

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ” (ФГБОУ ВПО ВГУ)**

На правах рукописи

Мишин Максим Юрьевич

**Математическое моделирование
многочисленных систем с гистерезисными
характеристиками**

специальность 05.13.18 математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

*научный руководитель
д.ф.-м.н. Семенов М.Е.*

Воронеж 2014

Содержание

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. ГИСТЕРЕЗИСНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.....	10
1.1. Понятие гистерезисного преобразователя	11
1.2. Неидеальное реле	13
1.3. Преобразователь Прейсаха.	19
1.4. Реле и медленные управления.	21
1.5. Дифференциальные уравнения с гистерезисными нелинейностями.	24
ГЛАВА 2. НЕПРЕРЫВНАЯ ГИСТЕРЕЗИСНАЯ МОДЕЛЬ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ. ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СТРАТЕГИИ В УСЛОВИЯХ ГИСТЕРЕЗИСНОГО ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ.....	30
2.1. Гистерезисная модель ценообразования.	30
2.2. Производственная модель.....	32
ГЛАВА 3. ДИСКРЕТНАЯ ГИСТЕРЕЗИСНАЯ МОДЕЛЬ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ	37
ГЛАВА 4. МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ В УСЛОВИЯХ ГИСТЕРЕЗИСНОГО ПОВЕДЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ.	46
4.1. Многокритериальная позиционная динамическая задача.....	46
4.2. Многокритериальная задача о производстве, потреблении и сбыте товара.....	50
4.3. Задача о максимизации прибыли в условиях гистерезисного темпа продаж.	62
4.4. Модель конкурентного производства в условиях гистерезисного поведения экономических агентов.	75
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	80
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	81
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	91

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Гистерезисные эффекты проявляются в различных областях естествознания: физике, механике, биологии, химии, экономике, и т. д. Поэтому для адекватного и максимально точного моделирования процессов из упомянутых областей гистерезисные явления должны учитываться. Возможность формального описания гистерезисных преобразователей основывается на развитой М.А. Красносельским и его учениками операторной трактовке этих преобразователей как операторов, определённых на достаточно богатых функциональных пространствах, зависящих от своего начального состояния, как от параметра, динамика которых описывается двумя соотношениями: вход-состояние и состояние-выход. Свойства систем с гистерезисом существенно отличаются от систем с функциональными нелинейностями. Это объясняется сложностью и нелинейной структурой пространства состояний гистерезисных преобразователей. Кроме того, математические модели гистерезисных преобразователей, как правило, не являются гладкими, что затрудняет применение классических методов для анализа соответствующих систем. Особое место среди систем с гистерезисными свойствами играют экономические системы. Наличие гистерезисных явлений в экономике отмечалось, начиная с 50х годов прошлого века. Однако, формальное описание в рамках теории систем гистерезисные явления в экономике получили лишь в последние десятилетия. Это объясняется многими причинами, одна из которых заключается в принципиальном отсутствии возможности проведения экспериментов в отличие от технических областей. Поэтому математическое моделирование экономических систем с гистерезисными свойствами остаётся единственным способом изучения и анализа этих систем. В частности, гистерезисный механизм ценообразования, описанный на эвристическом уровне во многих работах к настоящему времени не получил должного формального описания на уровне математических

моделей. Также хорошо известен гистерезисный характер спроса в зависимости от соотношения цены товара и покупательской способности. Однако, математические модели, описывающие это отношение к настоящему времени не разработаны. Как следствие, не решены задачи, связанные с оптимизацией производственно-ценовой стратегии в условиях гистерезисного поведения экономических агентов, задача оптимального функционирования производящих компаний в условиях гистерезисного ценообразования и конкуренции. Эти обстоятельства обуславливают актуальность темы диссертации.

Модели процессов и систем прикладных задач физики, теории автоматического регулирования, нейронных сетей и т.д. сводятся к системам дифференциальных уравнений, содержащим помимо обычных функциональных нелинейностей – нелинейности гистерезисной природы (колебания ферромагнитного шарика в магнитном поле; вынужденные колебания физического маятника, управляющим воздействием на который является выход гистерезисного преобразователя; электромагнитные колебания в контуре, содержащем сегнетоэлектрические конденсаторы; гистерезисные особенности нейронов [32-34] и многие другие). В механических системах, вследствие старения и износа деталей, неизбежно возникают люфты, упоры, имеющие, по сути, гистерезисную природу, поэтому их необходимо учитывать на этапе разработки и проектирования систем. При этом носители гистерезиса, как правило, нельзя рассматривать изолировано [22,35-37], так как они являются частью более сложной системы. Важный класс таких систем составляют управляемые системы и системы автоматического регулирования из различных предметных областей [35-37]. Гистерезисные преобразователи естественным образом появляются в этих системах как математические модели разнообразных гистерезисных явлений. Возможность изучения таких систем основывается на развитой М.А. Красносельским и А.В. Покровским операторной трактовке гистерезисных преобразователей как операторов [1, 38-

39], определенных на достаточно мощном функциональном пространстве, зависящих от своего начального состояния как от параметра. Системы с гистерезисными нелинейностями обладают рядом специфических особенностей коренным образом отличающих их от традиционных систем с функциональными нелинейностями. К их числу, в первую очередь, относятся недифференцируемость гистерезисных операторов [35-37], необычность фазовых пространств, включающих в себя пространства состояний соответствующих гистерезисных преобразователей, в общем случае не обладающих линейной структурой и некоторые другие. Следовательно, анализ и синтез моделей оптимального функционирования систем с гистерезисными нелинейностями требует разработки новых методов, учитывающих упомянутые выше особенности. Кроме того, как показывают простые примеры, для систем с гистерезисом типична ситуация, когда в них принципиально нереализуемы асимптотически устойчивые режимы [22,35-37], что затрудняет численную реализацию методов их приближенного построения. Это обуславливает необходимость разработки алгоритмов построения переходных процессов в управляемых системах с гистерезисными нелинейностями. Из небольшого числа работ посвященных задачам анализа моделей систем с гистерезисными нелинейностями отметим работы А. М. Красносельского [38-40], Д.И. Рачинского [40]. Таким образом, актуальной является задача разработки методики построения оптимального функционирования и стабилизации класса систем с гистерезисными нелинейностями, а также разработки алгоритма приближенного построения их решений.

Гистерезисные эффекты проявляются в экономике на различных уровнях. Модели с гистерезисом используются повсеместно: для анализа ценообразования, потребительских предпочтений, поведения экономических агентов и многих других аспектов экономики. На макроуровне гистерезисный эффект наблюдается в ситуации роста безработицы под влиянием некоторых

стимулирующих факторов. После исчезновения этих факторов уровень безработицы достаточно продолжительное время находится на достаточно высоком уровне. Гистерезисные эффекты играют важную роль в экономике, что можно показать на простом примере десерта Ehrmann одноимённой компании. В начале восьмидесятых доля Ehrmann на немецком рынке была очень низка, в то время как доли лидера рынка Danone и трёх основных конкурентов Elite, Chambourcy, Dr. Oetker были значительно выше. Все конкуренты предлагали потребителям стандартный ассортимент продукции, в стандартной упаковке, по одинаковым ценам. Проводимые ими рекламные компании также не сильно разнились, поэтому для потребителей производимые ими товары были взаимозаменяемыми. Осенью 1982 г. Компания Ehrmann ввела упаковку большего размера, которая была почти в половину дешевле. Конкуренты не стали реагировать на эти действия, что в итоге привело к тому, что за следующие 8 месяцев доля Ehrmann возросла в 2,5 раза, а Danone быстро падала. В дальнейшем Danone отреагировала на новацию Ehrmann и ввела такую же упаковку по аналогичной цене, что позволило, за счёт резкого падения долей трёх основных конкурентов, восстановить позицию. Тем не менее, Ehrmann по-прежнему удерживал завоёванную ей долю рынка.

Диссертационная работа выполнена в рамках научного направления кафедры Высшей математики Воронежского государственного архитектурно-строительного университета № г.р. 01200003664.

Цель работы. Разработка численных и аналитических методов анализа моделей экономических систем и процессов с гистерезисными свойствами.

Достижение указанной цели осуществлялось решением следующих задач:

- разработка и исследование дискретной и непрерывной моделей равновесной динамики систем с учётом гистерезисных свойств;
- разработка численных и аналитических методов оптимизации систем, содержащих звенья гистерезисной природы;

- оптимизация конкурентного функционирования производственных компаний в условиях гистерезисного поведения экономических агентов;
- разработка численных методов моделирования равновесной динамики систем с гистерезисными свойствами, оптимизация функционирования производственных компаний в условиях гистерезисного ценообразования, а также в условиях конкуренции и гистерезисного поведения экономических агентов;
- апробация и тестирование предложенных методик.

Объекты исследования — экономические системы с ярко выраженными гистерезисными свойствами

Предмет исследования — математические модели экономических систем и процессов с гистерезисными нелинейностями.

Методы исследования. При выполнении работы использовались методы математического моделирования, операторная трактовка гистерезиса, качественная теория дифференциальных уравнений, теория автоматического регулирования, нелинейный анализ, численные методы решения дифференциальных уравнений.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:

- модифицирована модель равновесной динамики систем с гистерезисными свойствами;
- предложен способ исследования моделей с гистерезисными звеньями на основе принципа оптимального управления;
- разработан алгоритм оптимального конкурентного функционирования систем, содержащих звенья гистерезисной природы на примере оптимизации стратегий экономических агентов с учётом гистерезисных свойств;

- синтезирована методика анализа многокритериальных оптимизационных динамических задач, включая задачи с функционалами, содержащими операторные гистерезисные нелинейности.

Область исследований. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки). Область исследования соответствует п.1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений, перечисленных в формуле специальности», п.2 «Разработка, исследование и обоснование математических объектов, перечисленных в формуле специальности», п.5 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

Практическая значимость работы. Разработанные в работе модели и методы анализа экономических систем с гистерезисными свойствами позволяют повысить адекватность формального математического описания соответствующих систем, что, в свою очередь, послужит основой для более точных и адекватных прогнозов. В частности, алгоритмы оптимизации производственной деятельности в условиях гистерезисного ценообразования позволят на этапе проектирования формировать оптимальную с точки зрения достижения максимальной прибыли ценовую и производственную стратегии. Также, предложенные алгоритмы оптимизации в условиях конкуренции позволят снизить риски и обеспечат устойчивое функционирование производственных (и не только) компаний в современных условиях.

На защиту выносятся:

- модификация модели равновесной динамики систем с гистерезисными свойствами;
- способ исследования моделей систем с гистерезисными звеньями на основе

принципа оптимального управления;

- методика анализа многокритериальных оптимизационных динамических задач, охватывающая задачи с функционалами, содержащими операторные гистерезисные нелинейности.

Апробация работы. Основные результаты и положения диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: международная научная конференция «Научное лето-2011» (г. Киев, 27 июля 2011), Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2011, г. Воронеж, 12-17 сентября 2011), III Всероссийская заочная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Молодёжь в современном мире: гражданский, творческий и инновационный потенциал» (г. Воронеж, 15 декабря 2011), Международная научно-практическая конференция «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий» (АЗММИТ-2012, г. Сочи, 3-9 мая 2012), «Понтрягинские чтения - XIII» в рамках XXVI Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач» (г. Воронеж, 3-9 мая 2012), Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2012, г. Воронеж, 11-16 сентября 2012), XIV Всероссийский Симпозиум по прикладной и промышленной математике (г. Великий Новгород, 29 сентября – 5 октября 2013).

Глава 1. Гистерезисные операторы

Нелинейные зависимости гистерезисного типа часто встречаются при описании физических, механических, биологических явлений. Хорошо известны: магнитный гистерезис, диэлектрический гистерезис, пластический гистерезис. Учёт влияния гистерезисных нелинейностей на динамику систем необходим в экономической теории — роль таких нелинейностей отмечалась, например, в работах [41, 47-50]. В этой связи отдельно отметим цикл работ Чернавского Д.С. [2, 18-20, 72-73]. В них гистерезисные эффекты проявлялись на этапе моделирования макроэкономики. Рассматривается динамическая модель развития закрытого общества (без внешних экономических связей) в однопродуктовом приближении. Модель основана на принципах рыночной экономики, то есть динамика цены определяется балансом спроса и предложения. Показано, что в общем случае состояние рыночного равновесия не единственно, а именно, возможно несколько стационарных состояний, отличающихся уровнем производства и потребления. При этом возможны переходы между состояниями при изменении параметров модели (параметрическое переключение) и динамических переменных (так называемое силовое переключение). Первый из них обуславливает эффект гистерезисного типа, поскольку переходы из одного состояния в другое и обратно в фазовом пространстве соответствующей системы проходят по различным траекториям. Далее в этой статье рассмотрен эффект адресной денежной эмиссии в низкопродуктивном состоянии. Показано, что в зависимости от ее размера и адреса она может привести как к переходу в высокопродуктивное состояние, так и просто вызвать инфляцию без перехода. При этом важную роль играют эффекты гистерезисного типа — т.е. переход из низкопродуктового состояния в высокопродуктивное возможен сразу по нескольким траекториям, одна из которых соответствует незначительным материальным затратам.

При изучении гистерезисных явлений возникают, в зависимости от цели исследования, две принципиально различные ситуации. В первой из них

основной задачей является конструирование удобного и простого алгоритма построения выхода по заданным внешним воздействиям. При этом, как правило, можно ограничиться входами достаточно простой структуры, например кусочно-линейными.

Вторая — основная для теории систем задача — возникает, когда изучаемый объект или явление нельзя рассматривать изолированно, так как он является одним из звеньев более сложной системы. В этой ситуации удобно трактовать гистерезисную нелинейность как оператор или совокупность операторов определённых на соответствующем функциональном пространстве, например, на пространстве всех непрерывных функций.

В данной работе изучается именно вторая ситуация. Поэтому, ниже будет дано описание гистерезисных нелинейностей, трактуемых в смысле М. А. Красносельского, А. В. Покровского [1] как операторы, действующие в соответствующих функциональных пространствах.

1.1. Понятие гистерезисного преобразователя

Для описания гистерезисных нелинейностей используются в соответствии с [1] преобразователи Γ (см. рис.1.1), для которых имеет смысл говорить о переменном входе $u(t)$ и переменном выходе $x(t)$.

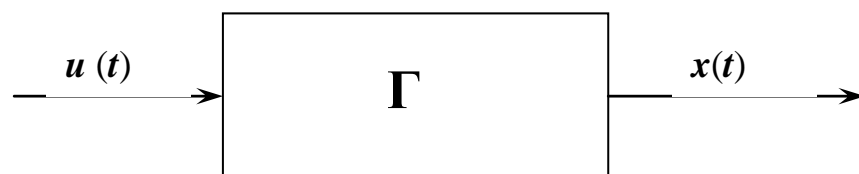


Рис. 1.1 преобразователь Γ с переменным входом $u(t)$ и переменным выходом $x(t)$

Особенностью гистерезисного преобразователя является то, что он может находиться в том или ином состоянии, которое может меняться во времени либо в связи с изменением входа, либо по другим причинам. Поэтому выход $x(t)$ ($t \geq 0$) определяется не только значением входа $u(t)$ ($t \geq 0$), но и состоянием $\omega(0) = \omega_0$ гистерезисного преобразователя в нулевой момент времени. Если при фиксированном начальном состоянии ω_0 гистерезисного преобразователя Γ возможна подача входа $u(t)$ ($t \geq 0$), т.е. входу $u(t)$ отвечает по крайней мере один выход $x(t)$, то такой вход называется допустимым. При этом будем писать

$$x(t) = \Gamma [\omega_0] u(t) \quad (1.1)$$

Пусть $u(t)$ и $v(t)$ два допустимых входных сигнала для преобразователя, находящегося при $t = 0$ в одном и том же состоянии. Если из равенства

$$u(t) = v(t) \quad (0 \leq t \leq T) \quad (1.2)$$

всегда вытекает равенство

$$\Gamma [\omega_0] u(t) = \Gamma [\omega_0] v(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad (1.3)$$

то преобразователь Γ называют физически реализуемым. В дальнейшем будут рассматриваться только физически реализуемые преобразователи.

Если область возможных состояний детерминированного преобразователя Γ не зависит от t , причём из допустимости входа $x(t)$ ($t \geq 0$) вытекает допустимость при том же состоянии входа $y(t) = x(t - t_1)$ ($t \geq t_1$) и справедливость равенства

$$\Gamma [\omega_0] x(t) = \Gamma [t_1, \omega_0] y(t), \quad (1.4)$$

то преобразователь Γ называется автономным. Иными словами, преобразователь автономен, если его свойства не меняются во времени. Преобразователь называется статическим, если при переходе от входного сигнала $u(t)$ ($t \geq 0$) к сигналу

$$v(t) = u(\alpha t) \quad (t \geq 0), (\alpha > 0) \quad (1.5)$$

выходной сигнал $x(t)$ переходит в выходной сигнал

$$y(t) = x(\alpha t) \quad (t \geq 0). \quad (1.6)$$

Таким образом, автономный преобразователь будет статическим, если его свойства не зависят от масштаба времени.

Приведём примеры:

$$\Gamma x(t) = \alpha x'(t) \quad (\alpha \in R^1), \quad (1.7)$$

$$\Gamma x(t) = \int_0^t x(s) ds, \quad (1.8)$$

$$\Gamma x(t) = f[t, x(t)]. \quad (1.9)$$

Два первых преобразователя являются статическими, третий же является статическим в том и только том случае, когда функция $f(t, x)$ не зависит от t .

1.2. Неидеальное реле.

Рассмотрим двухпозиционное реле с пороговыми числами α и β ($\alpha < \beta$) — см., например, [1, 38].

Пространством состояний неидеального реле является пара чисел $\{0, 1\}$. Связь между входом $u(t) \in C_{[0, T]}$ и переменным выходом $x(t) \in \{0, 1\}$ устанавливается (см. [1]) оператором $R[\alpha, \beta, x_0]$

$$x(t) = R[\alpha, \beta, x_0]u(t). \quad (1.10)$$

Здесь x_0 — начальное состояние преобразователя.

Начальное состояние x_0 преобразователя (1.10) должно удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} \text{если } U(0) \leq \alpha, \text{ то } x_0 = 0, \\ \text{если } U(0) \geq \beta, \text{ то } x_0 = 1, \\ \text{если } \alpha \leq U(0) \leq \beta, \text{ то } x_0 = 0 \text{ или } x_0 = 1. \end{cases} \quad (1.11)$$

Выход $x(t)$ ($0 \leq t \leq T$) совпадает с переменным состоянием преобразователя R и определяется соотношением:

$$\begin{aligned}
& 0, \text{ если } u(t) \leq \alpha, \\
& 1, \text{ если } u(t) \geq \beta, \\
& x_0, \text{ если } u(\tau) \in (\alpha, \beta) \text{ при всех } \tau \in [0, t], \\
& 0, \text{ если } u(t) \in (\alpha, \beta) \text{ и найдётся такое } t_1 \in [0, t), \\
& \quad \text{что } u(t_1) = \alpha \text{ и } u(\tau) \in (\alpha, \beta) \text{ при всех } \tau \in (t_1, t], \\
& 1, \text{ если } u(t) \in (\alpha, \beta) \text{ и найдётся такое } t_1 \in [0, t), \\
& \quad \text{что } u(t_1) = \beta \text{ и } u(\tau) \in (\alpha, \beta) \text{ при всех } \tau \in (t_1, t].
\end{aligned} \tag{1.12}$$

Динамику входно–выходных соответствий преобразователя неидеального реле иллюстрирует рис. 1.2.

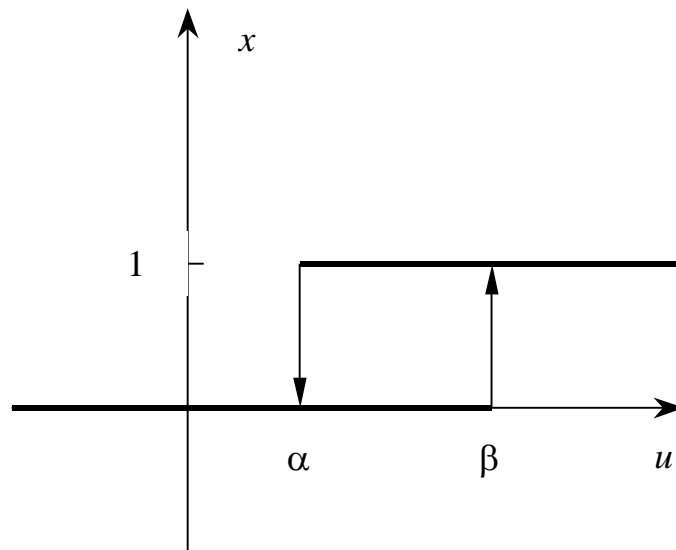


Рис.1.2. Динамика входно–выходных соответствий преобразователя неидеального реле

Таким образом, неидеальное реле является детерминированным преобразователем, определенным на всех непрерывных входах. Очевидны статичность и управляемость неидеального реле. Полугрупповое тождество для неидеального реле имеет обычный вид:

$$R[t_0, x_0; \alpha, \beta]u(t) = R[t_1, R[t_0, x_0; \alpha, \beta]u(t_1); \alpha, \beta]u(t) \quad (1.13)$$

$$(t_0 \leq t_1 \leq t).$$

Значение выхода (1.11) при непрерывном входе $u(t)$ ($t \geq t_0$) полностью определяется следующим правилом: выход $x(t)$ принимает постоянное значение на замкнутом промежутке $[t_1, t_2]$, если либо $x(t_1) = 0$ и $u(t) < \alpha$ при $t \in [t_1, t_2]$, либо $x(t_1) = 1$ и $u(t) > \beta$ при $t \in [t_1, t_2]$. Сформулированное правило будем называть принципом отсутствия лишних переключений.

Важным свойством неидеального реле является его монотонность по входам: если $\{u(t_0), x_0\}, \{v(t_0), y_0\} \in \Omega(\alpha, \beta)$, $x_0 \leq y_0$ и

$$u(t) \leq v(t) \quad (t \geq t_0) \quad (1.14)$$

то

$$R[t_0, x_0; \alpha, \beta]u(t) \leq R[t_0, y_0; \alpha, \beta]v(t) \quad (t \geq t_0). \quad (1.15)$$

Монотонность по входам можно использовать как основу определения неидеального реле. Для этого нужно вначале определить выходы при монотонных входах. Затем при помощи полугруппового тождества определить выходы при кусочно монотонных непрерывных входах. После этого установить монотонность по входам и заметить, что определенное на кусочно монотонных входах соответствие имеет единственное монотонное продолжение на пространство всех непрерывных входов. Построенное продолжение задает оператор (1.10) на всех непрерывных входах.

Имеет место и естественная монотонность по пороговым числам.

