ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Салим Бадран Джасим Салим

О некоторых равномерно корректных по С.Г.Крейну задачах для дифференциальных уравнений с дробными производными

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:

доктор физико–математических наук,

профессор Костин В.А.

В О Р О Н Е Ж — 2014

Оглавление

Введение 4

1 Равномерно корректные задачи для абстрактных дифференциальных уравнений 13

1.1 Вектор-функции и некоторые их свойства. 13

1.2 Оператор–функции и полугруппы. 20

1.3 Дробные степени операторов. 33

1.4 Уравнение 2–го порядка. Эллиптический случай. 36

2 C_0– операторные многочлены и корректная разрешимость с дробными производными Римана–Лиувилля в гипервесовых пространствах 46

2.1 Корректная разрешимость C_0– полиномиальной задачи . . 48

2.2 Гипервозрастающие и гиперубывающие весовые функции 51

2.3 Операторы дробного интегрирования и дифференцирования Римана – Лиувилля в пространствах $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ 55

2.4 Дифференциальные уравнения рационального порядка. . 59

3 Корректная разрешимость задач с дифференциальными операторами Адамара–Эйлера 63

3.1 Операторы Адамара–Эйлера и сильно непрерывные группы и полугруппы в $L_{p,\omega}$ 64

3.2 Сильно непрерывные операторные косинус–функции . . . 66
3.3 Полугруппы и группы Адамара–Эйлера в обобщенных пространствах Степанова 68
3.4 Дробные степени операторов Адамара–Эйлера 74
3.5 Задачи с оператором Адамара–Эйлера 76
3.6 О корректной разрешимости задачи Коши для обобщенного телеграфного уравнения 77
Список литературы 83

Введение

Как указали Ж.Адамар, А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, М.М.Лаврентьев и др., при численной реализации решения задач математической физики основополагающим фактом является докзательство их корректной разрешимости, которая устанавливает устойчивую стабилизацию сходимости приближенных решений к точному. Диссертация посвящена применению теории сильно непрерывных полугрупп преобразований к исследованию начально–краевых задач для дифференциальных уравнений вида

$$\frac{du}{dt} = Au(t), \tag{0.1}$$

,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Au(t), \tag{0.2}$$

($t \geq 0$ или $t \in (-\infty, \infty)$) в банаховом пространстве, где оператор A задается: а) одним из дифференциальных выражений

$\mathfrak{D}_{\pm}\varphi(x) = \pm\frac{d}{dx}$, $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ или $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ в соответствующих весовых функциональных пространствах введенных в диссертации и называемых гипервесовыми, б) одним из дифференциальных выражений вида $l_{\pm}\varphi(x) = \pm x\frac{d\varphi(x)}{dx}$, $x \in \mathbb{R}^+$ или $l^2_{\pm}\varphi(x)$, в соответствующих функциональных пространствах, которые здесь вводятся.

Устанавливается, что рассматриваемые в этих пространствах операторы являются генераторами полугрупп $T(t)$ класса C_0 с оценкой

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\omega t}, \qquad \omega \geq 0, t \geq 0 \tag{0.3}$$

которая, как известно, является ключевой при исследовании корректной разрешимости начально–краевых задач для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (см. [28]).

Результаты применяются к исследованию корректной разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений с дробными производными.

Дифференциальные уравнения с дробными производными становятся всё более актуальными в таких областях, как механика, гидродинамика, теория тепломассопереноса, радиофизика и т.д. (см. [1], [2], [33], [45], [49]). Однако, как правило проводимые при этом исследования касаются только вопросов существования решений соответствующих задач, и их интегро-дифференциальным представлениям. Вопрос же устойчивости решений по исходным данным, один из основных при установлении корректной разрешимости (см. [28], [31]), в этих работах не обсуждается.

Как известно, согласно Ж.Адамару, задача определения решения $u \in U$ уравнения $Au = f$, $(f \in F)$ корректно поставлена на паре (U, F) метрических пространств U и F с метриками ρ_U и ρ_F соответственно, если выполнены условия:

а) для всякого $f \in F$ существует $u \in U$— решение уравнения, б) решение определяется однозначно, в) задача устойчива на пространствах (F, U), то есть для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое что из неравенства $\rho_F(f_1, f_2) < \delta$, следует $\rho_U(u_1, u_2) < \varepsilon$.

Однако устойчивость задачи зависит от выбранных топологий в F и U и, вообще говоря, подходящим выбором топологий формально можно добиться непрерывности оператора A^{-1}, существование которого обеспечивают условия а) и б). Так, в случае линейного взаимооднозначного соответствия оператора A и нормированных пространств U и F, устойчивость будет иметь место, если пространство F наделить нормой $\|f\|_F = \|A^{-1}f\| = \|u\|_U$, и тогда $\|A^{-1}f\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|A^{-1}f\|}{\|f\|} = 1$ (см. [31], с.12).

В связи с этим возникает следующая проблема выбора топологий в U и F.

1. С одной стороны важно, чтобы эти топологии не зависели от оператора A. Например, в случае когда $A = A(\lambda)$— оператор зависящий от некоторого параметра λ, важно чтобы область определения обратного оператора $A^{-1}(\lambda)$ (например резольвенты $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ была не зависящей от λ).

