left( \frac{\mathbf{K}'^2(t)}{2} + I_p \right) \frac{d\bar{t}'}{dt} = E, \quad E = \Omega - I_p, \quad (3.46)$$

где  $\mathbf{K}(t) \equiv \mathbf{K}(t, \bar{t}')$ . Для нахождения производной  $d\bar{t}'/dt$  продифференцируем уравнение (3.42) по  $t$  и получим:

$$\frac{d\bar{t}'}{dt} = -\frac{[\ddot{\mathbf{K}}'^2]_{t, \bar{t}'}}{\ddot{\mathbf{K}}'^2}, \quad [\ddot{\mathbf{K}}'^2]_{t, \bar{t}'} \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{K}'^2}{\partial t \partial \bar{t}'}. \quad (3.47)$$

В результате вычисления интеграла (3.34) по  $t$ , амплитуду  $\mathcal{A}$  можно представить в виде суммы парциальных амплитуд, ассоциированных с классическими замкнутыми траекториями [161]:

$$\mathcal{A} = \sum_j a_j e^{iS_j + i\Omega \bar{t}_j}, \quad (3.48)$$

где

$$a_j = \frac{2\pi}{\sqrt{i}} \frac{f(\bar{t}_j, \bar{t}'_j)}{\sqrt{\varkappa_j \mathcal{F}_j \delta_j}} e^{-\frac{\varkappa_j^3}{3\mathcal{F}_j}}, \quad (3.49a)$$

$$\varkappa_j = \varkappa(\bar{t}_j, \bar{t}'_j), \quad \mathcal{F}_j = \mathcal{F}(\bar{t}_j, \bar{t}'_j), \quad (3.49b)$$

$$\delta_j = \mathbf{K}(\bar{t}_j, \bar{t}'_j) \cdot \frac{\partial \mathbf{K}(\bar{t}_j, \bar{t}'_j)}{\partial \bar{t}_j}, \quad (3.49c)$$

а пара действительных времен  $\{\bar{t}_j, \bar{t}'_j\}$  является  $j$ -ым решением системы уравнений:

$$\dot{\mathbf{K}}'^2 - \frac{1}{6} \ddot{\mathbf{K}}'^2 \sqrt{\frac{2(\kappa^2 + \mathbf{K}'^2)}{\ddot{\mathbf{K}}'^2}} = 0, \quad (3.50a)$$

$$\mathbf{K}^2 + \left( \mathbf{K}'^2 + \kappa^2 \right) \frac{[\ddot{\mathbf{K}}'^2]_{t, \bar{t}'}}{\ddot{\mathbf{K}}'^2} = 2E. \quad (3.50b)$$

Таким образом, существенное отличие представления амплитуды генерации гармоник в (3.48) от (3.36) в том, что в (3.36) суммирование выполняется по квантовым (комплексным) траекториям, а в (3.48)—по классическим (действительным) траекториям.

Численные расчёты для амплитуды ГВГ проведём для линейно поляризованного и бициркулярно поляризованного поля. В случае линейного поля векторный потенциал имеет вид:

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{R}(t), \quad \mathbf{R}(t) = \frac{\mathbf{F}}{\omega^2} e^{-2 \ln 2 \frac{t^2}{\mathcal{T}^2}} \cos \omega t, \quad (3.51)$$

где  $\mathbf{F} = \mathbf{e}_x F$  — напряженность поля,  $\omega$  — несущая частота,  $\mathcal{T} = 2\pi N/\omega$  — эффективная длительность импульса. В случае бициркулярного поля, векторный потенциал задаётся в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{R}(t), \quad \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_1(t) + \mathbf{R}_2(t - \mathcal{T}), \\ \mathbf{R}_i(t) &= \frac{F}{\omega_i^2} e^{-2 \ln 2 \frac{t^2}{\mathcal{T}_i^2}} (\mathbf{e}_x \cos \omega_i t + \mathbf{e}_y \eta_i \sin \omega_i t), \end{aligned} \quad (3.52)$$

где  $\omega_1 = \omega$ ,  $\omega_2 = 2\omega$ ,  $\mathcal{T}_i = 2\pi N/\omega_i$ ,  $\eta_1 = 1$ ,  $\eta_2 = -1$ . Численные расчеты были выполнены для несущей частоты  $\omega = 0.775$  эВ, интенсивности  $I = cF^2/(8\pi) = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $N = 3$ ,  $I_p = 13.65$  эВ. Характерные значения ponderomotive энергии для линейно поляризованного поля  $u_p^{(1)} = F^2/(4\omega^2) = 23.9$  эВ, и для случая бициркулярного поля  $u_p^{(bc)} = F^2/(2\omega_1^2) + F^2/(2\omega_2^2) = 5F^2/(8\omega^2) = 59.76$  эВ. На рис. 3.1 представлены результаты расчета для линейно поляризованного поля, и на рис. 3.2 для бициркулярного поля.

Из представленных расчётов видно (см. панель (а) на рис. 3.1 и 3.2), что для случая линейно поляризованного поля электрон высвобождается из атома каждые полпериода [20, 24], а для бициркулярного поля—каждую треть периода [59, 141]. Эта закономерность объясняется тем, что наибольшая вероятность для процесса ионизации приходится на временной интервал, для



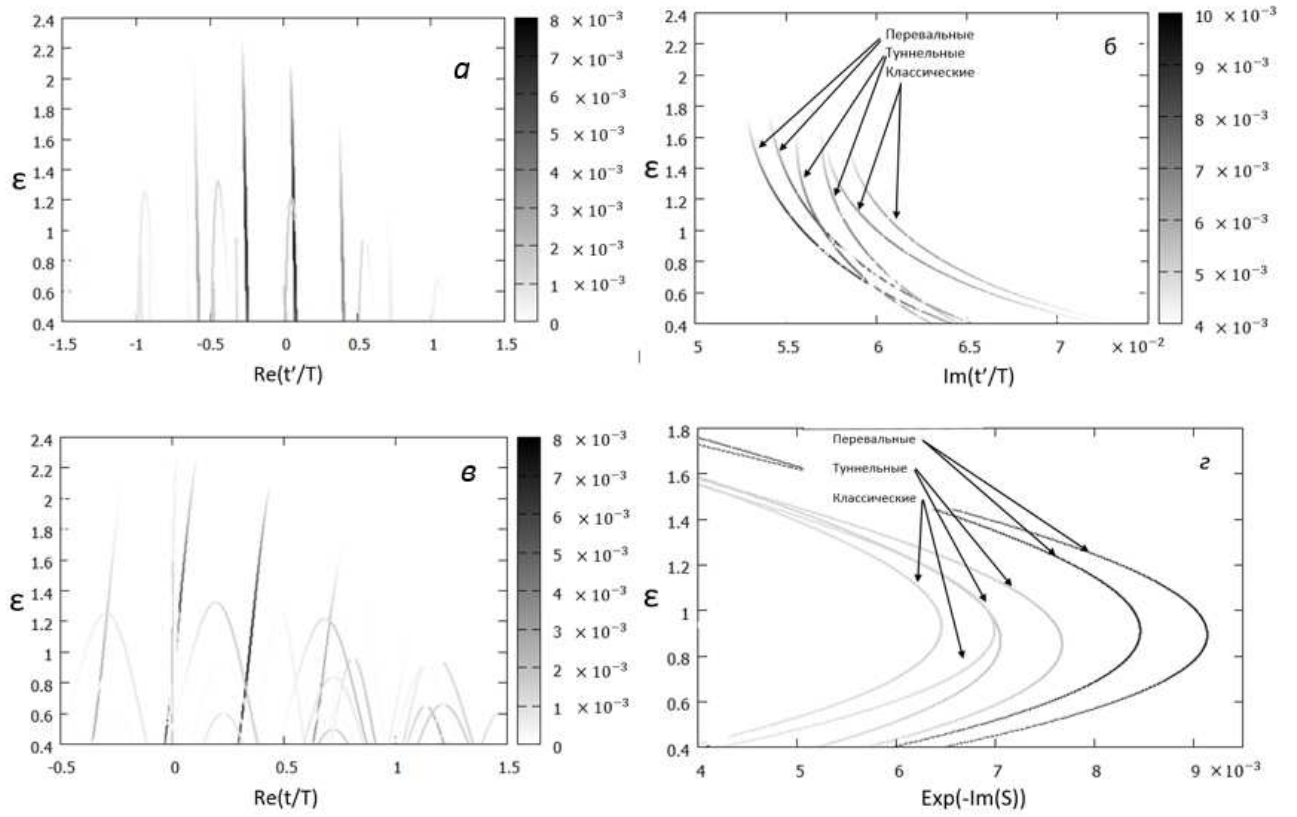


Рис. 3.1. Зависимости  $\text{Re}(t'/T)$ ,  $\text{Im}(t'/T)$ ,  $\text{Re}(t/T)$  и  $e^{-\text{Im}S(t,t')}$  приведенной энергии  $\varepsilon = E/u_p^{(1)}$  (панели (а), (б), (в), (г) соответственно) для линейно поляризованного лазерного поля. Решения систем (3.37) («перевальные решения»), (3.50) («туннельные решения»), (3.53) («классические решения») представлены на панелях. Линии на панелях (а), (б), (в) имеют градиентную окраску в соответствии со значениями  $e^{-\text{Im}S(t,t')}$  (см. определение  $S(t, t')$  в (3.35).) В масштабе рисунка на панелях (а) и (в) решения соответствующие системам (3.37), (3.50) и (3.53) не различимы. На панелях (б) и (г) представлены численные результаты для двух решений, определяющих наибольший вклад в амплитуду  $\mathcal{A}$ .  $\varepsilon = E/u_p^{(1)}$ .

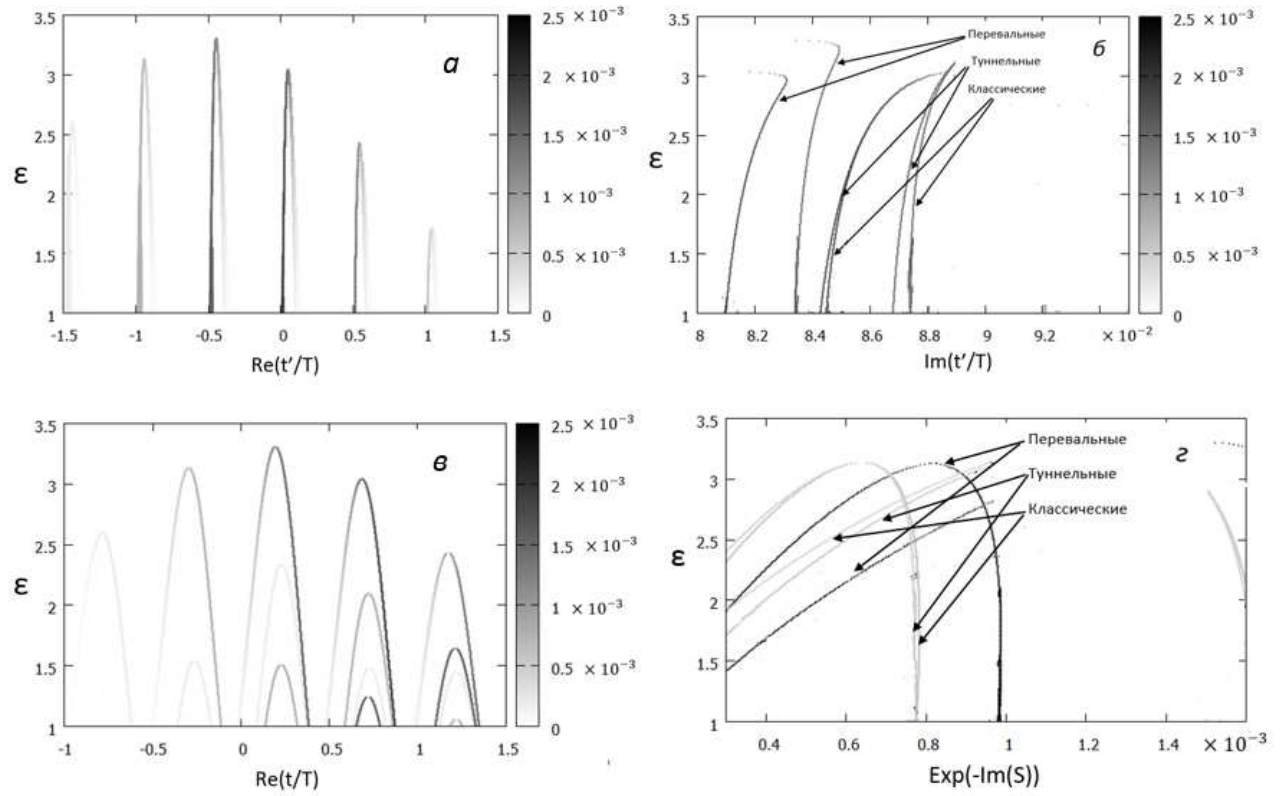


Рис. 3.2. То же, что и на рис. (3.1), но для бициркулярного поля. Приведённая энергия определена как  $\epsilon = E/u_p^{(bc)}$ .

которого пиковая напряжённость соизмерима с максимальной напряжённостью поля лазерного импульса (в нашем случае этот интервал определяется  $-T < t < T$ ), соответственно для бициркулярного поля расстояние между максимумами напряжённости составляет треть периода.

Также из графиков видны различия, касаемые возврата электрона к атомному остову: в линейно поляризованном поле возврат с определённой энергией  $E$  возможен как вдоль длинной (траектория с наибольшим временем движения по траектории) так и вдоль короткой (траектория с наименьшим временем движения по траектории) траекторий [24] (см. рис. 3.1 (в)), в бициркулярном поле, ввиду малой вероятности перехода атомного электрона в континуум, возврат наиболее вероятен только вдоль короткой траектории [59] (см. рис. 3.2 (в)). Таким образом, поведение электрона в процессах перерасеяния существенно различается в линейном и бициркулярном поле.

Обратимся к панелям (б) и (г) рисунков 3.1 и 3.2 для сравнения результатов, полученных с помощью решения системы (3.37) («перевальные решения»), с решениями системы (3.50) («туннельные решения»), а также с «классическими решениями», которые представляют собой решения системы (3.50), в которой пренебрегается квантовыми поправками, т.е. решения, удовлетворяющие уравнениям:

$$\dot{\mathbf{K}}'^2 = 0, \quad (3.53a)$$

$$\mathbf{K}^2 = 2E. \quad (3.53b)$$

На панелях (б) и (г) рисунков 3.1 и 3.2 представлены зависимости мнимой части  $t'$  и  $e^{-\text{Im}\mathcal{S}}$  от приведенной энергии  $\varepsilon = E/u_p$ . Из этих рисунков видно, что отклонение «классических» и «туннельных» решений от «перевального» решения не превышает 10%. Можно заметить, что зависимость  $e^{-\text{Im}\mathcal{S}}$  от  $\varepsilon$  для «перевальных» решений сводятся к «туннельным» и «классическим» решениям простым масштабированием, которое объясняется вкладом более высо-

ких поправок по  $\Delta t'$  к мнимой части классического действия  $\mathcal{S}$ . Например, с высокой точностью можно считать, что  $e^{-\text{Im}\mathcal{S}}$  (для перевальных решений)  $\approx 1.2e^{-\text{Im}\mathcal{S}}$  (для туннельных решений). Точность приближённых решений существенно падает в области энергий, в которой вторая производная  $\mathcal{S}(t, t')$  по  $t$  близка к нулю, то есть, исходя из определения  $\mathcal{S}(t, t')$  [см. (3.35)], в области экстремума (максимума) энергии частицы в момент возврата (перерассеяния)  $\mathbf{K}^2$  [см., например, максимумы на рис. 3.1(в)] :

$$\frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial t^2} = -\frac{\partial \mathbf{K}^2}{\partial t}, \quad (3.54)$$

Поэтому в этой области энергий решение системы уравнений (3.37) существенно меняется: например, мнимая часть времени  $t'$  испытывает резкий загиб [см. панели (б) на рис. (3.1) и (3.2)], при этом наблюдается слияние (каустика) «короткой» и «длинной» траекторий [162]. В указанной области энергий решения системы (3.37)  $\{t'_j, t_j\}$  находятся в окрестности линии Стокса [163], поэтому асимптотическое поведение парциальной амплитуды  $\mathcal{A}_j$  на  $j$ -ой ветке решения при небольшом изменении  $E$  сменяется с осцилляционной (или более плавной) зависимости на резкое экспоненциально-подобное затухание. Для малых энергий  $E$ , т.е.  $\Omega \sim I_p$ , точность решений системы (3.53) значительно ухудшается. Действительно, в этом случае классический механизм обмена энергии электрона в континууме перестаёт быть доминирующим по сравнению с квантовым, поэтому квантовые поправки в этой области энергий оказываются существенными.

## 2.2. Разложение амплитуды ГВГ в области каустик

Анализ реальных классических траекторий показывает, что вблизи некоторых энергий  $E \approx E_{\max}^{(k)}$  две классические траектории сливаются в одну [162, 164, 165]. Появление каустики обусловлено тем, что вблизи энергий  $E =$

$E_{\max}^{(k)}$  производные высшего порядка действия  $S(t, t')$  по  $t$  стремятся к нулю [162, 164, 165]. В простейшем случае условием для возникновения каустики является равенство нулю второй производной от классического действия  $S(t, t')$ , что соответствует экстремуму энергии, набранной электроном в лазерном поле. Для линейно поляризованного поля электрон вылетает в континуум с нулевой начальной энергией, и экстремум набранной энергии соответствует равенству нулю первой производной по времени  $t$  от вектора  $\mathbf{K}(t, t')$ :

$$\mathbf{K}'(t, t') = 0, \quad (3.55a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}(t, t')}{\partial t} = 0. \quad (3.55b)$$

Рассматривая решения уравнений (3.23) вблизи корней уравнений (3.55) (которые не зависят от энергии  $E$ ), можно показать, что выражение для амплитуды ГВГ, полученное в рамках метода квантовых орбит, совпадает асимптотически (в области энергий, не включающих в себя каустик) с результатами метода эффективного радиуса.