Значениями оператора (1.10) являются функции, принимающие лишь два значения: 0 и 1. Поэтому его можно рассматривать как оператор, действующий из пространства $C = C(t_0, t_1)$ непрерывных на $[t_0, t_1]$ функций $u(t)$ в любое $L_q = L_q(0, 1)$, где $1 \leq q \leq \infty$. Непосредственно из определения реле вытекает простая, но важная теорема.

Теорема 1.1. Каждый $R[t_0, x_0, \alpha, \beta]$ ($\beta < \alpha$) локально компактен как оператор из $C(t_0, t_1)$ в $L_q(t_0, t_1)$ при $1 \leq q \leq \infty$.

Для доказательства достаточно рассмотреть фиксированную функцию $u_*(t) \in C(t_0, t_1)$, удовлетворяющую условию $\{u_*(t_0), x_0\} \in \Omega(\alpha, \beta)$, и заметить, что количество точек разрыва у выходов $R[t_0, x_0; \alpha, \beta]u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$) равномерно ограничено, если рассматривать входы $u(t)$ из малой окрестности в $C(t_0, t_1)$ функции $u_*(t)$.

Если $R[t_0, 0; \alpha, \beta]$ трактовать как определенный на функциях $u(t) \in C$, для которых $u(t_0) < \beta$, оператор со значениями в L_∞ , то точками его разрыва будут функции, принимающие значение β хотя бы при одном $\tau \in [t_0, t_1]$. Аналогично $R[t_0, 1; \alpha, \beta]$ как оператор из C в L_∞ разрывен в точке $u(t) \in C$ ($u(t_0) > \alpha$), если $u(\tau) = \alpha$ хотя бы при одном $\tau \in [t_0, t_1]$. Поэтому множество точек разрыва действующих из C в L_∞ операторов $R[t_0, x_0; \alpha, \beta]$ содержит открытые области.

Ситуация становится другой, если рассматривать $R[t_0, x_0; \alpha, \beta]$ как оператор из C в L_q , где $1 \leq q \leq \infty$; здесь множество точек разрыва точнее.

Если рассматривать рисунок 1.2 как график многозначной характеристики некоторого функционального звена, то это функциональное звено не совпадает с реле $R(\alpha, \beta)$.

В заключение пункта отметим, что пороговые значения α и β часто называют током включения и током отпускания. Когда выход равен 1, то, как говорят, реле включено; если выход равен 0, то реле отключено.

Периодические входы. Вначале распространим операторы (1.10) на произвольные непрерывные входы $u(t)$ ($t \geq t_0$), не обязательно

удовлетворяющие условию $\{u(t_0), x_0\} \in \Omega(\alpha, \beta)$. Для этого дополнительно к правилу (1.9) будем считать, что

$$R[t_0, 1; \alpha, \beta]u(t) \equiv R[t_0, 0; \alpha, \beta]u(t), \text{ если } u(t_0) \leq \beta, \quad (1.16)$$

и

$$R[t_0, 0; \alpha, \beta]u(t) \equiv R[t_0, 1; \alpha, \beta]u(t), \text{ если } u(t_0) \geq \alpha. \quad (1.17)$$

Распространенные на все непрерывные входы операторы (1.16) и (1.14) можно на монотонных входах определить простыми наглядными формулами

$$R[t_0, 1; \alpha, \beta]u(t) = \begin{cases} r_- [u(t), \beta], & \text{если } u(t_0) > \beta, \\ r_+ [u(t), \alpha], & \text{если } u(t_0) \leq \beta, \end{cases} \quad (1.18)$$

и

$$R[t_0, 0; \alpha, \beta]u(t) = \begin{cases} r_+ [u(t), \alpha], & \text{если } u(t_0) < \alpha, \\ r_- [u(t), \beta], & \text{если } u(t_0) \geq \alpha, \end{cases} \quad (1.19)$$

в которых использованы функции звена $r_-(\alpha)$ с характеристикой

$$r_-(u, \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \leq \alpha, \\ 1, & \text{если } u > \alpha, \end{cases} \quad (1.20)$$

и звена $r_+(\alpha)$ с характеристикой

$$r_+(u, \alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } u < \alpha, \\ 1, & \text{если } u \geq \alpha. \end{cases} \quad (1.21)$$

Столь же простым и наглядным остается правило отыскания выходов при кусочно монотонных входах, если правила (1.18) и (1.19) дополнить полугрупповым тождеством.

Сопоставим каждому непрерывному входу $u(t)$ ($-\infty < t < \infty$) определенные также при всех t две непрерывные функции

$$R_0 u(t) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} R[\tau, 0; \alpha, \beta]u(t) \quad (-\infty < t < \infty) \quad (1.22)$$

и

$$R_1 u(t) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} R[\tau, 1; \alpha, \beta]u(t) \quad (-\infty < t < \infty). \quad (1.23)$$

Существование пределов очевидно; более того каждому фиксированному t_* отвечает такое τ_* , что при $\tau \leq \tau_*$ все функции $R[\tau, 0; \alpha, \beta]u(t)$ (аналогично все функции $R[\tau, 1; \alpha, \beta]u(t)$) принимают одинаковые значения при $t \geq t_*$. Функции (1.20) и (1.21) не совпадают, если и только если $u(t) \in (\beta, \alpha)$ при всех $t \leq t_{**}$, где t_{**} — некоторое фиксированное число. Будем писать

$$y(t) = R(-\infty; \alpha, \beta)u(t) \quad (-\infty < t < \infty) \quad (1.24)$$

рассматривая правую часть как оператор, сопоставляющий входу $u(t)$ ($-\infty < t < \infty$) две функции (1.20) и (1.21); как уже говорилось, для многих входов значение оператора (1.22) — это одна функция.

Более подробно рассмотрим случай, когда вход $u(t)$ периодичен с некоторым периодом T . Тогда обе функции (1.20) и (1.21) также периодичны с тем же периодом; они различны лишь в случае, когда $u(t) \in (\beta, \alpha)$, — в этом случае $R_0 u(t) \equiv 0$ и $R_1 u(t) \equiv 1$.

При T -периодическом входе $u(t)$ выход $x(t) = R[t_0, x_0; \alpha, \beta]u(t)$ периодичен при $t \geq T + t_0$, т. е. $x(t+T) = x(t)$ при $t \geq t_0 + T$. Если этот выход продолжить по периодичности с полуоси $t \geq t_0 + T$ на всю числовую ось, то продолженная функция совпадает с $R_{x_0} u(t)$.

Замыкание реле. Замыкание $\bar{\Omega}(\alpha, \beta)$ области возможных состояний $\Omega(\alpha, \beta)$ реле $R(\alpha, \beta)$ получается присоединением к $\Omega(\alpha, \beta)$ двух точек: $\{\alpha, 0\}$ и $\{\beta, 1\}$ (см. рис. 1.2).

Сопоставим каждому непрерывному входу $u(t)$ ($t \geq t_0$) два множества $\bar{R}[t_0, x_0; \alpha, \beta]u(t)$ ($x_0 = 0, 1$) функций $x(t)$ со значениями 0, 1, удовлетворяющих следующим требованиям.

а. Если $u(t) > \beta$ при $t \in [t_1, t_2] \subset [t_0, \infty)$, то $x(t)$ не убывает на $[t_1, t_2]$.

б. Если $u(t) < \alpha$ при $t \in [t_1, t_2] \subset [t_0, \infty)$, то $x(t)$ не возрастает на $[t_1, t_2]$.

в. $\{u(t), x(t)\} \in \bar{\Omega}(\alpha, \beta)$ при $t \geq t_0$ и $x(t_0) = R[t_0, x_0; \alpha, \beta]u(t_0)$.

Теорема 1.2. Если рассматривать $R[t_0, x_0; \alpha, \beta]$ как операторы из $C(t_0, t_1)$ в $L_q(t_0, t_1)$, где $1 \leq q < \infty$, то их замыканиями будут многозначные операторы $\bar{R}[t_0, x_0; \alpha, \beta]$.

Утверждение теоремы вытекает из определений.

При переходе к замыканиям свойства операторов $R[t_0, x_0; \alpha, \beta]$ естественным образом модифицируются. Например, полугрупповое свойство приобретает следующий смысл: если функция $x(t)$ ($t \geq t_0$) принадлежит $\bar{R}[t_0, x_0; \alpha, \beta]u(t)$, то о ее сужении на промежуток $t \geq t_1$ ($t_1 > t_0$) можно лишь утверждать, что оно принадлежит одному из множеств $\bar{R}[t_1, x_1; \alpha, \beta]u(t)$, где $x_1 \in \bar{R}[t_0, x_0; \alpha, \beta]u(t_1)$.

Рассмотрим реле $R(1, -1)$ и вход $u(t) = \sin(t)$ ($t \geq 0$). Множество $\bar{R}[0, 0; 1, -1]$ будет счетнозначно, причем сужение на $[0, \pi]$ каждой функции из этого множества совпадает с одной из следующих трех функций: $x_1(t) \equiv 0$; $x_2(t) = 0$ при $0 \leq t \leq \pi/2$ и $x_2(t) = 1$ при $\pi/2 < t \leq \pi$; $x_3(t) = 0$ при $0 \leq t < \pi/2$ и $x_3(t) = 1$ при $\pi/2 \leq t \leq \pi$. Последние две функции как элементы какого-либо L_q неразличимы.

1.3. Преобразователь Прейсаха.

Рассмотрим двухпозиционное реле с пороговыми числами α и β ($\alpha < \beta$) — см., например, [1, 38].

Преобразователем Прейсаха называют континуальный аналог преобразователя, состоящего из неидеальных реле, соединенных параллельно. Рассмотрим частный класс таких преобразователей. Пусть на полуплоскости $P_{\alpha, \beta} \equiv \{\alpha, \beta: \alpha < \beta\}$ определена положительная абсолютно непрерывная

суммируемая функция $\lambda = \lambda(\alpha, \beta)$. Определим на полуплоскости $P_{\alpha, \beta}$ меру μ равенством:

$$d\mu = \lambda(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \tag{1.25}$$

Отметим, что измеримыми по мере μ будут все измеримые по Лебегу множества, в том числе и имеющие бесконечную меру. Обозначим через Ψ класс ограниченных функций, заданных на неотрицательной полуоси и удовлетворяющих условию Липшица с коэффициентом, равным единице. Рассмотрим множество Ω_ψ скалярных функций $\omega(\alpha, \beta)$, заданных на полуплоскости $P_{\alpha, \beta} \equiv \{\alpha, \beta: \alpha < \beta\}$ и таких, что:

$$\omega(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha + \beta > \psi(\beta - \alpha), \\ 1, & \text{если } \alpha + \beta \leq \psi(\beta - \alpha) \end{cases} \tag{1.26}$$

где $\psi(v) \in \Psi$. Множество Ω_ψ – пространство возможных состояний преобразователя Прейсаха. На рис. 1.3 показан один из элементов множества Ω_ψ .

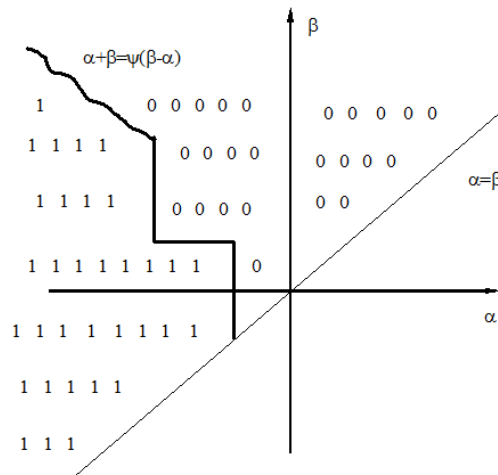


Рис. 1.3. Элемент из пространства состояний преобразователя Прейсаха.

Соотношение вход – переменное состояние преобразователя Прейсаха устанавливается оператором :

$$\omega(\alpha, \beta, t) = \Gamma[\omega_0]u(t) = R[\omega_0(\alpha, \beta), \alpha, \beta]u(t) \tag{1.27}$$

Выход преобразователя (Γ, ξ) определяется соотношением:

$$\xi(t) = \int_{\alpha < \beta} \omega(\alpha, \beta, t) d\mu_{\alpha, \beta} = \mu_{\alpha, \beta}(\{\alpha, \beta\}: R[\omega_0(\alpha, \beta), \alpha, \beta]u(t) = 1) \tag{1.28}$$

Блок-схема преобразователя Прейсаха, аппроксимируемого конечным числом операторов, приведена на рис. 1.4.

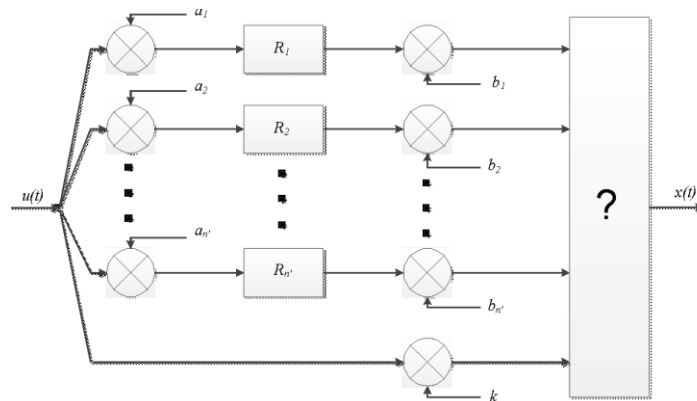


Рис. 1.4. Блок-схема преобразователя Прейсаха, аппроксимируемого конечным числом операторов

1.4. Реле и медленные управления.

Пусть уравнение

$$f(x, u) = 0 \quad (1.29)$$

описывает кривую Γ , изображенную на рис. 1.5.

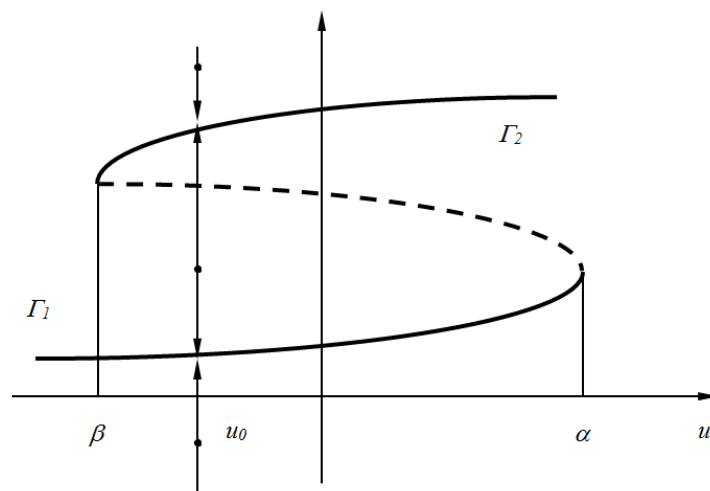


Рис. 1.5. Линия уровня S-преобразователя

У этой кривой одна общая точка с прямой $u = u_0$, если $u_0 < \beta$ или $u_0 > \alpha$, и три общие точки, если $\beta < u_0 < \alpha$. Кривая Γ делит плоскость

на две части. Пусть в верхней части функция $f(x, u)$ принимает отрицательные значения, а в нижней — положительные. Изучим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (1.30)$$

с медленным управлением $u = u(t)$.

Если $u(t) \equiv u_0$, то уравнение (1.30) описывает движение точки по вертикальной прямой $u = u_0$; направление движения на одной из таких прямых показано на рис. 1.5 стрелками. Точки пересечения прямой $u = u_0$ и кривой Γ будут состояниями равновесия; штриховой линией показана часть кривой Γ , состоящая из неустойчивых точек равновесия, а сплошной — линией из асимптотически устойчивых; эта сплошная линия состоит из графиков Γ_1 и Γ_2 некоторых функций $\gamma_1(u)$ и $\gamma_2(u)$.

Указанной информации достаточно, чтобы описать качественное поведение решений $x(t)$ уравнения (1.30) при медленно меняющемся управлении $u(t)$ ($t \geq t_0$). После короткого промежутка времени (которым можно пренебречь) точка $\{u(t), x(t)\}$ попадает, вообще говоря, в столь малую окрестность либо точки $\{u(t), \gamma_1[u(t)]\}$, либо точки $\{u(t), \gamma_2[u(t)]\}$, что ее можно считать совпадающей либо с $\{u(t), \gamma_1[u(t)]\}$, либо с $\{u(t), \gamma_2[u(t)]\}$. Пусть для определенности $u(t_1) < \alpha$ и $x(t_1) \approx \gamma_1[u(t_1)]$; тогда при дальнейших значениях $t \in (t_1, t_2)$ при которых $u(t) < \alpha$, точка $\{u(t), x(t)\}$ не выходит из малой окрестности кривой Γ_1 , можно считать выполненным равенство $x(t) = \gamma_1[u(t)]$. Если $u(t_2) = \alpha$ и $u(t)$ в точке t_2 растет, то за короткое время (т. е. За такой промежуток времени, на котором $u(t)$ мало меняется) точка $\{u(t), x(t)\}$ попадет уже в малую окрестность кривой Γ_2 , можно считать выполненным равенство $x(t) = \gamma_2[u(t)]$. Продолжая эти рассуждения, мы приходим к описанию решения $x(t)$,

которое совпадает с описанием (при помощи принципа отсутствия лишних переключений) неидеального реле с пороговыми значениями α и β , если Γ_1 совпадает с полупрямой $x=0$ ($u < \alpha$), а Γ_2 — с полупрямой $x=1$ ($u > \beta$).

Близкие источники возникновения релейных нелинейностей часто возникают в теории дифференциальных уравнений с малыми параметрами, в теории катастроф и т.п.

Разрывные входы. В сложных системах на звено, математической моделью которого является неидеальное реле, могут поступать сигналы, не обладающие свойством непрерывности. В этих случаях приходится определять значения операторов $R[t_0, x_0; \alpha, \beta]$ на некоторых классах разрывных входов. Для этого могут применяться различные конструкции. Изложим здесь одну из них.

Функцию $u(t)$ назовем кусочно-непрерывной, если она имеет на каждом конечном промежутке $[t_0, t_1]$ изменения аргумента лишь конечное число точек разрыва, каждая из которых — точка разрыва первого рода. Иначе говоря, если $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ — точки разрыва кусочно-непрерывной функции $u(t)$ ($t_0 \leq t \leq t_1$), то $u(t)$ на каждом промежутке (τ_{j-1}, τ_j) совпадает с некоторой функцией $v_j(t)$, определенной и непрерывной на $[\tau_{j-1}, \tau_j]$. Значения кусочно-непрерывной функции в точках разрыва нас интересовать не будут; однако удобно считать, что в начальный момент функция непрерывна справа, т. е. $u(t_0) = v_1(t_0)$.

Зададимся произвольным $h > 0$ и сопоставим описанной выше кусочно-непрерывной функции $u(t)$ непрерывную на $[t_0, t_1 + (n-1)h]$ функцию $w_h(t)$, которая на каждом промежутке $[\tau_{j-1} + (j-1)h, \tau_j + (j-1)h]$ определена равенством $w_h(t) = v_j[t - (j-1)h]$ и на каждом промежутке $[\tau_j + (j-1)h, \tau_j + jh]$

линейна. Кусочно-непрерывную функцию $u(t)$ естественно считать «хорошим» приближением функции $w_h(t)$, если h мало.

Функции $w_h(t)$ позволяют распространить операторы $R[t_0, x_0; \alpha, \beta]$ на кусочно-непрерывные входы $u(t)$ равенством

$$R[t_0, x_0; \alpha, \beta] u(t) = \xi_h[t + (j-1)h] \quad (1.31)$$

$$(\tau_{j-1} < t \leq \tau_j; \quad j=1, \dots, n),$$

в котором

$$\xi_h(t) = R[t_0, x_0; \alpha, \beta] w_h(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1 + (n-1)h). \quad (1.32)$$

Из статичности реле вытекает, что выход (1.31) не зависит от использованного при его построении числа h .

Изложенная конструкция почти без изменений переносится на произвольные разрывные входы $u(t)$, вариация которых на каждом ограниченном промежутке $[t_0, t_1]$ конечна.

1.5. Дифференциальные уравнения с гистерезисными нелинейностями.

Дифференциальным уравнениям с гистерезисными нелинейностями посвящено относительно много работ. Остановимся на некоторых из них. В некоторых работах гистерезисные нелинейности аппроксимировались функциональными нелинейностями. В частности, рассматривалась электромагнитная система, показанная на рис. 1.6.

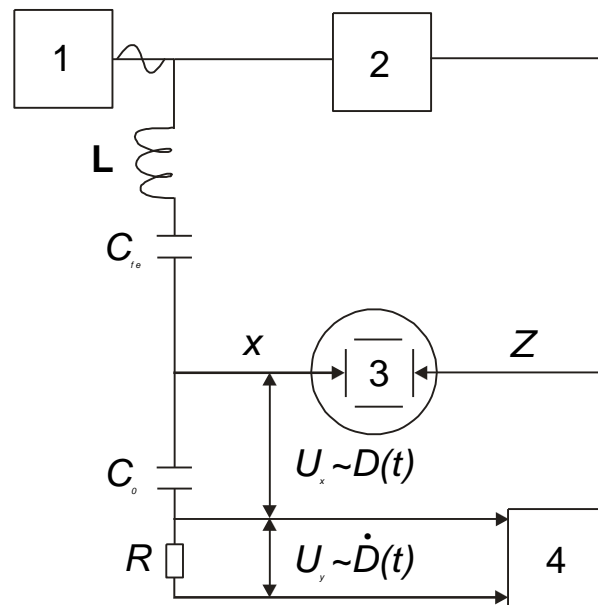


Рис. 1.6. Электромагнитная система

На рисунке 1.6 введены следующие обозначения: 1 — звуковой генератор, 2 — генератор прямоугольных импульсов, 3 — осциллограф, 4 — анализатор спектра, C_{fe} — емкость сегнетоэлектрического образца — носителя гистерезисных явлений, L — линейная индуктивность, C_o — линейная емкость ($C_o \gg C_{fe}$), R — омическое сопротивление, U_x — напряжение, подаваемое на входе "X" осциллографа, пропорциональное индуктивности образца $D(t)$; U_y — напряжение, подаваемое на вход Y осциллографа и пропорциональное скорости изменения индуктивности образца.

Уравнение, описывающее динамику изменений индуктивности сегнетоэлектрического образца имеет вид:

$$\ddot{D} + \frac{h}{LS} E_{fe}(D) + \frac{R_L}{L} \dot{D} + \frac{U_{ext}(t)}{LS} = 0 \quad (1.33)$$

где h — толщина сегнетоэлектрического образца, E_{fe} — напряженность электрического поля в сегнетоэлектрическом конденсаторе. Соотношение

$$E_{fe} = E_{fe}(D) \quad (1.34)$$

описывает зависимость гистерезисного типа напряженности между обкладками сегнетоэлектрического конденсатора и его индуктивности.

В простейшем квазистатистическом случае E_{fe} может быть найдено из соотношения:

$$E_{fe} = \frac{dG}{dD}, \quad (1.35)$$

где $G(D)$ раскладывается по четным степеням D . Ограничиваясь в разложении членами не выше четвертой степени (1.33) легко свести к хорошо известному уравнению Дуффинга.