2. С другой стороны желательно иметь наиболее широкий класс начальных данных F при которых решение задачи $u \in U$ сохраняло хорошие свойства.

Таким образом, установление устойчивости существенно зависит от выбора функциональных пространств, в которых ищется решение и в которых соответствующие обратные операторы ограничены.

В связи с этим, в классе корректных по Адамару задач важное место занимают задачи в которых U и F плотно вложены в некоторое банахово пространство E и сходимость понимается в смысле $\|\cdot\|_E$. Такие задачи мы называем равномерно корректными.

Например, рассмотрим задачу Коши для простейшего дифференциального уравнения

$$u'(x) = f(x), \tag{0.4}$$

$$(x \in [0,T),\ f(x) \in \mathfrak{C}[0,T)) \qquad \|f\|_{\mathfrak{C}} = \sup_{x \geq 0} |f(x)| \qquad u(0) = 0. \tag{0.5}$$

Требуется найти функцию $u(x) \in \mathfrak{C}^{(1)}[0,T)$, удовлетворяющую (0.4)–(0.5). В этом случае $F = \mathfrak{C}[0,T)$, $U = \mathfrak{C}^{(1)}[0,T)$, $\|u\|_{\mathfrak{C}^{(1)}} = \|u'\|_{\mathfrak{C}} + \|u\|_{\mathfrak{C}}$.

Очевидно, что решение этой задачи единственное и имеет вид

$$u(x) = \int_0^x f(s)ds, \tag{0.6}$$

и если $0 < T < \infty$, то из (0.4) и (0.6) следует

$$\|u\|_U = \|u'\|_{\mathfrak{C}} + \|u\|_{\mathfrak{C}} \leq (1+T)\|f\|_{\mathfrak{C}} = (1+T)\|f\|_F.$$

Таким образом, задача (0.4)–(0.5) корректна в пространствах $(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}^{(1)})$, если $T < \infty$.

Однако при $T = \infty$ это не так. Поэтому возникает вопрос о пространствах, в которых задача (0.4)–(0.5) корректна.

Решение аналогичных проблем в случае уравнений с дробными производными приводит к задаче выбора функциональных пространств инвариантных относительно операции дробного интегрирования Римана–Лиувилля. Например, классические L_p $(p \geq 1)$ или C– пространства со степенными весами этими свойствами не обладают (см. [47], с. 94).

В настоящей работе вводятся весовые пространства $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ непрерывных на действительной полуоси функций $f(t)$ с нормами $\|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_\pm}} = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \left|\frac{f(t)}{\rho_\pm(t)}\right|$ и указываются необходимые и достаточные условия на веса $\rho_\pm(t)$, при которых операторы дробного интегрирования Римана-Лиувилля $J_\pm^\alpha$ $(\alpha > 0)$ являются ограниченными в $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$.

Интересно, что классы таких функций включают в себя полумультипликативные весовые функции [50], с. 154, применяемые при исследовании абсолютной сходимости тригонометрических рядов и интегралов.

Выясняется, что степенные веса вида $\rho(t) = (1+t^n)$, $(n = 0, 1, 2, \dots)$ в эти классы не попадают. Оказывается, что в случае правосторонних интегралов Римана-Лиувилля J_+^α веса $\rho_+(t)$ должны расти не медленнее экспоненты. И здесь мы пространства $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ называем надэкпоненциальными гипервесовыми.

В случае левосторонних интегралов J_-^α функции из $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ могут иметь неинтегрируемую особенность при $t = 0$ любого порядка и, следователь-

но, также могут быть не интегрируемы по Лапласу.

Диссертация состоит из введения и трех глав, в которые входят 14 параграфов.

Первая глава содержит необходимую терминологию, понятия и общие фундаментальные факты, связанные с теорией корректно разрешимых задач для уравнений в банаховом пространстве, которые соответствуют монографиям [13], [26], [28], [23], [50]. Здесь вводятся понятия векторных функций со значениями в банаховом пространстве. Указываются необходимые в дальнейшем их свойства, непрерывности, дифференцируемости, интегрируемости по Бохнеру.

Вводятся понятия сильно непрерывных полугрупп, групп и косинусных функций (КОФ) линейных преобразований, их генераторов и их связи с корректной разрешимостью начально–краевых задач для уравнений вида (0.1), (0.2).

Вводятся понятия решений этих уравнений (§1.2) и равноммерно корректной разрешимости, в смысле С.Г. Крейна, задачи Коши для этих уравнений

$$u(0) = u_0 \in D(A), \tag{0.8}$$

в случае уравнения (0.1) и

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \tag{0.9}$$

в случае уравнения (0.2).

Указывается, что задача Коши (0.1)—(0.7) равномерно корректна, когда оператор A является генератором (производящим оператором) сильно непрерывной полугруппы $T(t)$. Решение имеет вид $u(t) = T(t)u_0$.