Представим векторный потенциал лазерного поля в виде  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{e}A(t)$ , где  $\mathbf{e}$  — действительный вектор поляризации. Подставляя векторный потенциал в систему уравнений (3.55), перепишем её в «скалярном» виде [см. ур. (56) и (57) в [124]]:

$$A(t') - \frac{\int_{t'}^t A(\xi) d\xi}{t - t'} = 0, \quad (3.56a)$$

$$F(t) + \frac{A(t) - A(t')}{t - t'} = 0. \quad (3.56b)$$

где  $F(t) = -\partial A(t)/\partial t$ . Раскладывая левые части уравнений системы (3.23) вблизи решений системы (3.56a),  $t_j^{(\text{cl})}$  и  $t'_j{}^{(\text{cl})}$ , мы получим  $t'_j$  и  $t_j$  в виде:

$$t'_j{}^{(\pm)} = t'_j{}^{(\text{cl})} \pm \frac{F(t_j^{(\text{cl})})}{F(t'_j{}^{(\text{cl})})} \sqrt{\frac{E_{\max}^{(j)} - E}{\zeta_j}}, \quad (3.57a)$$

$$t_j^{(\pm)} = t_j^{(\text{cl})} \pm \sqrt{\frac{E_{\max}^{(j)} - E}{\zeta_j}}, \quad (3.57b)$$

где индексы  $\pm$  введены для разделения двух ветвей квадратного корня. В уравнении (3.57) использованы следующие обозначения:

$$E_{\max}^{(j)} = \frac{1}{2} \left[ A(t_j^{(\text{cl})}) - A(t_j'^{(\text{cl})}) \right]^2 - \frac{F(t_j^{(\text{cl})})}{F(t_j'^{(\text{cl})})} I_p,$$

$$\zeta_j = -\frac{F^2(t_j'^{(\text{cl})})}{2} \left[ 1 - \frac{F(t_j^{(\text{cl})})}{F(t_j'^{(\text{cl})})} + \frac{\dot{F}(t_j^{(\text{cl})})}{F(t_j^{(\text{cl})})} \Delta t_j^{(\text{cl})} \right],$$

$$\Delta t_j^{(\text{cl})} = t_j^{(\text{cl})} - t_j'^{(\text{cl})}.$$

Продолжая дальнейшее разложение  $\mathcal{S}$  и  $\mathbf{K}_j \cdot \dot{\mathbf{K}}_j$  вблизи времён  $t_j'^{(\text{cl})}$  и  $t_j^{(\text{cl})}$ :

$$\begin{aligned} & \mathcal{S}(\mathbf{p}_j, t_j') - \mathcal{S}(\mathbf{p}_j, t_j) + \Omega t_j \\ & \approx S(t_j^{(\text{cl})}, t_j'^{(\text{cl})}) + \Omega t_j^{(\text{cl})} \pm \frac{2(E_{\max}^{(j)} - E)^{3/2}}{3\sqrt{\zeta_j}}, \\ & \mathbf{K}_j \cdot \dot{\mathbf{K}}_j \approx \mp 2\sqrt{\zeta_j(E_{\max}^{(j)} - E)}, \end{aligned}$$

и подставляя эти разложения в уравнения (3.25), (3.26), (2.30), и (3.29), получим  $\mathbf{d}_j$  в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_j & \approx -\theta(E_{\max}^{(j)} - E) \sqrt{i} \frac{C_\kappa}{\pi} \left( \frac{2\kappa^3}{F(t_j'^{(\text{cl})})} \right)^{Z/\kappa} \\ & \times \frac{\exp\left[-\frac{\kappa^3}{3F(t_j'^{(\text{cl})})}\right] \exp\left[iS(t_j^{(\text{cl})}, t_j'^{(\text{cl})}) + i\Omega t_j^{(\text{cl})}\right]}{\sqrt{F(t_j^{(\text{cl})})} [\Delta t_j^{(\text{cl})}]^{3/2} [\zeta_j(E_{\max}^{(j)} - E)]^{1/4}} \\ & \times \sin\left[\frac{2(E_{\max}^{(j)} - E)^{3/2}}{3\sqrt{\zeta_j}} + \frac{\pi}{4}\right] f_{\text{rec}}(E) \mathbf{e}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Результат (3.58) также может быть получен путём разложения функции Эйри в амплитуде ГВГ из [124] (см. также [166]) в асимптотический ряд для отрицательного аргумента. Также стоит отметить что, хотя представленные вычисления справедливы для  $E_{\max}^{(j)} > E$ , результат (3.58) может быть аналитически продолжен в область энергий  $E_{\max}^{(j)} < E$ : в (3.58)  $\sin[\dots]$  необходимо заменить на экспоненту  $\exp[-\frac{2(E - E_{\max}^{(j)})^{3/2}}{3\sqrt{\zeta_j}}]/2$ .

### 3. Кулоновская поправка для ГВГ в адиабатическом приближении

Кулоновская поправка для ГВГ требует дополнительного анализа, необходимость которого обусловлена существенным вкладом в ГВГ замкнутых траекторий, учёт которых требует модификации в вычислении кулоновской поправки. Такая модификация состоит в изменении контура интегрирования и дополнительной регуляризации фазового интеграла (2.27) в точке возврата [40]. Однако, можно показать, что для низкочастотного лазерного поля и высокоэнергетического электрона, движущегося по замкнутой траектории, часть траектории, соответствующая возврату электрона, даёт незначительный вклад в мнимую часть фазового интеграла (2.27). Действительно, в этом случае контур интегрирования для фазового интеграла соединяет точки  $t'$  и  $t$  в комплексной плоскости (см. рис. 1 в [40]). Ввиду аналитичности подынтегрального выражения в (2.27), контур интегрирования можно деформировать так, чтобы он состоял из двух частей: первая часть (соответствующая ионизации) начинается в седловой точке  $t'$  и уходит в бесконечность, а вторая часть (соответствующая рекомбинации) начинается из бесконечности и заканчивается в точке  $t$ . Как было отмечено во второй главе диссертации, в адиабатическом пределе основной вклад в фазовый интеграл, определяемый поведением  $\mathbf{r}^2(t)$ , набирается в окрестности седловых точек. Для седловой точки  $t'$ ,  $\mathbf{r}^2(t) \approx -\kappa^2(t - t')^2$ , поэтому интеграл вдоль первой части контура определяется мнимым параметром  $Z/(i\kappa)$  [см. (2.29)]. Для седловой точки  $t$ ,  $\mathbf{r}^2(t) \approx \dot{\mathbf{r}}^2(t_f)(t - t_f)^2$  ( $t_f \equiv t$ , где под  $t$  подразумевается седловая точка), и фазовый интеграл задаётся параметром Зоммерфельда  $Z/\sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(t_f)}$  [см. (2.27)]. Отметим, что так как  $t_f$  имеет незначительную мнимую часть,  $\dot{\mathbf{r}}^2(t_f)$  можно считать вещественным и порядка  $F^2/\omega^2$ , поэтому параметр Зоммерфель-

да является вещественным и меньше единицы и для высокоэнергетических гармоник или электронов имеет порядок  $Z/\sqrt{\dot{\mathbf{r}}^2(t_f)} \propto Z\omega/F < 1$ . Таким образом, результат интегрирования вдоль второй части контура является в основном вещественным и, следовательно, не должен давать существенный вклад в фазовый интеграл. Очевидно, что действительная часть этого интеграла будет значительно меньше характерного действия электрона в переменном электрическом поле, поэтому его вклад незначительно меняет амплитуду ГВГ. Этот качественный анализ подтверждается довольно хорошим согласием аналитических результатов, в которых кулоновские эффекты учитываются эвристически на этапах ионизации и рекомбинации (или перерассеяния), с результатами численного интегрирования нестационарного уравнения Шредингера [124, 127, 144, 167, 168].

Седловые точки, соответствующие временам ионизации и рекомбинации, определяются из системы уравнений (3.53). Седловая точка  $t'$ , определяющая момент ионизации, имеет мнимую часть,  $\Delta = \text{Im } t'$  [см. соотношение (3.40)]:

$$\Delta = \frac{\sqrt{\mathbf{K}'^2 + \kappa^2}}{\mathcal{F}}, \quad \mathcal{F} = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{K}'^2}{\partial \bar{t}'^2}}, \quad (3.59)$$

С помощью уравнения (3.53а), можно показать, что  $\mathcal{F}$  имеет тот же вид, что и для случая прямой ионизации [см. (2.9b)]:

$$\mathcal{F} = \sqrt{\mathbf{F}'^2 - \mathbf{K}' \cdot \dot{\mathbf{F}}'}, \quad (3.60)$$

где  $\mathbf{F}' \equiv \mathbf{F}(\bar{t}')$  и  $\dot{\mathbf{F}}' = \partial \mathbf{F}' / \partial \bar{t}'$ . С точностью до  $\sim \Delta^3$ , траектория, удовлетворяющая начальному условию (2.20) имеет вид (2.22):

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{V}'(\tau - i\Delta) - \frac{\mathbf{F}'}{2}(\tau^2 + \Delta^2) - \frac{\dot{\mathbf{F}}'}{6}(\tau^3 + i\Delta^3), \quad (3.61)$$

где  $\tau = t - \bar{t}'$  и

$$\mathbf{V}' = \mathbf{K}' + i\Delta \frac{\mathbf{K}'}{t - \bar{t}'} - \frac{\Delta^2}{2} \frac{\mathbf{K}'}{(t - \bar{t}')^2} \approx \mathbf{K}' e^{i\frac{\Delta}{t - \bar{t}'}}. \quad (3.62)$$



В отличие от случая ионизации,  $\mathbf{V}'$  имеет небольшую мнимую часть [см.  $\mathbf{V}_\nu$  (2.6)], что объясняется тем, что  $\mathbf{V}'$  не является наблюдаемой величиной. Поскольку  $\omega\Delta \ll 1$  и  $t - \bar{t}' \sim \omega^{-1}$ , в практических расчётах мнимой частью  $\mathbf{V}'$  можно пренебречь. Таким образом, кулоновский фактор для парциальных амплитуд ГВГ определяется уравнением (2.30) с учётом формальных замен:  $\mathbf{F}_\nu \rightarrow \mathbf{F}'$ ,  $\mathbf{V}_\nu \rightarrow \mathbf{V}'$ , и  $\mathcal{F}_\nu \rightarrow \mathcal{F}$ :

$$Q = Q_{\text{stat}} \mathcal{R}, \quad (3.63)$$

где

$$Q_{\text{stat}} = \left( \frac{2\kappa^3}{F'} \right)^{Z/\kappa}, \quad F' = \sqrt{\mathbf{F}'^2}, \quad (3.64)$$

$$\mathcal{R} = \left( \frac{2F'}{\mathcal{F}' \left[ \sqrt{1 + \frac{\mathbf{V}'^2}{\kappa^2}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{\mathbf{F}'^2}{4\mathcal{F}'^2}} \right]} \right)^{Z/\kappa}. \quad (3.65)$$

Согласно уравнению (3.53), для линейно поляризованного лазерного поля (или многоцветного поля, компоненты которого линейно поляризованы в одном и том же направлении) в момент ионизации  $K' = 0$ , и, следовательно, кулоновский фактор совпадает со статическим [см. соотношение (2.31) с  $F_\nu \rightarrow F'$ ]. Этот результат даёт теоретическое обоснование *ad hoc* обобщению ионизационного фактора для электрона, полученного в рамках модели эффективного радиуса, на случай нейтральных атомных систем [123, 124, 127, 167].

В качестве примера построим зависимость  $Q_{\text{stat}}$  и  $\mathcal{R}$  для бициркулярного лазерного поля, векторный потенциал которого задаётся в виде (3.52). Расчет выполнен для интенсивности  $I = cF^2/(8\pi) = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup> и длины волны  $\lambda = 1.6$  мкм ( $\hbar\omega = 0.775$  эВ). На рисунке 3.3 представлены зависимости  $Q_{\text{stat}}^{(\nu)}$  и  $\mathcal{R}^{(\nu)}$  для четырёх наиболее значимых траекторий. Расчёты показывают, что кулоновские факторы постепенно уменьшаются с увеличением энергии гармоники. Такая зависимость связана с увеличением скорости  $\mathbf{V}'$  в момент

ионизации при увеличении энергии излучённой гармоники. Стоит отметить, что для бициркулярного поля кулоновский фактор с хорошей точностью аппроксимируется его статическим аналогом только в узком диапазоне энергий гармоник.

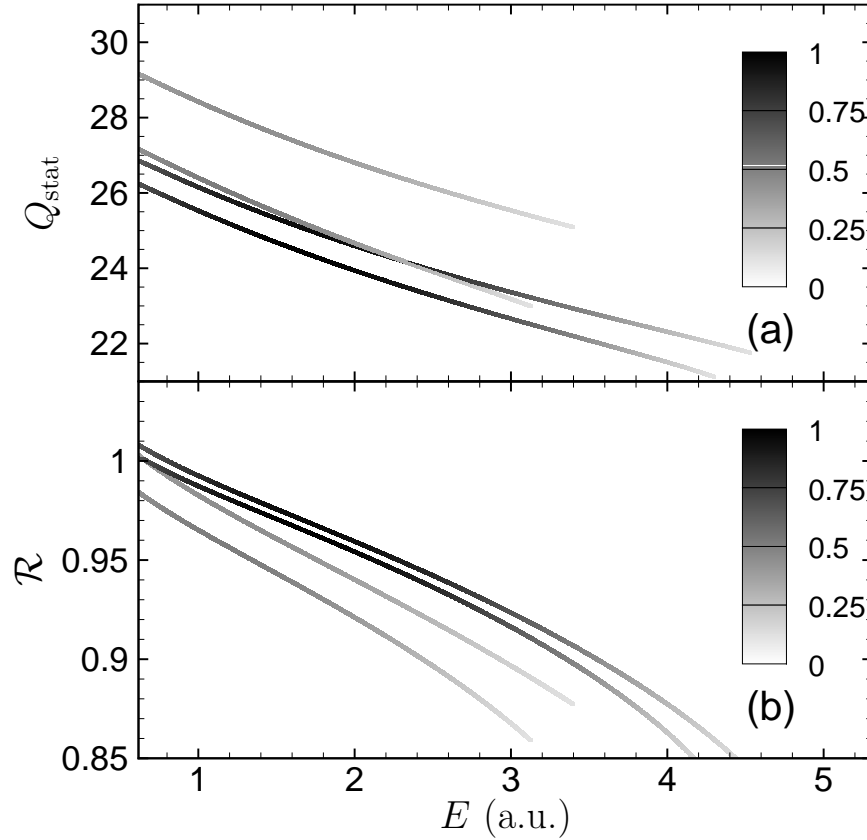


Рис. 3.3. Зависимость кулоновского фактора (a)  $Q_{\text{stat}}^{(\nu)}$  и (b)  $\mathcal{R}^{(\nu)}$  для ГГВ в бициркулярном лазерном поле от энергии гармоники ( $E = \Omega - I_p$ ). Результаты представлены для четырёх наиболее значимых траекторий  $\nu$ . Градиент цвета каждой кривой показывает относительный вклад каждой траектории. Расчёты представлены для  $I_p = 13.65$  эВ и для бициркулярного поля (3.52) с  $\omega = 0.775$  эВ,  $I = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $N = 3$

#### 4. Выводы к третьей главе

В третьей главе в рамках адиабатического приближения получено выражение для амплитуды ГВГ, представленной в виде суммы парциальных амплитуд, каждая из которых ассоциирована с классическими замкнутыми траекториями. В рамках адиабатического приближения парциальная амплитуда ГВГ представлена в виде произведения трёх факторов, соответствующих трёхшаговой модели перерасеяния. Получены уравнения для вычисления времён ионизации электрона и его возврата к атомному остову. Проведено сравнение численных результатов для времён ионизации и рекомбинации, полученных в рамках адиабатического приближения, с «перевальными» и «классическими» решениями. Получены кулоновские факторы для парциальных амплитуд ГВГ в адиабатическом приближении и приведена зависимость кулоновского фактора от энергии гармоник в бициркулярном лазерном поле. Основные результаты главы опубликованы в работах [39, 145, 161].

## Глава 4

# Генерация высших гармоник в бициркулярном лазерном поле

В предыдущих главах были изложены общие принципы применения адиабатического приближения для ГВГ и НПИ. Данная глава посвящена применению вышеизложенной теории для случая ГВГ в бициркулярном поле, анализу спектров ГВГ и их особенностей, вызванных, временной задержкой между двумя лазерными импульсами. В этой главе также представлено сравнение аналитических расчётов с результатами численного интегрирования нестационарного уравнения Шрёдингера.

## 1. ГВГ в бициркулярном поле: случай монохроматических компонент

Рассмотрим процесс ГВГ в бициркулярном поле, компоненты которого поляризованы в противоположных направлениях и имеют напряжённости  $F_1$  и  $F_2$  и частоты  $\omega_1 = \omega$ ,  $\omega_2 = 2\omega$ . Отметим, что фазовый сдвиг между компонентами бициркулярного поля не влияет на ГВГ. Действительно, рассмотрим задачу о генерации гармоник во вращающейся системе отсчёта [63, 113, 169]. Переход во вращающуюся систему координат осуществляется с помощью следующих преобразований:

$$x' = x \cos(\omega t) + y \sin(\omega t), \quad (4.1)$$

$$y' = -x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t), \quad (4.2)$$

где штрихованные координаты соответствуют вращательной системе координат. Для бициркулярно лазерного поля оператор взаимодействия электрона с лазерным полем имеет вид:

$$V = eF_1[x \cos(\omega_1 t) + y \sin(\omega_1 t)] + eF_2[x \cos(\omega_2 t + \varphi) + y\eta \sin(\omega_2 t + \varphi)], \quad (4.3)$$

где  $F_1$  и  $F_2$ —напряжённости первого и второго поля,  $e$ —заряд электрона. Далее будем полагать, что  $\omega_1 = \omega$ ,  $\omega_2 = 2\omega$ ,  $\eta = -1$ . Во вращающейся системе координат оператор взаимодействия принимает вид:

$$V = eF_1 x' + eF_2[x' \cos(3\omega t + \varphi) - y' \sin(3\omega t + \varphi)]. \quad (4.4)$$

Произведём замену  $3\omega t + \varphi \rightarrow 3\omega t'$  и получим выражение для оператора Гамильтона в виде:

$$H = H_0 - \omega L_z + eF_1 x' + eF_2[x' \cos(3\omega t') - y' \sin(3\omega t')]. \quad (4.5)$$

Таким образом, во вращающейся системе уравнение Шрёдингера имеет вид:

$$\frac{i\partial\phi(\mathbf{r}, t')}{\partial t'} = H_0 - \omega L_z + eF_1 x' + eF_2[x' \cos(3\omega t') - y' \sin(3\omega t')] \phi(\mathbf{r}, t'), \quad (4.6)$$

$\phi(\mathbf{r}, t')$  — волновая функция во вращающейся системе координат. Как видно из (4.6) волновая функция не зависит от относительной фазы бициркулярного поля, а следовательно ГВГ в таком поле не зависит от  $\varphi$ .