В работах было показано, что гистерезисные нелинейности (1.34) являются причиной возникновения хаотических колебаний, т.е. уравнение имеет инвариантное и притягивающее множество, каждое индивидуальное решение в котором неустойчиво.

Во многих работах рассматривались дифференциальные уравнения в частных производных с гистерезисными нелинейностями. Для уравнений вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + F[w^0]u) + Au = f, \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u + F[w^0]u) + Au = f, \quad (1.37)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями, где $u = u(t, \bar{x})$; $\bar{x} \in D \in R^n$; A — эллиптический оператор, f — заданная функция, а $F[w^0]$ — оператор гистерезисного типа был установлен ряд теорем существования. Было доказано, что если область D ограничена с липшецуемой границей и оператор F является непрерывным и удовлетворяет некоторым ограничениям роста на бесконечности, то уравнения (1.35) и (1.36) имеют решения. Базовой конструкцией доказательства является следующая схема: уравнения (1.35), (1.36) заменялись разностными аналогами при этом значения оператора $F[w^0]$ в точках дискретизации определялись как значения на кусочно-линейных входах. Далее доказывалась корректность предельного перехода когда шаг дискретизации стремится к нулю и сходимости решения разностного уравнения к решениям уравнений (1.35), (1.36). Вопрос о единственности решений (1.35), (1.36) является далеко не тривиальным. В ряде частных случаев, например,

когда F — преобразователь Пре́йзаха, удается доказать единственность решений. В общем случае единственность не имеет места. Более того, даже для обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывным гистерезисным преобразователем

$$\frac{du}{dt} + F[w^0]u = g(t), U(0) = 0, t \in (0; T], \quad (1.38)$$

и существует пример с неединственным решением.

Так же в отдельных работах изучались уравнения с гистерезисными нелинейностями. Выделим некоторые результаты этой работы. Один из них касался вопроса о диссипативности уравнения

$$\ddot{x} + x = \Gamma x(t) + b \sin t, \quad (1.39)$$

где Γ — гистерезисный оператор, множество значений которого есть ограниченное множество в пространстве непрерывных функций. Этим свойством обладают обобщенный люфт с насыщением, преобразователь Пре́йзаха и финитным носителем меры и ряд других. Неожиданное свойство гистерезисных нелинейностей — оказывается, что уравнение (1.39) диссипативно, (т.е. его решения не уходят в бесконечность) при достаточно малых b и не обладает этим свойством при $b > b_1$, где число b_1 зависит от свойств некоторых гистерезисного преобразователя Γ .

Для уравнения (1.39), где Γ — преобразователь неидеального реле были установлены различные факты, касающиеся структуры множества его решений. В частности, были приведены условия обеспечивающие существование континуального множества решений, условия, при выполнении которых уравнение (1.39) не имеет периодических режимов и т.д.

Наряду с (1.39) в работе рассматривались уравнения

$$\ddot{x} + \xi \dot{x} + \eta x = \Gamma x(t) + \varphi(t) \quad (1.40)$$

с T -периодической функций $\varphi(t)$, положительными параметрами ξ, η , и оператором Γ соответствующим неидеальному реле. Было доказано существование устойчивых T -периодических решений уравнения (1.40),

обладающих дополнительным свойством корректности по отношению к малым изменениям внешних параметров. Отметим, что эти решения пересекают точки разрыва реле с нулевой скоростью, т.е. являются классическими.

Из всего сказанного следует, что многие вопросы, связанные с изучением систем с гистерезисными нелинейностями являются открытыми. В частности, к настоящему времени отсутствует методология выделения класса моделей систем автоматического регулирования, описываемых дифференциально-операторными уравнениями с гистерезисными нелинейностями, в которых заведомо реализуются устойчивые периодические колебания.

Многочисленные примеры показывают, что многие экономические процессы обладают ярко выраженными гистерезисными свойствами и многие экономические явления можно объяснить только с «гистерезисной» точки зрения. В связи с этим является важной проблема создания единой методологии моделирования экономических систем и процессов с гистерезисными свойствами. При этом особое значение имеют вопросы связанные с существованием устойчивых циклов в экономических системах с гистерезисными нелинейностями. Отдельную проблему составляет класс экономических задач с гистерезисными нелинейностями. Отметим, что операторы, являющиеся математическими моделями гистерезисных нелинейностей, как правило, не являются гладкими, поэтому для оптимизации функционалов, содержащих гистерезисные нелинейности, неприменимы стандартные методы вариантного исчисления. Следовательно, является актуальной задача создания методики решения оптимизационных задач с гистерезисными нелинейностями.

Различные примеры гистерезисных явлений в биологии неоднократно отмечались в работах различных авторов. При этом, как правило, авторы ограничивались качественным описанием рассматриваемых явлений. Количественный, как следствие более детальный, анализ процессов с гистерезисными свойствами возможен и путем построения адекватных

математических моделей таких явлений. В свете этого являются актуальными задачи связанные с построением моделей и изучением биологических процессов и систем с гистерезисными явлениями.

Глава 2. Непрерывная гистерезисная модель ценообразования. Задача об оптимальной производственной стратегии в условиях гистерезисного ценообразования.

Гистерезисные эффекты проявляются в экономике на различных уровнях. На макроуровне гистерезисный эффект наблюдается в ситуации роста безработицы под влиянием некоторых стимулирующих факторов, после исчезновения которых уровень безработицы достаточно продолжительное время находится на достаточно высоком уровне. Качественно такая же ситуация возникает в условиях массивной денежной эмиссии: темпы роста цен достаточно долго остаются высокими и после прекращения эмиссии. Гистерезисные эффекты играют важную роль в экономике и, также как и в других предметных областях, носители гистерезисных явлений нельзя рассматривать изолированно, так как они являются частью сложной системы.

Однако, к настоящему времени, практически отсутствует модельное и, как следствие, количественное описание гистерезисных эффектов в экономике.

2.1. Гистерезисная модель ценообразования.

Традиционно, для описания ценообразования использовались либо паутинообразная модель [18] в системах с дискретным временем, либо в моделях с непрерывным временем, уравнение вида:

$$\dot{p} = \gamma(S(p) - D(p)), \quad (2.1)$$

где p – цена, $S(p)$ и $D(p)$ — функции спроса и предложения, γ — параметр, определяющий скорость стремления к равновесию. Единственное стационарное решение уравнения (2.1) абсолютно устойчиво и быстро достигается при традиционных представлениях о функциях спроса и предложения. В настоящей работе модель ценообразования предлагается подчинить следующей системе:

$$\begin{cases} \dot{p} = f(u, p), \\ \dot{u} = \gamma[S(p) - D(p)], \end{cases} \quad (2.2)$$

где $f(u, p)$ — функция, определяющая S -преобразователем, показанным на рисунке 1.5.

При естественном выборе функций $S(p)$ и $D(p)$ система (2.2) имеет единственный абсолютно устойчивый цикл, физическая трактовка которого соответствует современным представлениям о динамике ценообразования: цена совершает колебания в некоторой окрестности положения равновесия, соответствующего равенству спроса и предложения.

Пусть в верхней части плоскости, отсеченной кривой, $f(p, u) > 0$, а в нижней $f(p, u) < 0$. При $u(t) = u(t_0)$, дифференциальное уравнение (2.2) описывает движение точки по вертикальной прямой, отображенное стрелками на рис.1.5. Точки пересечения с кривой являются состояниями равновесия. Пунктирная линия – неустойчивые положения равновесия, сплошные линии Y_1 и Y_2 (графики некоторых функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$) – асимптотически устойчивые положения равновесия.

После малого промежутка времени (при котором $u(t)$ меняется незначительно) точка $(u(t), p(t))$ будет находиться в столь малой окрестности одной из кривых $y_1(t)$ или $y_2(t)$, что ее можно считать принадлежащей либо $y_1(t)$, либо $y_2(t)$ (т.е. $p(t) = y_1(u(t))$ или $p(t) = y_2(u(t))$). Для определенности допустим, что $u(t_1) < u_2$, $p(t) \approx y_1(u(t))$ и в дальнейшем выполнено условие $u(t) < u_2$ на интервале (t_1, t_2) , тогда точка $(u(t), p(t))$ не выйдет из достаточно малой окрестности кривой $y_1(t)$, т.е. можно считать выполненным равенство $p(t) = y_1(u(t))$. Если же $u(t_1) = u_2$ и $u(t)$ растет при $t > t_1$, то за короткий промежуток времени точка $(u(t), p(t))$ окажется в малой окрестности кривой $y_2(t)$, так что можно будет считать справедливым равенство $p(t) = y_2(u(t))$.

Продолжая подобные рассуждения, получим описание решения $p(t)$, совпадающее с описанием неидеального реле с пороговыми значениями u_2 и

u_1 , если $y_1(t)$ является полупрямой $x=0, (u < u_2)$, а $y_2(t)$ совпадает с полупрямой $x=1, (u > u_1)$.

Динамика изменения цен в рамках системы (2.2) описывается следующим образом. Обозначим через p_2 левый корень уравнения $f(u_2, p)=0$, и через p_1 правый корень уравнения $f(u_1, p)=0$. Тогда, если решение p^* уравнения $S(p)=D(p)$ удовлетворяет условию $p^* \notin [p_1; p_2]$, то система (2.2) имеет единственное устойчивое решение, т.е. цена практически не меняется. Если же $p^* \in [p_1; p_2]$, то система имеет устойчивый цикл, соответствующий циклическому изменению цен в окрестностях неустойчивого положения равновесия. Очевидно, что амплитуда циклического изменения цен зависит от выбора функции $f(u, p)$.

2.2. Производственная модель.

Обозначим через U поштучный поток товарных изделий, z – количество изделий у производителя с динамикой изменения:

$$\dot{z} = U - NQ \frac{S(p)}{p} \quad (2.3)$$

где N — количество потребителей, $S(p)$ — доход потребителей, $Q \left[\frac{S(p)}{p} \right]$ — функция потребления. Пусть V — количество товаров у потребителей, k — коэффициент потребления. Тогда динамика изменения этого параметра определяется уравнением:

$$\dot{V} = NQ \frac{S(p)}{p} - kV \quad (2.4)$$

Функцию спроса можно определить различным образом. Так, в работе [19] предложена простейшая модель вида

$$Q \left(\frac{S(p)}{p} \right) = q - a \frac{p}{S(p)}, \quad (2.5)$$

где q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени. Эта функция падает с ростом цены, и при $p = \frac{S(p)}{a}$ потребители отказываются от приобретения товара. Параметр a – мера эластичности функции спроса по цене. Таким образом, функция спроса в форме (2.5) является пороговой (то есть, $Q\left[\frac{S(p)}{p}\right] = 0$ при $p \geq p_{cr}$) и обладает свойствами насыщения.

Функцию потребления $D(p, z)$ определим соотношением

$$D(p, z) = z \frac{P}{P_{cr}}. \quad (2.6)$$

Обозначим через p_0 себестоимость производства единицы товара, и через k – коэффициент затрат на хранение, тогда прибыль производителя на конечном временном интервале $[0; T]$ будет определяться соотношением

$$J(T) = \int_0^T (NpQ\left(\frac{S(p)}{p}\right) - Up_0 - k_1z) dt. \quad (2.7)$$

Естественно предположить, что максимальный темп производства ограничен: $0 \leq U \leq U_0$, где U_0 – максимальный темп производства, ограниченный технологическими возможностями. Поставленная задача свелась к задаче оптимального управления: требуется найти такой темп производства, при котором функционал (2.7) достигает максимального значения, а объект описывается дифференциальными уравнениями (2.2)-(2.4) и алгебраическими соотношениями (2.5), (2.6). Эта задача может быть решена стандартными методами теории оптимального управления. Функция Гамильтона имеет вид

$$H = NpQ\left(\frac{S(p)}{p}\right) - Up_0 - k_1z + \lambda_1 f(p, u) + \lambda_2 (S(p) - D(p)) + \\ + \lambda_3 (U - NQ\left(\frac{S(p)}{p}\right)) + \lambda_4 (NQ\left(\frac{S(p)}{p}\right) - kV). \quad (2.8)$$

Оптимальный темп производства, в силу принципа максимума Л.С. Понтрягина будет определяться соотношением:

$$U^* = \arg \max_U H. \quad (2.9)$$

В силу линейности функции Гамильтона по U оптимальный темп производства будет равен

$$U^* = \begin{cases} U_0, & \text{если } \lambda_3 \geq p_0, \\ 0, & \text{если } \lambda_3 < p_0, \end{cases} \quad (2.10)$$

то есть, в рассматриваемой задаче оптимальный темп производства является релейной функцией. Сопряженные переменные удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial p} = -N \left[q - a \frac{S(p)}{p} \right] z - N \frac{azS(p)}{p} - \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial p} - \lambda_2 \gamma \left[-\frac{azS(p)}{p^2} - \frac{z}{p_{cr}} \right] - \\ &\lambda_3 N \frac{azS(p)}{p^2} + \lambda_4 N \frac{azS(p)}{p^2}, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial u} = -\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial u}, \\ \dot{\lambda}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial z} = -N \left[q - a \frac{S(p)}{p} \right] p + a - \lambda_2 \left[\left[q - a \frac{S(p)}{p} \right] + \frac{p}{p_{cr}} \right] + \lambda_3 N \left[q - a \frac{S(p)}{p} \right] - \\ &\lambda_4 N \left[q - a \frac{S(p)}{p} \right], \\ \dot{\lambda}_4 &= -\frac{\partial H}{\partial v} = k\lambda_4. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Так как рассматриваемая задача является задачей со свободными концами, то на сопряженные переменные накладываются граничные условия:

$$\lambda_i(T) = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (2.12)$$

Система уравнений (2.2)-(2.7),(2.10),(2.11) является замкнутой. Результаты ее численного анализа при следующих значениях параметров: $\gamma = 2$, $k = 0,5$, $k_1 = 0,6$, $S = 5$, $q = 10$, $N = 10$, $U_0 = 3$, $T = 20$, нулевых начальных условий для фазовых переменных и функции $f(p, u) = u - 1 - (p - 3)^3 + p$, показаны на рисунках 2.2-2.4.

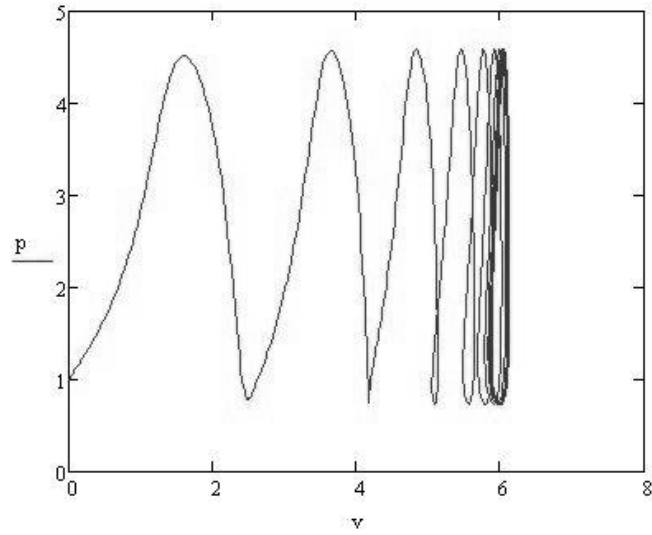


Рис. 2.2. Проекция фазового пространства на плоскость p, V

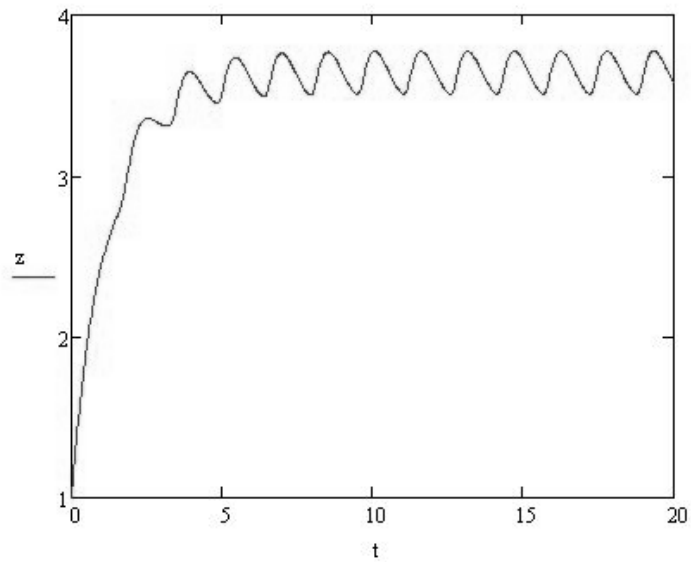


Рис. 2.3. Зависимость от времени количества товара у производителя

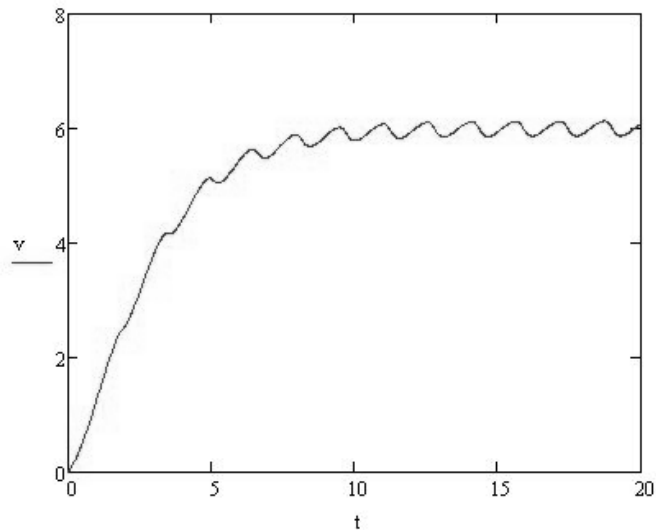


Рис. 2.4. Зависимость от времени количества товара у потребителей

Как видно из графиков, в установившемся режиме фазовые переменные совершают слабые колебания в окрестности неустойчивого положения равновесия, обусловленные, в первую очередь, гистерезисным поведением цены. Темп производства включается на максимальную мощность почти на всем временном промежутке и обращается в ноль на 1% времени. Эти результаты, вытекающие из предложенных модельных представлений, находятся в соответствии со здравым смыслом и наблюдаемой динамикой производственных процессов.

Глава 3. Дискретная гистерезисная модель ценообразования

Известно, что важной задачей экономической стратегии на уровне макроэкономики является моделирование процесса производства и потребления продукции. Один из значимых аспектов исследования экономических процессов связан с поведением экономических агентов в окрестности равновесных состояний. Стоит отметить, что состояние экономической системы в фиксированный момент времени зависит не только от значений параметров в этот момент, но и от их значений в предыдущие моменты. Поэтому представляется важными и актуальными модели, обеспечивающие равновесное ценообразование с учётом «памяти» экономических агентов. Иными словами, модель ценообразования должна учитывать тот факт, что экономические агенты обладают информацией о предыдущих равновесных значениях цены. Для решения поставленной задачи будем использовать преобразователи гистерезисной природы, поскольку структура их такова, что их выход зависит не только от входа в настоящий момент времени, но и от его значений в прошлом.

Обозначим через $R[\alpha, \beta, x_0]$ двухпозиционное реле с пороговыми числами α и β . Пространством состояний неидеального реле является пара чисел $\{0, 1\}$. Связь между входом $u(t) \in C_{[0, t]}$ и переменным выходом устанавливается оператором $R[\alpha, \beta, x_0]$:

$$x(t) = R[\alpha, \beta, x_0]u(t), \quad (3.1)$$

где x_0 — начальное состояние преобразователя.

Начальное состояние x_0 преобразователя должно удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{cases} \text{если } U(0) \leq \alpha, \text{ то } x_0 = 0, \\ \text{если } U(0) \geq \beta, \text{ то } x_0 = 1, \\ \text{если } \alpha \leq U(0) \leq \beta, \text{ то } x_0 = 0 \text{ или } x_0 = 1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Рассмотрим частный класс преобразователей Прейсаха. Пусть на полуплоскости $P_{\alpha, \beta} \equiv \{\alpha, \beta: \alpha < \beta\}$ определена положительная абсолютно

непрерывная суммируемая функция $\lambda = \lambda(\alpha, \beta)$. Определим на полуплоскости $P_{\alpha, \beta}$ меру μ равенством:

$$d\mu = \lambda(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \quad (3.3)$$

Измеримыми по мере μ будут все измеримые по Лебегу множества, в том числе и имеющие бесконечную меру.

Обозначим через ψ класс ограниченных функций, заданных на неотрицательной полуоси и удовлетворяющих условию Липшица с коэффициентом, равным единице. Введем в рассмотрение множество Ω_ψ скалярных функций $\omega(\alpha, \beta)$, заданных на полуплоскости $P_{\alpha, \beta} = \{\alpha, \beta : \alpha < \beta\}$ и таких, что:

$$\omega(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha + \beta > \psi(\beta - \alpha), \\ 1, & \text{если } \alpha + \beta \leq \psi(\beta - \alpha), \end{cases} \quad (3.4)$$

где $\psi(v) \in \psi$. Множество Ω_ψ — пространство возможных состояний преобразователя Пресаха.

Пусть задан произвольный элемент $\omega_0(\alpha, \beta) \in \Omega_\psi$. Допустимыми для преобразования Пресаха (Γ, ξ) , находящегося в начальном состоянии $\omega_0(\alpha, \beta)$, являются все непрерывные входы $u(t), t \geq 0$, удовлетворяющие равенству $u(0) = \psi_0(0)$, где $\omega_0(\alpha, \beta)$ и $\psi_0(v)$ связаны соотношением (3.4).

Соотношение вход – переменное состояние преобразователя Пресаха (Γ, ξ) устанавливается соотношением (1.27), а выход преобразователя (Γ, ξ) определяется соотношением (1.28).

Применим модификацию приведенных преобразователей для моделирования потребительского спроса. Пусть функция спроса $P(t)$ зависит в момент времени t только от цены $p(t)$ следующим образом. Отношение индивидуального потребителя к некоторому товару определим функцией $R(p(t))$, принимающей значения 0 или 1 по правилу:

$$R(p(t)) = \begin{cases} 1, & \text{если } p(t) \leq \alpha(t), \\ 0, & \text{если } p(t) \geq \beta(t), \\ 1 \text{ или } 0, & \text{если } \alpha(t) < p(t) < \beta(t). \end{cases} \quad (3.5)$$

Т.е. функция $R(p(t))$ принимает значения равные единице, если товар покупается и нуль в противном случае. Функцию $R(p(t))$ будем трактовать как выход некоторого преобразователя $R[\alpha(t), \beta(t), R_0]$, аналогичного неидеальному реле с инверсией роли пороговых чисел α, β , на вход которого поступает сигнал $p(t)(t \geq 0)$. Взаимосвязь между входом и выходом иллюстрирует рисунок 3.1

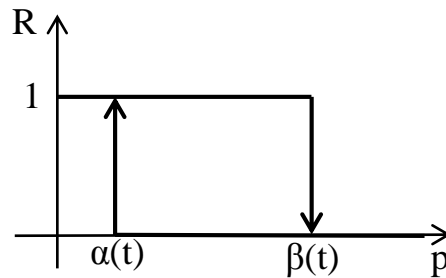


Рисунок 3.1. Входно-выходные соответствия преобразователя (3.5)

Зависимость от времени пороговых чисел $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ дает возможность учитывать, что отношение потребителя к товару может меняться со временем.