В случае задачи Коши (0.2)—(0.7) указывается, что задача равномерно корректна тогда и только тогда когда оператор A является генерато-

ром сильно непрерывной косинус–функции $C(t)$, при этом решение этой задачи имеет вид

$$u(t) = C(t)u_0 + \int_0^t C(s)u_1 ds.$$

Наряду с этим указываеются критерии генераторов сильно непрерывных полугрупп (теорема Хилле–Филлипса с. 13) и теорема Совы–Куренны 1.2.2, для косинусной функции). Отметим, что в Воронеже пионером в исследовании КОФ наряду с С.Г. Крейном является А.Г. Баскаков [4]. Позже к этой теме обратился В.А. Костин и его ученики [19], [20].

В §1.3 вводятся дробные степени для операторов A— таких, что $-A$ является генератором сильно непрерывной полугруппы класса C_0, удовлетворяющей оценке (0.3).

В §1.4, в терминах дробных степеней операторов формулируются критерии корректной разрешимости по С.Г. Крейну краевой задачи (1.4.1)–(1.4.9), для уравнений (0.2), которые формулируются в терминах квадратного корня $(-A)^{\frac{1}{2}}$ (Теорема 1.4.2).

В частности, теорема 1.2.2 указывает на то, что в случае $t \in [0, \infty)$ и краевых условий

$$u(0) = u_0, \qquad \lim_{t\to\infty} \|u(t)\| < \infty, \tag{0.10}$$

где $u_0 \in E$, существует единственное решение этой задачи и оно, имеет вид

$$u(t) = V(t)u_0,$$

где $V(t)$— полугруппа с генератором $-A^{\frac{1}{2}}$.

Отсюда следует оценка

$$\|u(t)\| \leq Me^{-\sqrt{\omega}t}\|u_0\|.$$

Вторая глава диссертации содержит самостоятельные результаты по корректной разрешимости уравненний с дробными производными Римана–Лиувилля в классе функциональных пространств введенных в диссертации, названными здесь гипервесовыми. Устанавливается, что эти пространства инвариантны относительно операции дробного интегро–дифференциров (см. оценку (2.3.13)).

Эти результаты применяются к установлению корректной разрешимости дифференциальных уравнений рационального порядка, как с правыми так и с левыми производными дробного порядка.

Отметим, что частный случай таких уравнений (с правыми производными) рассматривался другими авторами, однако, только с точки зрения существования и представленя решения, и оценки вида (2.4.3) ранее не устанавливались.

Также отметим, что представление решений (2.4.9) и (2.4.10) для уравнения с рациональными коэффициентами (2.4.6) являются новыми.

Третья глава посвящена корректной разрешимости задач для дифференциальных уравнений с оператором Адамара–Эйлера. Здесь такими операторами называют операторы Da, заданными дифференциальными выражениями $l_{\pm} = \pm x\frac{d}{dx}$, $x \in \mathbb{R}^+$ в обобщенных пространствах Степанова $S^{\pm}_{p,\omega,\gamma}$, которые определяются в диссертации с помощью норм

$$\|\varphi\|_{S^+_{p,\omega,\gamma}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\left[\frac{1}{x^\omega}\int_0^x s^\gamma|\varphi(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}},$$

$$\|\varphi\|_{S^-_{p,\omega,\gamma}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\left[x^\omega\int_0^x s^{-\gamma}|\varphi(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}},$$

где $\omega \geq 0$, $\gamma \geq 0$.

В §3.3 устанавливаются свойства этих пространств.

В частности выясняется, что эти пространства явялются инвариант-

ными относительно операции дробного интегрирования Адамара, что является новым фактом.

Далее, рассматриваются сильно непрерывные полугруппы, группы и косинус–функции в пространствах $\overline{S}^{\pm}_{p,\omega}$, которые являются образом пространств Степанова $\overline{S}_p$ в результате отображения $x \to \ln \tau$. Как известно пространства $\overline{S}_p(\mathbb{R})$ являются замыканием пространства равномерно непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций $C_{[-\infty,\infty]}$.

Результаты S 3.4 применяются в §3.6 к установлению корректной разрешимости задач (0.1)–(0.8), (0.2)—(0.9).

В §3.5 устанавливается корректная разрешимость задачи Коши для обобщенного телеграфного уравненя (3.5.22), частным случаем которого являются классическое телеграфное уравнение и аналогичное уравнение Адамара–Эйлера.

Как известно, решение задачи Коши для классического телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = a_0 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + 2b_0 \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + c_0 u(t,x)$$

ищется в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций, и с помощью метода Римана выписывается в явном виде. При этом вопрос устойчивости решения в зависимости от начальных данных, требующий использования соответствующих метрических пространств в [25] не обсуждается.

В диссертации устанавливается равномерно корректная разрешимость задачи Коши в L_p–весовых пространствах и выписывается явный вид решения задачи (3.5.25), из которого следует корректная разрешимость задачи Коши как для классическогго дифференциального уравнения, так

и для телеграфного уравнения с оператором Адамара

$$x^2\frac{\partial^2\omega(t,x)}{\partial x^2}+2\beta\frac{\partial\omega(t,x)}{\partial x}=a_0\frac{\partial^2\omega(t,x)}{\partial t^2}+2b_0\frac{\partial\omega(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial\omega(t,x)}{\partial t}$$

в пространствах $L_{p,\nu}$.