Пусть обе компоненты бициркулярного поля являются монохроматическими с частотами  $\omega$  и  $2\omega$  и векторами поляризации  $\mathbf{e}_\omega = (\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$  и  $\mathbf{e}_{2\omega} = (\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$ , соответственно. Электрическое поле для случая равных амплитуд обеих компонент имеет вид:

$$\mathbf{F}(t) = F[\text{Re}(\mathbf{e}_\omega e^{-i\omega t}) + \text{Re}(\mathbf{e}_{2\omega} e^{-2i\omega t})]. \quad (4.7)$$

Так как для двух циркулярно поляризованных компонент выполняются очевидные соотношения:  $\mathbf{e}_{2\omega} \cdot \mathbf{e}_\omega = 1$  и  $\mathbf{e}_{2\omega} \cdot \mathbf{e}_{2\omega} = \mathbf{e}_\omega \cdot \mathbf{e}_\omega = \mathbf{e}_{2\omega}^* \cdot \mathbf{e}_\omega = \mathbf{e}_{2\omega} \cdot \mathbf{e}_\omega^* = 0$ ,

то генерируемые гармоники могут иметь энергию  $(3n + 1)\omega$  или  $(3n - 1)\omega$ , а гармоники с энергией  $3n\omega$  являются запрещёнными [53, 54, 137, 170]. Действительно, лазерно-индуцированный дипольный момент  $\mathbf{D}(\Omega)$  для гармоник с энергией  $(3n + 1)\omega$  может быть составлен как суперпозиция векторов  $\mathbf{e}_\omega$  и  $\mathbf{e}_{2\omega}^*$ :

$$\mathbf{D}[\Omega = (3n + 1)\omega] = \mathbf{e}_\omega (\mathbf{e}_{2\omega} \cdot \mathbf{e}_\omega)^n \chi_1 + \mathbf{e}_{2\omega}^* (\mathbf{e}_{2\omega} \cdot \mathbf{e}_\omega)^{n+1} \chi_2, \quad (4.8)$$

где  $\chi_1$  и  $\chi_2 - F$  — нелинейные восприимчивости, зависящие от  $F$  и  $\omega$ . [Отметим, что степени скалярного произведения  $\mathbf{e}_{2\omega} \cdot \mathbf{e}_\omega$  добавлены в уравнение (4.8) только для ясности и они выпадают из задачи из-за соотношения  $\mathbf{e}_{2\omega} \cdot \mathbf{e}_\omega = 1$ .] Аналогично, дипольный момент для гармоник с энергией  $(3n - 1)\omega$  может быть составлен из векторов  $\mathbf{e}_\omega^*$  и  $\mathbf{e}_{2\omega}$  следующим образом:

$$\mathbf{D}[\Omega = (3n - 1)\omega] = \mathbf{e}_{2\omega} (\mathbf{e}_{2\omega} \cdot \mathbf{e}_\omega)^{n-1} \chi_3 + \mathbf{e}_\omega^* (\mathbf{e}_{2\omega} \cdot \mathbf{e}_\omega)^n \chi_4, \quad (4.9)$$

где  $\chi_3$  и  $\chi_4$  — нелинейные восприимчивости, зависящие от  $F$  и  $\omega$ . Очевидно, что из нечётного числа обоих векторов  $\mathbf{e}_\omega$  и  $\mathbf{e}_{2\omega}$  невозможно составить лазерно-индуцированный дипольный момент  $\mathbf{D}(\Omega)$ , который соответствует частоте гармоники  $\Omega = 3n\omega$ . Выражения (4.8) и (4.9) показывают, что гармоники с частотой  $\Omega = (3n + 1)\omega$  имеют такую же степень циркулярной поляризации, что и компонента поля с частотой  $\omega$ , а гармоники  $\Omega = (3n - 1)\omega$  циркулярно поляризованы в обратном направлении, то есть также как и как  $2\omega$ -компонента поля  $\mathbf{F}(t)$ .

Вышеупомянутые результаты также могут быть получены из аналитических выражений (3.22), (3.24). Действительно, из-за временной симметрии лазерного поля уравнения (3.23) инвариантны относительно замены  $t' \rightarrow t' + nT/3$ ,  $t \rightarrow t + nT/3$ , где  $T = 2\pi/\omega$  и  $n$  целые. Таким образом, все решения системы уравнений (3.23) могут быть сведены к «фундаментальным» решениям  $\{t_{0,j}, t'_{0,j}\}$ , так что  $t'_j = t'_{0,j} + \nu T/3$ ,  $t_j = t_{0,j} + \nu T/3$ ,

где  $\nu$  целое число. Фундаментальные решения могут быть определены заданием дополнительных условий для  $t'_{0,j}$  или  $t_{0,j}$ , например,  $t'_{0,j} \in (0, T/3)$ . Очевидно, что при таких заменах все скаляры, которые определяют  $\mathbf{D}(\Omega)$  в уравнении (3.24), остаются неизменными. Представим вектор  $\hat{\mathbf{k}}_j$  в виде суммы векторов:

$$\hat{\mathbf{k}}_j = \hat{\mathbf{k}}_j^{(\omega)} + \hat{\mathbf{k}}_j^{(2\omega)}, \quad (4.10)$$

где

$$\hat{\mathbf{k}}_j^{(l\omega)} = \frac{1}{\sqrt{2E}} \left( \mathbf{A}_l(t_j) - \frac{\int_{t'_j}^{t_j} \mathbf{A}_l(\xi) d\xi}{t_j - t'_j} \right), \quad (4.11)$$

и  $\mathbf{A}_l(t)$ —соответствующий векторный потенциал для компонент поля с частотой  $l\omega$  ( $l = 1, 2$ ). Можно проверить, что

$$\left( \hat{\mathbf{k}}_j^{(\omega)} \right)_{\pm} = e^{\pm \frac{2i\pi}{3}\nu} \left( \hat{\mathbf{k}}_{0,j}^{(\omega)} \right)_{\pm}, \quad (4.12a)$$

$$\left( \hat{\mathbf{k}}_j^{(2\omega)} \right)_{\pm} = e^{\mp \frac{4i\pi}{3}\nu} \left( \hat{\mathbf{k}}_{0,j}^{(2\omega)} \right)_{\pm}, \quad (4.12b)$$

где  $\hat{\mathbf{k}}_{0,j}^{(l\omega)}$  — это вектора  $\hat{\mathbf{k}}_j^{(l\omega)}$ , вычисленные с заменой  $t_j \rightarrow t_{0,j}$ ,  $t'_j \rightarrow t'_{0,j}$ . Учитывая соотношения симметрии (4.12), мы получаем для  $\pm$ -компонент вектора  $\hat{\mathbf{k}}_{\nu,\mu}$  соотношение симметрии:

$$\left( \hat{\mathbf{k}}_j \right)_{\pm} = e^{\pm i \frac{2\pi}{3}\nu} \left( \mathbf{k}_{0,\mu}^{(\omega)} \right)_{\pm} + e^{\mp i \frac{4\pi}{3}\nu} \left( \mathbf{k}_{0,j}^{(2\omega)} \right)_{\pm}. \quad (4.13)$$

Учитывая инвариантность скаляров и соотношение (4.13), мы можем представить  $\pm$ -компоненты вектора  $\mathbf{D}(\Omega)$  в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\pm}(\Omega) = \sum_j \left( \mathbf{d}_{0,j} \cdot \hat{\mathbf{k}}_{0,j} \right) & \left[ \left( \hat{\mathbf{k}}_{0,j}^{(\omega)} \right)_{\pm} \sum_{\nu} e^{i \frac{2\pi\nu}{3} \left( \frac{\Omega}{\omega} \pm 1 \right)} \right. \\ & \left. + \left( \hat{\mathbf{k}}_{0,j}^{(2\omega)} \right)_{\pm} \sum_{\nu} e^{i \frac{2\pi\nu}{3} \left( \frac{\Omega}{\omega} \mp 2 \right)} \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

где  $\hat{\mathbf{d}}_{0,j}$  — это вектора  $\hat{\mathbf{d}}_j$ , вычисленные с заменой  $t_j \rightarrow t_{0,j}$ ,  $t'_j \rightarrow t'_{0,j}$ . Суммирование по  $\nu$  в уравнении (4.14) может быть выполнено аналитически с

использованием соотношений:

$$f(N; x) = \sum_{\nu=-N}^N e^{i\frac{2\pi\nu}{3}x} = \frac{\sin \left[ (2N+1)\frac{\pi x}{3} \right]}{\sin \left( \frac{\pi x}{3} \right)}, \quad (4.15a)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f(N; x) = 3 \sum_n \delta(x - 3n) \quad (4.15b)$$

и дипольный момент (4.14) может быть представлен в виде:

$$\mathbf{D}_{\pm}(\Omega) = 3\omega \delta[\Omega - (3n \mp 1)\omega] \sum_j \left( \mathbf{d}_{0,j} \cdot \hat{\mathbf{k}}_{0,j} \right) \left( \hat{\mathbf{k}}_{0,j} \right)_{\pm}. \quad (4.16)$$

Выражение (4.16) явным образом показывает разрешённые для генерации номера гармоник. Более того, из (4.16) видно, что гармоники имеют только ненулевую циклическую компоненту (плюс или минус), то есть генерируемая гармоника будет циркулярно поляризована, и две ближайшие гармоники будут иметь противоположную степень циркулярной поляризации. Подчеркнём, что ионизация атомной системы в длинном лазерном импульсе может играть решающую роль в формировании пиков ГВГ. Действительно, в тех случаях, когда эффектами истощения основного состояния нельзя пренебречь, фактор истощения  $\mathcal{P}_j$  способствует размытию отчётливой пикообразной структуры ГВГ спектра (см. рис. 4.1).

Для описания бициркулярного поля с двумя монохроматическими компонентами, рассмотрим два циркулярно поляризованных импульса с трапецеидаальной огибающей, с общим числом оптических циклов, равным десяти ( $T_{\text{tot}} = 10 \times 2\pi/\omega$ ), и одним циклом на линейное включение и выключение импульса ( $T_{\text{on,off}} = 2\pi/\omega$ ). На рис. 4.1 представлен ГВГ спектр и степень циркулярной поляризации,  $\xi$ , вычисленная с/без эффектов истощения основного состояния:

$$\xi = -2 \frac{\text{Im} [D_x(\Omega) D_y^*(\Omega)]}{|D_x(\Omega)|^2 + |D_y(\Omega)|^2}. \quad (4.17)$$

Из рис. 4.1 видно, что пики в спектре ГВГ соответствуют энергиям  $\Omega = (3n \mp 1)\omega$ , при этом степень циркулярной поляризации гармоник рав-



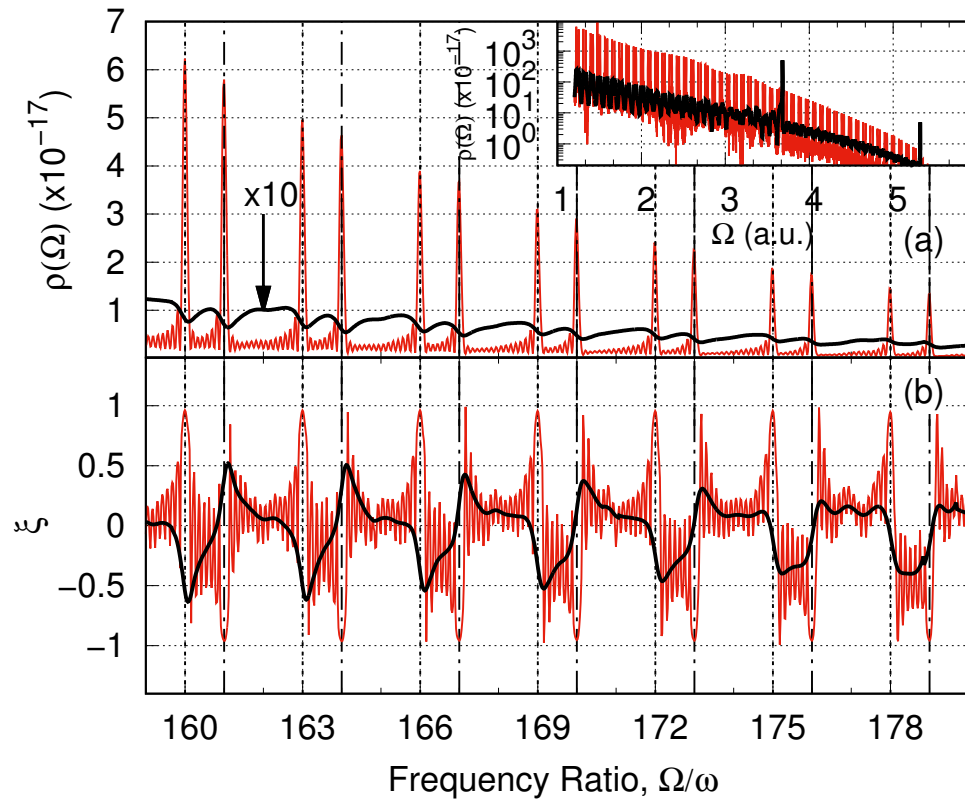


Рис. 4.1. Спектр ГВГ (а) и степень циркулярной поляризации (DCP) (b) для  $\omega - 2\omega$  бициркулярного поля, компоненты которого имеют одинаковые интенсивности и поляризованы в противоположных направлениях. Параметры лазерного поля:  $I = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\lambda = 2\pi c/\omega = 1.6$  мкм. Вычисления выполнены для атома водорода и лазерного импульса с трапецидальной огибающей с общим числом оптических циклов, равным 10, и по одному циклу на включение и выключение лазерного поля. Чёрные линии: аналитический результат с учётом эффектов истощения основного состояния; красные линии: аналитические расчёты без учёта истощения основного состояния. Вставка на панели (а) показывает полный спектр ГВГ.

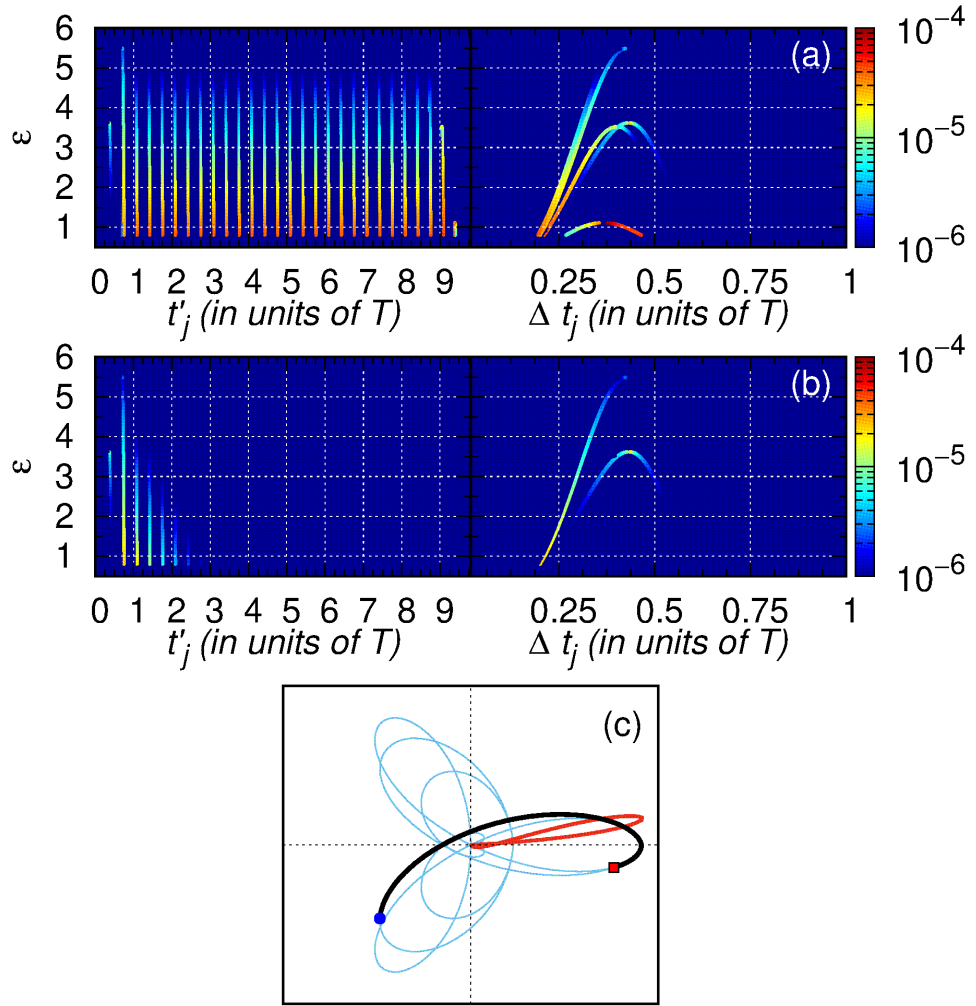


Рис. 4.2. Зависимость приведённой энергии,  $\varepsilon = E/u_p$ , где  $u_p = F^2/(4\omega^2)$ , от времени ионизации,  $t'_j$ ,  $j$ -ой траектории и времени движения,  $\Delta t_j$ . На панели (a) эффекты истощения основного состояния не учтены, на панели (b) эффекты истощения основного состояния учтены. Лазерные параметры те же, что на рис. 4.1. Цветовая шкала показывает относительный вклад парциальных дипольных моментов. Панель (c): эскиз доминирующей замкнутой классической траектории для  $\Omega = I_p + 4u_p$  (красная линия) вместе с изображением электрического поля (чёрная линия), нарисованного с момента ионизации (голубая точка) до момента рекомбинации (красная точка), голубая линия соответствует траектории конца электрического вектора лазерного поля на всей продолжительности импульса. Электрон движется вдоль траектории против часовой стрелки.

на  $\pm 1$ . Эти результаты находятся в согласии с предыдущими исследованиями [53, 54] и вышеописанными свойствами ГВГ спектра без учёта эффектов истощения основного состояния. Как упоминалось выше, эффекты истощения приводят к существенному уширению и сдвигу пиков ГВГ (см. рис. 4.1), а также изменению поляризационных свойств генерируемого излучения. Для того, чтобы выяснить причину этих изменений в спектрах ГВГ, построим зависимость энергии электрона от времени ионизации  $t'_j$  и времени движения электрона  $\Delta t_j = t_j - t'_j$  [см. рис. 4.2 (а) и (b)]. Очевидно, что свойства траекторий электрона, определяемые лазерным полем на временном интервале, соответствующем постоянной пиковой интенсивности, одинаковы [см. форму траекторий на рис. 4.2 (с)]. Интерференция амплитуд, ассоциированных с этими траекториями формирует острые пики в спектрах ГВГ. Вклад амплитуд, соответствующих траекториям, возникающим при включении и выключении импульса, незначителен. Основной вклад в спектр ГВГ дают короткие траектории с временем движения  $\Delta t_j < T/2$ , где  $T = 2\pi/\omega$ . При учёте эффектов истощения основного состояния парциальные дипольные моменты  $\mathbf{d}_j$  не изменяются, однако фактор  $\mathcal{P}_j$  подавляет вклад парциальных дипольных моментов с наибольшим  $j$  [см. рис. 4.2 (b)]. Таким образом, дипольный момент  $\mathbf{D}(\Omega)$  определяется лишь несколькими парциальными дипольными моментами с неравными вкладами, что приводит к уширению пиков в спектре ГВГ и изменению поляризационных свойств [см. рис. 4.1(b)].