Если обозначить через γ_i темп покупок i -го потребителя ($i=1, 2 \dots n$), то для системы из n любых потребителей функция продаж будет иметь вид:

$$P(c(t)) = \sum \gamma_i R[\alpha_i(t), \beta_i(t), R_{0i}] p(t). \quad (3.6)$$

В континуальном случае функция продаж будет аналогична преобразователю Пресаха с инверсией нулей и единиц т.е.

$$P(p(t)) = \int_{\alpha \leq \beta} \omega(\alpha(t), \beta(t), t) d\mu(t), \quad (3.7)$$

где

$$\omega(\alpha(t), \beta(t), t) = \Gamma[\omega_0(\alpha, \beta)] p(t) = R[\alpha(\gamma, t), \beta(\gamma, t), R_0(\gamma)] p(t), \quad \gamma \in P_{\alpha, \beta} \quad (3.8)$$

Континуальный аналог преобразователя Пресаха учитывает возможность изменения индивидуальных отношений потребителя к товару, что в модели учитывается зависимостью меры μ от времени.

Рыночные механизмы допускают равновесие, при котором цены устанавливаются так, что спрос на товары равен его предложению и при этом обеспечивается эффективное распределение ресурсов, но в то же время известны периоды кризисов, во время которых равновесные цены оказывались неустойчивыми. Более того, согласно современной экономической теории, равновесная цена практически никогда не достигается, можно лишь говорить о том, что реально сложившиеся цены в некотором смысле близки к равновесным во всякий момент времени.

Методика решения этой задачи основывается на предложенной модели потребительского спроса, учитывающей его инертность и возможные структурные изменения. При этом основные положения модели основываются на новом направлении в динамических системах, связанных с понятием динамического хаоса, описанного в работах [76-78]. К настоящему времени известны несколько сценариев перехода к хаотическому поведению в динамических системах, основными из которых являются переход к хаосу через перемежаемость и, как последовательность бифуркаций, удвоения периода. Для анализа экономических систем этот аппарат использовался в работах [74, 75]. Ниже будет использована модель, в которой хаотическое поведение будет осуществляться путём каскада бифуркаций.

В дальнейшем исходные предположения модели будут сделаны, следуя классическим работам Вальраса. Рассматривается монотоварный рынок, на котором купля-продажа товара происходит между потребителями и производителями. Предполагается, что в момент n времени товар продается по единой цене p_n ; поведение потребителей описывается функцией спроса $P(p)$, аналитический вид которой определяет преобразователь (3.7)-(3.8); поведение производителей описывается функцией предложения $g(p)$, аналитический вид

которой будет приведен ниже; характерное время изменений функций спроса и предложения много больше времени изменения цены.

Следуя классическим работам [7, 10, 11] полагаем, что производители предлагают товар, ориентируясь на «предыдущую» цену p_n , и продают его по «нынешней» p_n . Потребители, в свою очередь, готовы покупать товар, ориентируются на предыдущую цену $P(p_{n-1})$ и готовы платить за него опять же предыдущую цену p_{n-1} . Тогда равновесные значение будет определяться соотношением:

$$p_n q(p_{n-1}) = p_{n-1} q(p_{n-1}). \quad (3.9)$$

В работах [6] показано, что функция предложения может быть формализована следующим образом:

$$g(p_{n-1}, t) = \int_v^{p_{n-1}/s} \xi(\lambda, t) d\lambda, \quad (3.10)$$

где t – «медленное время», соответствующее процессам изменения производственных мощностей, а n – дискретное «быстрое время», соответствующее процессам изменения цены, а $\xi = \xi(\lambda, t)$ – гладкая функция распределения мощностей по технологиям производства.

Зная начальное распределение мощностей по технологиям $\xi(\lambda, \tau_0)$ и динамику строительства новых $I(t)$ за период $\tau_0 \leq t \leq \tau$, можно однозначно определить распределение мощностей по технологиям $\xi(\lambda, t)$ и функциям предложения $g(p, t)$ при $\tau_0 \leq t \leq \tau$. Известно, что в режиме экспоненциального роста с темпом γ

$$I(t) = M(\tau_0)(\gamma + \mu)e^{\gamma(t-\tau_0)}. \quad (3.11)$$

Можно показать, что при этом

$$g(p_{n-1}, t) = M(t) \left[1 - \left(\frac{sV}{p_{n-1}} \right)^{(\gamma+\mu)/\mu} \right]. \quad (3.12)$$

Введем обозначения:

$$x_n = \frac{sv}{p_n}, \quad \alpha = \frac{\gamma + \mu}{\mu} \geq 1, \quad A(t) = \frac{M(t)}{P(p)}, \quad (3.13)$$

где $P(p)$ определяется как выход преобразователя (3.7)–(3.8) в момент $t = 1$, на вход которого поступает сигнал

$$\varphi(t) = tp_n + (1-t)p_{n-1}, \quad (3.14)$$

т.е. линейная функция, соединяющая предыдущее и нынешнее значение цены.

Тогда из (3.8) с учетом (3.13) получаем:

$$x_n = A(t)x_{n-1}(1 - x_{n-1}^\alpha). \quad (3.16)$$

Естественно предполагать, что наилучшая технология неубыточна, т.е. $x_n = sv/p_n \leq 1$. Тогда $0 \leq x_n \leq 1$. Для того, чтобы отображение (3.16) переводило отрезок $[0, 1]$ в себя, необходимо и достаточно, чтобы

$$0 \leq A(t) \leq \frac{(1+\alpha)^{(1+\alpha)/\alpha}}{\alpha} = A_M(\alpha). \quad (3.17)$$

Отображение (3.16) определяет дискретную динамическую систему, в которой «медленное время» t является параметром.

Рассмотренная выше модель ценообразования $x_{n+1} = f(x_n, A, \alpha)$, где $f(x, A, \alpha) = Ax(1 - x^\alpha)$, по заданному начальному условию x_0 однозначно определяет бесконечную траекторию $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$. Ввиду принятой гипотезы о разделении времен представляет содержательный интерес изучение асимптотического (при $n \rightarrow \infty$) поведения цены.

При всех $A \geq 0$, $\alpha \geq 1$ у динамической системы (3.16) имеется неподвижная точка $x = 0$, соответствующая бесконечно большой цене на товар. Кроме того, при $A \geq 1$, $\alpha \geq 1$ существует еще одна неподвижная точка $x_p(A, \alpha) = (1 - 1/A)^{1/\alpha}$, соответствующая равновесной цене. Траектория, порожденная точкой $x_p(A, \alpha)$, выделяется как единственная траектория, на которой прогноз цены потребителя и производителями товара совпадает с реализацией, и производство согласовано со спросом.

Рассмотрим, как с увеличением параметра A изменяется асимптотическое поведение траекторий динамической системы (3.16). Если $0 \leq A < 1$, то при любом начальном условии x_0 траектория системы (3.16) стремится к 0. При $A = 1$ происходит бифуркация, в результате которой неподвижная точка $x = 0$ становится неустойчивой, и рождается устойчивая (при A , близких к 1) неподвижная точка $x_p(A, \alpha)$. Известно, что для устойчивости неподвижной точки $x_p(A, \alpha)$ необходимо, чтобы

$$\left| \frac{df(x, A, \alpha)}{dx} \Big|_{x=x_p(A, \alpha)} \right| \leq 1, \quad (3.18)$$

и достаточно, чтобы

$$\left| \frac{df(x, A, \alpha)}{dx} \Big|_{x=x_p(A, \alpha)} \right| < 1. \quad (3.19)$$

Отсюда следует, что неподвижная точка $x_p(A, \alpha)$ устойчива при $1 < A < \frac{\alpha + 2}{\alpha} = \frac{\gamma + 3\mu}{\gamma + \mu} = A_1(\alpha)$ и неустойчива при $A > A_1(\alpha)$. Поскольку

$$\frac{df(x, A_1(\alpha), \alpha)}{dx} \Big|_{x=x_p(A_1(\alpha), \alpha)} = -1, \quad (3.20)$$

то, при $A = A_1(\alpha)$, неподвижная точка $x_p(A, \alpha)$ теряет устойчивость в результате бифуркации Хопфа.

Результаты исследования динамической системы (3.16) при $\alpha = 1$ частично обобщаются на системы $x_{n+1} = F(x_n)$ с отрицательной производной Шварца

$$S(F(x)) = \frac{F'''(x)}{F'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{F''(x)}{F'(x)} \right)^2. \quad (3.21)$$

Заметим, что

$$S(f(x, A, \alpha)) = \frac{\alpha(\alpha+1)(2(\alpha-1) + (\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha)x^{\alpha-2}}{2(1 - (\alpha+1)x^\alpha)^2}. \quad (3.22)$$

Следовательно, $S(f(x, A, \alpha)) < 0$ при $x \in (0, 1] \setminus x_p$ и $\alpha \geq 1$. Из теоремы

Д. Зингера [18] следует, что динамическая система (3.16) при $\alpha \geq 1$ имеет не более одной устойчивой периодической траектории. Причем, если устойчивая периодическая траектория существует, к ней притягиваются почти все траектории системы (3.16) и заведомо траектория с начальным условием $x_c = (1/(1+\alpha))^{1/\alpha}$.

На рисунке 3.2 изображено дерево бифуркаций, т.е. зависимость аттрактора от параметра A .

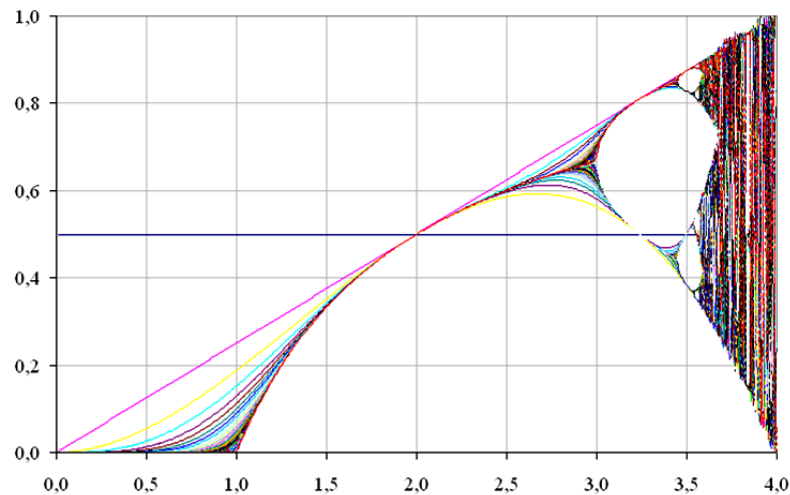


Рис. 3.2. Дерево бифуркаций

Анализ рисунка 3.2 показывает, что с увеличением параметра $A = M/P$ динамика цен становится трудно прогнозируемой, и это обстоятельство препятствует деловой активности экономических агентов.

Таким образом, эффективное использование органом управления экономических ресурсов напрямую зависит от характеристик устойчивости рыночных отношений, которые в рассмотренной модели определяются

параметрами $A_1(\alpha), A_2(\alpha), \dots, A_\infty(\alpha)$. Причем с увеличением предложений продукции уменьшается диапазон устойчивости рыночных механизмов, что согласуется с представлением экономистов о перегретой экономике.

Глава 4. Модели конкуренции в условиях гистерезисного поведения экономических агентов. Многокритериальные динамические задачи.

4.1. Многокритериальная позиционная динамическая задача.

Рассмотрим многокритериальную позиционную динамическую задачу при неопределенности (МДЗН), под которой понимается упорядоченный набор:

$$\Sigma, \Psi, Z, J\{U, Z, t_0, x_0\}. \quad (4.1)$$

В (4.1) изменение управляемой системы Σ описывается линейным векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \gamma(u - x), \quad (4.2)$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0, \quad (4.3)$$

где Ψ — множество стратегий U у ЛПП, Z — множество неопределенностей Z ; $J\{U, Z, t_0, x_0\}$ — i -я компонента векторного критерия;

$$J\{U, Z, t_0, x_0\} = J_1\{U, Z, t_0, x_0\} \dots J_N\{U, Z, t_0, x_0\} \quad (4.4)$$

применяется также множество номеров критериев $N = \{1, \dots, N\}$.

С точки зрения экономической динамики можно предложить следующую интерпретацию задачи (4.1).

Рассматривается замкнутая (не имеющая прямых связей с внешним миром) экономическая система Σ (которая называется «производителем»). В качестве производителей могут выступать отдельные предприятия, целые отрасли. Во главе производителя стоит орган управления, принимающий (на основе, например, маркетинговых исследований) те или иные решения с учетом тех или иных целей. Возможности органа управления могут заключаться, в частности, в перераспределении фонда зарплаты, штрафах, премиях и других формах поощрения и наказания. Эти возможности для производителя

обозначены в задаче (4.1) через ψ . Состояние экономической системы \sum в каждый момент времени t описывается n -вектором $x(t)$, компоненты которого есть составляющие объема производства за время $t - t_0$. Кроме того, координатами $x(t)$ могут являться трудовые и природные ресурсы, виды фондов и услуг, разного рода условные «товары». В теории моделей экономической динамики изучаются, в основном, траектории движения экономики в пространстве «товаров» — траектории изменения векторов $x(t)$ с течением времени. Вообще говоря, возможны различные траектории движения экономической системы, начинающиеся (при $t = t_0$) в одном и том же состоянии x_0 (при одном и том же количестве начального товара). Иначе говоря, последующее состояние экономики неоднозначно определяется предыдущим. Причиной этого являются:

- во-первых, технологические возможности характеризуют не только производственные, но и потребительские, транспортные возможности, а также возможности сферы услуг, воспроизводство трудовых ресурсов и т.п.;
- во-вторых, выбор решения органом управления, заключающегося в использовании конкретной стратегии u при $u(t, x) = P(t)x + p(t)$; стратегии устанавливают какая доля произведенных к моменту времени t товаров $x(t)$ ЛПР считает нужным направить на рост или убыль прироста этой продукции $x(t)$ в единицу времени;
- в-третьих, экономическая система как правило, подвергается неожиданным, труднопрогнозируемым возмущениям как извне (изменение количества и номенклатуры поставок, изменение спроса на товары, выпускаемых данным производством), так и изнутри (появление новой технологии, поломка и замена оборудования, несовпадение реальных сроков пуска нового оборудования с планируемыми сроками и т.д.)

В задачах выбора решения, формализуемых в виде модели векторной оптимизации, первым естественным шагом следует считать выделение области

компромиссов (или решений, оптимальных по Парето). Вектор называется оптимальным по Парето решением, если не существует $x \in X$ такого, что выполнены неравенства

$$f(x|y) \geq f(x^0|y) \forall y \in Y, \quad (4.5)$$

и

$$f(x|y) \neq f(x^0|y). \quad (4.6)$$

Для современного рынка товаров и услуг характерна тенденция к значительному росту влияния торговых посредников. Это объясняется прежде всего тем, что они имеют прямой доступ к исключительно важной информации о состоянии и поведении рынка, что позволяет производителям своевременно реагировать на происходящие рыночные изменения и использовать новые возможности. Предлагаемые в настоящее время зарубежными и отечественными учеными экономико-математические модели и методы, включая перспективы анализа и планирования рациональных решений в условиях неопределенности, играют существенную роль в практике управления в конкретной макроэкономической системе. В целом, решение ряда макроэкономических задач с применением математических методов и моделей ограничивается рамками функциональных задач в сфере маркетинга, финансового менеджмента, логистики, инвестирования, стратегического управления, экономического анализа. В экономической литературе не рассматривается самостоятельная задача комплексного применения математических методов и моделей для повышения эффективности управления реальными макроэкономическими системами. Поэтому существует необходимость в разработке комплекса взаимосвязанных экономико-математических моделей и методов их реализации с учетом особенностей функционирования конкретных систем управления в условиях рыночной экономики.

В настоящее время наблюдается тенденция к значительному росту влияния торговых посредников на рынке товаров и услуг. Это объясняется тем, что торговые посредники имеют прямой доступ к исключительно важной информации о состоянии и поведении рынка. Данные, поступающие с места продаж совместно со средствами связи, работающими в режиме реального времени, позволяют улавливать и учитывать изменения потребительского спроса сразу же, как только они возникают. Торговые посредники также успешно используют при реализации продукции частные торговые марки, в то время как производители сталкиваются со значительными сложностями и издержками при внедрении и распространении новых торговых марок. И, наконец, канал распределения развивается от стратегии «проталкивания» (в которой наиболее активная роль принадлежит производителям, побуждающих торговых посредников приобретать и доводить до потребителей их продукты) к стратегии «вытягивания» (эта стратегия ориентируется на запросы конечного потребителя, исходя из которых, посредники начинают диктовать свои запросы производителям). Только тогда, когда потребитель покупает товар, окончательно материализуется вся цепочка создания добавленной стоимости в канале распределения, поэтому именно посредники, лучше других участников канала распределения, могут управлять процессом создания этой стоимости.

Конкурентные позиции торговых посредников на рынке определяются следующими качествами:

- готовность развивать сотрудничество и партнерские отношения;
- гибкость логистической системы, позволяющая приспосабливаться к потребностям партнеров по каналу;
- «подстроенные» под конкретного потребителя программы маркетинга и продаж;
- наличие информационных связей с партнерами для согласования действий;

- короткий, чувствительный к требованиям рынка, гибкий и надежный цикл исполнения заказа, обеспечивающий быстрое пополнение запасов и удовлетворение запросов потребителей.

4.2. Многокритериальная задача о производстве, потреблении и сбыте товара.

Рассмотрим модель задачи, в которой предполагается, что производитель взаимодействует с посредником, который в свою очередь, продает товар конечному потребителю. Эта задача является многокритериальной, так как оба участника экономического процесса стремятся максимизировать свой доход.

Рассмотрим многокритериальную задачу о производстве, хранении и сбыте товара с посредником. Обозначим через $Z_1(t)$ — количество товара на складе у производителя, $Z_2(t)$ — количество товара на складе у посредника, $Z(t)$ — количество товара у потребителя. Тогда обозначим за $U(t)$ — темп производства, $P_1(t)$ — количество продаж в единицу времени производителем, $P_2(t)$ — количество продаж в единицу времени посредником, k — коэффициент потребления, k_1 — коэффициент затрат на хранение единицы товара производителя, k_2 — коэффициент затрат на хранение единицы товара посредника, $p_1(t)$ — цена единицы товара у производителя, $p_2(t)$ — цена единицы товара у посредника. Динамика изменений введенных величин описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = U - P_1, \\ \dot{Z}_2 = U - P_2, \\ \dot{Z} = P_2 - kZ, \\ P_1 = Z_1(a_1 - b_1 p_1), \\ P_2 = Z_2(a_2 - b_2 p_2). \end{cases} \quad (4.7)$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 положительные постоянные.

Прибыль производителя и потребителя определяется функционалами:

$$J_1 = \int_0^T (p_1 P_1 - k U - k_1 Z_1) dt \rightarrow \max, \quad (4.8)$$

$$J_2 = \int_0^T (p_2 P_2 - p_1 P_1 - k_2 Z_2) dt \rightarrow \max. \quad (4.9)$$

Взвешенный доход $J(t)$ с учетом введенных обозначений определяется равенством:

$$J(\alpha) = \alpha J_1 + (1 - \alpha) J_2, \quad (4.10)$$

$$J(\alpha) = \int_0^T (2\alpha p_1 P_1 - p_1 P_1 - k U - k_1 Z_1 - k_2 Z_2 + p_2 P_2 - \alpha p_2 P_2 + \alpha k_2 Z_2) dt \rightarrow \max. \quad (4.11)$$

Для решения этой задачи применим принцип максимума Л. С. Понтрягина. Составим функцию Гамильтона.

$$H = 2\alpha p_1 P_1 - p_1 P_1 - k U - k_1 Z_1 - k_2 Z_2 + p_2 P_2 - \alpha p_2 P_2 + \alpha k_2 Z_2 - \lambda_1 (U - P_1) - \lambda_2 (P_1 - P_2) - \lambda_3 (P_2 - k Z), \quad (4.12)$$

где $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ — вспомогательные функции. В силу линейности гамильтониана по U , его минимум по этой переменной в зависимости от знака $\lambda_1 + k_1$ достигается либо при $U \equiv 0$, либо при $U \equiv U_0$, т.е.

$$U^* = \begin{cases} 0, & \lambda_1 + k_1 \leq 0, \\ U_0, & \lambda_1 + k_1 > 0. \end{cases}, \quad (4.13)$$

Сопряженные переменные удовлетворяют уравнению:

$$\dot{\lambda}_3 = 0, \quad (4.14)$$

$$\dot{\lambda}_2 = p_2(1 - \alpha) - \frac{k_2(1 - \alpha)}{a_2 - b_2 p_2}, \quad (4.15)$$

$$\dot{\lambda}_1 = p_2(1 - \alpha) - \frac{k_2(1 - \alpha)}{a_2 - b_2 p_2} + p_1(1 - 2\alpha) + \frac{\alpha k_1}{a_1 - b_1 p_1}, \quad (4.16)$$

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = 0. \quad (4.17)$$

Из условия максимума функции (4.12) по p_1 и p_2 получаем:

$$p_1^* = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2(2\alpha - 1)} + \frac{a_1}{2b_1}, \quad (4.18)$$

$$p_2^* = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{2(1 - \alpha)} + \frac{a_2}{2b_2}. \quad (4.19)$$

При $\alpha = 0,5$ получим следующее частное решение данной задачи:

$$J_1 = \int_0^T (p_1 P_1 - kU - k_1 Z_1) dt \rightarrow \max, \quad (4.20)$$

$$J_2 = \int_0^T (p_2 P_2 - p_1 P_1 - k_2 Z_2) dt \rightarrow \max. \quad (4.21)$$

Взвешенный доход $J(t)$ определяется равенством:

$$J = J_2 + J_1 = \int_0^T (p_2 P_2 - kU - k_1 Z_1 - k_2 Z_2) dt \rightarrow \max.$$

(4.22)

Гамильтониан будет иметь вид:

$$H = p_2 P_2 - kU - k_1 Z_1 - k_2 Z_2 - \lambda_1 (U - P_1) - \lambda_2 (P_1 - P_2) - \lambda_3 (P_2 - kZ) \quad (4.23)$$