Глава 1

Равномерно корректные задачи для абстрактных дифференциальных уравнений

1.1 Вектор-функции и некоторые их свойства.

Содержание этого параграфа соответствует монографиям [26],[28],[29]. Здесь мы будем рассматривать *векторнозначные функции* $f(t)$ вещественного аргумента t, то есть функции значения которых при каждом $t \in [a, b] \subset R^1$ являются элементами некоторого линейного банахова пространства E.

Определение 1.1.1. Функция $f(t)$ называется *непрерывной в точке* t_0 , если $\|f(t) - f(t_0)\|_E \to 0$ при $t \to t_0$, и непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.

При этом норма $\|f(t)\|_E$– есть скалярная непрерывная функция.

Замечание 1.1.1. Множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций со значениями в E образуют линейную систему $C(E; [a, b])$ в которой

можно ввести норму

$$\|f\|_{C[a,b]} = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|_E. \tag{1.1.1}$$

После чего $C(E;[a,b])$ становится линейным нормированным пространством.

При этом, если E– банахово пространство, то $C(E;[a,b])$ также банахово пространство (см. [29], стр. 96).

Кроме введенного понятия (сильной) непрерывности функции $f(t)$, можно ввести понятие слабой непрерывности.

Определение 1.1.2. Функция $f(t)$ называется *слабо непрерывной (в точке, на отрезке,* если для любого непрерывного линейного функционала $l \in E'$ скалярная функция $l(f(t))$ непрерывна в точке (на отрезке).

Из сильной непрерывности вытекает слабая. Обратное неверно.

Справедливо следующее утверждение (см. [29], стр. 96):

слабо непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(t)$ ограничена на нем; то есть

$$\|f(t)\| \le M \qquad (a \le t \le b).$$

Определение 1.1.3. Функция $f(t)$ называется *дифференцируемой в точке* t_0, если существует такой элемент $f' \in E$, что

$$\|\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h} - f'\|_E \to 0$$

при $h \to 0$. Элемент f' называется *производной* функции $f(t)$ в точке t_0 и обозначается $f' = f'(t_0)$.

Функция $f(t)$ *дифференцируема на отрезке* $[a,b]$, если она дифференцируема в каждой точке этого отрезка.

Если при этом производная $f'(t)$ непрерывна, то функция $f(t)$ называется *непрерывно дифференцируемой.*

Для непрерывно дифференцируемых функций справедливо утверждение (см. [29], стр. 96):

Если функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, то справедливо неравенство

$$\|f(b) - f(a)\|_E \leq (b - a) \sup_{a \leq t \leq b} \|f'(t)\|_E. \tag{1.1.2}$$

Это неравенство остается справедливым, если производная существует на отрезке $[a, b]$ всюду, за исключением счетного множества точек.

Определение 1.1.4. Говорят, что функция $f(t)$ имеет в точке t_0 *слабую производную* $f'(t_0)$, если при $h \to 0$

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h},$$

слабо сходится при всяком $l \in E'$ к $f'(t_0)$.

Другими словами это означает, что при всяком $l \in E'$ скалярная функция $l(f(t))$ дифференцируема в точке t_0 и

$$[l(f(t_0))]' = l(f'(t_0)).$$

Если функция $f(t)$ имеет в каждой точке отрезка $[a, b]$ слабую производную, то сохраняется оценка (1.1.2).

В частности, если слабая производная равна нулю во всех точках отрезка $[a, b]$, то функция $f(x)$ постоянна.

Аналогично определяются производные любого порядка от векторнозначных функций.

Если функция $f(t)$ со значениями в банаховом пространстве E непрерывна на отрезке $[a, b]$, то предел интегральных сумм:

$$\lim \sum_{k=1}^{N} f(t_k) \Delta t_k = \int_a^b f(t) dt.$$

Здесь предел понимается в смысле сходимости по норме пространства E, когда диаметр разбиения $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ стремится к нулю.

Предел существует и не зависит от способа разбиения отрезка на части.

Справедлива оценка

$$\| \int_a^b f(t)dt \| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt \tag{1.1.3}$$

и теорема о среднем

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)\overline{f},$$

где $\overline{f}$– элемент замкнутой выпуклой оболочки множества значений функции $f(t)$ на отрезке $[a, b]$.

Функция

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds$$

является непрерывно дифференцируемой и $F'(t) = f(t)$.

Для любой непрерывно дифференцируемой функции $F(t)$ справедлива *формула Ньютона–Лейбница.*

$$\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a).$$

Так же, как и в классическом анализе, вводится понятие несобственного интеграла. Например, если функция непрерывна на $[a, b]$ при любом $b > a$, то под ее интегралом на $[a, \infty]$ понимают

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)dt.$$

Если предел по норме пространства E существует, то говорят, что интеграл сходится.

Интеграл абсолютно сходится, если

$$\int_a^\infty \|f(t)\| dt < \infty.$$

Из абсолютной сходимости интеграла следует обычная сходимость.