## 2. Сравнение с результатами численного решения

### нестационарного уравнения Шрёдингера

Сравним аналитические результаты, полученные с помощью (3.29), (3.30), с результатами численного интегрирования трёхмерного нестационарного урав-

нения Шрёдингера (НУШ):

$$i\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\nabla^2}{2} + U(r) + \mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(t) \right] \psi(\mathbf{r}, t), \quad (4.18)$$

где  $\mathbf{F}(t)$  — напряжённость электрического поля лазерного импульса,  $U(r)$  — атомный потенциал. В численном решении НУШ использовался сглаженный кулоновский потенциал вида:

$$U(r) = -\frac{1}{r} \left[ \tanh(r/a) + (r/b)\operatorname{sech}^2(r/a) \right], \quad (4.19)$$

где  $a = 0.3$  ат.ед. и  $b = 0.46$  ат.ед. Значения констант  $a$  и  $b$  были выбраны таким образом, чтобы энергии основного состояния в потенциале  $U(r)$  совпадала с энергией основного состояния атома водорода. Кроме того, потенциал (4.19) обеспечивает совпадение сечения фотоионизации из начального  $s$ -состояния с известным результатом для кулоновского потенциала в широком диапазоне энергий фотона. Спектральная плотность ГВГ,  $\rho(\Omega)$ , вычисляется с помощью Фурье-преобразования лазерно-индуцированного дипольного ускорения  $\mathbf{a}(t)$ :

$$\rho(\Omega) = \frac{|\mathbf{a}(\Omega)|^2}{4c^3}, \quad \mathbf{a}(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Omega t} \mathbf{a}(t) dt, \quad (4.20)$$

где

$$\mathbf{a}(t) = -\mathbf{F}(t) - \langle \psi | \nabla U(r) | \psi \rangle. \quad (4.21)$$

Электрическое поле параметризуется в виде:

$$\mathbf{F}(t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(t)}{\partial t}, \quad \mathbf{A}(t) = \frac{\partial \mathbf{R}(t)}{\partial t}, \quad (4.22a)$$

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_1(t) + \mathbf{R}_2(t - T_d), \quad (4.22b)$$

$$\mathbf{R}_i(t) = \frac{F}{\omega_i^2} f_i(t) (\mathbf{e}_x \cos \omega_i t + \eta_i \mathbf{e}_y \sin \omega_i t), \quad (4.22c)$$

$$f_i(t) = e^{-2 \ln 2 t^2 / \tau_i^2} \quad (4.22d)$$

где  $F$  — напряжённость каждой компоненты поля  $\mathbf{F}(t)$ ,  $\omega_i$  — несущая частота  $i$ -ой компоненты ( $\omega_1 = \omega_2/2 \equiv \omega$ ),  $\eta_i$  — эллиптичность  $i$ -ой компоненты ( $\eta_1 =$

$-\eta_2 = 1$ ),  $\tau_i = 2\pi N_i/\omega$  длительность  $i$ -ой компоненты,  $N_i$  — число оптических циклов  $i$ -го импульса,  $T_d$  — временная задержка между компонентами поля (отрицательная временная задержка означает то, что  $2\omega$ -импульс опережает  $\omega$ -импульс).

Для численного решения НУШ использовался «split-step» метод, основанный на быстром преобразовании Фурье вдоль декартовых координат  $x$ ,  $y$  и  $z$  [171]. Использование декартовых координат обусловлено отсутствием пространственной симметрии в задаче. Для интенсивности импульса  $I = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>, используемый метод приводит к хорошим результатам при большом числе точек разбиения пространства сеткой: по оси  $x$  и  $y$   $N_x = N_y = 1024$  для  $\lambda = 1.6$  мкм и  $\lambda = 1.8$  мкм, и  $N_x = N_y = 2048$  для  $\lambda = 2.2$  мкм и  $\lambda = 2.4$  мкм. Для оси  $z$ , число точек разбиения равно  $N_z = 256$ . Для обеспечения сходимости численных результатов были выбраны следующие временные и пространственные шаги:  $\Delta t = 0.025$  ат.ед.,  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.325$  ат.ед. Поглощающие слои (определяемые с помощью метода, использованного в [171]) были выбраны шириной 30 ат.ед. по направлениям осей  $x$  и  $y$  и 15 ат.ед. по  $z$ .

На рис. 4.3-4.5 приведено сравнение численного решения НУШ с аналитическими результатами. Из рисунков видно хорошее согласие результатов в высокоэнергетической области спектров ГВГ, для которой справедлив аналитический подход. Для энергий гармоник, близких к потенциалу ионизации, наблюдаются расхождения, обусловленные вкладом членов, опущенных при использовании адиабатического приближения. Для некоторых энергий в спектрах ГВГ, построенных с помощью аналитического подхода, наблюдаются разрывы или острые пики. Эти нефизические особенности связаны с ограниченностью использования аналитического подхода в области энергий, для которых  $\mathbf{K}_j \cdot \dot{\mathbf{K}}_j$  стремится к нулю. Эти энергии соответствуют точкам бифуркаций (каустики), в которых сливаются две траектории движения

электрона, и анализ ГВГ для таких энергий требует отдельного рассмотрения [162, 164, 165].

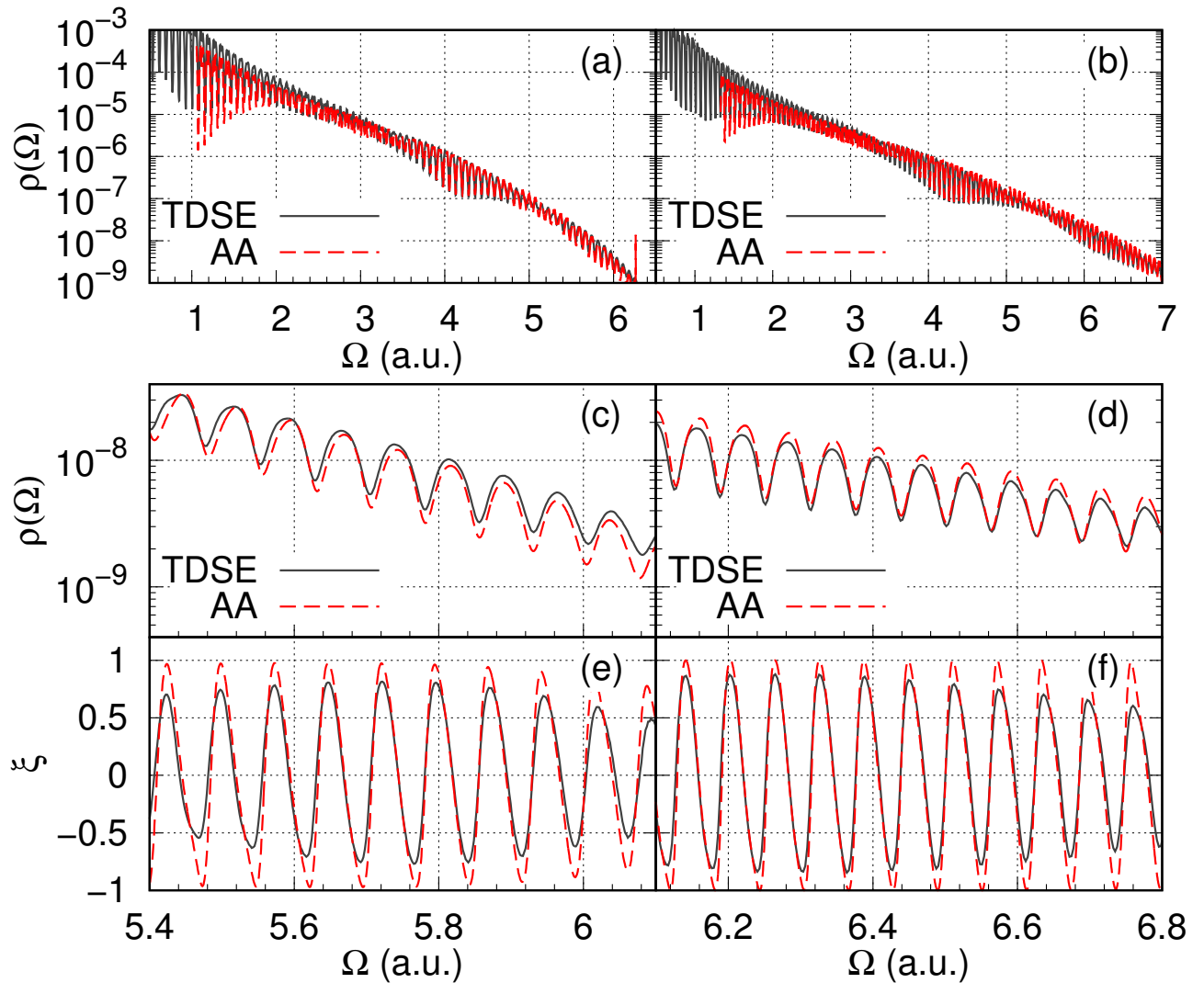


Рис. 4.3. Спектр ГВГ [полный спектр (a,b), увеличенная часть спектра (c,d)] и степень циркулярной поляризации (e,f) для бициркулярного поля (4.22). Параметры, используемые в расчётах спектров ГВГ и  $\xi$ :  $I = cF^2/(8\pi) = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $N_1 = N_2 = 3$ ,  $T_d = 0$ , и  $\lambda = 2\pi c/\omega = 1.8$  мкм (a,c,e) и  $\lambda = 2.2$  мкм (b,d,f). Чёрные линии: результаты решения НУШ; красные линии: результаты аналитического решения (АП).

Выделим ряд основных эффектов, наблюдаемых в бициркулярном поле. *Во-первых*, в отличие от случая линейной поляризации в спектре ГВГ для бициркулярного поля отсутствует ярко выраженное плато, в конце ко-

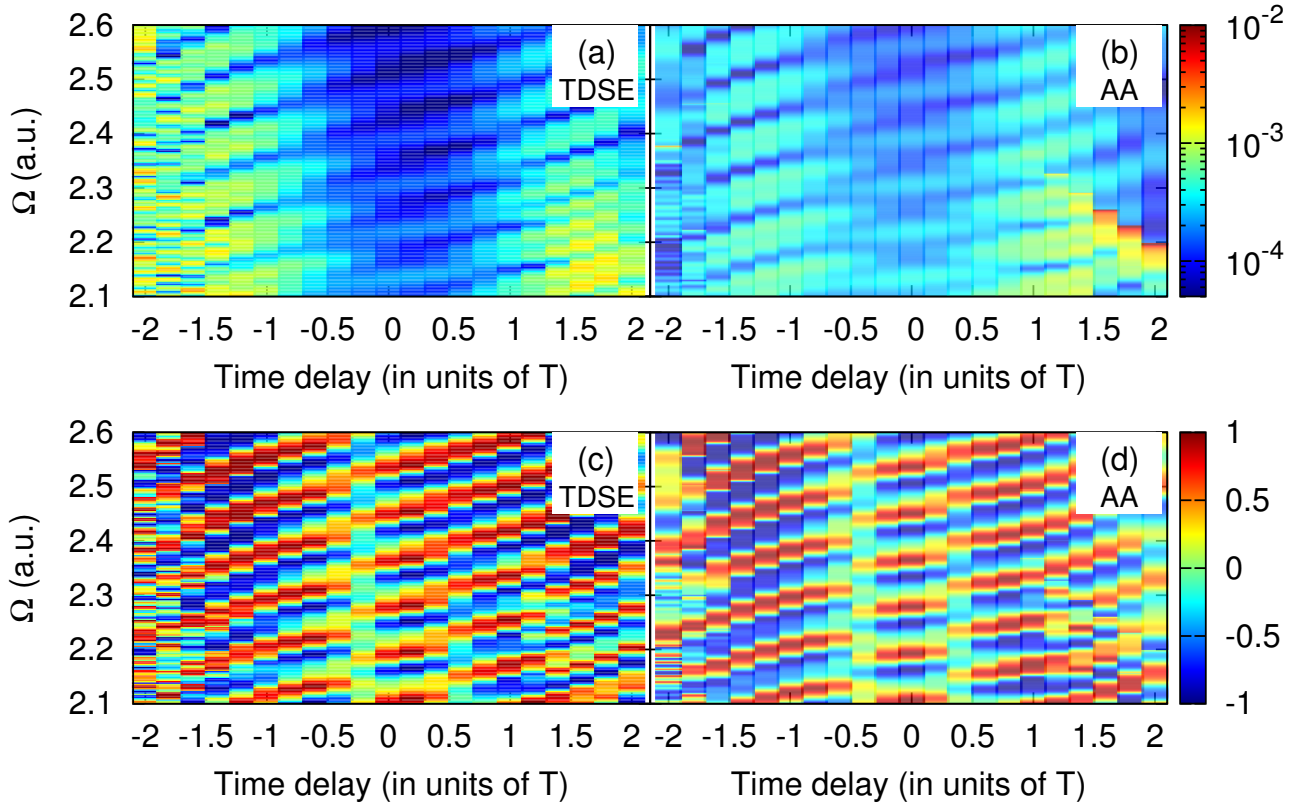


Рис. 4.4. Двумерное распределение зависимости вероятности ГВГ (a,b) и степени циркулярной поляризации (c,d) для бициркулярного поля (4.22) с параметрами расчёта  $I = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $N_1 = N_2 = 3$ , и  $\lambda = 1.6$  мкм от временной задержки и энергии гармоник. На панелях (a) и (c): результаты решения НУШ; на (b) и (d): результаты аналитического решения. Результаты аналитического решения представлены с тем же разрешением, что и численные результаты.

торого наблюдается резкий обрыв спектра [см. рис. 4.1 (a) и 4.3 (a), (b)]. Во-вторых, зависимость выхода ГВГ и степени циркулярной поляризации от временной задержки между импульсами имеет осцилляционный характер, из чего следует, что временная задержка может быть использована для контроля над поляризационными свойствами сгенерированных гармоник (см. рис. 4.4, 4.6). В-третьих, для некоторых фиксированных временных задержек в ГВГ спектре отсутствуют гармоники с энергией  $\Omega = (3n \pm 1)\omega$ . Этот результат указывает на зависимость спектрального состава генерируемого из-

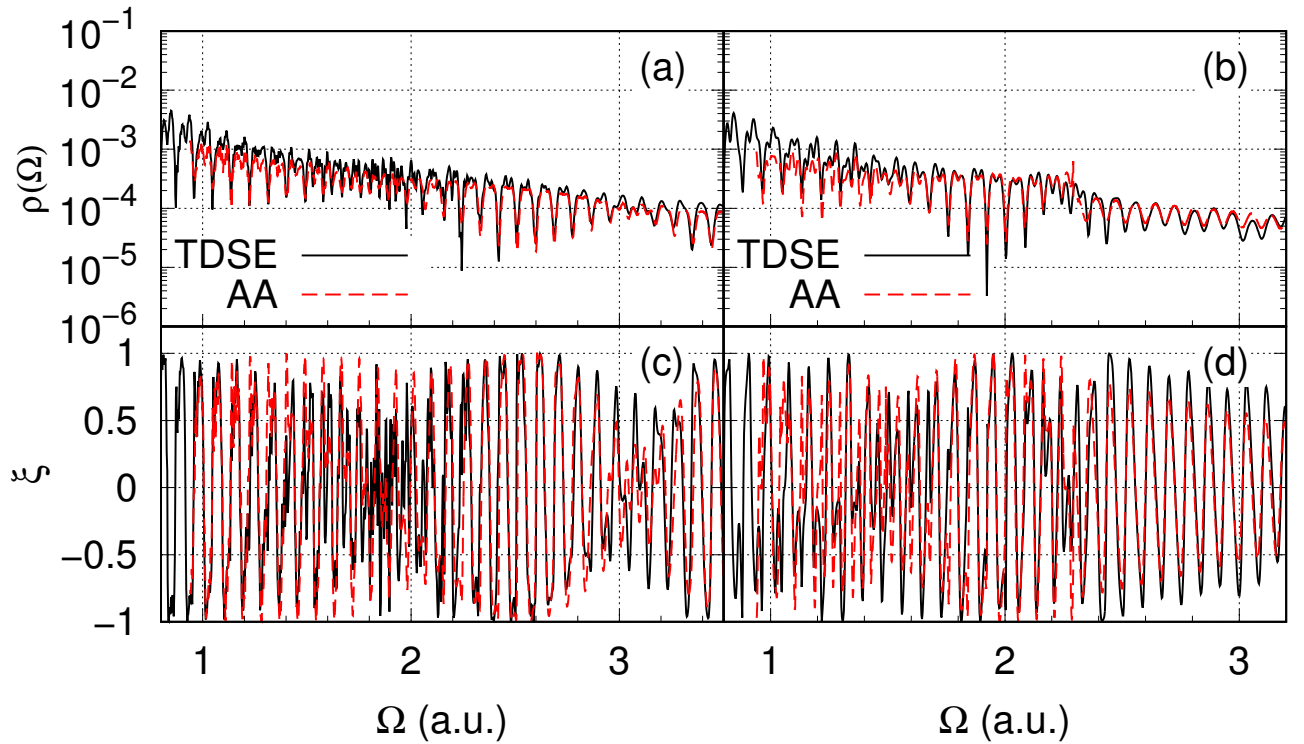


Рис. 4.5. Рис. 4.4 в разрезе для  $T_d = -1.4T$  (a,c) и  $T_d = 1.4T$  (b,d). Чёрные линии: решения НУШ; красные линии: аналитические результаты (АП).

лучения от времени задержки, и допускает генерацию гармоник с энергиями  $\Omega = 3n\omega$ , запрещёнными правилами дипольного отбора для случая монохроматических компонент (см. рис. 4.7). *В-четвёртых*, в спектре ГВГ и степени циркулярной поляризации отсутствует симметрия для отрицательной и положительной временной задержек (см. рис. 4.4, 4.5, 4.6). Рассмотрим все эти эффекты в бициркулярном поле и их причины в следующих разделах.

## 2.1. Анализ замкнутых классических траекторий в бициркулярном поле

Основными величинами, определяющими парциальные амплитуды ГВГ, являются времена ионизации и рекомбинации, задающие начальные и конечные времена движения по замкнутым классическим траекториям. Эти вре-



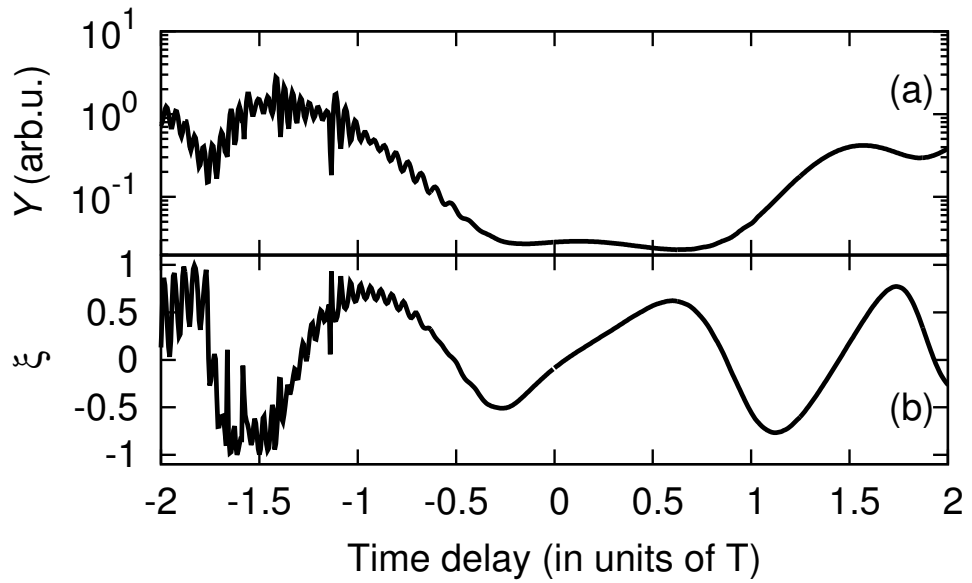


Рис. 4.6. Зависимость выхода гармоник (а) и степени циркулярной поляризации (b) от временной задержки между компонентами бициркулярного поля вида (4.22) при фиксированном  $\Omega = 2.48$  ат.ед. Параметры лазерного поля:  $I = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\lambda = 2\pi c/\omega = 1.6$  мкм,  $N_1 = 3$ ,  $N_2 = 2$ .