Решение системы выпишется в виде:

$$\dot{\lambda}_3 = 0, \quad (4.24)$$

$$\dot{\lambda}_2 = p_2 - \frac{k_2}{a_2 - b_2 p_2}, \quad (4.25)$$

$$\dot{\lambda}_1 = p_2 - \frac{k_2}{a_2 - b_2 p_2} + \frac{k_1}{a_1 - b_1 p_1}, \quad (4.26)$$

$$U^* = \begin{cases} 0, & \lambda_1 + k_1 \geq 0, \\ U_0, & \lambda_1 + k_1 < 0. \end{cases} \quad (4.27)$$

$$p_1^* = \begin{cases} 0, & \lambda_1 - \lambda_2 < 0, \\ p_{1\max}^*, & \lambda_1 - \lambda_2 \geq 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

$$p_2^* = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{2} + \frac{a_2}{2b_2}. \quad (4.29)$$

На следующих рисунках показано численное решение систем (4.7), (4.13)-(4.19):

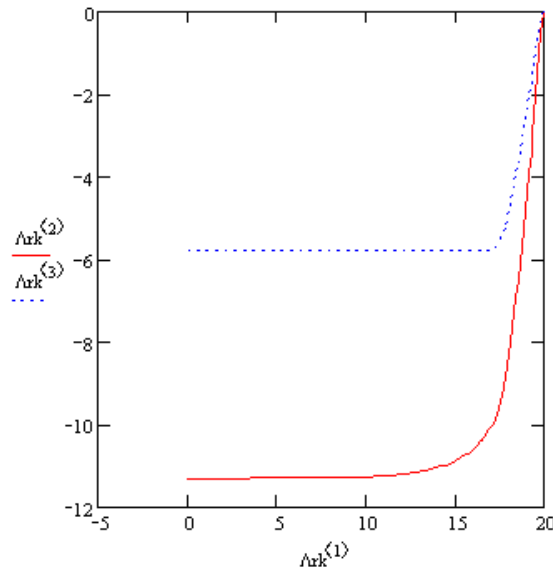


Рис. 4.1. Зависимость $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ от t при $\alpha = 0,25$

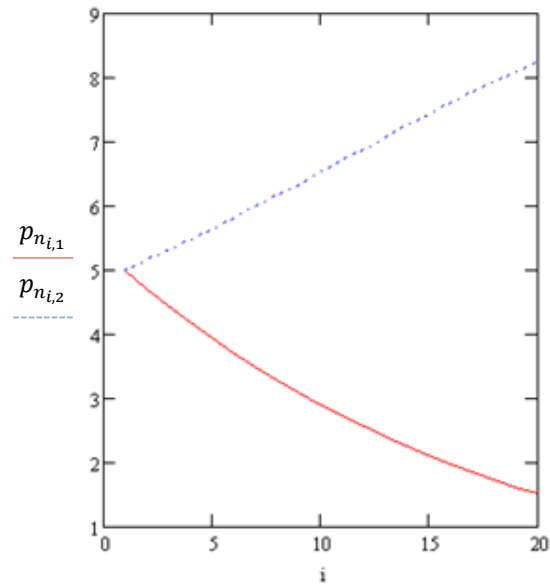


Рис. 4.2. Оптимальная цена на промежутке от 0 до t при $\alpha = 0,25$

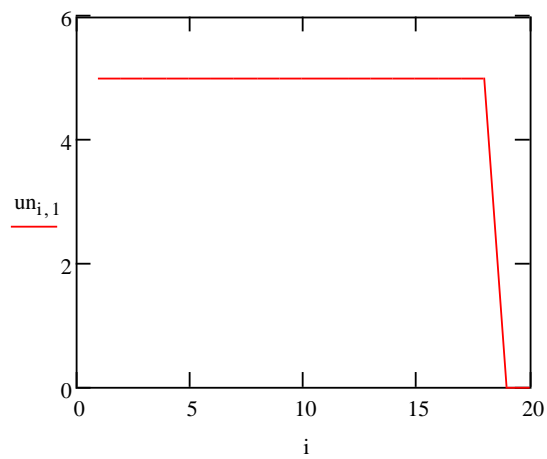


Рис. 4.3. Оптимальный темп производства на промежутке от 0 до t при $\alpha=0,25$

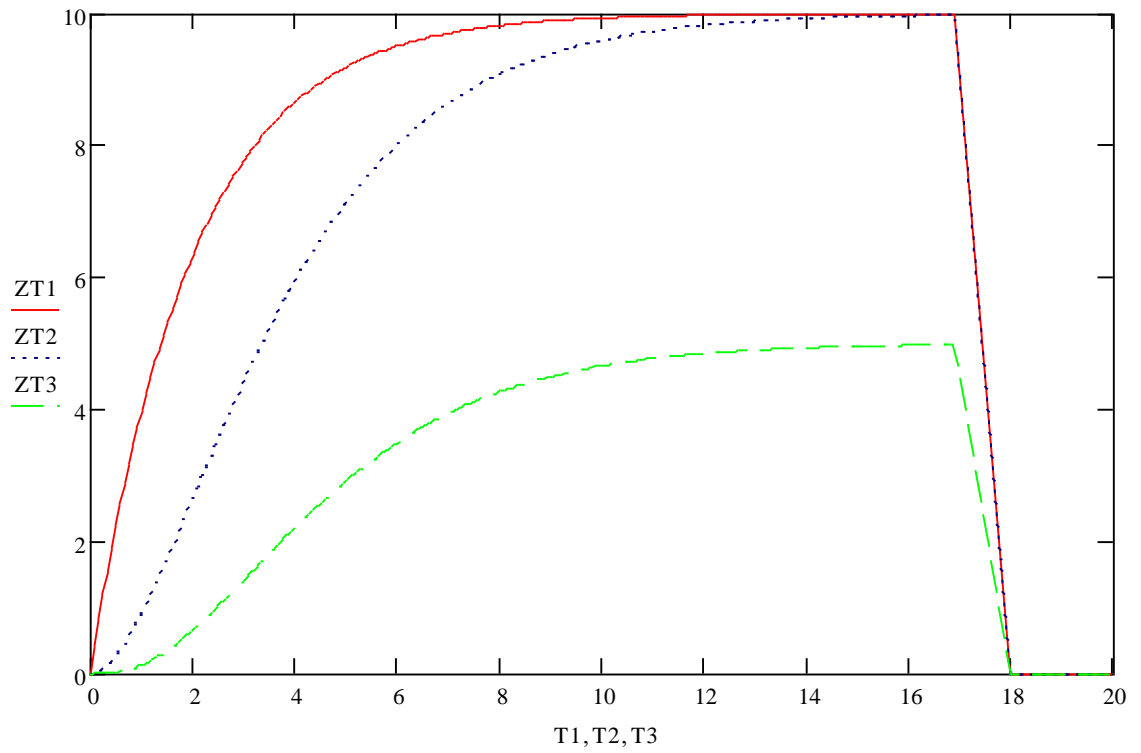


Рис. 4.4. Зависимость Z_1, Z_2, Z от t при $\alpha = 0,25$

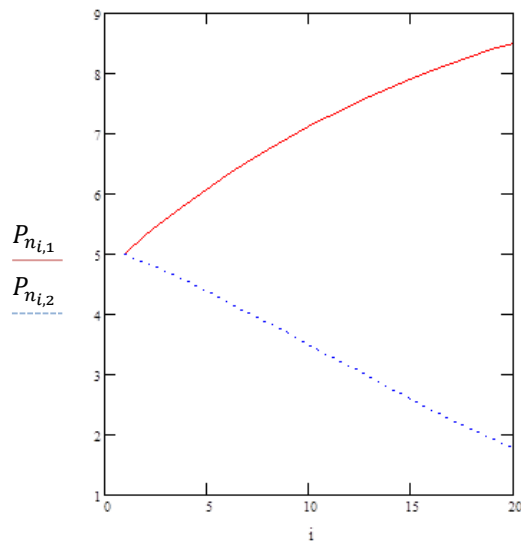


Рис. 4.5. Количество продаж в единицу времени производителем и посредником при $\alpha = 0,25$

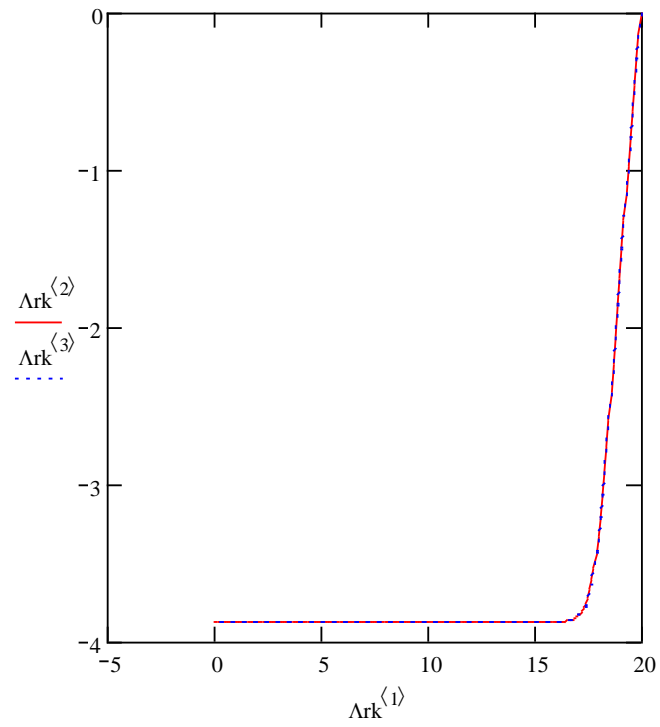


Рис. 4.6 Зависимость $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ от t при $\alpha = 0,5$

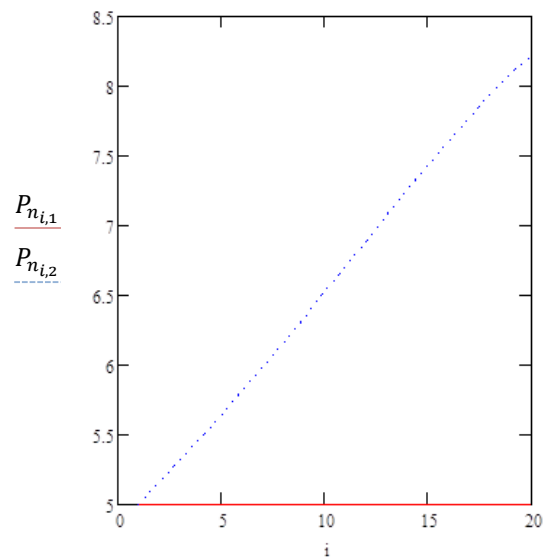


Рис. 4.7. Оптимальная цена на промежутке от 0 до t при $\alpha = 0,5$

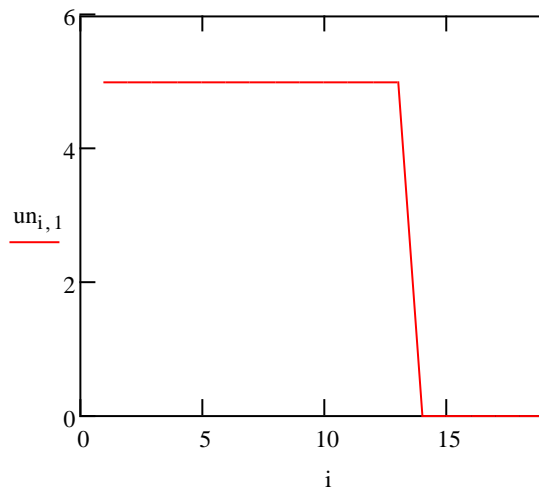


Рис. 4.8 Оптимальный темп производства на промежутке от 0 до t при $\alpha = 0,5$

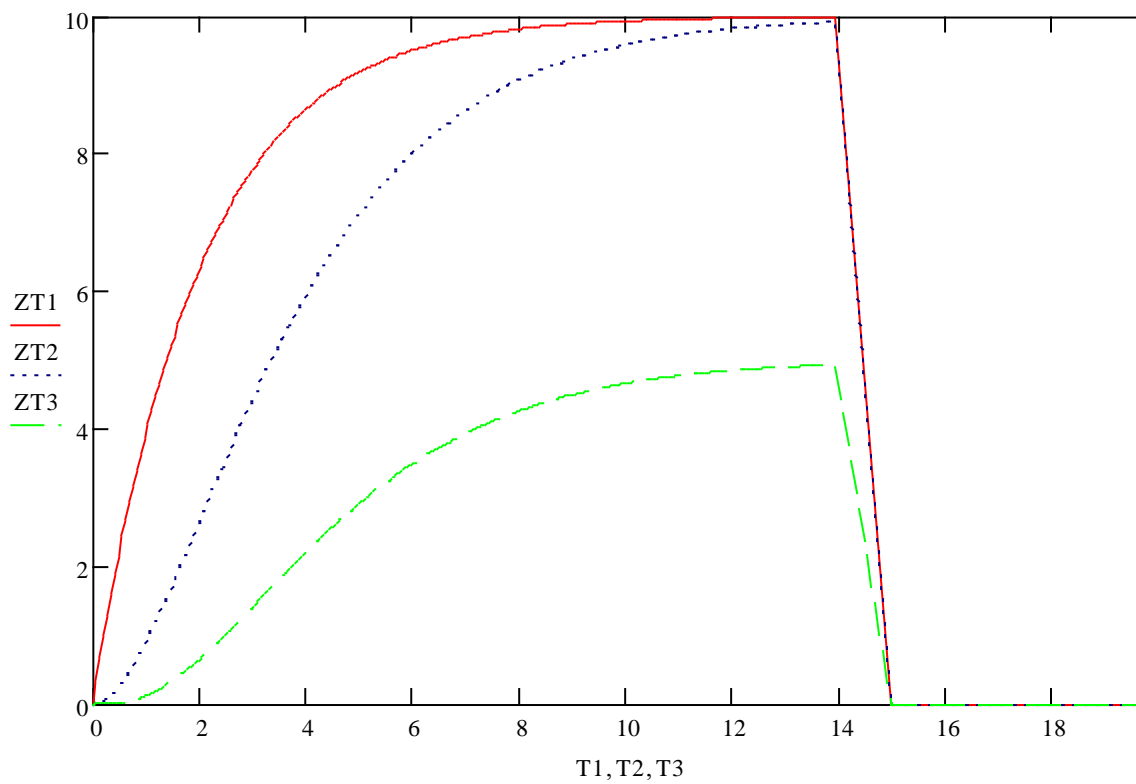


Рис. 4.9. Зависимость Z_1, Z_2, Z_3 от t при $\alpha = 0,5$

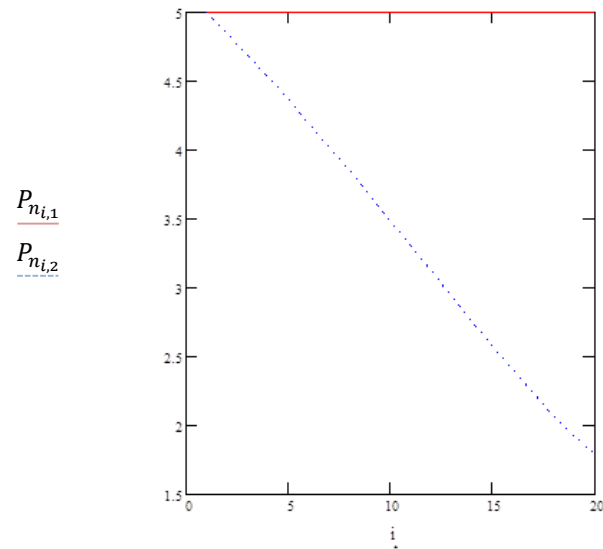


Рис. 4.10. Количество продаж в единицу времени производителем и посредником при $\alpha = 0,5$

При $\alpha > 0,75$ получим тривиальное решение задачи, что обусловливается нерациональным перераспределением между производителем и потребителем.

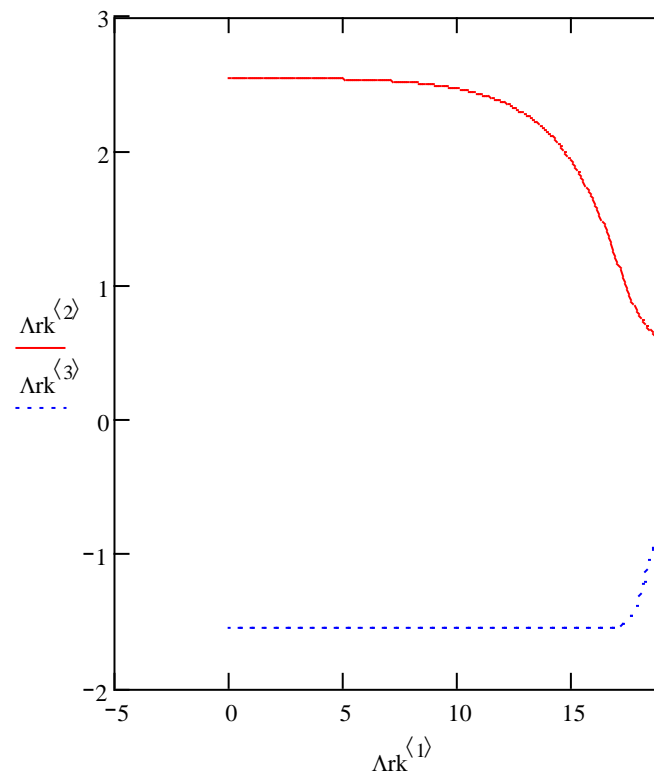


Рис. 4.11. Зависимость $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ от t при $\alpha = 0,8$

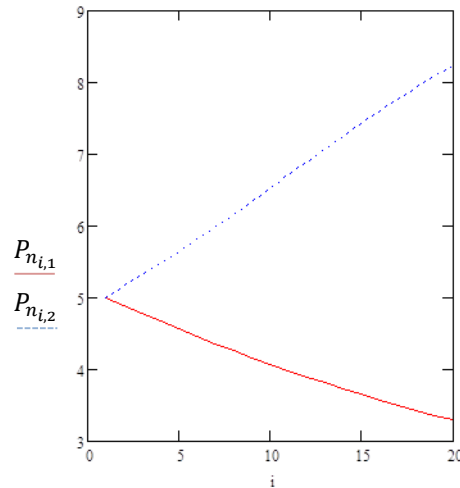


Рис. 4.12. Оптимальная цена на промежутке от 0 до t при $\alpha = 0,8$

Исследуем зависимость взвешенного функционала от параметра α . Для упрощения выкладок введем следующие обозначения. Обозначим через

$$\dot{Z} = f(Z, u), \quad (4.30)$$

$$Z(0) = Z_0, \quad (4.31)$$

$$Z(t_f) = Z_f. \quad (4.32)$$

Рассмотрим функционалы

$$J_1 = \int_0^T (p_1 P_1 - kU - k_1 Z_1) dt \rightarrow \min, \quad (4.33)$$

$$J_2 = \int_0^T (p_2 P_2 - p_1 P_1 - k_2 Z_2) dt \rightarrow \min, \quad (4.34)$$

$$J(\alpha) = \alpha J_1 + (1 - \alpha) J_2 \rightarrow \min. \quad (4.35)$$

Обозначим через $Z^*(t, \alpha)$, $p^*(t, \alpha)$ оптимальное решение задачи (4.30)-(4.35), тогда в условиях гладкой зависимости функционала от параметра α получим:

$$J^* = \int_0^{t_f} \alpha f_1(Z^*(\alpha, t), p^*(\alpha, t)) + (1 - \alpha) f_2(z^*(\alpha, t), p^*(\alpha, t)) dt. \quad (4.36)$$

Из условия стационарности $\frac{dJ}{d\alpha} = 0$ получим:

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\alpha} &= \int_0^{t_f} (f_1 - f_2) + \alpha \left(\frac{df_1}{dZ} * \dot{Z}_\alpha^* + \frac{df_1}{dp} * \dot{p}_\alpha^* \right) + (1 - \alpha) \left[f_2 \frac{df}{dZ} * Z_\alpha^* + \frac{df_2}{dp} * p \right] dt = \\ &= \int_0^{t_f} \left[(f_1 - f_2) + \dot{Z}_\alpha^* \left(\alpha \frac{df_1}{dZ} + (1 - \alpha) \frac{df_2}{dZ} \right) + \dot{p}_\alpha^* \left(\alpha \frac{df_1}{dp} + (1 - \alpha) \frac{df_2}{dp} \right) \right] dt. \end{aligned} \quad (4.36)$$

С другой стороны

$$H = \alpha f_1 + (1 - \alpha) f_2 + \lambda f \quad (4.37)$$

И на оптимальных траекториях:

$$\frac{dH}{dc} = 0, \quad (4.38)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{dH}{dZ}. \quad (4.39)$$

Из условия (4.38) получим:

$$\alpha \dot{f}_1 p + (1 - \alpha) \dot{f}_2 + \lambda \dot{f}_c = 0. \quad (4.40)$$

Из условия (4.39) получим

$$\dot{\lambda} = -(\alpha \dot{f}_{1Z} + (1 - \alpha) \dot{f}_{2Z} + \lambda \dot{f}_Z). \quad (4.41)$$

Исходя из (4.40) получим:

$$\alpha \dot{f}_{1p} + (1 - \alpha) \dot{f}_{2p} = -\lambda \dot{f}_p. \quad (4.42)$$

Исходя из (4.41) получим

$$\alpha \dot{f}_{1Z} + (1 - \alpha) \dot{f}_{2Z} = -\dot{\lambda} - \lambda \dot{f}_Z. \quad (4.43)$$

Подставим (4. 42) и (4. 43) в (4. 36):

$$\begin{aligned} \frac{dJ^*}{d\alpha} &= \int_0^{t_f} \left[(f_1 - f_2) + \dot{Z}_\alpha^* (-\dot{\lambda} - \lambda \dot{f}_p) + \dot{c}_\alpha^* (-\lambda \dot{f}_p) \right] dt = \\ &= \int_0^{t_f} \left[(f_1 - f_2) - \dot{Z}_\alpha^* \dot{\lambda} - \lambda (\dot{f}_Z^* \dot{Z}_\alpha^* + \dot{f}_p^* \dot{p}_\alpha^*) \right] dt = \\ &= \int_0^{t_f} \left[(f_1 - f_2) - \dot{Z}_\alpha^* \dot{\lambda} - \lambda \frac{df}{d\alpha} \right] dt. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Преобразуем второе слагаемое (4.44):

$$\begin{aligned} - \int_0^{t_f} \dot{Z}_\alpha^* \dot{\lambda} dt &= - \int_0^{t_f} Z^* d\lambda = - \dot{Z}_\alpha^* \lambda \Big|_0^{t_f} + \int_0^{t_f} \lambda \frac{d}{dt} \dot{Z}_\alpha^* dt = \\ &= - Z^* \lambda(t_f) + \dot{Z}_\alpha^* \lambda(0) + \int_0^{t_f} \lambda \dot{Z}_\alpha^* dt = \dot{Z}_\alpha^*(0) \lambda(0) + \int_0^{t_f} \lambda \frac{d}{d\alpha} f dt. \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_0^{t_f} \left[(f_1 - f_2) + \lambda \frac{df}{d\alpha} - \lambda \frac{df}{d\alpha} \right] dt + (\dot{Z}_\alpha^*(0), \lambda(0)). \quad (4.46)$$

Так как $\frac{dJ}{d\alpha} = 0$, то на оптимальных траекториях выполняется:

$$\int_0^{t_f} (f_1(Z^*, p^*) - f_2(Z^*, p^*)) dt = (-\dot{Z}_\alpha^*(0), \lambda(0)). \quad (4.47)$$

4.3. Задача о максимизации прибыли в условиях гистерезисного темпа продаж.