Можно рассматривать интегралы зависящие от параметра. На них переносятся классические теоремы о непрерывной зависимости от параметра, об интегрировании и дифференцировании по параметру.

Наиболее употребительным обобщением интеграла Римана для функций со значениями в банаховом пространстве является *интеграл Бохнера*

Определение 1.1.5. Функция $f(t)$, заданная на отрезке $[a, b]$, со значениями в банаховом пространстве E, называется *простой,* если она принимает лишь конечное заданное число значений f_j на измеримых множествах Δ_j.

$$f(t) = f_j \quad (t \in \Delta_i), \qquad \bigcup \Delta_j = [a, b].$$

(При определении простой функции на множестве бесконечной меры требуется, чтобы $mes(\Delta_j) < \infty$ и чтобы $f(t) = 0$ на дополнении к $\bigcup \Delta_j$).

Определение 1.1.6. Функция $f(t)$ называется *сильно измеримой,* если существует последовательность простых функций $f_n(t)$, сильно сходящаяся почти всюду к функции $f(t)$, то есть

$$\|f_n(t) - f(t)\|_E \to 0,$$

при $n \to \infty$ для всех $t \in [a, b]$, за исключением множества меры нуль.

Определение 1.1.7. Функция $f(t)$ называется *слабо измеримой,* если для всякого $l \in E'$ скалярная функция $l(f(t))$ измерима на $[a, b]$.

Для всякого пространства E, содержащего счетное всюду плотное множество, понятия слабой и сильной измеримости совпадают ([29], стр. 100).

Справедливо утверждение, что если $f(t)$ сильно измерима, то ее норма $\|f(t)\|_E$ является измеримой скалярной функцией.

Для простых функций $f(t)$ интеграл определяется единственным образом:

$$\int_a^b f(t)dt = \sum f_j mes\Delta_j.$$

Определение 1.1.8. Функция $f(t)$ называется *суммируемой (интегрируемой) по Бохнеру* на отрезке $[a, b]$, если существует сходящаяся к ней почти всюду последовательность простых функций $f_n(t)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \|f(t) - f_n(t)\|_E dt = 0.$$

При этом интегралом суммируемой функции $f(t)$ называется предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Предел понимается в смысле сходимости по норме, то есть

$$\| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt\|_E \to 0$$

при $n \to \infty$.

Справедлива следующая

Теорема ([29], стр. 101). *Для того, чтобы функция $f(t)$ была суммируемой по Бохнеру, необходимо и достаточно, чтобы она была сильно измеримой и чтобы ее норма $\|f(t)\|$ была суммируемой.*

Для интеграла Бохнера справедлива оценка (1.1.3).

Также функция $F(t)$, представимая неопределенным интегралом

$$F(t) = \int_a^t f(s)ds$$

от суммируемой функции $f(t)$, почти во всех точках отрезка $[a, b]$ имеет сильную производную, причем в этих точках $F'(t) = f(t)$.

Если A– ограниченный линейный оператор, отображающий банахово пространство E в банахово пространство F, и $f(t)$– суммируемая функция со значениями в E то

$$\int_a^b Af(t)dt = A\int_a^b f(t)dt.$$

Совокупность всех суммируемых на $[a,b]$ функций со значениями в банаховом пространстве E образуют линейную систему $L_1(E,[a,b])$, в которой вводится норма

$$\|f\|_{L_1(E;[a,b])} = \int_a^b \|f(t)\|dt.$$

В этой норме пространство $L_1(E;[a,b])$ банахово.

Кроме того, аналогично скалярному случаю вводятся банаховы пространства $L_p(E;[a,b])$ $(1 \leq p < \infty)$ с нормой

$$\|f\|_{L_p(E;[a,b])} = [\int_a^b \|f(t)\|^p dt]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

и

$$\|f\|_{L_\infty(E;[a,b])} = vrai\ sup_{t\in[a,b]}\|f(t)\|, \quad p = \infty.$$

Важное место в теории дифференциальных уравнений занимают функциональные пространства В.В. Степанова [15], [32], определенное каак множество интегрируемых функций со степенью $p \geq 1$, на каждом интервале $\Delta \in \mathbb{R}$ функций $f(t)$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{S_p} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{l}\int_t^{t+l} |f(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1, l > 0. \tag{1.1.4}$$

Другие важные функциональные пространства вводятся и изучаются в главах 2 и 3 настоящей диссеретации.

1.2 Оператор–функции и полугруппы.

Пусть E_1 и E_2 банаховы пространства. Оператор–функции $A(t)$ (то есть функции, значениями которых являются ограниченные операторы) являются частными примерами функций со значениями в банаховом пространстве ограниченных операторов, действующих из E_1 в E_2.

Для оператор–функций определяются три вида непрерывности: а) непрерывность по норме, б) сильная непрерывность, в) слабая непрерывность.