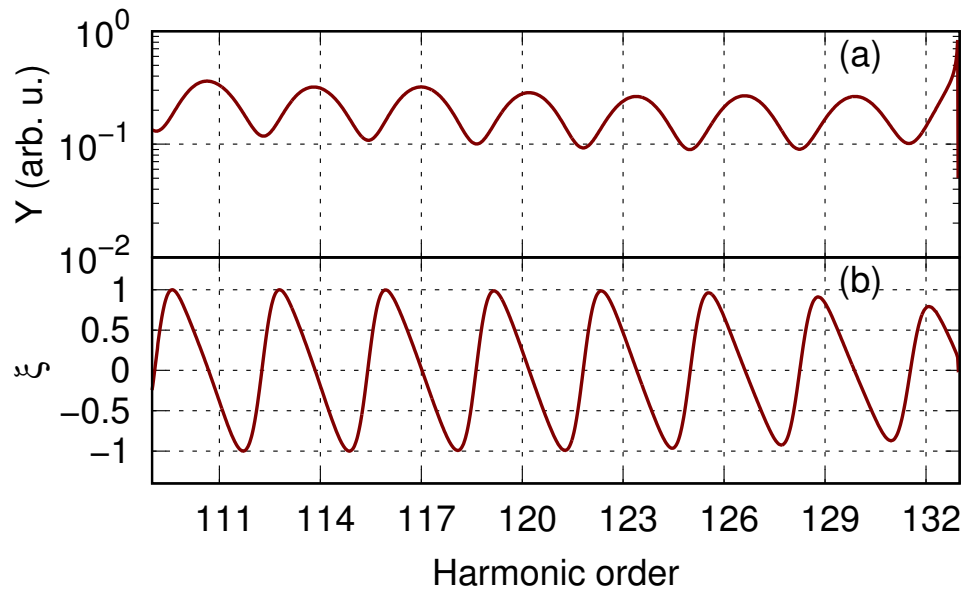


Рис. 4.7. Спектр гармоник (а) и степень циркулярной поляризации (b) для бициркулярного поля вида (4.22) с временной задержкой между компонентами  $T_d = -T$ , где  $T = 2\pi/\omega$ . Параметры лазерного поля:  $I = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\lambda = 2\pi c/\omega = 1.6$  мкм,  $N_1 = 2$ ,  $N_2 = 2$ .

мена определяются из системы уравнений (3.23). Для исследования вкладов различных замкнутых траекторий решим вначале уравнение (3.23а), относительно времени ионизации  $t'_j$  (время начала движения), рассматривая время рекомбинации  $t_j$  (время окончания движения) в качестве параметра. Следует отметить, что нелинейное уравнение (3.23а) имеет несколько ветвей решения. Для оценки вкладов различных ветвей решений, построим зависимость ионизационного фактора от времени рекомбинации (см. рис. 4.8). Различные кривые на рис. 4.8 для заданной временной задержки между компонентами бициркулярного поля соответствуют различным ветвям решения уравнения (3.23а). Видно, что изменение временной задержки приводит к резкому изменению ионизационного фактора, что позволяет контролировать процесс ионизации на первом шаге ГВГ.

Совместное решение уравнений (3.23а) и (3.23б) задаёт пары времён  $\{t'_j, t_j\}$ , которые определяют замкнутые классические траектории. Вещественные решения уравнения (3.23б) существуют только в некотором диапазоне энергий  $E$ . Однако, не все действительные решения уравнения (3.23б) пересекают решения уравнения (3.23а). Поэтому набор совместных решений  $\{t'_j, t_j\}$  образует счётное множество решений при фиксированной энергии. Например, на рис. 4.8 точками отмечены значения ионизационного фактора, соответствующие искомым решениям системы (3.23) для заданной энергии гармоника. Для некоторых временных задержек и энергий  $E$  вещественные решения уравнений (3.23а) и (3.23б) не пересекаются, что приводит к отсутствию искомым замкнутых траекторий (на рис. 4.8(g) и (h) отсутствуют точки, соответствующие значению ионизационного фактора в момент рекомбинации).

Решения системы уравнений (3.23) можно классифицировать по значению времени движения по замкнутым траекториям: короткие траектории соответствуют случаю  $\Delta t_j = t_j - t'_j < T$ , длинные —  $\Delta t_j > T$ . Форма коротких

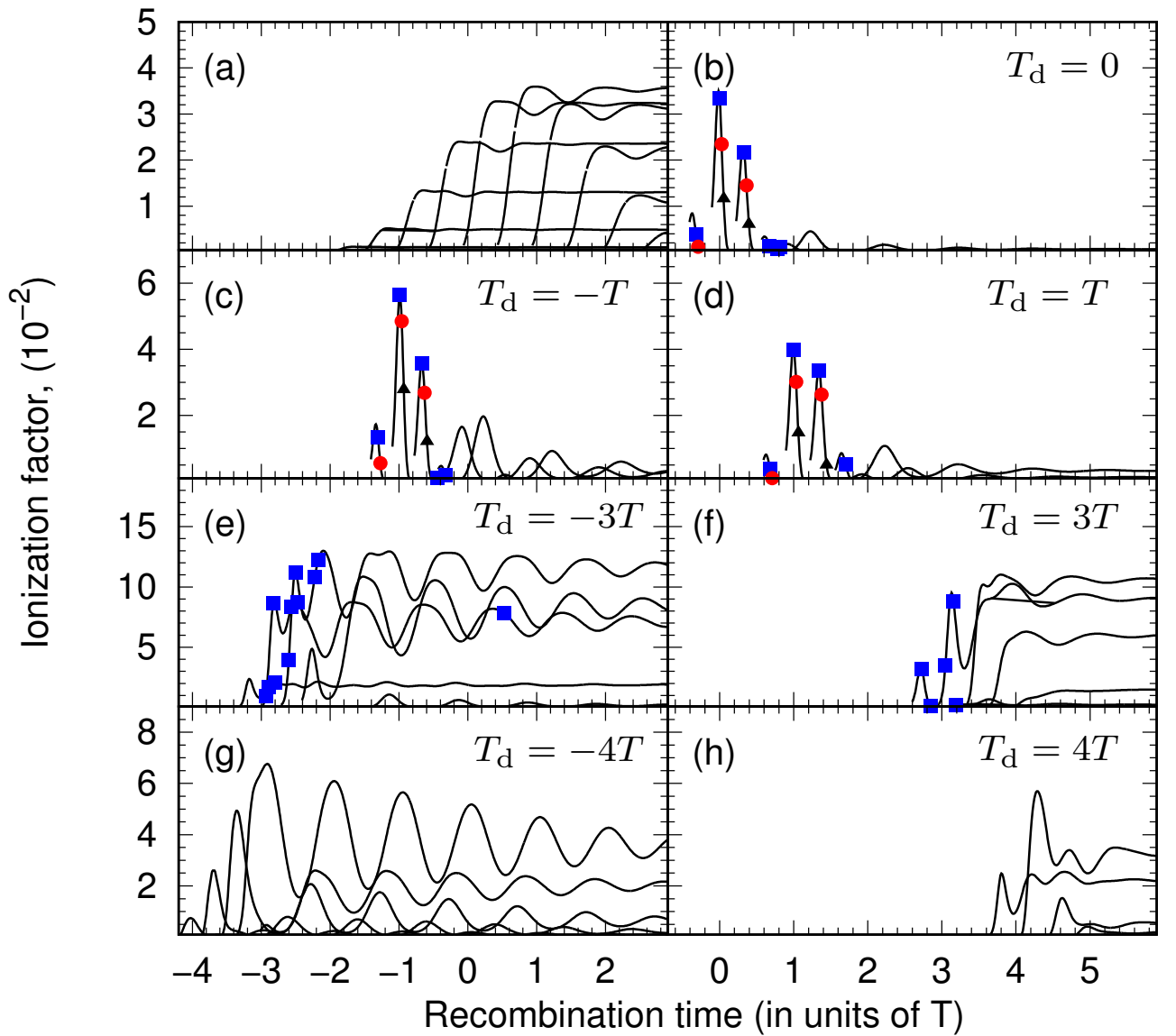


Рис. 4.8. Зависимость ионизационного фактора (с учётом эффектов истощения) от времени рекомбинации  $t_j$ . На панели (а) представлены результаты для линейно поляризованного поля с  $I = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $\lambda = 1.6$  мкм,  $N_1 = 4$ ,  $N_2 = 2$ ; на остальных панелях вычисления выполнены для семи различных временных задержек между компонентами бициркулярного импульса: (b)  $T_d = 0$ , (c)  $T_d = -T$ , (d)  $T_d = T$ , (e)  $T_d = -3T$ , (f)  $T_d = 3T$ , (g)  $T_d = -4T$ , (h)  $T_d = 4T$ . Точки на рисунке соответствуют значениям ионизационного фактора, вычисленного с помощью пары времён  $t_j, t'_j$ , являющихся решением системы уравнений (3.23) для конкретных значений энергий:  $E = 2u_p$  (голубые квадраты),  $E = 3u_p$  (красные круги),  $E = 4u_p$  (чёрные треугольники).

траекторий аналогична представленным на рис. 4.2(с). В случае больших отрицательных временных задержек между компонентами бициркулярного поля возникают длинные траектории, которые имеют несколько точек возврата к атомному остову (см. рис. 4.9). Отрицательная временная задержка означает, что  $2\omega$ -компонента лазерного импульса опережает  $\omega$ -компоненту. С физической точки зрения наличие длинных траекторий для отрицательных временных задержек и их отсутствие для положительных задержек объясняется следующим: скорость электрона, набранная в поле с частотой  $2\omega$  в два раза меньше, чем набранная в поле  $\omega$ , поэтому раскручивание по спиральной траектории, вызванное  $2\omega$ -компонентой поля (см. левую колонку на рис. 4.9), может быть компенсировано действием  $\omega$ -компоненты. Действительно, в момент времени, когда вклад  $\omega$ -компоненты поля в импульс электрона становится сравним с вкладом  $2\omega$ -компоненты (см. среднюю колонку на рис. 4.9), более низкочастотное поле заворачивает электрон и возвращает его по спирали в исходную точку (см. правую колонку на рис. 4.9).

Существование замкнутых классических траекторий с ненулевым начальным импульсом обсуждалось в [172], где было показано, что наличие начального импульса позволяет электрону двигаться по замкнутой траектории в поле с поляризацией, отличной от линейной. В бициркулярном лазерном поле начальный импульс сообщается электрону  $2\omega$ -компонентой, а  $\omega$ -компонента возвращает электрон к атомному остову. Энергия, набранная вдоль такой длинной замкнутой траектории, будет меньше  $2u_p$ . Следовательно, платообразная структура, связанная с этими траекториями, короче, чем плато, наблюдаемое для коротких траекторий при небольшой временной задержке.

Пикообразное поведение ионизационного фактора, наблюдаемое в бициркулярном поле с временной задержкой между компонентами [см. рис. 4.8 (b)-(d)], отличается от плавного поведения этого фактора в линейно поляри-

зованном лазерном поле [см. рис. 4.8(a)]. При некоторых энергиях электрона ионизационный фактор может достигать максимальных значений, однако дальнейшее изменение энергии приводит к его уменьшению, в следствие чего уменьшается вклад соответствующего дипольного момента  $\mathbf{d}_j$  (см. рис. 4.10), и в спектре ГВГ наблюдается спад в выходе гармоник. В случае линейной поляризации ионизационный фактор остаётся практически неизменным для широкого диапазона времени рекомбинации, что приводит к хорошо известному эффекту плато в спектре ГВГ. При большой положительной временной задержке между компонентами импульса поведение ионизационного фактора и структуры высокоэнергетического плато аналогичны случаю линейной поляризации [см. рис. 4.8(e)-(h)].

## 2.2. Генерация излучения в модели двух диполей и контроль над свойствами ГВГ

Из рисунков 4.8 и 4.10 видно, что для небольших временных задержек между компонентами бициркулярного импульса наиболее существенными оказываются только две траектории, определяемые двумя парциальными диполями, которые соответствуют наибольшим значениям ионизационного фактора [см. (3.24)]. В этом случае ГВГ может быть описана как излучение системой двух диполей, осциллирующих на частоте  $\Omega$ , с разностью фаз  $\Phi$  (см. рис. 4.11). В случае длинного бициркулярного импульса излучение гармоник происходит системой трёх диполей с относительным углом между ними в  $120^\circ$  градусов. Использование бициркулярного поля с двумя короткими импульсами и временной задержкой даёт возможность контролировать относительную фазу между двумя диполями и их амплитуду, а следовательно и величину выхода гармоник и их степень циркулярной поляризации (см.рис. 4.6).

Длина вектора дипольного момента в основном определяется значени-

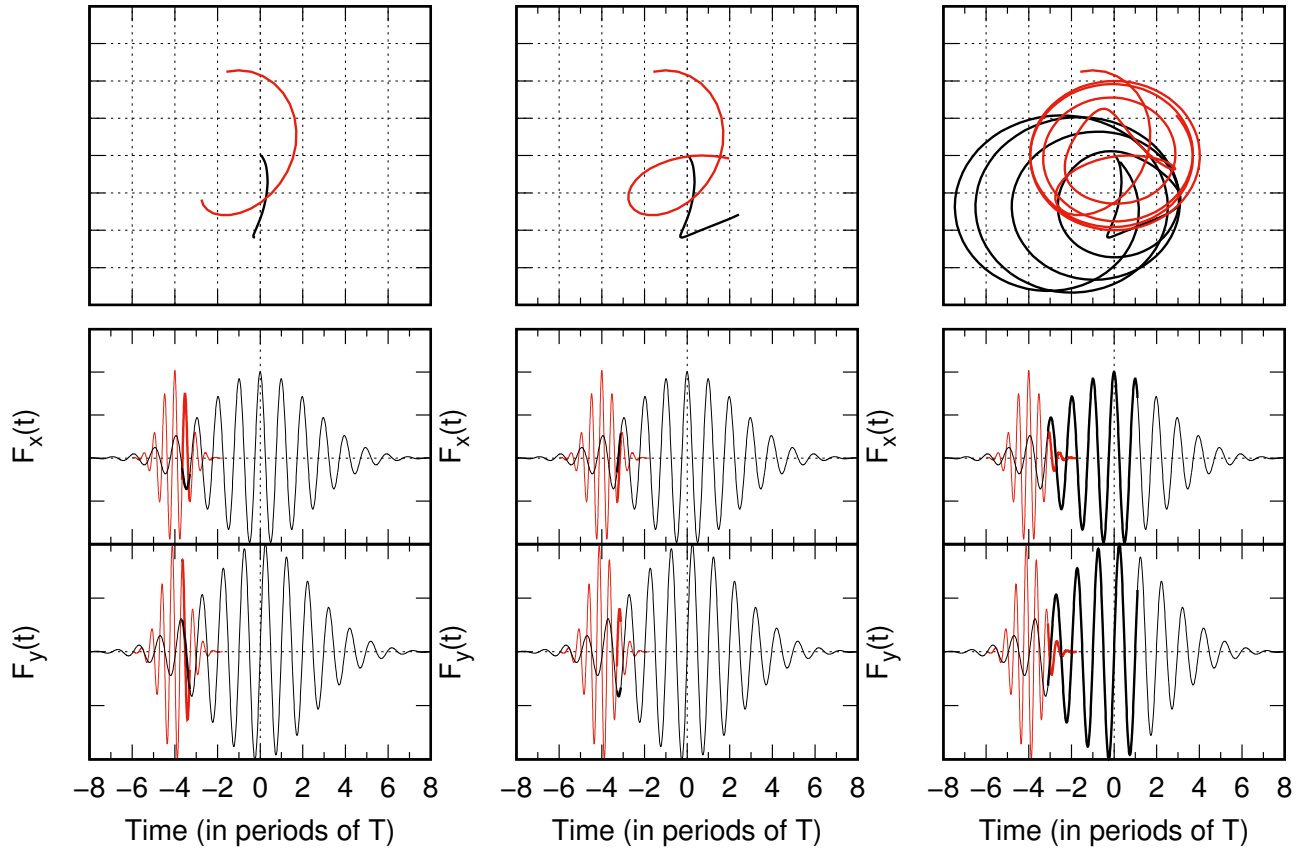


Рис. 4.9. Три стадии формирования длинной траектории. Левая колонка: стадия сообщения начального импульса электрону  $2\omega$ -компонентой; средняя колонка: стадия разворота; правая колонка: стадия возврата электрона  $\omega$ -компонентой. На верхних панелях показаны траектории электрона (чёрные линии) и траектории вектора напряжённости лазерного поля (красные линии). На нижних панелях показана временная зависимость  $2\omega$  (красные линии) и  $\omega$  (чёрные линии) импульсов. Вычисления выполнены для тех же лазерных параметров, что и на рис. 4.8 с  $T_d = -4T$ .

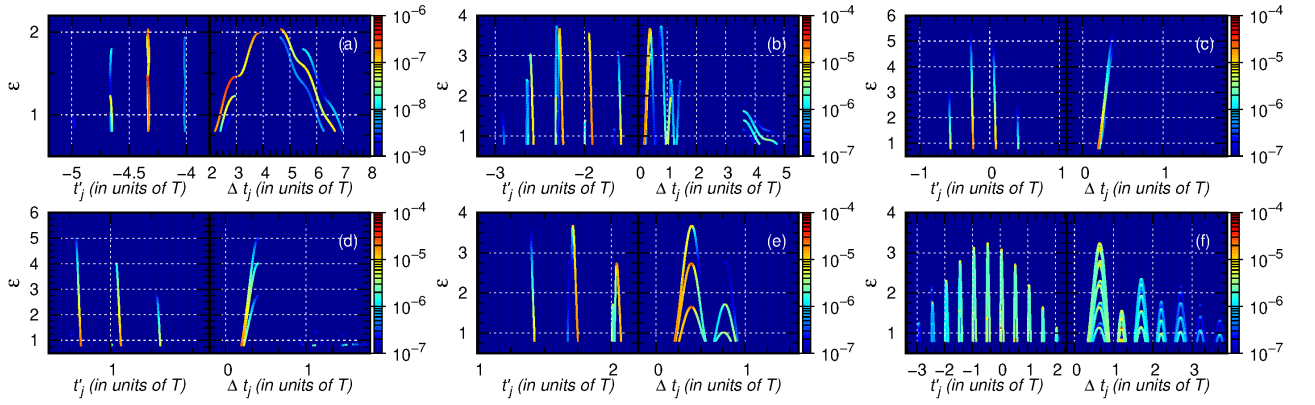


Рис. 4.10. Зависимость приведённой энергии  $\varepsilon = E/u_p$  [где  $u_p = F^2/(4\omega^2)$ ] от времени ионизации  $t'_j$   $j$ -ой траектории и времени движения  $\Delta t_j$  для бициркулярного поля (4.22):  $\lambda = 1.6$  мкм,  $I = 10^{14}$  ВТ/см<sup>2</sup>,  $N_1 = 4$ ,  $N_2 = 2$ , при различных временных задержках: (a)  $T_d = -5T$ ; (b)  $T_d = -2T$ ; (c)  $T_d = 0$ ; (d)  $T_d = T$ ; (e)  $T_d = 2T$ ; (f) случай линейно поляризованного поля с  $I = 2 \times 10^{14}$  ВТ/см<sup>2</sup>. Цветом показан соответствующий вклад парциальных дипольных моментов,  $\propto |\mathbf{d}_j|$ .