На первом этапе рассмотрим задачу о максимизации прибыли в идеализированной постановке: пренебрежем затратами производителя на производство и хранение товара и выясним, какой в этом случае должна быть цена на конечном промежутке времени, для того чтобы прибыль, была максимальна.

В силу экономического смысла пороговых чисел α и β они должны быть строго положительны. Из общих соображений ясно, что расстояние между ними не должно быть слишком большим, поэтому в дальнейшем будем считать, что носитель меры $\mu(t)$ при любом t сосредоточен в треугольнике плоскости $(\alpha; \beta)$, изображенном на рисунке 4.13 и выделяемом системой неравенств:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha \leq a; \\ 0 &\leq \beta \leq a; \\ \beta &\geq \alpha. \end{aligned} \tag{4.48}$$

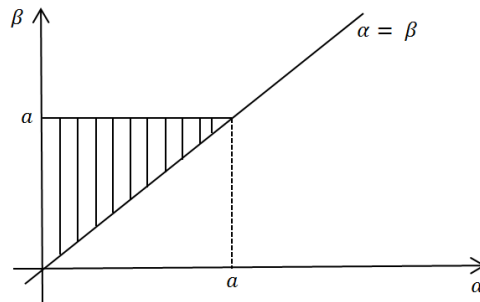


Рис. 4.13. Носитель меры преобразователя

Помимо этого предположим, что мера $\mu_{\alpha,\beta}(t)$ при любом времени t совпадает с лебеговой. Отметим, что это предположение не является ограничительным. Общий случай рассматривается совершенно аналогично. В сделанных предположениях задача о максимизации прибыли на конечном временном интервале сводится к максимизации функционала

$$Q(p(t)) = \int_0^T p(t)P(t)dt \rightarrow \max, \quad (4.49)$$

где $P(t)$ – функция (темп) продаж.

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = t \int_{\alpha < \beta} \Gamma[\omega_0, \alpha, \beta] t d\alpha d\beta. \quad (4.50)$$

Лемма 4.3.1 *Функция (4.50) ограничена и достигает своего максимального значения φ_{\max} в некоторой точке $t^* \in [0; a/\sqrt{2}]$.*

Доказательство. Из определения функции $\varphi(t)$ следуют соотношения:

$$\varphi(0) = 0; \quad (4.51)$$

$$\varphi(t) \equiv 0 \quad (t \geq \frac{a}{\sqrt{2}}). \quad (4.52)$$

На отрезке $[0, \frac{a}{\sqrt{2}}]$ функция $\varphi(t)$ непрерывна, и по теореме Вейерштрасса

достигает своего максимального значения φ^* в некоторой точке $t^* \in (0, \frac{a}{\sqrt{2}})$.

Лемма доказана.

Обозначим через φ^* максимум функции $\varphi(t)$.

Лемма 4.3.2 *Для любой функции $c(t)$ верно неравенство*

$$c(t) \int_{\alpha < \beta} \Gamma[\omega_0(\alpha, \beta)] c(t) d\alpha d\beta \leq \varphi^*$$

Доказательство. В предположении противного найдется такая функция $c^*(t)$ и такой момент времени t_1 , что будет выполнено неравенство:

$$c(t_1) \int_{\alpha < \beta} \Gamma[\omega_0(\alpha, \beta)] c^*(t_1) d\alpha d\beta \leq \varphi^*. \quad (4.53)$$

Обозначим $c^*(t_1) = c_0$. Из определения преобразователя вытекает неравенство

$$\int_{\alpha < \beta} \Gamma[\omega_0(\alpha, \beta)] c^*(t_1) d\alpha d\beta \leq \frac{a^2}{2} - \frac{c_0^2}{4}. \quad (4.54)$$

На отрезке $[0; a]$ функция $\varphi(t)$ определяется равенством

$$\varphi(t) = t \left(\frac{a^2}{2} - \frac{t^2}{4} \right) = \frac{a^2 t}{2} - \frac{t^3}{4}, \quad (4.55)$$

являющегося следствием определения преобразователя.

Тогда будет верно:

$$c^*(t_1) \int_{\alpha < \beta} \Gamma[\omega_0(\alpha, \beta)] c^*(t_1) d\alpha d\beta \leq c_0 \left(\frac{a^2}{2} - \frac{c_0^2}{4} \right) = \varphi(c_0).$$

Но $\varphi(c_0) \leq \varphi^*$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 4.3.1 Пусть преобразователь находится в произвольном состоянии $\omega_0(\alpha, \beta)$, согласованном с начальным значением c_0 . Последовательность функций:

$$c_n(t) = \begin{cases} c_0 - nt, & \text{если } 0 \leq t \leq \frac{c_0}{n}; \\ n \left(t - \frac{c_0}{n} \right), & \text{если } \frac{c_0}{n} < t \leq \frac{c_0 + t_*}{n}; \\ t_*, & \text{если } \frac{c_0 + t_*}{n} < t \leq T \end{cases} \quad (4.56)$$

является максимизирующей для функционала (4.49).

Доказательство. Из лемм 4.3.1, 4.3.2 следует, что

$$\max_{c(t)} \int_0^T c(t) P(t) dt = \varphi^* T. \quad (4.57)$$

По построению последовательности функций $c_n(t)$ выполняется равенство $c_n(t) P_n(t) = \varphi^*$, где

$$P_n(t) = \int_{\alpha < \beta} \Gamma[\omega_0(\alpha, \beta)] c_n(t) d\alpha d\beta$$

при всех $t \in \left[\frac{c_0 + t_*}{n}; T \right]$.

Следовательно,

$$|\varphi^* T - \int_0^T c_n(t) P(t) dt| \leq \varphi^* \frac{c_0 + t_*}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.58)$$

Таким образом, предельное соотношение (4.58), а вместе с ним и теорема 4.3.1 доказана.

Доказанная теорема позволяет строить оптимальную ценовую стратегию: в рамках предложенной модели для достижения максимальной прибыли на конечном временном интервале цена на товар сначала должна упасть до нуля, а затем достигнуть некоторого оптимального значения. Этот вывод находится в полном соответствии реальной жизнью: в 1958 году известный экономист Р. Фельдбойм в своих рекомендациях одной из продуктовых компаний выходящей на американский рынок советовал опустить цену в начальный период, на сколько это возможно и лишь после этого плавно повышать до некоторого оптимального значения. В последствии этот подход стал общепринятым и был с успехом реализован различными фирмами.

Если говорить нестрого, то для достижения оптимального результата сначала нужно «включить» неидеальные реле (падение цены до нуля), а затем искать компромисс между числом потенциальных покупателей и ценой товара [53]. В заключение этого раздела отметим ряд возможных обобщений теоремы 4.3.1. Если отказаться от предположения о лебеговости меры μ , то теорема 4.3.1 остается верной, единственное отличие будет заключаться в том, что оптимальное значение цены будет определяться иным соотношением (очевидно, оно будет зависеть от меры μ) и может быть приближенно найдено одним из численных методов. В ситуации, когда мера $\mu_{\alpha,\beta}$ будет зависеть от времени, оптимальное значение цены так же будет являться динамическим параметром.

Следующий пример, иллюстрирующий полезность применения математических моделей гистерезисного типа в экономике, дает задача об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара. В данном случае рассматривается как общая трактовка данной задачи, так и ее модель, усложненная гистерезисной функцией спроса.

Но совершенно ясно, что для решения обеих задач необходимо иметь представление о покупательской способности населения, его степени заинтересованности в приобретении данного товара и производственной стратегии, т.е. решение этой задачи должно начинаться с построения модели функции продаж.

В различных работах [47, 58] эта функция выбирается в виде детерминированной модели зависимости цены, качества, количества произведенного товара от факторов, которые явно определяют покупательную активность потребителя и посредника. Т.е. количество товара у потребителя, посредника и производителя напрямую связано с производственной стратегией предприятия.

Описанные параметры достаточно точно определяют выходные характеристики функции продаж. Но все же, как показывают многочисленные исследования [24, 50, 58], не всегда являются исчерпывающими, т.к. состояние экономической системы в момент времени t_0 зависит не только от значений внешних параметров в этот момент времени, но и от динамики их изменения в прошлом.

Это обстоятельство побудило выбрать в качестве модели функции продаж некоторый преобразователь гистерезисного типа, учитывающий предысторию изменений внешних параметров и, что еще более важно, инертность покупательского спроса [57].

Рассмотрим задачу о производстве хранении и сбыте товара в общей постановке. Обозначим через $Z_1(t)$ – количество товара на складе у производителя, $Z_2(t)$ – количество товара у потребителя, $U(t)$ – темп производства, $P(t)$ – темп продаж (количество продаж в единицу времени), k_1 – коэффициент потребления, k_2 – коэффициент затрат на хранение единицы товара, $p(t)$ — цена единицы товара. Динамика изменений введенных величин описывается следующей системой дифференциально-операторных уравнений:

$$\dot{Z}_1 = U - P, Z_1(0) = 0, \quad (4.59)$$

$$\dot{Z}_2 = P - k_1 Z_2, Z_2(0) = 0, \quad (4.60)$$

Проведем сравнительный анализ задачи об оптимальной производственной стратегии, для функции спроса заданной как:

$$P = Z(a - bp) \quad (4.61)$$

и задачи с гистерезисной функцией спроса:

$$P(t) = Z_1(t) \int_{\alpha < \beta} \omega(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta; \quad (4.62)$$

$$\omega(\alpha, \beta, t) = \Gamma[\omega_0(\alpha, \beta)]p(t). \quad (4.63)$$

В дальнейшем, для упрощения выкладок будем предполагать, что себестоимость производства товара равна единице. Также будем считать, что темп производства ограничен некоторым максимальным значением U_0 , т.е. $U(t) \in [0; U_0]$. Рассмотрим процесс производства сбыта и хранения на конечном временном промежутке $[0, T]$. Общий доход $J(t)$ с учетом введенных обозначений определяется равенством

$$J(T) = \int_0^T (p(t)P(t) - U(t) - k_1 Z_1(t)) dt. \quad (4.64)$$

Таким образом, задача о производстве сбыте и хранении товара сводится к задаче оптимального управления: найти такие функции $U(t)$, $c(t)$ ($t \in [0, T]$), удовлетворяющая системе (4.48) – (4.52) при которых функционал (4.53) максимален. Очевидно, что если $U(t) \equiv 0$ (производство не включается), то $J(T) = 0$. Такое решение называется тривиальным. Поэтому нужно найти такие ограничения на параметры задачи, при которых можно получить ее оптимальное решение отличное от тривиального, и такие, что $J(T) > 0$.

Для решения этой задачи применим принцип максимума Л. С. Понтрягина. Составим функцию Гамильтона.

$$\begin{aligned} H(Z_1, Z_2, P, \lambda_1, \lambda_2, U, p) &= \lambda_1(U - P) + \lambda_2(P - k_1 Z_2) - pP + U + k_2 Z_1 = \\ &= U(\lambda_1 + 1) + P(\lambda_2 - \lambda_1 - p) + k_1 \lambda_2 Z_2 + k_2 Z_1, \end{aligned} \quad (4.65)$$

где $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ — вспомогательные функции.

В силу линейности гамильтониана по U его минимум по этой переменной в зависимости от знака $\lambda_1(t) + 1$ достигается либо при $U \equiv 0$ либо при $U \equiv U_0$, т.е.

$$U^*(t) = \begin{cases} 0, & \lambda_1(t) + 1 > 0; \\ U_0, & \lambda_1(t) + 1 < 0. \end{cases} \quad (4.66)$$

Отметим, что выбор зависимости функции продаж от цены не позволяет найти \max Гамильтониана стандартными методами дифференциального исчисления [44, 45]. В общем случае преобразователь (4.59) – (4.63), рассматриваемый как оператор из $C_{(0,T)}$ в себя не имеет даже слабой производной Гато. Поэтому для нахождения \max функции (4.65) по p необходимы другие методы [13, 47]. Для упрощения выкладок рассмотрим отдельное выражение

$$\Psi(p) = -P(p + \lambda_1 - \lambda_2). \quad (4.67)$$

При фиксированных значениях λ_1 и λ_2 \max этого выражения достигается на одном из двух «крайних» состояниях преобразователя показанных на рис. 4.14.а, 4.14.б при одном и том же значении цены:

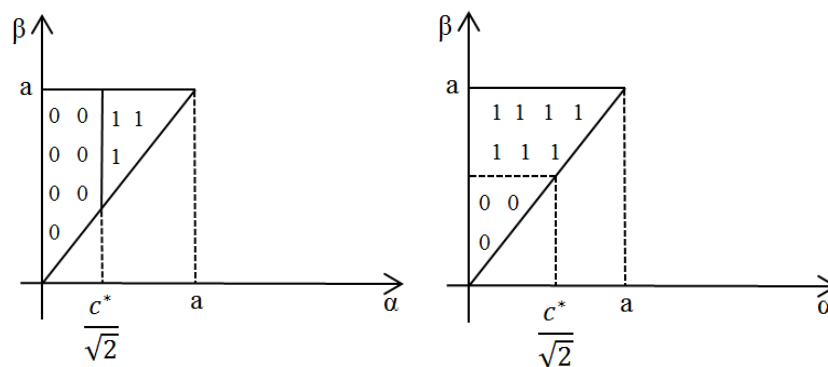


Рис. 4.14. График состояния преобразователя

Выбор соответствующего состояния осуществляется в зависимости от знака $\lambda_1 - \lambda_2$. Очевидно, что если $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$, то «предпочтительнее» состояние, показанное на рисунке 4.14.а, если выполняется противоположное неравенство, то состояние, показанное на рисунке 4.14.б.

Рассмотрим первый случай, т.е. когда $\lambda_1 - \lambda_2 > 0$. В силу детерминированности и статичности преобразователя достаточно рассмотреть значение выражения (4.67) при $p(t) = p = const$. Тогда

$$\Psi(p) = -\left(\frac{a^2}{2} - \frac{p^2}{2}\right)(p + \lambda_1 - \lambda_2). \quad (4.68)$$

Находя производную (4.68) и приравнявая ее к нулю, получим уравнение:

$$\frac{3}{4}p^2 + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}p - \frac{a^2}{2} = 0, \quad (4.69)$$

Откуда $p = \frac{1}{3}(\lambda_2 - \lambda_1 \pm \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + a^2})$. Так как диапазон изменений цены лежит на отрезке $[0; \frac{a}{\sqrt{2}}]$, то нас будет интересовать лишь положительный корень уравнения (4.69). Непосредственной проверкой можно убедиться, что этот корень c^* удовлетворяет неравенству $c^* < a\sqrt{2}$, и поэтому является допустимым значением цены.

Во втором случае

$$\Psi(p) = -\left(a - \frac{p^2}{\sqrt{2}}\right)^2 (p + \lambda_1 - \lambda_2). \quad (4.70)$$

Приравняв к нулю производную (4.70), получим:

$$(\sqrt{2}a - p)(3p + 2\lambda_1 - 2\lambda_2 - a\sqrt{6}) = 0.$$

Откуда $p_1 = a\sqrt{2}$ и $p_2 = \frac{2(\lambda_2 - \lambda_1) + a\sqrt{6}}{3}$.

Если выполнено неравенство $\lambda_2 - \lambda_1 < a\sqrt{2}$, то \max (4.70) достигается в точке

$$p^* = \frac{2(\lambda_2 - \lambda_1) + a\sqrt{6}}{3}.$$

В противном случае \max достигается в точке $c^* = a\sqrt{2}$, что соответствует абсурдному предположению, когда товар вовсе не покупается. Поэтому, впредь, при выполнении неравенства $\lambda_2 - \lambda_1 > 0$ будем считать выполненным дополнительное неравенство

$$\lambda_2 - \lambda_1 < a\sqrt{2}. \quad (4.71)$$

С учетом сказанного $\min H$ по p достигается при

$$p^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}(\lambda_2 - \lambda_1 + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 6a^2}), & \text{если } \lambda_1 - \lambda_2 > 0; \\ \frac{2(\lambda_1 - \lambda_2) + a\sqrt{6}}{3}, & \text{если } \lambda_2 - \lambda_1 > 0. \end{cases} \quad (4.72)$$

После подстановки (4.72) в (4.65) получаем Гамильтониан:

$$H^*(t) = H^*(Z_1, Z_2, \lambda_2, \lambda_1) = U^*(\lambda_1 + 1) - (\lambda_1 - \lambda_2 + p^*)P(p^*) - k_1\lambda_2 Z_2 + k_1 Z_1 = \text{const.}$$

При этом функции $\lambda_1(t)$ и $\lambda_2(t)$ должны удовлетворять уравнениям:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H^*}{\partial Z_1} = -k_2 + \int_{\alpha < \beta} \omega(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta; \quad (4.73)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H^*}{\partial Z_2} = k_1 \lambda_2 \quad (4.74)$$

и граничным условиям

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = 0. \quad (4.75)$$

Решение уравнений (4.74) с учетом условий (4.75) легко выписывается в явном виде:

$$\lambda_2(t) \equiv 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Что касается уравнения (4.3.73), то его начальное условие должно удовлетворять неравенству $\lambda_1(0) < -1$, т.е. производство должно включаться в начальный момент времени. Иначе просто можно уменьшить интервал $[0, T]$. Таким образом, для решения поставленной задачи нужно определить условия обеспечивающие существование функций $p(t), \lambda_2(t)$, удовлетворяющие уравнениям (4.73), (4.74) и краевому условию (4.75).

Рассмотрим сначала случай $k_2 = 0$. Тогда функция $\lambda_1(t)$ в силу равенства (4.73), монотонно возрастает, оставаясь отрицательной. Тогда для интересующих нас функций получили систему:

$$p(t) = \frac{-2\lambda_1 + a\sqrt{6}}{3}; \quad (4.76)$$

$$\dot{\lambda}_1 = \int_{\alpha < \beta} \omega(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta; \quad (4.77)$$

$$\omega(\alpha, \beta, t) = \Gamma[\omega_0(\alpha, \beta)]p(t) \quad (4.78)$$

с граничными условиями:

$$\lambda_1(0) = \lambda_0 < -1; \quad \lambda_1(T) = 0. \quad (4.79)$$

Из системы (4.3.76) – (4.3.78) следует, что функция $p(t)$ должна удовлетворять уравнению:

$$p(t) = -\frac{2}{3} \int_0^t \int_{\alpha < \beta} \Gamma[\omega_0(\alpha, \beta)] p(\tau) d\alpha d\beta d\tau - \frac{2}{3} \lambda_0 + \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad (4.80)$$

и граничным условиям

$$p(0) = \frac{-2\lambda_0 + a\sqrt{6}}{3}; \quad p(T) = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \quad (4.81)$$

Из (4.80) следует, что функция $p(t)$ должна удовлетворять равенству:

$$\int_0^T \left(\int_{\alpha < \beta} \Gamma[\omega_0(\alpha, \beta)] p(\tau) d\alpha d\beta \right) d\tau = -\lambda_0. \quad (4.82)$$

Из соотношения (4.3.80) граничных условий (4.81) и системы (4.76) – (4.78) получаем уравнение, которому должно удовлетворять оптимальное значение цены:

$$p(t) = \frac{2}{3} \int_t^T \left(\int_{\alpha < \beta} Q[\omega_0(\alpha, \beta)] p(\tau) d\alpha d\beta \right) d\tau + \frac{a\sqrt{6}}{3}. \quad (4.83)$$

Найдем условия, обеспечивающие однозначную разрешимость уравнения (4.83). Рассмотрим оператор:

$$(Gp)(t) = \frac{2}{3} \int_t^T \left(\int_{\alpha < \beta} Q[\omega_0(\alpha, \beta)] p(\tau) d\alpha d\beta \right) d\tau + \frac{a\sqrt{6}}{3}. \quad (4.84)$$

Оператор (4.84) действует из пространства $\tilde{P}_{[0,T]}$ непрерывных монотонных функций в себя. Ясно, что неподвижные точки этого оператора являются решениями уравнения (4.83), поэтому, для доказательства разрешимости этого уравнения, достаточно привести условия обеспечивающие существование у оператора (4.84) хотя бы одной неподвижной точки [56]. Оценим норму разности:

$$\begin{aligned} \|(Gp_2)(t) - (Gp_1)(t)\|_{P_{[0,T]}} &= \left\| \frac{2}{3} \int_t^T \left(\int_{\alpha < \beta} Q[\omega_0](\alpha, \beta) p_1(\tau) d\alpha d\beta \right) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \frac{2}{3} \max_{0 \leq \tau \leq T} |p_2(\tau) - p_1(\tau)| \frac{1}{\sqrt{2}} aT = \frac{\sqrt{2}aT}{3} \|p_2(t) - p_1(t)\|_{P_{[0,T]}}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Таким образом, при выполнении неравенства $\frac{\sqrt{2}aT}{3} < 1$ оператор G является сжимающим. Отметим, что оценка (4.75) верна лишь для монотонных функций. Из определения оператора (4.76) следует, что он переводит в себя множество непрерывных монотонных функций:

$$M \equiv \left\{ p(t) : \frac{a\sqrt{6}}{3} \leq p(t) \leq \frac{a\sqrt{6}}{3} + \frac{a^2T}{3} \right\}.$$

Следовательно, верна лемма.

Лемма 4.3.3 Пусть выполнено неравенство $\frac{\sqrt{2}aT}{3} < 1$, тогда уравнение (4.83) имеет единственное монотонно убывающее решение.

Доказательство леммы вытекает из известного принципа существования неподвижной точки у сжимающего отображения [46].

Из разрешимости уравнения (4.83) следует существование решения системы (4.76) – (4.78), где начальное значение P_0 должно удовлетворять неравенству (4.79). Осталось привести условия, обеспечивающие выполнение неравенства $P_0 < -1$. В силу (4.81) это неравенство эквивалентно

$$p_0 > \frac{a\sqrt{6} + 2}{3} . \quad (4.86)$$

Поэтому неравенство (4.79) будет выполнено автоматически, если будет выполнено

$$\sqrt{2}aT + 2 - 2\sqrt{\sqrt{2}aT + 1} > \frac{a\sqrt{6} + 2}{3} , \quad (4.87)$$

которое, в свою очередь, эквивалентно

$$3\sqrt{2}aT + 4 > a\sqrt{6} + 6\sqrt{\sqrt{2}aT + 1} . \quad (4.88)$$

Таким образом, неравенства $\frac{\sqrt{2}aT}{3} < 1$, (4.89) обеспечивают существование и единственность оптимального решения задачи (4.59) – (4.63).