Определение 1.2.1. Будем говорить, что оператор–функция $A(t)$ *непрерывна по норме* в точке $t_0 \in [a, b]$, если

$$\lim_{t \to t_0} \|A(t) - A(t_0)\| = 0.$$

Определение 1.2.2. Оператор–функция $A(t)$ *сильно непрерывна* в точке $t_0 \in [a, b]$, если при любом фиксированном $x \in E_1$

$$\lim_{t \to t_0} \|A(t)x - A(t_0)x\|_{E_2} = 0.$$

Определение 1.2.3. Оператор–функция $A(t)$ слабо непрерывна в точке $t_0 \in [a, b]$, если при любых фиксированных $x \in E_1$, $l \in E_2^*$

$$\lim_{t \to t_0} |l(A(t)x) - l(A(t_0)x| = 0.$$

Аналогично определяются понятия дифференцируемости (дифференцируемости по норме операторов), сильной дифференцируемости (дифференцируемости всех функций $A(t)x, x \in E_1$) и слабой дифференцируемости (дифференцируемости скалярной функции $l(A(t)x, x \in E_1, l \in E_2^*$).

Справедлива

Теорема (Банах–Штейгауз). *Оператор–функция $A(t)$ сильно непрерывна при $t_0 \in [a, b]$ на всем E_1, если нормы ее равномерно ограничены, то есть*

$$\|A(t)\| \leq M,$$

и функции $A(t)x$ непрерывны для x из некоторого плотного в E_1 множества.

Неограниченные операторы. Пусть E– банахово пространство и A– линейный оператор, определенный на некотором линейном множестве $D(A) \subset E$ и принимающий значения в E.

Определение 1.2.4. Говорят, что A *замкнут*, если из того что $x_n \in D(A)$, $\|x_n - x_0\|$ и $Ax_0 = y_0$.

Справедливы следующие утверждения: (см. [29], §13.2).

Если при некотором $\lambda \in C$ оператор $\lambda I + A$ имеет обратный, то оператор A замкнут.

Пусть значение функции $x(t)$ при каждом $t \in [a, b]$ принадлежат $D(A)$ и функция $Ax(t)$ интегрируема на $[a, b]$. Тогда выполняется равенство

$$A \int_a^b x(t)dt = \int_a^b Ax(t)dt.$$

Наиболее важными характеристиками линейных операторов, определенных на линейном многообразии $D(A)$ комплексного банахова пространства E и действующих в это же пространство E является спектр и резольвента оператора.

Понятие спектра оператора связано с рассмотрением уравнения

$$Ax - \lambda x = y \qquad x \in D(A), y \in E), \tag{1.2.1}$$

где λ– комплексное число.

Определение 1.2.5. Число λ называется *регулярной точкой* оператора A, если уравнение (1.2.1) корректно и плотно разрешимо. То есть однородное уравнение

$$Ax - \lambda x = 0$$

имеет только нулевое решение, для любого $x \in D(A)$ справедливо неравенство

$$\|x\|_E \leq k\|(A - \lambda I)x\|_E,$$

и замыкание области значений оператора $A - \lambda I$ совпадает с E.

Определение 1.2.6. Совокупность всех регулярных точек называется *резольвентным множеством* оператора A.

Определение 1.2.7. Дополнение на комплексной плоскости к резольвентному множеству называется *спектром оператора* A.

Если оператор A замкнут, то его резольвентное множество состоит из тех и только тех точек λ, для которых существует ограниченный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, заданный на всем пространстве E.

Определение 1.2.8. Определенный при регулярных λ, оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ называется *резольвентой оператора* A и обозначается $R(\lambda, A)$.

Для замкнутого оператора резольвентное множество является открытым подмножеством комплексной плоскости, спектр–замкнутое множество.

Резольвента $R(\lambda, A)$ является на резольвентном множестве аналитической функций со значениями в пространстве $L(E, E)$ линейных ограниченных операторов.

Для любых двух регулярных точек λ и μ справедливо *резольвентное тождество Гильберта*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\lambda - \mu)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

Из этого тождества выводится формула для производных

$$\frac{d^k R(\lambda, A)}{d\lambda^k} = k! R^{k+1}(\lambda, A).$$

Классификация точек спектра. Приняты следующие определения.

1. λ принадлежит *точечному спектру*, если оператор $A - \lambda I$ не имеет обратного.

2. λ принадлежит *остаточному спектру*, если оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ определен на не плотном множестве.

3. λ принадлежит *непрерывному спектру*, если оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ определен на плотном множестве, но неограничен.

Таким образом, вся комплексная плоскость разлагается в сумму четырех взаимно непересекающихся множеств: резольвентное множество, точечный, остаточный и непрерывный спектры.

Если оператор задан каким–либо аналитическим выражением, то структура его спектра существенно зависит от того пространства в котором он исследуется.

1.2.1. Экспоненциальная функция, группы и полугруппы операторов.

Начиная с фундаментальных работ Э. Хилле, Р. Филлипса и др. (см. [50]) в теории уравнений параболического типа важное место занимает однопараметрические полугруппы линейных преобразований $T(t)$, $t \geq 0$ называемыми *каноническими* и определяемые соотношением $T(\alpha \oplus \beta) = T(\alpha)T(\beta)$, α и β— действительные или комплексные числа. При этом в системе рассматриваемых чисел можно выделить множество полугрупп, соответствующим разнообразым операция сложения.