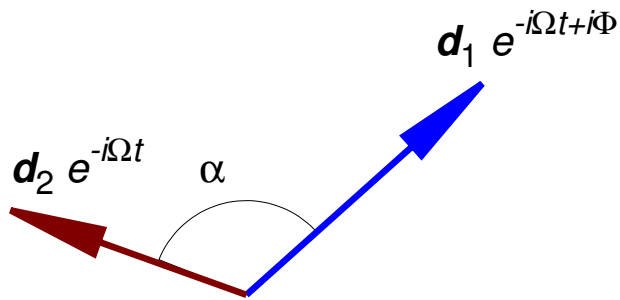


Рис. 4.11. Модель системы двух диполей.

ями факторов, описывающих процессы ионизации и истощения основного состояния [см. (3.24) и (3.28)], величина которых зависит от временной задержки между компонентами импульса (см. рис. 4.8). Относительная фаза между векторами дипольных моментов задаётся разницей между классическими действиями электрона, вычисленных вдоль двух замкнутых траекторий:

$$\Phi = \Delta S + \Omega(t_1 - t_2), \quad (4.23)$$

$$\Delta S = S(t_1, t'_1) - S(t_2, t'_2),$$

где  $S(t, t')$  задаётся уравнением (3.6), а  $t_1$  и  $t_2$  — времена рекомбинации для первой и второй замкнутой траектории, определяемые дипольными моментами  $d_1$  и  $d_2$ . Угол  $\alpha$  слабо зависит от временной задержки между компонентами импульса и приблизительно равен  $120^\circ$ .

Выражения для вычисления выхода ГВГ и степени циркулярной поляризации с помощью модели двух диполей, в которой  $\mathbf{D}(\Omega) = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 e^{-i\Phi}$  [см. уравнения (3.30) и (4.17)], имеют вид:

$$\rho(\Omega) = \frac{\Omega^4 d_1 d_2}{2c^3} [\delta + \cos \alpha \cos \Phi], \quad (4.24a)$$

$$\xi = -\frac{\sin \alpha \sin \Phi}{\delta + \cos \alpha \cos \Phi}, \quad (4.24b)$$

где  $\delta = (d_1^2 + d_2^2)/(2d_1 d_2)$ . Если относительная фаза между двумя дипольными моментами равна  $\Phi = 2\pi n$  или  $\Phi = \pi + 2\pi n$ , то наблюдается линейно поляризованное излучение с интенсивностью  $\rho(\Omega) = \Omega^4 d_1 d_2 / (2c^3) [\delta \pm \cos \alpha]$  (где знак “+” соответствует первой фазе, знак “−” — второй). Если фаза равна  $\Phi = \pi/2 + \pi n$ , то излучается эллиптически поляризованная гармоника со степенью циркулярной поляризации гармоники  $|\xi| = \sin \alpha / \delta$  и интенсивностью  $\rho(\Omega) = \Omega^4 (d_1^2 + d_2^2) / (4c^3)$ . Анализируя степень циркулярной поляризации на экстремумы, можно убедиться, что максимум  $\xi$  при фиксированном  $\alpha$  задаётся выражением  $|\xi| = \sin \alpha / (\delta \sqrt{1 - \delta^{-2} \cos^2 \alpha})$ , при этом



$\rho(\Omega) = \Omega^4(d_1^2 + d_2^2)/(4c^3) [1 - \delta^{-2} \cos^2 \alpha]$ . Таким образом, изменяя фазу  $\Phi$ , можно достичь любых значений степени циркулярной поляризации.

При определённых параметрах лазерного поля разница  $t_1 - t_2$  будет порядка трети периода  $T$  и фаза  $\Phi$  является практически линейной функцией от  $\Omega$  [см. уравнение (4.23)]. Это объясняет появление осцилляций в спектре ГВГ с периодом  $3\omega$  (см. рис. 4.3 и 4.12). Значение  $\Delta S$  зависит от временной задержки между компонентами бициркулярного поля ( $T_d$ ), поэтому при некоторых значениях  $T_d$  можно наблюдать возникновение «запрещённых» гармоник с частотой  $\Omega = 3N\omega$  [99, 145]. Например, в случае  $\Delta S = (2n + 1)\pi$  (где  $n$  — целое число), функция (4.24а) достигает максимального значения при  $\Omega = 3N\omega$ , при этом  $\xi = 0$ . Стоит отметить, что вышеприведённый анализ основывается на предположении линейной зависимости  $\Phi$  от  $\Omega$  и равенстве  $t_1 - t_2 = T/3$ . Однако, данное предположение неприменимо для полного спектра ГВГ, поэтому гармоники с частотой  $\Omega = 3N\omega$  и линейной поляризацией наблюдаются только в некоторой части спектра.

Из рисунков 4.12 и 4.13 видно, что форма спектра существенно зависит от временной задержки между компонентами бициркулярного поля. В случае, когда доминирующей является только одна траектория, спектр ГВГ имеет плавную зависимость от приведённой энергии (см.рис. 4.13 для  $T_d = T$ ,  $T_d = -T$  и  $T_d = 2T$  в области энергий  $4 < E/u_p < 5$ ,  $4.5 < E/u_p < 5$  и  $2.7 < E/u_p < 3.7$ , соответственно). Интерференция двух траекторий порождает быстрые осцилляции в спектре ГВГ (см.рис. 4.13 для  $T_d = 2T$  и  $T_d = -2T$  в области энергий  $E/u_p < 2.7$  и  $1.5 < E/u_p < 2.7$  соответственно). Также из этих рисунков видно, что при увеличении задержки по времени между импульсами выход гармоник в высокоэнергитической части спектра увеличивается примерно на порядок [99], что объясняется соответствующим поведением ионизационного фактора в зависимости от  $T_d$  (см. рис. 4.8), однако при этом спектр обрывается при меньших энергиях.

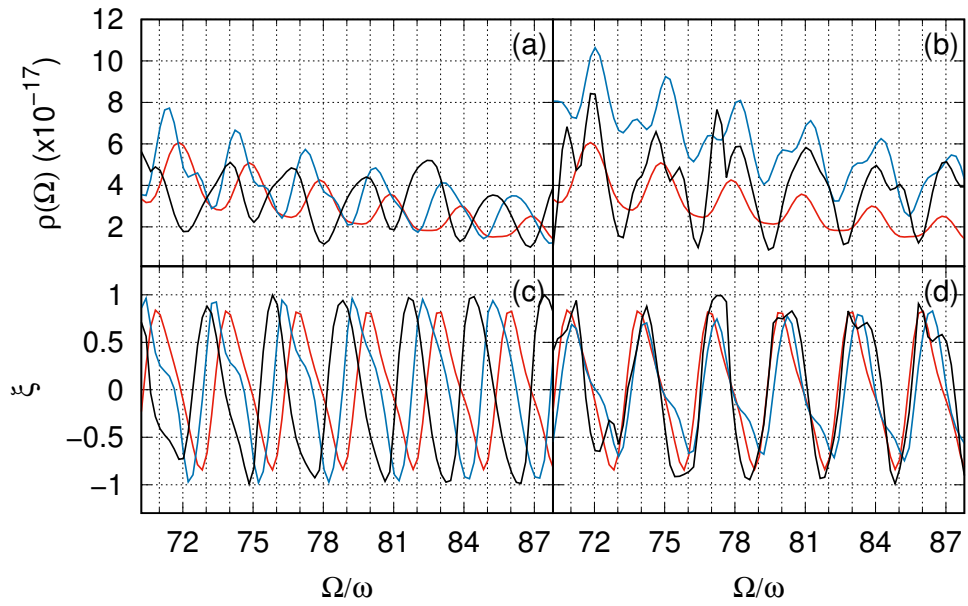


Рис. 4.12. Часть спектра ГВГ (а, б) и степень циркулярной поляризации (с, д) в зависимости от  $\Omega$  для лазерного поля с параметрами, как на рис. 4.8 ( $\omega = 0.0285$  ат.ед.). На панелях (а) и (с) красные линии:  $T_d = 0$ ; голубые линии:  $T_d = T$ ; чёрные линии:  $T_d = 2T$ . На панелях (б) и (д) красные линии:  $T_d = 0$ ; голубые линии:  $T_d = -T$ ; чёрные линии:  $T_d = -2T$ . Значения выхода ГВГ умножены на безразмерные константы для удобства анализа спектров ГВГ

Таким образом, временная задержка между компонентами бициркулярного лазерного поля влияет на выход гармоник и их поляризационные свойства. На рис. 4.14 показана зависимость выхода гармоник и степени циркулярной поляризации от временной задержки при нескольких фиксированных энергиях. Видно, что при больших отрицательных задержках обе зависимости представляют собой мелкомасштабные осцилляции (см.рис. 4.14 при  $T_d < -2T$ ). Это объясняется тем, что при  $T_d < -2T$  основной вклад в выход гармоник дают более двух дипольных моментов. При  $T_d > -2T$  доминирующими являются только два дипольных момента, поэтому такие осцилляции отсутствуют. Также из рис. 4.14 видно, что при изменении временной задержки на величину порядка  $T$  степень циркулярной поляризации генерируемой

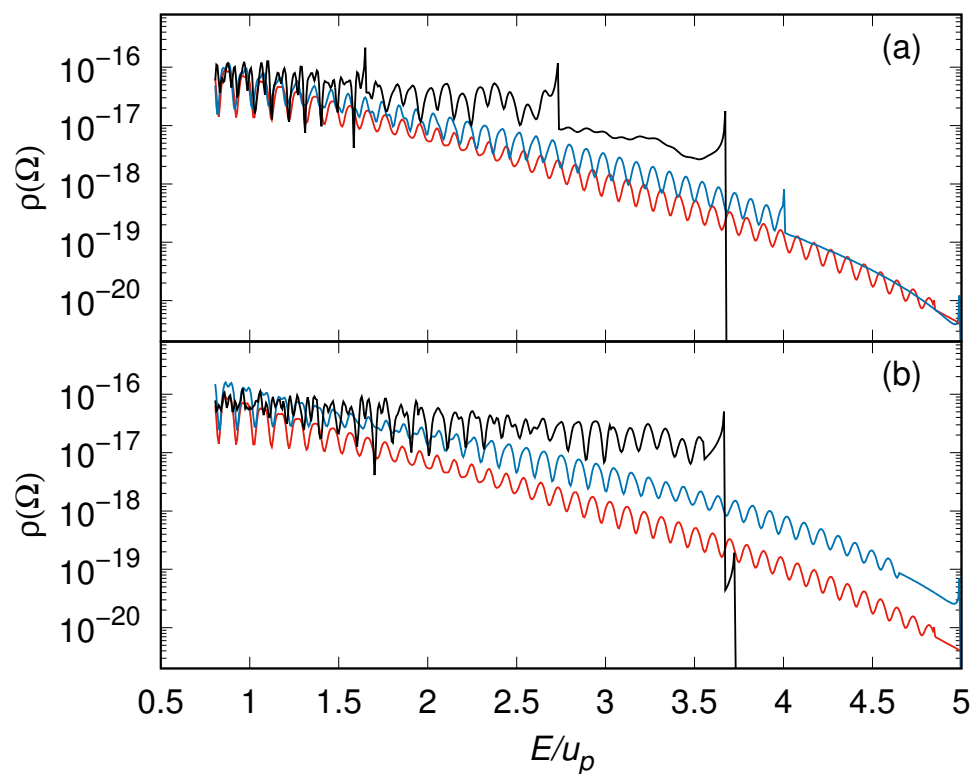


Рис. 4.13. Спектр ГВГ как функция приведённой энергии,  $E/u_p$ . Параметры лазерного поля такие же как на рис. 4.12,  $u_p = F^2/(4\omega^2) = 0.88$  ат.ед.. На панели (а) красным цветом:  $T_d = 0$ ; голубым цветом:  $T_d = T$ ; чёрным цветом:  $T_d = 2T$ . На панели (b) красным цветом:  $T_d = 0$ ; голубым цветом:  $T_d = -T$ ; чёрным цветом:  $T_d = -2T$ .

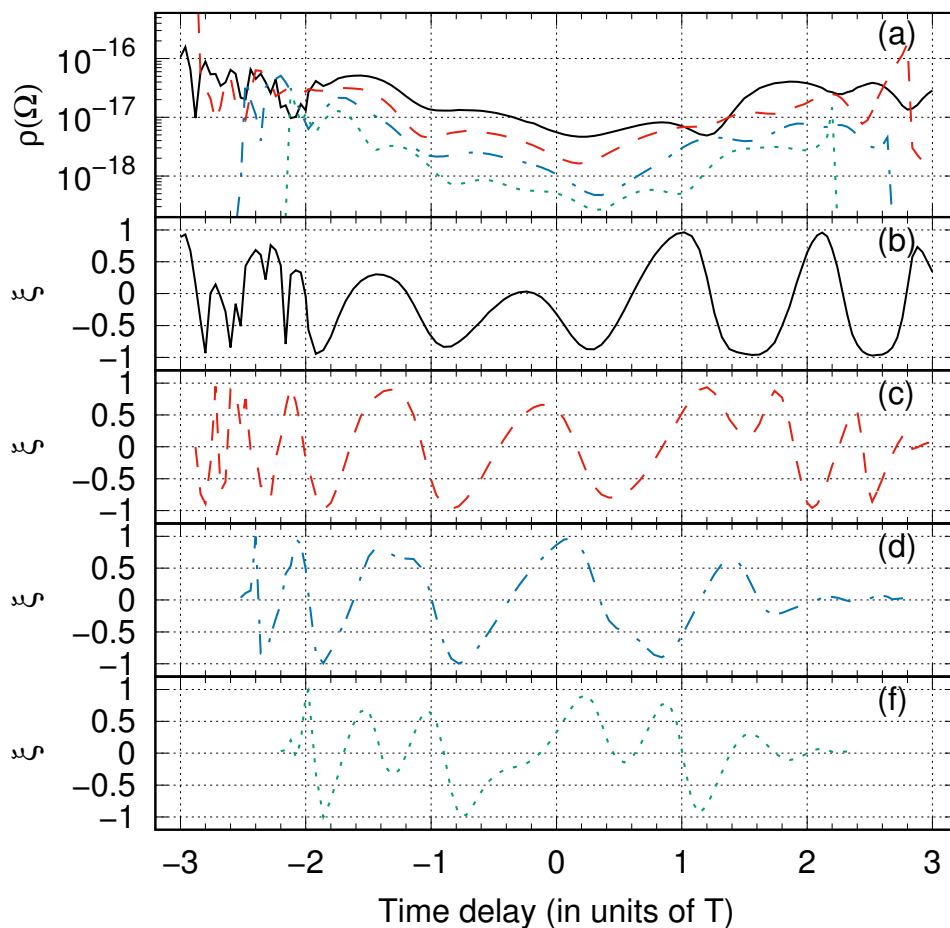


Рис. 4.14. Зависимость выхода гармоник (a) и степени циркулярной поляризации (b)-(f) от временной задержки между компонентами бициркулярного поля. Сплошные линии:  $\Omega = 2.26$  ат.ед.; прерывистые линии:  $\Omega = 2.7$  ат.ед.; линии прерывистые с точкой:  $\Omega = 3.14$  ат.ед.; точечные линии:  $\Omega = 3.57$  ат.ед. Вычисления выполнены для тех же параметров лазерного поля, что и на рис. 4.8.

гармоники изменяется на противоположную, и этот эффект достигается без изменения параметров компонент бициркулярного поля.

### 3. Выводы к четвёртой главе

В четвёртой главе представлены результаты для ГВГ в бициркулярном поле и их сравнение с численным решением нестационарного уравнения Шрё-

дингера. Проанализированы спектры ГВГ и поведение степени циркулярной поляризации в бициркулярном поле с различными временными задержками между компонентами поля. Для объяснения свойств полученных спектров предложена модель двух диполей. Проведён анализ замкнутых классических траекторий в бициркулярном поле и поведения ионизационного фактора. Предложен механизм контроля над свойствами ГВГ и степени циркулярной поляризации с помощью временной задержки между компонентами бициркулярного поля. Основные результаты главы опубликованы в работах [39, 99, 145, 161]

## Заключение

В настоящей диссертации предложена аналитическая модель, основанная на методе эффективного радиуса для двух связанных состояний и формализме ККЭС. Разработанная модель применяется к описанию процесса ГВГ в интенсивном лазерном поле с произвольной временной структурой. В рамках данной модели разработан адиабатический подход, позволяющий получить замкнутое аналитическое выражение для амплитуды ГВГ, аналитические выражения для кулоновских факторов для парциальных амплитуд фотоотрыва и генерации гармоник. На основе полученного модельного аналитического выражения для амплитуды ГВГ и кулоновских факторов произведено обобщение на случай нейтральных атомных систем с валентным электроном в  $s$ -состоянии. Детально исследована зависимость выхода гармоник и их поляризационных свойств от временной задержки между компонентами импульсного бициркулярного лазерного поля. Показано, что при ненулевой временной задержке возможно усиление/подавление выхода гармоник в заданном интервале энергий, изменение поляризационных свойств генерируемых гармоник (без изменения поляризационного состояния компонент бициркулярного поля), изменение спектрального состава генерируемого излучения.

В первой главе с использованием формализма ККЭС обобщён метод эффективного радиуса для системы с двумя связанными состояниями на случай интенсивного лазерного поля с произвольной огибающей. В рамках этого метода получены уравнения на комплексную квазиэнергию и общее выражение для амплитуды генерации гармоник в низкочастотном пределе, а также выражение для амплитуды генерации гармоник в случае коротких лазерных импульсов.

Во второй главе предложен адиабатический подход к вычислению ам-

плитуды фотоотрыва и кулоновских факторов для парциальных амплитуд фотоотрыва. Вычисление кулоновских факторов включало четыре этапа: 1. определение соответствующей траектории электрона в лазерном поле с точностью до членов порядка  $\tau/T$ , где  $\tau = t - \bar{t}_\nu$ ,  $\bar{t}_\nu$  — момент ионизации,  $T$  — период лазерного поля; 2. определение точек ветвления функции  $1/\sqrt{r^2(t)}$  и контура интегрирования для кулоновской поправки к действию частицы в поле, основанном на топологическом анализе расположения точек ветвления в комплексной плоскости; 3. вычисление действия электрона вдоль найденного контура; 4. непосредственное вычисление кулоновского фактора. В данной главе получены явные выражения для амплитуды фотоотрыва и кулоновских факторов для парциальных амплитуд фотоотрыва. Полученные результаты применены для ионизации атомных систем линейно и циркулярно поляризованными полями. Представлено сравнение аналитических результатов с экспериментальными данными.