Рассмотрим теперь случай $k_2 > 0$. Отметим, прежде всего, что при выполнении неравенства $k_2 > \frac{a^2}{3}$, оптимальное решение задачи не существует, т.к. из соотношения (4.73) следует, что производная $\dot{\lambda}_1(t)$ отрицательна, и значение $\lambda_1(T) = 0$ не может быть достигнуто. Если же будет выполнено

неравенство $k_2 < \frac{a^2}{3}$, то оптимальное решение тогда определяется как решение системы

$$\begin{cases} p(t) = \frac{-2\lambda_1 + a\sqrt{6}}{3}; \\ \dot{\lambda}_1 = \int_{\alpha < \beta} \omega(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta - k_2; \end{cases} \quad (4.90)$$

$$\omega(\alpha, \beta, t) = \Gamma[\omega_0(\alpha, \beta)]p(t) \quad (4.91)$$

с граничными условиями

$$P(0) = P_0 < -1; \quad P(T) = 0. \quad (4.92)$$

Рассмотрение этого случая аналогично рассмотренному ранее случаю с $k_2 = 0$. Достаточные условия обеспечивающие существования и единственность решения этой системы сводится к системе неравенств:

$$\frac{aT\sqrt{2}}{3} < 1; \quad (4.93)$$

$$3\sqrt{2}aT + 4 > a\sqrt{6} + k_2 + 6\sqrt{\sqrt{2}aT + 1}. \quad (4.94)$$

При решении задачи получили, что оптимальное производство для уравнения (4.61) имеет вид:

$$U^*(t) = \begin{cases} U_0 & 0 \leq t < t^*; \\ 0 & t^* \leq t \leq T. \end{cases} \quad (4.95)$$

На рисунках 4.15 и 4.16 показано «качественное» поведение оптимальных темпа производства и цены.

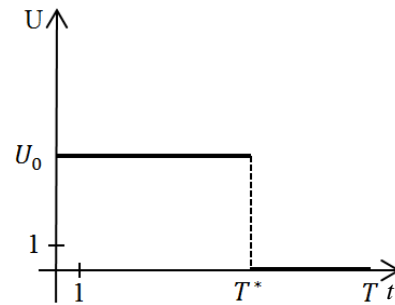


Рис. 4.15. Оптимальный темп производства на промежутке от 0 до t

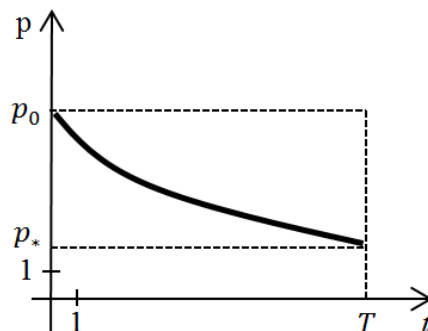


Рис. 4.16. Оптимальная цена на промежутке от 0 до t

Отметим, что полученные результаты находятся в качественном соответствии с результатами, полученными ранее при стационарных потребительских отношениях [56]. И оптимальное поведение производителя качественно не меняется.

Таким образом, в данном подразделе построена модель задачи об оптимальном производстве, хранении и сбыте продукции, разработан алгоритм ее решения в условиях гистерезисной функции спроса и нестационарности потребительских отношений.

4.4. Модель конкурентного производства в условиях гистерезисного поведения экономических агентов.

Далее рассматривается модель конкуренции в условиях гистерезисной функции спроса. В ней отношение индивидуального потребителя к товару

характеризуется неидеальным реле, входом на который будет цена товара, а выход равен единице, если товар приобретается, и нулю в противном случае. Для системы из n потребителей суммарное количество приобретаемых ими товарами будет определяться соотношением

$$P(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i R(\alpha_i, \beta_i, \omega_{0i}) p(t), \quad (4.96)$$

Коэффициенты γ_i имеют смысл и размерность количества товаров, приобретаемых потребителями в единицу времени. В случае большого числа потребителей происходит переход к континуальному аналогу преобразователя (4.96) – преобразователю Прейзаха с инверсией нулей и единиц с мерой

$$d\mu = \gamma(\alpha, \beta) d\alpha d\beta, \quad (4.97)$$

Здесь функция $\gamma(\alpha, \beta)$ является аналогом коэффициентов γ_i в соотношении (4.97). В простейшем случае, задача о максимизации прибыли на конечном временном интервале (без учета затрат на хранение, производство, а также без учета конкуренции) сводится к максимизации функционала

$$Q(p(t)) = \int_0^T p(t) P(t) dt \quad (4.98)$$

Пусть носитель меры $\mu(t)$ при любом t сосредоточен в треугольнике плоскости $(\alpha; \beta)$, выделяемом системой неравенств: $0 \leq \beta \leq a; \beta \geq \alpha$.

Сформулируем модель конкуренции двух производителей в условиях гистерезисной функции спроса. Обозначим через $Z_1(t)$ – количество товара на складе у первого производителя, $U(t)$ – темп производства, $P_1(t)$ – темп продаж в первого производителя, k_1 – коэффициент затрат на хранение единицы товара первого производителя, $p_1(t)$ – цена единицы товара у первого, аналогично с индексом 2 обозначим параметры, характеризующие второго производителя; $Z(t)$ – количество товара у потребителя, k – коэффициент потребления. Динамика введенных величин описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= U_1 - P_1, \\ \dot{Z}_2 &= U_2 - P_2, \\ \dot{Z} &= P_1 + P_2 - kZ, \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned}
P_1(t) &= Z_1(t) \int_{\alpha < \beta} \gamma_1(\alpha, \beta, t) \omega_1(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta, \\
\omega_1(\alpha, \beta, t) &= \Gamma[\omega_{01}(\alpha, \beta)] p_1(t), \\
P_2(t) &= Z_2(t) \int_{\alpha < \beta} \gamma_2(\alpha, \beta, t) \omega_2(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta, \\
\omega_2(\alpha, \beta, t) &= \Gamma[\omega_{02}(\alpha, \beta)] p_2(t),
\end{aligned}$$

с нулевыми начальными условиями. Целевые функционалы, выражающие прибыль каждого из производителей определялись соотношениями:

$$J_1 = \int_0^T (p_1 P_1 - U_1 - k_1 Z_1) dt \rightarrow \max, \quad (4.100)$$

$$J_2 = \int_0^T (p_2 P_2 - U_2 - k_2 Z_2) dt \rightarrow \max, \quad (4.101)$$

в предположении, что производители используют одинаковую технологию и стоимость производства единицы товара для каждого из них равна единице. Таким образом, предложенная модель сводится к многокритериальной задаче оптимального управления: требуется определить управляющие воздействия – темп производства и цену для каждого из производителей, которые максимизировали бы функционалы (4.100)-(4.101), при условиях (4.99), описывающих динамику объекта. Предполагались выполненными естественные ограничения на управления:

$$p_1(t) \geq 0, p_2(t) \geq 0, 0 \leq U_1 \leq U_{01}, 0 \leq U_2 \leq U_{02} \quad (4.102)$$

где U_{01}, U_{02} — максимально возможные темпы производства соответствующих производителей. Сам механизм конкуренции моделировался уравнением:

$$\dot{\gamma}_1(\alpha, \beta, t) - \dot{\gamma}_2(\alpha, \beta, t) = \eta(p_2(t) - p_1(t)), \quad (4.103)$$

при ограничении

$$\gamma_1(\alpha, \beta, t) + \gamma_2(\alpha, \beta, t) = const \quad (4.104)$$

с соответствующими начальными условиями. То есть конкуренция осуществлялась в ценовом диапазоне. Параметр η выбирался достаточно малым, что соответствовало тому, что потребители «привыкают» к товарам соответствующих производителей.

Рассматриваемая задача решалась с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина. В силу ее существенной нелинейности решение удалось найти численно. При этом задача решалась итерационно: выбирался некоторый опорный план для обоих производителей, соответствующие функции $p_i(t)$, $U_i(t)$, $Z_i(t)$ подставлялись в систему сопряженных переменных, после нахождения которых, решалась задача для основных переменных. Экспериментально были определены значения параметров, при которых этот процесс сходился. На рисунке 4.17 показаны результаты моделирования при следующих значениях параметров:

$$U_{01} = 6, U_{02} = 5, T = 6, \gamma_1(\alpha, \beta, 0) = \gamma_2(\alpha, \beta, 0) = \frac{1}{2} e^{-(\alpha-\beta)^2/4} \text{ при } 0 \leq \alpha \leq \beta \leq 5.$$

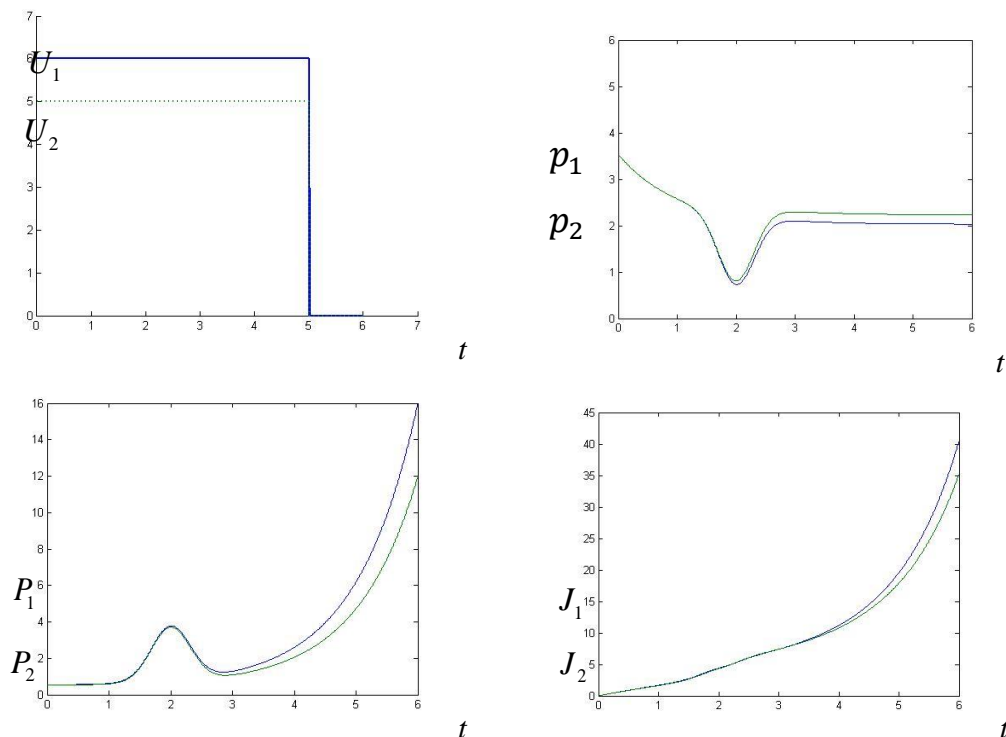


Рис. 4.17. Динамика изменений параметров задачи о конкуренции

На рисунке 4.18 показано нулевое и конечное состояния «потребителей», приобретающих товар у более «слабого» конкурента (с меньшим темпом производства).

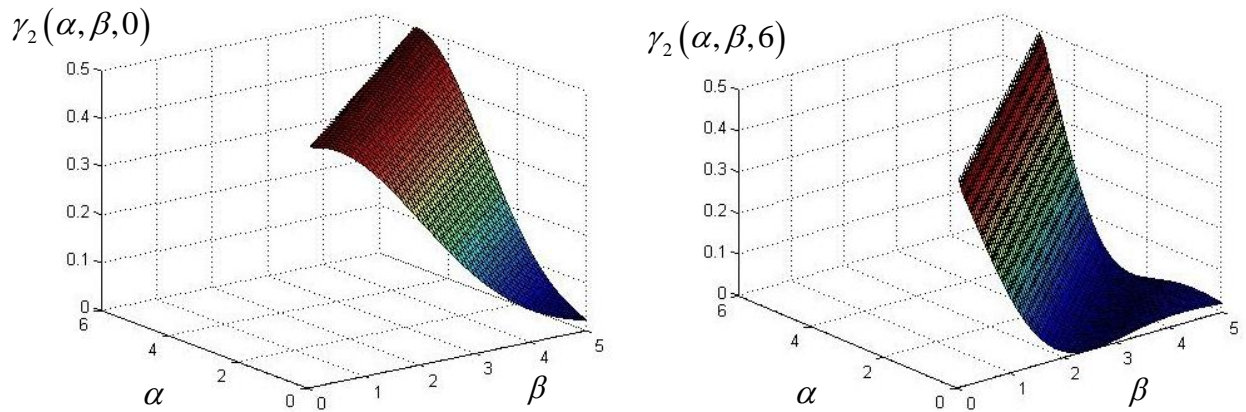


Рис. 4.18. Начальное и конечное состояния потребителей, приобретающих товар у второго производителя

При увеличении промежутка моделирования ($T=25$), оптимальный режим для каждого из производителей содержал несколько переключений оптимального производства (при достаточно большом коэффициенте затрат на хранение), а разница в доходах была более существенна. Увеличение коэффициента η еще более «усиливала» более сильного производителя. Более того, при одновременно высоких затратах на хранение и большой разнице в максимальных темпах производства у второго производителя оптимальный режим соответствовал отсутствию производства.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основными результатами работы являются:

- модифицирована модель равновесной динамики систем с гистерезисными свойствами;
- предложен способ исследования моделей с гистерезисными звеньями на основе принципа оптимального управления;
- разработан алгоритм оптимального конкурентного функционирования систем, содержащих звенья гистерезисной природы на примере оптимизации стратегий экономических агентов с учётом гистерезисных свойств;
- синтезирована методика анализа многокритериальных оптимизационных динамических задач, включая задачи с функционалами, содержащими операторные гистерезисные нелинейности;
- создан комплекс программ, реализующий модель равновесной динамики систем с гистерезисными свойствами, позволяющий строить оптимальную производственную стратегию в условиях гистерезисного ценообразования и оптимизировать поведение производителей в условиях гистерезисного отношения потребителей к товарам в условиях конкуренции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом. М., 1983.
2. Чернавский Д.С., Суслаков Б.А., Чернавская О.Д., Пирогов Г.Г., Старков Н.И. О социально-экономической структуре общества / Д.С. Чернавский // Законодательство и экономика. 1995. Вып. 7/8. С. 8-14.
3. Семенов М.Е., Лебедев Г.Н., Матвеев М.Г. Оптимальное управление в задаче о выборе производственной и ценовой стратегии // Системы управления и информационные технологии. 2009. № 4.1 (38). С. 71–73.
4. Жак С.В. Экономика для инженеров. Учебное пособие. М.: Вузовская книга, 2004. С. 52–57.
5. Самарский А.А. Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах / Под ред. А.А. Самарского, Н.Н. Моисеева, А.А. Петрова. М.: Наука, 1986. С. 7-196.
6. Оленов Н.Н. Модель инвестиционной политики фирм в экономической системе рыночного типа / Н.Н. Оленов, И.Г. Поспелов. М.: Наука, 1983. С. 164-174.
7. Параев Ю.И. Решение задач об оптимальном производстве, хранении и сбыте товара // Известия академии наук. Теория и системы управления, 2000. №2. С. 103-117.
8. Семенов М.Е. Математическое моделирование устойчивых периодических режимов в системах с гистерезисными нелинейностями. Воронеж: Издательство ВГУ, 2002. 104 с.
9. Шананин А.А. О стохастическом поведении цены в одной детерминированной модели ценообразования // Докл. АН СССР. 1986. Т. 288. №1. С. 63-65; Брюна Э. Российская экономика: модернизация, кризис и геоэкономика // Вестник СГУТиКД. 2010. № 3. С. 26–38.
10. Шананин А.А. Об устойчивости Рыночных механизмов // Математическое моделирование. 1991. Т.3. №2. С. 42-62.
11. Шумпетер И. Теория экономического развития // Теория экономического

- развития: Пер. с нем. / Под ред. А.Г. Малейковского. М.: Прогресс, 1982. 456 с.
12. Hicks J.R. A contribution to the theory of the trade cycle (Oxford university press, Oxford), 1950. 245 s.
 13. Puu T. A simplified model of spatiotemporal population dynamics, *Environment and planning* 17, 1985. S. 1269-1269.
 14. Puu T. and Weidlich, W., The stability of hexagonal tessellations, *Karlsruhe papers in economic policy research* 3, 1986. S. 133-158.
 15. Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах / Под ред. А.А. Самарского, Н.Н. Моисеева, А.А. Петрова. М.: Наука, 1986. С.7-196.
 16. Лебедев В.В. Математическое моделирование социально-экономических процессов / В.В. Лебедев; М.: – изд-во «Изограф», 1997
 17. Михайлова Е.А. Гистерезис в маркетинге: миф или реальность? / Михайлова Е.А. ; *Маркетинг в России за рубежом*, №2, 2000
 18. Жан-Жак Ламбен Менеджмент, ориентированный на рынок. Стратегический и операционный маркетинг / Жан-Жак Ламбен; изд. Питер, 2007 – 800 стр.
Чернавский Д.С. Ценообразование при максимальной прибыли / Д.С. Чернавский, А.В. Щербаков, Н.И. Старков, Б.А. Суслаков; *Экономические и математические методы*, 1998 – т.34, вып. 2, стр. 44-55
 19. Чернавский Д.С. Динамика экономической структуры общества / Д.С. Чернавский, Г.Г. Пирогов, О.Д. Чернавская, А.В. Щербаков, Б.А. Суслаков; *Прикладная нелинейная динамика*, 1996, т.4, №3, стр. 67-75
 20. Cook Steven A note on business cycle non-linearity in U.S. Consumption / Steven Cook; *Journal of Applied Economics*, vol. VI, №2, November 2003 — 247-253
 21. Gary Hamel. Opinion Strategy Innovation and the Quest for Value / Gary Hamel ; *Sloan Management Review*, winter 1998 – pp. 7-14
 22. Hermann Simon. Hysteresis in Marketing – A New Phenomenon? / Hermann Simon; *Sloan Management Review*, spring 1997 – pp. 39-48

23. Mehta Anita. How the rich get richer? / Anita Mehta, A.S. Majumbar, J.M. Luck; 18 Apr 2005.
24. Stanley F. Stasch Characteristics of competing marketing strategies when defending market leadership. / Stanley F. Stasch, John Wald; Journal of strategic marketing, №5, 1997 – pp. 23-49.
25. Churchland P.S. The Computational Brain/P.S. Churchland, T.J. Sejnowski. - Cambridge, MA: MIT Press, 1992.
26. Levine M. Man and Machine Vision/M. Levine. -New York: McGraw-Hill, 1985.
27. Marr D. Vision/D. Marr. -New York: W.H. Freeman and Company, 1982
28. Guangpu Xia Hopfield Neural Network with Hysteresis for Maximum Cut Problem/Guangpu Xia, Zheng Tang, Yong Li//Neural Information Processing - Letters and Reviews. -August 2004. -V. 4, № 2.
29. Chunguang Li Chaos in a three-neuron hysteresis Hopfield-type neural network / Chunguang Li, Juebang Yu, Xiaofeng Liao // Elsevier. - 9 July 2001.
30. Lipo Wang Synchronous neural networks of nonlinear threshold elements with hysteresis / Lipo Wang, John Ross // Neurobiology. - February 1990. - V. 87. - pp. 988-992.
31. Jin'no K. An Algorithm for Finding All Solutions of a Hysteresis/K. Jin'no//IEICE Trans. Fund. -79 (1996) 402.
32. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс/С. Хайкин. -2-е изд. -М.: Вильямс, 2006. -1104 с.
33. Калан Р. Основные концепции нейронных сетей/Р. Калан. -М.: Вильямс, 2001. -291 с.
34. Круглов В.В. Искусственные нейронные сети. Теория и практика/В.В. Круглов, В.В. Борисов. -2-е изд. -М.: Горячая линия -телеком, 2002. -382 с.
35. Задорожний В.Г. Дифференциальные уравнения с вариационными производными / В.Г. Задорожний; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж, 2000. – 368 с.
36. Семенов Б. А. Многокритериальная оптимизация на основе нечеткой логики

- / Б. А. Семенов, Т. М. Леденева // Системы управления и информ. технологии. – М. ; Воронеж : Науч. кн., 2009. – №1 (35). – С. 43-47.
37. Яхьяева Г.Э. Нечеткие множества и нейронные сети. – М.: Изд-во Интернет-университет информационных технологий – ИНТУИТ, 2006. – 320 с.
38. Красносельский М. А. и др. Операторы гистерезисных нелинейностей, порожденных континуальными системами реле // Автоматика и телемеханика. – 1994. – №. 7. – С. 49-60.
39. Красносельский М. А. и др. О динамике управляемых систем, описываемых уравнениями параболического типа с гистерезисными нелинейностями // Автоматика и телемеханика. – 1992. – №. 11. – С. 65-71.
40. Красносельский А.М. О континуумах циклов в системах с гистерезисом / А.М. Красносельский, Д.И. Радчинский // Доклады Академии наук. – 2001. – №3. – С. 314-319.
41. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – Издательство " Наука", Главная редакция физико-математической литературы, 1966.
42. Семенов М.Е. Модель макроэкономики с гистерезисной функцией инвестиций / М.Е. Семенов, М.Г. Матвеев, О.И. Канищева, Л.В. Кутепова // Экономическое прогнозирование: модели и методы. Материалы международной научно-практической конференции. 30-31 марта 2006 г. – Воронеж : ВГУ, 2006. – Ч. 2. – С. 29-33.
43. Semenov M. E. et al. Stabilization and Control Models of Systems With Hysteresis Nonlinearities // European researcher – 2012. – Т. 1. – №. 5.
44. Krasnosel'skii, M.A., Pokrovskii, A.V.: Systems with Hysteresis. Springer, Berlin (1989)
45. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М. : Мир, – 1970. – 720 с.
46. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. – М. : ГИ-ИЛ,

1964. – 480 с.