В настоящей диссертации рассматриваются полугруппы с обычным

линейным сложением $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta$.

Если оператор A, действующий в банаховом пространстве E, ограничен, то можно ввести с помощью ряда экспоненциальную функцию

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Эта функция непрерывна по t в смысле нормы оператора и удовлетворяет групповому соотношению

$$e^{tA} e^{sA} = e^{(t+s)A}.$$

Оказывается, что вообще семейство операторов $U(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, *непрерывно по норме* зависящих от t и удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{gathered} U(t)U(s) = U(t+s), \qquad (-\infty < t < \infty), \\ U(0) = I, \end{gathered} \tag{1.2.2}$$

представимо в виде e^{tA}, где A– ограниченный оператор.

Оператор A можно найти основываясь на том, что группа $U(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению для экспоненты

$$\frac{dU(t)}{dt} = AU(t),$$

поэтому оператор A можно определить как производную от группы $U(t)$ в нуле, то есть

$$Ax = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(U(h) - I)x \tag{1.2.3}$$

В связи с этим оператор A называется *производящим оператором (или генератором) группы* $U(t)$.

Если отказаться от непрерывности по норме экспоненциальной функции и потребовать только ее *сильную непрерывность по* t, то объект оказывается значительно более богатым. Производящий оператор A снова вводится равенством (1.2.3) на всех тех $x \in E$, для которых предел

существует. В этом случае он может быть уже неограниченным оператором, однако A является замкнутым и имеющим плотную в E область определения.

Дальнейшее обобщение понятия экспоненциальной функции от оператора связано с отказом от требования определения этой функции при $t < 0$.

В связи с этим возникли следующие определения:

Определение 1.2.9. Семейство ограниченных операторов $U(t)$ $(t > 0)$, действующих в банаховом пространстве E, называется *сильно непрерывной однопараметрической полугруппой операторов* , если $U(t)$ сильно непрерывно зависит от t и удовлетворяет условию $U(t)U(s) = U(t+s)$ $(t, s > 0)$.

Определение 1.2.10. Говорят, что $U(t)$– *полугруппа класса* C_0, если она сильно непрерывна и

$$\lim_{t \to 0+} \|U(t)x - x\|_E = 0 \tag{1.2.4}$$

при любом $x \in E$.

Для полугрупп класса C_0 также вводится понятие производящего оператора по формуле (1.2.3.) как производной справа от полугруппы в нуле.

Отметим, что если семейство ограниченных операторов $U(t)$ $(0 < t < \infty)$ обладает полугрупповым свойством, то из измеримости функций $U(t)x$ при каждом $x \in E$ следует сильная непрерывность полугруппы $U(t)$ при $t > 0$ (см. [6], [29]). Отсюда следует существование предела

$$\lim_{t \to \infty} \frac{ln\|U(t)\|}{t} = \omega,$$

называемого *типом полугруппы.*

Таким образом, требование сильной непрерывности полугруппы при

$t > 0$ является естественным и оно влечет за собой определенный характер поведения полугруппы на бесконечности.

В связи с этим выделение новых типов полугрупп и их классификация в основном ведется по признаку поведения полугрупп в окрестности точки $t = 0$. Многочисленные результаты в этом направлении изложены в [50].

Существует классический критерий определения производящего оператора C_0– полугруппы, принадлежащий пяти авторам: Э. Хилле, Р. Филлипс, К.Иосида, В. Феллер, И. Миадера, который содержится в следующей теореме

Теорема (ХФИФМ) (см. [29], стр. 133.)

Для того чтобы линейный оператор A был производящим оператором (генератором) полугруппы $T(t)$ класса C_0, необходимо и достаточно, чтобы он был замкнутым с плотной в E областью определения, имел спектр лежащий в полуплоскости $Re\lambda \leq \omega$ и резольвенту, удовлетворяющую условиям

$$\|R^m(\lambda, A)\| \leq \frac{K}{(\lambda - \omega)^m}, \quad \lambda > \omega \tag{1.2.5}$$

и $m = 1, 2, \ldots,$ где M не зависит от λ и m.

Отметим, что условия на все степени резольвенты трудно проверяемы. В связи с этим крайне важной является достаточное условие на резольвенту

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad \lambda > \omega. \tag{1.2.6}$$

из которого легко следует (1.2.5).

Для полугруппы $T(t)$ класса C_0 справедлива оценка

$$\|U(t)\| \leq Ke^{\omega t} \tag{1.2.8}$$

и если $\omega \leq 0$, то полугруппа удовлетворяет оценке

$$\|T(t)\| \leq K$$

и называется равномерно ограниченной C_0–полугруппой (см.[13], с.292).

Если $K = 1$, то полугруппа называется сжимающей C_0–полугруппой. Умножив C_0–полугруппу на $e^{-\omega t}$, очевидно получим новую полугруппу класса C_0 с условием равномерной ограниченности.

Построение полугруппы по производящему оператору можно произвести с помощью интеграла Коши

$$T(t)x = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda, A)xd\lambda \quad .$$

При $x \in D(A)$ и $t > 0$ этот интеграл сходится в смысле главного значения и определяет на плотном в E множестве $D(A)$ ограниченный оператор, который замыканием доопределяется на всем пространстве E. При этом $U(t)$ сильно сходится к I при $t \to +0$.