В третьей главе с использованием адиабатического приближения получено явное выражение для амплитуды ГВГ, представленной в виде суммы парциальных амплитуд. Каждой парциальной амплитуде можно поставить в соответствие замкнутую классическую траекторию, начинающуюся в момент ионизации и заканчивающуюся в момент рекомбинации. На времена ионизации и рекомбинации получены уравнения, которые имеют прозрачный физический смысл: время ионизации определяется условием минимума кинетической энергии электрона в континууме, а время рекомбинации соответствует моменту испускания электроном энергии, набранной в лазерном поле, в виде спонтанного фотона. Показано, что в рамках данного приближения парциальные амплитуды могут быть представлены в виде произведения трёх множителей, каждый из которых соответствует трём этапам формирования гармоник: ионизации, распространения, рекомбинации, что соответствует квазиклассическому механизму генерации гармоник. Получены кулоновские

факторы для парциальных амплитуд ГВГ в адиабатическом приближении, и приведена зависимость кулоновского фактора от энергии гармоник в бициркулярном лазерном поле.

В четвёртой главе предложено обобщение развитой аналитической модели на случай реальных атомных систем (с валентным  $s$ -электроном) и проведено сравнение аналитических результатов с численным решением нестационарного уравнения Шрёдингера. В рамках предложенной аналитической модели генерации гармоник атомами рассмотрен процесс ГВГ в импульсном бициркулярном лазерном поле и исследована зависимость выхода гармоник и их поляризационных свойств от временной задержки между двумя компонентами поля. Для физической интерпретации спектров ГВГ в коротком импульсном бициркулярном лазерном поле предложена модель двух диполей. Проанализирована зависимость ионизационного фактора от времени рекомбинации для различных временных задержек между компонентами бициркулярного поля и показана ключевая роль этого фактора в формировании спектров ГВГ и степени циркулярной поляризации излучаемых гармоник. Предложен механизм управления выходом ГВГ и их поляризационными свойствами в импульсном бициркулярном лазерном поле, основанный на изменении временной задержки между компонентами поля.

Основные результаты диссертации получены в рамках Государственного задания №3.1659.2017/4.6.



## Список литературы

1. Above threshold ionization: From classical features to quantum effects / W. Becker, F. Grasbon, R. Kopold [et al.]// Adv. At., Mol., Opt. Phys. — 2002. — Vol. 48. — P. 35–98.
2. Milošević D. B. Scattering and reaction processes in powerfull laser fields / D. B. Milošević, F. Ehlotzky// Adv. At., Mol., Opt. Phys. — 2003. — Vol. 49. — P. 373.
3. Above-threshold ionization by few-cycle pulses / D. B. Milošević, G. G. Paulus, D Bauer, W. Becker// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2006. — Vol. 39. — P. R203–R262.
4. Agostini P. The physics of attosecond light pulses / P. Agostini, L. F. DiMauro// Rep. Prog. Phys. — 2004. — Vol. 67. — P. 813.
5. Attosecond physics / A Scrinzi, M. Yu. Ivanov, R. Kienberger, D. M. Villeneuve// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2006. — Vol. 39. — P. R1–R37.
6. Krausz F. Attosecond physics / F. Krausz, M. Ivanov// Rev. Mod. Phys. — 2009. — Vol. 81. — P. 163.
7. Аттосекундные электромагнитные импульсы: генерация, измерение и применение. генерация высоких гармоник интенсивного лазерного излучения для получения аттосекундных импульсов / В. В. Стрелков, В. Т. Платоненко, А. Ф. Стержантов, М. Ю. Рябикин// Усп. физ. наук. —

2016. — Vol. 186, no. 5. — P. 449–470.
8. Attosecond and XUV Spectroscopy: Ultrafast Dynamics and Spectroscopy / Ed. by T. Schultz, M. Vrakking. — [S. l.] : Wiley, New-York, — 2014.
  9. Bright, coherent, ultrafast soft X-ray harmonics spanning the water window from a tabletop light source / M.-C. Chen, P. Arpin, T. Popmintchev [et al.]// Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105. — P. 173901.
  10. The attosecond nonlinear optics of bright coherent X-ray generation / T. Popmintchev, M.-C. Chen, P. Arpin [et al.]// Nat. Photon. — 2010. — Vol. 4. — P. 822.
  11. Bright coherent ultrahigh harmonics in the keV X-ray regime from mid-infrared femtosecond lasers / T. Popmintchev, M.-C. Chen, D. Popmintchev [et al.]// Science. — 2012. — Vol. 336. — P. 1287.
  12. Near- and extended-edge X-ray-absorption fine-structure spectroscopy using ultrafast coherent high-order harmonic supercontinua / D. Popmintchev, B. R. Galloway, M.-C. Chen [et al.]// Phys. Rev. Lett. — 2018. — Vol. 120. — P. 093002.
  13. Observation of a train of attosecond pulses from high harmonic generation / P. M. Paul, E. S. Toma, P. Breger [et al.]// Science. — 2001. — Vol. 292. — P. 1689–1692.
  14. Attosecond synchronization of high-harmonic soft X-rays / Y. Mairesse, A. de Bohan, L. J. Frasinski [et al.]// Science. — 2003. — Vol. 302. —

- P. 1540–1543.
15. Corkum P. B. Attosecond science / P. B. Corkum, F. Krausz// *Nat. Phys.* — 2007. — Vol. 3, no. 6. — P. 381.
  16. *Attosecond Physics* / Ed. by L. Plaja, R. Torres, A. Zair. — [S. l.] : Springer-Verlag, Berlin, — 2013.
  17. Tracing and controlling electronic dynamics in atoms and molecules by attosecond pulses / L.-Y. Peng, W.-C. Jiang, J.-W. Geng [et al.]// *Phys. Rep.* — 2015. — Vol. 575. — P. 1.
  18. Widely tunable two-colour seeded free-electron laser source for resonant-pump resonant-probe magnetic scattering / E. Ferrari, C. Spezzani, F. Fortuna [et al.]// *Nature Comm.* — 2016. — Vol. 7. — P. 10343.
  19. Zhao Z. Generation of coherent two-color pulses at two adjacent harmonics in a seeded free-electron laser / Z. Zhao, H. Li, Q. Jia// *Phys. Rev. Accel. Beams.* — 2018. — Vol. 21. — P. 020701.
  20. Corkum P. B. Plasma perspective on strong field multiphoton ionization / P. B. Corkum// *Phys. Rev. Lett.* — 1993. — Vol. 71. — P. 1994.
  21. Becker W. Higher-harmonic production in a model atom with short-range potential / W. Becker, S. Long, J. K. McIver// *Phys. Rev. A.* — 1990. — Vol. 41. — P. 4112.
  22. Becker W. Modeling harmonic generation by a zero-range potential / W. Becker, S. Long, J. K. McIver// *Phys. Rev. A.* — 1994. — Vol. 50. —

- P. 1540.
23. Becker A. Intense-field many-body S-matrix theory / A. Becker, F. H. M. Faisal// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2005. — Vol. 38. — P. R1.
  24. Theory of high-harmonic generation by low-frequency laser fields / M. Lewenstein, Ph. Balcou, M. Yu. Ivanov [et al.]// Phys. Rev. A. — 1994. — Vol. 49. — P. 2117.
  25. Quantum path interferences in high-order harmonic generation / A. Zair, M. Holler, A. Guandalini [et al.]// Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 100. — P. 143902.
  26. Kitzler M. Spatial control of recollision wave packets with attosecond precision / Markus Kitzler, Matthias Lezius// Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 95. — P. 253001.
  27. Enhancement of high harmonics generated by field steering of electrons in a two-color orthogonally polarized laser field / Leonardo Brugnera, Felix Frank, David J. Hoffmann [et al.]// Opt. Lett. — 2010. — Vol. 35, no. 23. — P. 3994.
  28. High harmonic spectroscopy of multichannel dynamics in strong-field ionization / Y. Mairesse, J. Higuet, N. Dudovich [et al.]// Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 104. — P. 213601.
  29. Dependence of high-order-harmonic-generation yield on driving-laser ellip-

- ticity / M. Möller, Y. Cheng, S. D. Khan [et al.]// Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 86. — P. 011401(R).
30. High-order harmonic spectroscopy of the Cooper minimum in argon: Experimental and theoretical study / J. Higuët, H. Ruf, N. Thiré [et al.]// Phys. Rev. A. — 2011. — Vol. 83. — P. 053401.
31. Feynman's path-integral approach for intense-laser-atom interactions / P. Salieres, B. Carre, L. Le Deroff [et al.]// Science. — 2001. — Vol. 292. — P. 902.
32. Milošević D. B. Role of long quantum orbits in high-order harmonic generation / D. B. Milošević, W. Becker// Phys. Rev. A. — 2002. — Vol. 66. — P. 063417.
33. Milošević D. B. Quantum-orbit theory of high-order atomic processes in intense laser fields / D. B. Milošević, D Bauer, W. Becker// J. Mod. Opt. — 2006. — Vol. 53. — P. 125.
34. Smirnova O. Analytical solutions for strong field-driven atomic and molecular one- and two-electron continua and applications to strong-field problems / O. Smirnova, M. Spanner, M. Ivanov// Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 77. — P. 033407.
35. Torlina L. Time-dependent analytical R-matrix approach for strong-field dynamics. i. one-electron systems / L. Torlina, O. Smirnova// Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 86. — P. 043408.

36. Kaushal J. Nonadiabatic coulomb effects in strong-field ionization in circularly polarized laser fields / Jivesh Kaushal, Olga Smirnova// Phys. Rev. A. — 2013. — Vol. 88. — P. 013421.
37. Interpreting attoclock measurements of tunnelling times / Lisa Torlina, Felipe Morales, Jivesh Kaushal [et al.]// Nat. Phys. — 2015. — Vol. 11. — P. 503–508.
38. Torlina L. Coulomb time delays in high harmonic generation / L. Torlina, O. Smirnova// New J. Phys. — 2017. — Vol. 19, no. 2. — P. 023012.
39. Adiabatic-limit Coulomb factors for photoelectron and high-order-harmonic spectra / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. A. Minina [et al.]// Phys. Rev. A. — 2017. — Vol. 96. — P. 023406.
40. Popruzhenko S. V. Coulomb phase in high harmonic generation / S. V. Popruzhenko// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2018. — Vol. 51. — P. 144006.
41. Bauer D. Qprop: A Schrödinger-solver for intense laser-atom interaction / D. Bauer, P. Koval// Comp. Phys. Comm. — 2006. — Vol. 174. — P. 396.
42. Mosert V. Photoelectron spectra with qprop and t-surff / V. Mosert, D. Bauer// Comp. Phys. Comm. — 2016. — Vol. 207. — P. 452.
43. Origin for ellipticity of high-order harmonics generated in atomic gases and the sublaser-cycle evolution of harmonic polarization / V. V. Strelkov, A. A. Gonoskov, I. A. Gonoskov, M. Yu. Ryabikin// Phys. Rev. Lett. —

2011. — Vol. 107. — P. 043902.
44. High-order harmonic generation by atoms in an elliptically polarized laser field: Harmonic polarization properties and laser threshold ellipticity / V. V. Strelkov, M. A. Khokhlova, A. A. Gonoskov [et al.]// Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 86. — P. 013404.
45. Control of threshold enhancements in harmonic generation by atoms in a two-color laser field with orthogonal polarizations / M. V. Frolov, N. L. Manakov, T. S. Sarantseva [et al.]// Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 93. — P. 023430.
46. Sarantseva T. S. High-order-harmonic generation in an elliptically polarized laser field: analytic form of the electron wave packet / T. S. Sarantseva, A. A. Silaev, N. L. Manakov// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2017. — Vol. 50, no. 7. — P. 074002.
47. Santra R. Three-step model for high-harmonic generation in many-electron systems / R. Santra, A. Gordon// Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96. — P. 073906.
48. Brown A. C. Atomic harmonic generation in time-dependent R-matrix theory / A. C. Brown, D. J. Robinson, H. W. van der Hart// Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 86. — P. 053420.
49. Pabst S. Strong-field many-body physics and the giant enhancement in the high-harmonic spectrum of xenon / S. Pabst, R. Santra// Phys. Rev.

- Lett. — 2013. — Vol. 111. — P. 233005.
50. Exterior complex scaling method in time-dependent density-functional theory: Multiphoton ionization and high-order-harmonic generation of Ar atoms / D. A. Telnov, K. E. Sosnova, E. Rozenbaum, Shih-I Chu// Phys. Rev. A. — 2013. — Vol. 87. — P. 053406.
51. Hassouneh O. Harmonic generation by noble-gas atoms in the near-IR regime using ab initio time-dependent R-matrix theory / O. Hassouneh, A. C. Brown, H. W. van der Hart// Phys. Rev. A. — 2014. — Vol. 90. — P. 043418.
52. Time-dependent complete-active-space self-consistent-field method for atoms: Application to high-order harmonic generation / T. Sato, K.L. Ishikawa, I. B řezinová [et al.]// Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 94. — P. 023405.
53. Polarization-dependent high-order two-color mixing / H. Eichmann, A. Egbert, S. Nolte [et al.]// Phys. Rev. A. — 1995. — Vol. 51, no. 5. — P. R3414.
54. Milošević D. B. Generation of circularly polarized high-order harmonics by two-color coplanar field mixing / D. B. Milošević, W. Becker, R. Kopold// Phys. Rev. A. — 2000. — Vol. 61, no. 6. — P. 063403.
55. A table-top ultrashort light source in the extreme ultraviolet for circular dichroism experiments / A. Ferré, C. Handschin, M. Dumergue [et al.]// Nat. Photon. — 2015. — Vol. 9, no. 2. — P. 93.



56. Generation of bright phase-matched circularly-polarized extreme ultraviolet high harmonics / O. Kfir, P. Grychtol, E. Turgut [et al.]// Nat. Photon. — 2015. — Vol. 9, no. 2. — P. 99.
57. Non-collinear generation of angularly isolated circularly polarized high harmonics / D. D. Hickstein, F. J. Dollar, P. Grychtol [et al.]// Nat. Photon. — 2015. — Vol. 9, no. 11. — P. 743.
58. Milošević D. B. Generation of elliptically polarized attosecond pulse trains / D. B. Milošević// Opt. Lett. — 2015. — Vol. 40. — P. 2381.
59. Generating isolated elliptically polarized attosecond pulses using bichromatic counterrotating circularly polarized laser fields / L. Medišauskas, J. Wragg, H. van der Hart, M. Yu Ivanov// Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 115, no. 15. — P. 153001.
60. Bright circularly polarized soft X-ray high harmonics for X-ray magnetic circular dichroism / T. Fan, P. Grychtol, R. Knut [et al.]// Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 2015. — Vol. 112, no. 46. — P. 14206.
61. Bicircular high-harmonic spectroscopy reveals dynamical symmetries of atoms and molecules / D. Baykusheva, Md. S. Ahsan, N. Lin, H. J. Wörner// Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 116, no. 12. — P. 123001.
62. Schemes for generation of isolated attosecond pulses of pure circular polarization / C. Hernández-García, C. G. Durfee, D. D. Hickstein [et al.]// Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 93. — P. 043855.

63. Helicity-selective phase-matching and quasi-phase matching of circularly polarized high-order harmonics: towards chiral attosecond pulses / O. Kfir, P. Grychtol, E. Turgut [et al.]// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2016. — Vol. 49, no. 12. — P. 123501.
64. Milošević D. B. Low-frequency approximation for high-order harmonic generation by a bicircular laser field / D. B. Milošević// Phys. Rev. A. — 2018. — Vol. 97. — P. 013416.
65. Heslar J. Conditions for perfect circular polarization of high-order harmonics driven by bichromatic counter-rotating laser fields / John Heslar, Dmitry A. Telnov, Shih-I Chu// Phys. Rev. A. — 2019. — Vol. 99. — P. 023419.
66. All-optical magnetic recording with circularly polarized light / C. D. Stanciu, F. Hansteen, A. V. Kimel [et al.]// Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 99, no. 4. — P. 047601.
67. Bigot J.-Y. Coherent ultrafast magnetism induced by femtosecond laser pulses / J.-Y. Bigot, M. Vomir, E. Beaurepaire// Nat. Phys. — 2009. — Vol. 5, no. 7. — P. 515.
68. Nanoscale magnetic imaging using circularly polarized high-harmonic radiation / O. Kfir, S. Zayko, C. Nolte [et al.]// Sci. Adv. — 2017. — Vol. 3, no. 12. — P. eaao4641.
69. Probing molecular chirality on a sub-femtosecond timescale / R. Cireasa, A. E. Boguslavskiy, B. Pons [et al.]// Nat. Phys. — 2015. — Vol. 11, no. 8. —

- P. 654.
70. Odžak S. High-order harmonic generation in polyatomic molecules induced by a bicircular laser field / S. Odžak, E. Hasović, D. B. Milošević// Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 94, no. 3. — P. 033419.
71. Bandrauk A. D. Circularly polarized harmonic generation by intense bicircular laser pulses: electron recollision dynamics and frequency dependent helicity / A. D. Bandrauk, F. Mauger, K.-J. Yuan// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2016. — Vol. 49, no. 23. — P. 23LT01.
72. 50 years of optical tunneling / L. DiMauro, M. Frolov, K. L. Ishikawa, M. Ivanov// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2014. — Vol. 47, no. 20. — P. 200301.
73. Schafer K. Special issue celebrating 25 years of re-collision physics / K. Schafer, Z. Wei, M. Vrakking// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2017. — Vol. 50, no. 17. — P. 170201.
74. Muller H. G. Numerical simulation of high-order above-threshold-ionization enhancement in argon / H. G. Muller// Phys. Rev. A. — 1999. — Vol. 60. — P. 1341.
75. Patchkovskii S. Simple, accurate, and efficient implementation of 1-electron atomic time-dependent Schrödinger equation in spherical coordinates / S. Patchkovskii, H. G. Muller// Comp. Phys. Comm. — 2016. — Vol. 199. — P. 153.

76. Role of many-electron dynamics in high harmonic generation / A. Gordon, F. X. Kärtner, N. Rohringer, R. Santra// Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96. — P. 223902.
77. Exchange and polarization effect in high-order harmonic imaging of molecular structures / S. Sukiasyan, S. Patchkovskii, O. Smirnova [et al.]// Phys. Rev. A. — 2010. — Vol. 82. — P. 043414.
78. Келдыш Л. В. Ионизация в поле сильной электромагнитной волны / Л. В. Келдыш// Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1964. — Т. 47. — С. 1945–1957.
79. Никишов А. И. Ионизация систем, связанных короткодействующими силами, полем электромагнитной волны / А. И. Никишов, В. И. Ритус// Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1966. — Т. 50. — С. 225–240.
80. Переломов А. М. Ионизация атомов в переменном электрическом поле, I / А. М. Переломов, В. С. Попов, М. В. Терентьев// Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1966. — Т. 50. — С. 1393–1409.
81. Faisal F. H. M. Multiple absorption of laser photons by atoms / F. H. M. Faisal// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 1973. — Vol. 6. — P. L89.
82. Reiss H. R. Effect of an intense electromagnetic field on a weakly bound system / H. R. Reiss// Phys. Rev. A. — 1980. — Vol. 22. — P. 1786.