47. Якубович В.А. Частотные условия абсолютной устойчивости регулируемых систем с гистерезисной нелинейностью / В.А. Якубович // “ДАН СССР”. – 1963. – т. 149, № 2.
48. R. Cross Hysteresis and economics / R. Cross M. Grinfeld H. Lamba // Control Systems, IEEE, vol. 29, issue 1, Feb. 2009, p. 30-43
49. A. Visintin, Differential Models of Hysteresis. New York: Springer–Verlag, 1994.
50. J. W. Macki, P. Nisri, and P. Zecca, “Mathematical models for hysteresis,” SIAM Review, vol. 35, pp. 94–123, 1993.
51. R. Cross, M. Grinfeld, H. Lamba, and T. Seaman, “A threshold model of investor psychology,” Physica A, vol. 354, pp. 463–478, 2005.
52. I. D. Mayergoyz, Mathematical Models of Hysteresis. New York: Academic Press, 2003.
53. L. Piscitelli, M. Grinfeld, H. Lamba, and R. Cross, “Exit-entry decisions in response to aggregate shocks,” Appl. Econ. Lett., vol. 6, pp. 569–572, 1999.
54. J. Darby, R. Cross, and L. Piscitelli, “Hysteresis and employment: a preliminary investigation,” in The Science of Hysteresis I, G. Bertotti and I. Mayergoyz, Eds. Amsterdam: Academic Press, 2006, pp. 667–699.
55. A. Dixit, “Investment and hysteresis,” J. Econ. Persp., vol. 6, pp. 107–132, 1992.
56. R. Cross, “Hysteresis and EMU,” Metroeconomica, vol. 51, no. 4, pp. 367–379, 2000.
57. R. Cross, H. McNamara, A. Pokrovskii, and D. Rachinskii, “A new paradigm for measuring hysteresis in economic flows,” Physica B, vol. 403, pp. 231–236, 2008.
58. R. Cross, H. McNamara, and A. K. Pokrovskii, “Modelling macroeconomic flows related to large ensembles of elementary exchange operations,” Physica B, vol. 403, pp. 451–455, 2008.
59. R. Cross, A. M. Krasnosel’skii, and A. K. Pokrovskii, “A time-dependent Preisach model,” Physica B, vol. 306, pp. 206–210, 2001.
60. B. Amable, J. Henry, L. J., and R. Topol, “Hysteresis revisited: a methodological

- approach,” in *The natural rate of unemployment*, R. Cross, Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
61. R. Cross, M. Grinfeld, H. Lamba, and T. Seaman, “Stylized facts from a threshold-based heterogeneous agent model,” *Eur. J. Phys. B*, vol. 57, pp. 213–218, 2007.
62. Mishin M.Y. Stabilization and Control Models of Systems With Hysteresis Nonlinearities / Grachikov D.V., Semenov M.E., Mishin M.Y., Shevlyakova D.V. // *European Researcher*. 2012. – Vol. (20) № 5-1., pp. 523-528
63. Mishin M.Y. The model of market equilibrium under conditions of hysteresis demand functions / Abopolova E.A., Semenov M.E., Mishin M.Y. // *European Researcher*, №5-1 (7), May 2011, с. 677-680
64. Мишин М.Ю. Динамическая модель рыночного равновесия в условиях гистерезисного поведения экономических агентов / Абополова Е.А., Кабулова Е.Г., Мишин М.Ю., Семёнов М.Е. // *Современная экономика: проблемы и решения*, №7 (31) 2012, с. 146-155
65. Мишин М.Ю. Динамическая модель оптимального производства в условиях гистерезисного поведения цены / Лебедев Г.Н., Матвеев М.Г., Мишин М.Ю., Семёнов М.Е. // *Современная экономика: проблемы и решения*, №7 (19) 2011, с. 162-169
- 66.5. Мишин М.Ю. Искусственные нейронные сети с гистерезисной функцией активации / Соловьев А.М., Семенов М.Е., Мишин М.Ю., Кабулова Е.Г. // *Теория и техника радиосвязи*. 2013, № 2, с. 102-110.
67. Мишин М.Ю. Дифаззификация нечётких решений дифференциальных уравнений / Абополова Е.А., Мишин М.Ю., Семёнов М.Е. // *Обозрение прикладной и промышленной математики*, том 18, выпуск 5, 2011, с. 735-736
68. Мишин М.Ю. Модель оптимального производства / Абополова Е.А., Гринёва Е.В., Мишин М.Ю. // *Материалы международной научной конференции «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (ПМТУММ-2011)*, г. Воронеж, 12-17

сентября, с. 3-4.

69. Мишин М.Ю. Дифаззификация нечётких решений дифференциальных уравнений / Абополова Е.А., Мишин М.Ю., Семёнов М.Е. // Сборник научных трудов по материалам Международной научной конференции «Научное лето-2011», часть 2, Киев, 2011, с. 53-56
70. Мишин М.Ю. Динамическая модель оптимального производства в условиях гистерезисного поведения цены / Абополова Е.А., Мишин М.Ю., Семёнов М.Е. // Материалы междунаучн.-техн. конф. «Современные сложные системы управления – X» (НТСС-2012), Ст.Оскол, 2012, с. 168-171
71. Мишин М.Ю. Модели гистерезисных эффектов в микроэкономике / Мишин М.Ю., Семёнов М.Е. // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (ПМТУММ-2012), г. Воронеж, с. 318-319.
72. Чернавский Д.С. О социально-экономической структуре общества / Д.С. Чернавский, Б.А. Суслаков, О.Д. Чернавская, Г.Г. Пирогов, Н.И. Старков; Законодательство и экономика, 1995 – вып. 7/8, стр. 8-14
73. Чернавский Д.С. Динамика экономической структуры общества / Д.С. Чернавский, Г.Г. Пирогов, О.Д. Чернавская, А.В. Щербаков, Б.А. Суслаков; Прикладная нелинейная динамика, 1996, т.4, №3, стр. 67-75
74. Воронов А.А. Устойчивость. Управляемость. Наблюдаемость / А.А. Воронов. – М. : Наука, 1979. – 335 с.
75. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ / Б.З. Вулих. – М. : Наука, 1967. – 416 с.
76. Малинецкий Г. Г. Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды. / Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б., Подлазов А. В. — М.: УРСС, 2006. — ISBN 5-484-00200-1.
77. Заславский Г. М. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. / Заславский Г. М. , Сагдеев Р. З. — М.: Наука, 1988. — 368 с.

78. Заславский Г. М., Физика хаоса в гамильтоновых системах. / Заславский Г. М. — М.: Институт компьютерных исследований, 2004. — 288 с.
79. М. Блауг. Экономическая мысль в ретроспективе / М. Блауг. — М.: Изд-во «Дело», 1994.
80. M. Fridman. The Quantity Theory of Money: Restatement / M. Fridman. — M. Fridman (Ed.), Studies in Quantity Theory of Money, Chicago, The University of Chicago Press, 1956.
81. Дж. М. Кейнс, «Избранные произведения» / Дж. М. Кейнс — М.: Изд-во «Экономика», 1993. — 543 с.
82. Л. Ларуш, Физическая экономика / Л. Ларуш. — М.: Изд-во «Научная книга», 1997.
83. Л. Аллен, Математическая экономия / Л. Аллен — М.: Изд-во «Иностранной литературы», 1963. — 670 с.
84. В.И.Маевский, Введение в эволюционную макроэкономику / В.И.Маевский — М.: Изд-во «Япония сегодня», 1997. — 106 с.
85. В.М.Полтерович, Институциональные ловушки и экономические реформы / В.М.Полтерович — М.: Экономика и математические методы, Т.35. Вып.2. 1999. — 34 с.
86. Дж. Робинсон, Экономическая теория несовершенной конкуренции / Дж.Робинсон — М.: Изд-во «Прогресс», 1986.
87. Дж. Р. Хикс, Стоимость и капитал / Дж. Р. Хикс М.: изд-во «Прогресс», 1988. — 146 с.
88. D. V. Anosov, Dynamical systems with hyperbolic behaviour, / D.V.Anosov — М.: Encyclopedia of Mathematical Sciences, Springer Verlag, Berlin, 1988.
89. A. Pokrovskii, On Positive Definiteness of Interval Homogeneous Forms / N. Bobylev, A. Pokrovskii, J. McInerney. Preprints of Institute for Nonlinear Science, 4, National University of Ireland, University College, Cork, 2000.
90. M. Brokate, Asymptotically stable oscillations in systems with hysteresis

- nonlinearities / M. Brokate, A. V. Pokrovskii. Journal «Differential Equations», 150, 1998 — pp. 98-123.
91. K. Mischaikow, Conley Index Theory / K. Mischaikow, M. Mrozek, P. Zgliczynski. Papers from the workshop held in Warsaw, June 1997, eds., Banach Center Publications, 47, Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Warsaw, 1999.
92. K. Deimling, Nonlinear Functional Analysis / K. Deimling. Springer-Verlag, Berlin, 1980.
93. P. Diamond, Semi-hyperbolic mappings / P. Diamond, P. E. Kloeden, V. S. Kozyakin, A. V. Pokrovskii. Journal «Nonlinear Science», 5, 1995 — pp. 419-431.
94. P. Diamond, Chaotic dynamics in nonsmooth perturbations of bishadowing system / P. Diamond, P. E. Kloeden, M. A. Krasnosel'skii, A. V. Pokrovskii. Arab Journal «Mathematical. Science», 6(1), 2000 — pp. 41-74.
95. P. Daimond, Structural stability of the trajectories of dynamical systems with respect to hysteresis perturbations (in Russian, MR96h:47078) / P. Daimond, P. Kloeden, V. S. Kozyakin, M. A. Krasnosel'skii, A. V. Pokrovskii. Dokl. Akad. Nauk, 343(1), 1995 — pp. 25-27.
96. T. T. Georgiou, Robustness of a relaxation oscillator / T. T. Georgiou, M. C. Smith. George Zames commemorative issue. Internat. J. Robust Nonlinear Control, 10(11-12), 2000 — pp. 1005-1024.
97. G. H. Goldsztein, Dynamical hysteresis without static hysteresis: scaling laws and asymptotic expansions / G. H. Goldsztein, F. Broner, S. H. Strogatz. SIAM J. Appl. Math., 57(4), 1997 — pp. 1163-1187.
98. E. Hairer, S. P. Norsett, and G. Wanner, Solving Ordinary Differential Equations / E. Hairer, S. P. Norsett, G. Wanner. I. Nonstiff Problems, Springer-Verlag Series in Computational Mathematics, 8. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1987.
99. R. E. Hartwig, Bounds on the exponent of primitivity which depend on the spectrum and the minimal polynomial / R. E. Hartwig, M. Neumann. Linear Algebra Appl., 184, 1993 — pp. 103-122.

100. D. Hertz, The extreme eigenvalues and stability of real symmetric interval matrices / D. Hertz. IEEE Trans. Automat. Control, 37(4), 1992. — pp. 532-535.
101. A. J. Homburg, A geometric criterion for positive topological entropy. II. Homoclinic tangencies / A. J. Homburg and H. Weiss. Comm. Math. Phys., 208(2), 1999 — pp. 267-273.

ПРИЛОЖЕНИЕ

```
#include "ExpConnection.h"
```

```
double ExpConnection::betta;
int ExpConnection::Range;
```

```
ExpConnection::ExpConnection(void)
{
}
```

```
std::valarray<double> ExpConnection::CalculateConnectionImpact(const
std::valarray<double> &I, const std::valarray<double> &u, size_t rows, size_t
columns){
    std::valarray<double> Impact(0.0, rows*columns);
    for(size_t i=0; i<rows; ++i){
        for(size_t j=0; j<columns; ++j){
            Impact[i*columns + j] = NeuronConnectionImpact(I, u, rows,
columns, i, j);
        }
    }
    return Impact;
}
```

```
double ExpConnection::NeuronConnectionImpact(const std::valarray<double> &I,
const std::valarray<double> &u, int rows, int columns, int elementRow, int
elementColumn){
    int startRow = (elementRow-ExpConnection::Range > 0) ? elementRow-
ExpConnection::Range : 0;
    int endRow = min(elementRow+ExpConnection::Range, rows-1);

    int startColumn = max(elementColumn-ExpConnection::Range, 0);
    int endColumn = min(elementColumn+ExpConnection::Range, columns-1);

    int elementIdx = elementRow*columns + elementColumn;

    double impact = 0.0;
    for(int i=startRow; i<=endRow; ++i){
        for(int j=startColumn; j<=endColumn; ++j){
            impact += Kij(elementIdx, i*columns + j, I) * (u[i*columns + j] -
u[elementIdx]);
        }
    }
}
```

```

        return impact;
    }

double ExpConnection::Kij(size_t i, size_t j, const std::valarray<double> &I){
    /**
     * Для 1 изображения порог 0.2, бетта = 2.0, коэффициент 1.0
     * Для портрета мужчины со шляпой порог 0.2, бета 1, range 1
     */
    return abs(I[i]-I[j]) < 0.9 ? exp( -pow(I[i]-I[j], 2.0)/pow(ExpConnection::betta,
2.0) ) : 0.0;
}

#include <valarray>
#include <math.h>
#include <Windows.h>

#pragma once
class ExpConnection
{
public:
    ExpConnection(void);

    static std::valarray<double> CalculateConnectionImpact(const
std::valarray<double> &I, const std::valarray<double> &u, size_t rows, size_t
columns);
    static double NeuronConnectionImpact(const std::valarray<double> &I, const
std::valarray<double> &u, int rows, int columns, int elementRow, int
elementColumn);
    static double Kij(size_t i, size_t j, const std::valarray<double> &I);

    static double betta;
    static int Range;
};

#pragma once
struct NetworkConfigurationStruct {
    double a, b, c, h, step, modelTime, connectionStrength;
    size_t neuronsCount;
};

```

```

#include "NeuronData.h"

NeuronData::NeuronData(void)
{
}

void NeuronData::WriteToFile(const char* fileName, const
std::vector<std::valarray<double>> &Data){
    std::ofstream outFile;
        outFile.open(fileName);

        for(auto Column : Data){
            for(auto value : Column)
                outFile << value << " ";
            outFile << "\n";
        }
        outFile.close();
}

void NeuronData::split_line(std::string& line, std::string delim,
std::vector<double>& values){
    size_t pos = 0;
    while ((pos = line.find(delim, (pos + 1))) != std::string::npos) {
        std::string p = line.substr(0, pos);
        values.push_back(atof(p.c_str()));
        line = line.substr(pos + 1);
    }

    if (!line.empty()) {
        values.push_back(atof(line.c_str()));
    }
}

std::valarray<double> NeuronData::GetInput(unsigned int M, unsigned int N,
std::string dataFilePath){
    std::vector<double> I;
    I.reserve(M*N);

    std::ifstream file ( dataFilePath.c_str() );
    if(!file.good()){
        return std::valarray<double> (0.0, M*N);
    }

    std::string value;

```

```

while ( file.good() )
{
    getline ( file, value, ',' );
    if (value.find('\n') != std::string::npos) {
        split_line(value, "\n", I);
    } else {
        double i = atof(value.c_str());
        I.push_back(i);
    }
}

std::valarray<double> Input(0.0, M*N);
for(size_t i=0; i<M*N; ++i){
    Input[i] = I[i];
}
return Input;
}

#include <vector>
#include <valarray>
#include <sstream>
#include <fstream>

#pragma once
class NeuronData
{
public:
    NeuronData(void);
    static void WriteToFile(const char* fileName, const
std::vector<std::valarray<double>> &Data);
    static void split_line(std::string& line, std::string delim, std::vector<double>&
values);
    static std::valarray<double> GetInput(unsigned int M, unsigned int N,
std::string dataFilePath);
};

#include "NeuronInput.h"

NeuronInput::NeuronInput(void)
{
}

```

```

NeuronInput::~NeuronInput(void)
{
}

#pragma once
class NeuronInput
{
public:
    NeuronInput(void);
    ~NeuronInput(void);
};

#include "Neurons.h"

Neurons::Neurons(struct NetworkConfigurationStruct Config):
    a(Config.a), b(Config.b), c(Config.c), h(Config.h), step(Config.step),
    endTime(Config.modelTime), neuronsCount(Config.neuronsCount)
{
    lambda = h*(b-a) / c;
    alpha = fK(std::valarray<double>(0.0, 1))[0] - fNa(std::valarray<double>(0.0,
1))[0] - 1.0;
    gamma = 1.0 / pow(lambda, 1);
    t = 0.0;

    u.push_back(std::valarray<double>(0.2, neuronsCount));
    u.reserve(round(endTime/step, 0));
}

Neurons::~Neurons(void){
}

std::valarray<double> Neurons::Exp(const std::valarray<double> &u){
    return 1.0 + u + pow(u, 2.0)/2.0 + pow(u, 3.0)/6.0 + pow(u, 4.0)/24.0;
}

std::valarray<double> Neurons::fK(const std::valarray<double> &u){
    return 3.0 * std::exp( -std::pow(u, 2.0) ) / (b - a);
}

std::valarray<double> Neurons::fNa(const std::valarray<double> &u){
    return 1.0 * std::exp( -std::pow(u, 2.0) ) / (b - a);
}

std::valarray<double> Neurons::GetInitialDelayedNeuronsState(double t){

```

```

        return std::valarray<double>(gamma * exp( lambda * alpha * t / 2.0 ),
neuronsCount);
    }

std::valarray<double> Neurons::GetU(double t){
    return t < step ? GetInitialDelayedNeuronsState(t) : u[round(t / step, 0) - 1];
}

std::valarray<double> Neurons::Model(const std::valarray<double> &I, const
std::valarray<double> &D){
    double step2 = 2.0*step;

    std::valarray<double> uNext(0.0, neuronsCount);

    std::valarray<double> Ut = GetU(t);
    std::valarray<double> UtDelayed1 = GetU(t-1.0);
    std::valarray<double> UtDelayed2 = GetU(t+step-1.0);
    std::valarray<double> UtDelayed4 = GetU(t+2.0*step-1.0);

    std::valarray<double> k1 = step2 * du(t, Ut, UtDelayed1, I, D);
    std::valarray<double> k2 = step2 * du(t+step, Ut+0.5*k1, UtDelayed2, I, D);
    std::valarray<double> k3 = step2 * du(t+step, Ut+0.5*k2, UtDelayed2, I, D);
    std::valarray<double> k4 = step2 * du(t+2.0*step, Ut+k3, UtDelayed4, I, D);

    uNext = Ut + (1.0/6.0) * (k1 + 2.0*k2 + 2.0*k3 + k4);

    u.emplace_back(std::valarray<double> ((Ut + uNext) / 2.0));
    u.emplace_back(std::valarray<double> (uNext));
    t += step2;
    return uNext;
}

std::valarray<double> Neurons::du(double t, const std::valarray<double> &u, const
std::valarray<double> &uDelayed, const std::valarray<double> &I, const
std::valarray<double> &D){
    return std::valarray<double>( lambda * (fK(uDelayed) - fNa(u) - 1.0) ) * u + D + I;
}

```



```

#include <valarray>
#include <vector>
#include <future>
#include <iostream>
#include "NetworkConfigurationStruct.h"

#define M_PI acos(-1.0)

#pragma once
class Neurons
{
public:
    Neurons(struct NetworkConfigurationStruct);
    ~Neurons(void);

    std::valarray<double> Exp(const std::valarray<double> &);
    std::valarray<double> fK(const std::valarray<double> &);
    std::valarray<double> fNa(const std::valarray<double> &);
    std::valarray<double> GetInitialDelayedNeuronsState(double);

    std::valarray<double> GetU(double);
    std::vector<std::valarray<double>>* GetU() { return &u;}
    double GetT(){ return t; };

    std::valarray<double> Model(const std::valarray<double> &, const
std::valarray<double> &);
    int round(double value, int digits){ return (int)(floor(value * pow(10.0, digits)
+ 0.5) / pow(10.0, digits)); }
private:
    std::vector<std::valarray<double>> u;

    double a, b, c, h, lambda, gamma, alpha, t, step, endTime;
    size_t neuronsCount;

    std::valarray<double> du(double, const std::valarray<double> &, const
std::valarray<double> &, const std::valarray<double> &, const std::valarray<double>
&);
    std::valarray<double> NetworkDESystemSolve();
};

```

```
#include "NeuronUnion.h"
```

```
NeuronUnion::NeuronUnion(size_t neuronsCount, double step, double
strengthCoeff)
    : neuronsCount(neuronsCount), step(step), strengthCoeff(strengthCoeff)
{
}
}
```

```
NeuronUnion::~NeuronUnion(void)
{
}
}
```

```
std::valarray<double> NeuronUnion::CalculateConnectionStrength(const
std::vector<std::valarray<double>> &u, double t){
    std::valarray<double> force(0.0, neuronsCount);

    if(t < 5.0){
        ConnectionStrengths.push_back(force);
        return force;
    }

    std::function<double(size_t)> calculateStrength = [&](size_t i){
        double denomitor = 0;
        std::valarray<double> numerator(0.0, neuronsCount);

        for(double t = 5.0; t >= 0.0; t-=0.5){
            size_t tIndex = u.size() - round(t/step, 0) - 1;
            denomitor += u[tIndex][i];
            numerator += std::abs( u[tIndex] - std::valarray<double>
(u[tIndex][i], neuronsCount) );
        }

        std::valarray<double> D_force = strengthCoeff * (1.0/denomitor) *
numerator;

        std::valarray<double> diffVector = u.back() - std::valarray<double>
(u.back()[i], neuronsCount);
        for(double &u_diff : diffVector){
            if(u_diff < 0.0) u_diff = 0.0;
        }
        return std::valarray<double>(D_force * diffVector /
(double)neuronsCount).sum());
    };
}
```

```

};

std::vector<std::future<double>> handles;
for(size_t i = 0; i < neuronsCount; ++i){
    force[i] = calculateStrength(i);
    //handles.push_back(std::async(calculateStrength, i));
}

for(size_t i = 0; i < force.size(); ++i){
    //force[i] = handles[i].get();
}

    ConnectionStrengths.push_back(force);
return force;
}

#include <vector>
#include <valarray>
#include <functional>
#include <future>

#pragma once
class NeuronUnion
{
public:
    NeuronUnion(size_t neuronsCount, double step, double strengthCoeff);
    ~NeuronUnion(void);

    std::valarray<double> CalculateConnectionStrength(const
std::vector<std::valarray<double>> &u, double t);
    std::vector<std::valarray<double>> GetStrengthDynamic(){ return
ConnectionStrengths; }
    int round(double value, int digits){ return (int)(floor(value * pow(10.0, digits)
+ 0.5) / pow(10.0, digits)); }
private:
    std::vector<std::valarray<double>> ConnectionStrengths;
    size_t neuronsCount;
    double step, strengthCoeff;
};

```

```
y = np.array(u_res[:-1])
y1 = np.array(x_res[:-1])
y3 = np.array(phi_res[:-1])
ax1 = fig.add_subplot(211)
ax1.plot(x[:limit_len], y[:limit_len], x[:limit_len], y1[:limit_len],
y3[:limit_len])#
ax1.set_ylabel('phi', bbox=box)
```

```
"""y = np.array(u_res[:-1])
ax1 = fig.add_subplot(211)
ax1.plot(x[:limit_len], y[:limit_len])
ax1.set_ylabel('phi', bbox=box)"""
```

```
y = np.array(phi_res[:-1])
y1 = np.array(omega_res[:-1])
ax2 = fig.add_subplot(212)
ax2.set_ylabel('omega',bbox=box)
ax2.plot(x[:limit_len], y[:limit_len], x[:limit_len], y1[:limit_len])
```

```
plt.show()
```