83. Kuchiev M. Y. Quantum theory of high-harmonic generation via above-threshold ionization and stimulated recombination / M. Yu. Kuchiev, V. N. Ostrovsky// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 1999. — Vol. 32. — P. L189.
84. Kuchiev M. Y. Quantum theory of high harmonic generation as a three-step process / M. Yu. Kuchiev, V. N. Ostrovsky// Phys. Rev. A. — 1999. — Vol. 60. — P. 3111.
85. Кучиев М. Ю. Атомная антенна / М. Ю. Кучиев// Письма в ЖЭТФ. — 1987. — Т. 45. — С. 319.
86. Electron trajectory control of odd and even order harmonics in high harmonic generation using an orthogonally polarised second harmonic field / C. Hutchison, S. Houver, N. Lin [et al.]// J. Mod. Opt. — 2014. — Vol. 61, no. 7. — P. 608–614.
87. Control of temporal mapping and harmonic intensity modulation using two-color orthogonally polarized fields / David J. Hoffmann, Chris Hutchison, Amelle Zair, Jonathan P. Marangos// Phys. Rev. A. — 2014. — Vol. 89. — P. 023423.
88. Переломов А. М. Ионизация атомов в переменном электрическом поле. III / А М Переломов, В С Попов// Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1967. — Т. 52. — С. 514.
89. Volkov D. Electron in the field of plane unpolarized electromagnetic waves

- from the standpoint of the dirac equation / D.M. Volkov// Zh. Exp. Teor. Fiz. — 1937. — Vol. 7. — P. 1286.
90. Berestetskii V. B. Quantum Electrodynamics / V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, L. P. Pitaevskii. — [S. l.] : Pergamon, Oxford, — 1982.
91. Popruzhenko S. V. Strong field approximation for systems with Coulomb interaction / S. V. Popruzhenko, D. Bauer// J. Mod. Opt. — 2008. — Vol. 55. — P. 2573.
92. Low-energy structures in strong field ionization revealed by quantum orbits / Tian-Min Yan, S. V. Popruzhenko, M. J. J. Vrakking, D. Bauer// Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105. — P. 253002.
93. Popruzhenko S. V. Invariant form of Coulomb corrections in the theory of nonlinear ionization of atoms by intense laser radiation / S. V. Popruzhenko// Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 2014. — Vol. 145. — P. 664. — [J. Exp. Theor. Phys. **118**, 580 (2014)].
94. Popruzhenko S. V. Keldysh theory of strong field ionization: history, applications, difficulties and perspectives / S. V. Popruzhenko// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2014. — Vol. 47, no. 20. — P. 204001.
95. Accurate retrieval of structural information from laser-induced photoelectron and high-order harmonic spectra by few-cycle laser pulses / T. Morishita, A.-T. Le, Z. Chen, C. D. Lin// Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 100. — P. 013903.

96. Analytic confirmation that the factorized formula for harmonic generation involves the exact photorecombination cross section / M. V. Frolov, N. L. Manakov, T. S. Sarantseva, A. F. Starace// Phys. Rev. A. — 2011. — Vol. 83. — P. 043416.
97. Le A.-T. Extraction of the species-dependent dipole amplitude and phase from high-order harmonic spectra in rare-gas atoms / A.-T. Le, T. Morishita, C. D. Lin// Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 78. — P. 023814.
98. Strong-field rescattering physics – self-imaging of a molecule by its own electrons / C. D. Lin, A.-T. Le, Z. Chen [et al.]// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2010. — Vol. 43. — P. 122001.
99. Control of harmonic generation by the time delay between two-color, bicircular few-cycle mid-IR laser pulses / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. A. Minina [et al.]// Phys. Rev. Lett. — 2018. — Vol. 120. — P. 263203.
100. High harmonic interferometry of multi-electron dynamics in molecules / Olga Smirnova, Yann Mairesse, Serguei Patchkovskii [et al.]// Nature. — 2009. — Vol. 460, no. 7258. — P. 972–977.
101. Resolving the time when an electron exits a tunnelling barrier / Dror Shafir, Hadas Soifer, Barry D Bruner [et al.]// Nature. — 2012. — Vol. 485, no. 7398. — P. 343–346.
102. Attosecond tunnelling interferometry / O. Pedatzur, G. Orenstein, V. Serbinenko [et al.]// Nat. Phys. — 2015. — Vol. 11, no. 10. — P. 815.

103. Multidimensional high harmonic spectroscopy of polyatomic molecules: detecting sub-cycle laser-driven hole dynamics upon ionization in strong mid-ir laser fields / B.D. Bruner, Z. Mašín, M. Negro [et al.]// *Faraday Discuss.* — 2016. — Vol. 194. — P. 369.
104. Smirnova O. Opportunities for chiral discrimination using high harmonic generation in tailored laser fields / O. Smirnova, Y. Mairesse, S. Patchkovskii// *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* — 2015. — Vol. 48, no. 23. — P. 234005.
105. Chiral dichroism in bi-elliptical high-order harmonic generation / D. Ayuso, P. Decleva, S. Patchkovskii, O. Smirnova// *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* — 2018. — Vol. 51, no. 6. — P. 06LT01.
106. Strong-field control and enhancement of chiral response in bi-elliptical high-order harmonic generation: an analytical model / D. Ayuso, P. Decleva, S. Patchkovskii, O. Smirnova// *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* — 2018. — Vol. 51, no. 12. — P. 124002.
107. Time-resolved high harmonic spectroscopy of dynamical symmetry breaking in bi-circular laser fields: the role of Rydberg states / Á. Jiménez-Galán, N. Zhavoronkov, M. Schloz [et al.]// *Opt. Express.* — 2017. — Vol. 25, no. 19. — P. 22880–22896.
108. Control of attosecond light polarization in two-color bicircular fields / Á. Jiménez-Galán, N. Zhavoronkov, D. Ayuso [et al.]// *Phys. Rev. A.* —



2018. — Vol. 97. — P. 023409.
109. Attosecond control of spin polarization in electron–ion recollision driven by intense tailored fields / D. Ayuso, A. Jiménez-Galán, F. Morales [et al.]// New J. Phys. — 2017. — Vol. 19, no. 7. — P. 073007.
110. Demkov Y. N. Zero-Range Potentials and Their Applications in Atomic Physics / Yu. N. Demkov, V. N. Ostrovsky. — [S. l.] : Plenum, New York, — 1988.
111. Манаков Н. Л. Частица с малой энергией связи в циркулярно поляризованном поле / Н. Л. Манаков, Л. П. Рапопорт// Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1975. — Т. 69. — С. 842–852.
112. Berson I. J. Multiphoton ionization and stimulated bremsstrahlung radiation in the case of short-range potentials / I. J. Berson// J. Phys. B: At. Mol. Phys. — 1975. — Vol. 8. — P. 3078.
113. Манаков Н. Л. Распад слабосвязанного уровня в монохроматическом поле / Н. Л. Манаков, А. Г. Файнштейн// Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1980. — Т. 79. — С. 751–762.
114. Демков Ю. Н. Слабосвязанная частица с ненулевым орбитальным моментом в электрическом и магнитном поле / Ю. Н. Демков, Г. Ф. Друкарев// Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1981. — Т. 81. — С. 1218–1231.
115. Андреев С. П. Слабосвязанные состояния электрона во внешнем элек-

- ромагнитном поле / С. П. Андреев, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур// Письма в ЖЭТФ. — 1983. — Т. 37. — С. 155–157.
116. Спектр слабосвязанных состояний частицы во внешних электрических полях / С.П. Андреев, Б.М. Карнаков, В.Д. Мур, В. А. Полуниин// Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1984. — Т. 86. — С. 866–881.
117. Андреев С. П. Энергетический спектр частицы при взаимодействии с сильно несоизмеримыми радиусами / С. П. Андреев, Б. М. Карнаков, В. Д. Мур// Теоретическая и математическая физика. — 1985. — Т. 64. — С. 287–297.
118. Model-independent quantum approach for intense laser detachment of a weakly bound electron / M. V. Frolov, N. L. Manakov, E. A. Pronin, A. F. Starace// Phys. Rev. Lett. — 2003. — Vol. 91. — P. 053003.
119. Frolov M. V. Effective-range theory for an electron in a short-range potential and a laser field / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. F. Starace// Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 78. — P. 063418.
120. Manakov N. L. Atoms in a laser field / N. L. Manakov, V. D. Ovsiannikov, L. P. Rapoport// Phys. Rep. — 1986. — Vol. 141. — P. 320.
121. Chu S.-I. Beyond the floquet theorem: generalized floquet formalisms and quasienergy methods for atomic and molecular multiphoton processes in intense laser fields / Shih-I Chu, D A Telnov// Phys. Rep. — 2004. — Vol.

390. — P. 1–131.
122. Description of harmonic generation in terms of the complex quasienergy. I. General formulation / M. V. Frolov, A. V. Flegel, N. L. Manakov, A. F. Starace// Phys. Rev. A. — 2007. — Vol. 75. — P. 063407.
123. High-order harmonic generation by atoms in a few-cycle laser pulse: Carrier-envelope phase and many-electron effects / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. A. Silaev [et al.]// Phys. Rev. A. — 2011. — Vol. 83. — P. 021405.
124. Analytic theory of high-order harmonic generation by an intense few-cycle laser pulse / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. M. Popov [et al.]// Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 85. — P. 033416.
125. Okajima Y. Adiabatic theory of high-order harmonic generation: One-dimensional zero-range-potential model / Y. Okajima, O. I. Tolstikhin, T. Morishita// Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 85. — P. 063406.
126. Analytic formulae for high harmonic generation / M. V. Frolov, N. L. Manakov, T. S. Sarantseva, A. F. Starace// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2009. — Vol. 42. — P. 035601.
127. Analytic description of the high-energy plateau in harmonic generation by atoms: Can the harmonic power increase with increasing laser wavelengths? / M. V. Frolov, N. L. Manakov, T. S. Sarantseva [et al.]// Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 102. — P. 243901.
128. High-order-harmonic-generation spectroscopy with an elliptically polarized

- laser field / M. V. Frolov, N. L. Manakov, T. S. Sarantseva, A. F. Starace//  
Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 86. — P. 063406.
129. Harmonic generation spectroscopy with a two-colour laser field having orthogonal linear polarizations / T. S. Sarantseva, M. V. Frolov, N. L. Manakov [et al.]// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2013. — Vol. 46, no. 23. — P. 231001.
130. Retrieving photorecombination cross sections of atoms from high-order harmonic spectra / S. Minemoto, T. Umegaki, Y. Oguchi [et al.]// Phys. Rev. A. — 2008. — Vol. 78. — P. 061402.
131. Tolstikhin O. I. Adiabatic theory of ionization of atoms by intense laser pulses: One-dimensional zero-range-potential model / O. I. Tolstikhin, T. Morishita, S. Watanabe// Phys. Rev. A. — 2010. — Vol. 81. — P. 033415.
132. Kapitza P. Dynamical stability of a pendulum when its point of suspension vibrates / P.L. Kapitza// Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1951. — Vol. 21. — P. 588. — (in Russian).
133. Landau L. D. Mechanics / L. D. Landau, E. M. Lifshitz. — [S. l.] : Pergamon Press, Oxford, — 1976.
134. Tolstikhin O. I. Adiabatic theory of ionization by intense laser pulses: Finite-range potentials / O. I. Tolstikhin, T. Morishita// Phys. Rev. A. — 2012. — Vol. 86. — P. 043417.
135. Ivanov M. High-harmonic generation: Taking control of polarization /

- M. Ivanov, E. Pisanty// Nat. Photon. — 2014. — Vol. 8, no. 7. — P. 501.
136. Spin angular momentum and tunable polarization in high-harmonic generation / A. Fleischer, O. Kfir, T. Diskin [et al.]// Nat. Photon. — 2014. — Vol. 8, no. 7. — P. 543.
137. Pisanty E. Spin conservation in high-order-harmonic generation using bicircular fields / E. Pisanty, S. Sukiasyan, M. Ivanov// Phys. Rev. A. — 2014. — Vol. 90. — P. 043829.
138. Milošević D. B. High-order harmonic generation by a bichromatic elliptically polarized field: conservation of angular momentum / D. B. Milošević// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2015. — Vol. 48, no. 17. — P. 171001.
139. Polarization control of isolated high-harmonic pulses / P.-C. Huang, C. Hernández-García, J.-T. Huang [et al.]// Nat. Photon. — 2018. — Vol. 12, no. 6. — P. 349.
140. Milošević D. B. Control of the helicity of high-order harmonics generated by bicircular laser fields / D. B. Milošević// Phys. Rev. A. — 2018. — Vol. 98. — P. 033405.
141. Milošević D. B. Circularly polarized high harmonics generated by a bicircular field from inert atomic gases in the  $p$  state: A tool for exploring chirality-sensitive processes / D. B. Milošević// Phys. Rev. A. — 2015. — Vol. 92. — P. 043827.
142. Interaction of laser radiation with a negative ion in the presence of a strong

- static electric field / N. L. Manakov, M. V. Frolov, A. F. Starace, I. I. Fabrikant// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2000. — Vol. 33. — P. R141.
143. Landau L. D. Quantum Mechanics (Non-relativistic Theory) / L. D. Landau, E. M. Lifshitz. — [S. l.] : Pergamon Press, Oxford, — 1977.
144. Analytic model for the description of above-threshold ionization by an intense short laser pulse / M. V. Frolov, D. V. Knyazeva, N. L. Manakov [et al.]// Phys. Rev. A. — 2014. — Vol. 89. — P. 063419.
145. Analytic description of high-order harmonic generation in the adiabatic limit with application to an initial  $s$ -state in an intense bicircular laser pulse / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. A. Minina [et al.]// Phys. Rev. A. — 2019. — Vol. 99. — P. 053403.
146. Cohen H. D. Interference in the photo-ionization of molecules / Howard D. Cohen, U. Fano// Phys. Rev. — 1966. — Vol. 150. — P. 30–33.
147. Ландау Л. Д. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — [Б. м.] : Москва: Наука, 1989. — — С. 768.
148. Гореславский С. П. Дифференциальные распределения фотоэлектронов в эллиптически поляризованном сильном низкочастотном лазерном поле / С. П. Гореславский, С. В. Попруженко// Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1996. — Vol. 110. — P. 1200–1215.
149. Мур В. Энергетические и импульсные спектры фотоэлектронов

- при ионизации сильным лазерным излучением (случай эллиптической поляризации) / В.Д. Мур, С.В. Попруженко, В.С. Попов// Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2001. — Vol. 119, no. 5. — P. 893.
150. Попов В. С. Туннельная и многофотонная ионизация атомов и ионов в сильном лазерном поле (теория Келдыша) / В. С. Попов// Успехи физических наук. — 2004. — Т. 174. — С. 921–951.
151. Современное развитие теории нелинейной ионизации атомов и ионов / Б. М. Каранков, В. Д. Мур, С. В. Попруженко, В. С. Попов// Успехи физических наук. — 2015. — Vol. 185. — P. 3.
152. Pisanty E. Slalom in complex time: Emergence of low-energy structures in tunnel ionization via complex-time contours / E. Pisanty, M. Ivanov// Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 93. — P. 043408.
153. Keil T. Laser-driven recollisions under the coulomb barrier / Th. Keil, S. V. Popruzhenko, D. Bauer// Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 117. — P. 243003.
154. Брычков Ю. А. Интегралы и ряды. Элементарные функции / Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, А. П. Прудников. — [S. l.] : Москва: Физматлит, — 2002.
155. Смирнов Б. М. Разрушение атомных частиц электрическим полем и электронным ударом / Б. М. Смирнов, М. И. Чибисов// Журнал экспе-

- риментальной и теоретической физики. — 1965. — Т. 49. — С. 841–851.
156. Strong-field photoionization revisited / C. I. Baga, F. Catoire, P. Colosimo [et al.]// Nat. Photon. — 2009. — Vol. 5. — P. 335.
157. Resonant structures in the low-energy electron continuum for single ionization of atoms in the tunnelling regime / A. Rudenko, K. Zrost, C. D. Schröter [et al.]// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2004. — Vol. 37. — P. L407.
158. Kästner A. Electron-energy bunching in laser-driven soft recollisions / A. Kästner, U. Saalman, J. M. Rost// Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 108, no. 3. — P. 033201.
159. Feynman's path-integral approach for intense-laser-atom interactions / P. Salières, B. Carré, L. Le Déroff [et al.]// Science. — 2001. — Vol. 292. — P. 902.
160. Попов В. С. «Мнимое время» в квантовой механике и теории поля / В С Попов// Ядерная физика. — 2005. — Т. 68. — С. 717–738.
161. Туннельное приближение для оценки амплитуды генерации высших гармоник в интенсивных лазерных полях: анализ времен ионизации и рекомбинации / А. А. Минина, М. В. Фролов, А. Н. Желтухин, Н. В. Введенский// Квантовая Электроника. — 2017. — Т. 47, № 3. — С. 216.
162. Spectral caustics in attosecond science / O. Raz, O. Pedatzur, B. D. Bruner, N. Dudovich// Nat. Photon. — 2012. — Vol. 6. — P. 170.
163. Хединг Д. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ): Пер.



- с англ / Дж. Хединг, М. В. Федорюк, В. П. Маслов. — [S. 1.] : Мир, — 1965.
164. Probe of multielectron dynamics in xenon by caustics in high-order harmonic generation / D. Faccialà, S. Pabst, B. D. Bruner [et al.]// Phys. Rev. Lett. — 2016. — Vol. 117. — P. 093902.
165. High-order harmonic generation spectroscopy by recolliding electron caustics / D. Faccialà, S. Pabst, B. D. Bruner [et al.]// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2018. — Vol. 51, no. 13. — P. 134002.
166. Scaling laws for high-order harmonic generation with midinfrared laser pulses / M. V. Frolov, N. L. Manakov, W.-H. Xiong [et al.]// Phys. Rev. A. — 2015. — Vol. 92. — P. 023409.
167. Analytic description of high-order harmonic generation by atoms in a two-color laser field / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. A. Silaev, N. V. Vvedenskii// Phys. Rev. A. — 2010. — Vol. 81. — P. 063407.
168. Validity of factorization of the high-energy photoelectron yield in above-threshold ionization of an atom by a short laser pulse / M. V. Frolov, D. V. Knyazeva, N. L. Manakov [et al.]// Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 108. — P. 213002.
169. Reich D. M. Rotating-frame perspective on high-order-harmonic generation of circularly polarized light / D. M. Reich, L. B. Madsen// Phys. Rev. A. — 2016. — Vol. 93. — P. 043411.

170. Alon O. E. Selection rules for the high harmonic generation spectra / O. E. Alon, V. Averbukh, N. Moiseyev// Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 80. — P. 3743.
171. Silaev A. A. Multi-hump potentials for efficient wave absorption in the numerical solution of the time-dependent Schrödinger equation / A. A. Silaev, A. A. Romanov, N. V. Vvedenskii// J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. — 2018. — Vol. 51, no. 6. — P. 065005.
172. Circularly polarized laser field-induced rescattering plateaus in electron-atom scattering / A. V. Flegel, M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. F. Starace// Phys. Lett. A. — 2005. — Vol. 334. — P. 197.