Имеются и другие формулы, показывающие связь между полугруппами и экспоненциальной функцией, например

1. $T(t)x = \lim\limits_{h\to 0} e^{tA_h}x$, где $A_h = \frac{U(h)-I}{h}$;
2. $T(t)x = \lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{tJ_\lambda}x$, где $J_\lambda = -\lambda I - \lambda^2 R(\lambda(A, A)$;
3. $T(t)x = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!}A^k x + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1}U(s)A^n x ds$; $(x \in D(A^n))$;
4. $T(t)x = \lim\limits_{k\to\infty}(I - \frac{t}{k}A)^{-k}x$.

Следует заметить, что наличие экпоненциальной функции от оператора позволяет вычислять различные другие функции от оператора с помощью обобщения преобразования Лапласа. Так, для производящего оператора A полугруппы класса C_0 резольвента имеет вид

$$R(\lambda, A) = -\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)dt \quad (Re\lambda > \omega).$$

Если в оценке (1.2.8) $\omega < 0$, то можно определить дробные степени оператора $-A$ по формуле

$$(-A)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} T(t) dt. \tag{1.2.9}$$

при $0 < \alpha < 1$ оператор $-(-A)^\alpha$ также будет производящим оператором сильно непрерывной полугруппы.

Следующие примеры C_0– полугрупп и их производящих операторов можно найти в [6], [13] гл. IX., [21], [22]

1.2.2. Примеры C_0 полугрупп

Пример 1. Полугруппа левых сдвигов

$$T(t)x(s) = x(t+s) \qquad (t \geq 0)$$

является сжимающей полугруппой класса C_0 в пространствах $C[0,\infty]$ ограниченных и равномерно непрерывных вещественных (или комплексных) функций $x(s)$ и $L_p(-\infty,\infty)$ $(p < \infty)$ пространствах.

Производящим оператором этой полугруппы является дифференциальный оператор $\frac{d}{ds}$ с областью определения:

В первом случае $D(A) = \{x(s) : x(s) \in C[0,\infty],\, x'(s) \in C[0,\infty)\}$.

Во втором случае $D(A) = \{x(s) : x(s) \in L_p[0,\infty),\, x'(s) \in L_p[0,\infty)\}$.

Пример 2.

$$(T(t)x)(s) = \begin{cases} x(s-t), & s \geq t; \\ 0, & s < t \end{cases}$$

является полугруппой правых сдвигов класса C_0 в пространствах $C(0,[0,\infty])$ ограниченных и равномерно непрерывных функций на $[0,\infty]$, с условием $x(0) = 0$.

Производящим оператором этой полугруппы является дифференциальный оператор $-\frac{d}{ds}$ с областью определения $D(A) = \{x(s) : x(s) \in C[0,\infty],\ x'(s) \in C[0,\infty]\}$.

Новые примеры функциональных пространств в которых полугруппы сдвигов являются сильно непрерывными рассматриваются в последующих главах.

Пример 3. Полугруппа Вейерштрасса

$$(T(t)x)(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(s-\xi)^2}{4t}} x(\xi) d\xi \tag{1.2.10}$$

является сжимающей полугруппой класса C_0 в пространствах $C[-\infty,\infty]$ ограниченных и равномерно непрерывных функций на $[-\infty,\infty]$, а также в пространствах $L_p(-\infty,\infty)$.

Производящим оператором этой полугруппы является дифференциальный оператор $\frac{d^2}{ds^2}$ с областью определения $D(A) = \{x(s) : x(s) \in C[-\infty,\infty],\ x''(s) \in C[-\infty,\infty]\}$ в первом случае, и $D(A) = \{x(s) : x(s) \in L_p[-\infty,\infty],\ x''(s) \in L_p[-\infty,\infty]\}$ во втором случае.

Пример 4. Полугруппа Пуассона

$$T(t)x(s) = \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\xi)}{t^2 + (s-\xi)^2} d\xi \tag{1.2.11}$$

является сжимающей полугруппой класса C_0 в пространствах $C[-\infty,\infty]$ и $L_p(-\infty,\infty)$. Производящим оператором этой полугруппы является сингулярный интегральный оператор

$$Ax(s) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(s-\xi) - x(s)}{\xi^2 + h^2} d\xi \tag{1.2.12}$$

.

Пример 5. Пусть $\lambda > 0$, $\mu > 0$ в пространстве $C[-\infty,\infty]$ операторы $T(t)$ определенные равенством

$$(T(t)x)(s) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)}{k!} x(s - k\mu) \quad (t \le 0) \tag{1.2.13}$$

являются сжимающей полугруппой.

В этом случае производящим оператором является разностный оператор A вида

$$(Ax)(s) = \lambda[x(s-\mu) - x(s)]. \tag{1.2.14}$$

Пример 6. Важные примеры новых полугрупп, которые в диссертации называются полугруппы Адамара–Эйлера, и имеют вид

$$T^{+}(t)\varphi(x) = \varphi(xe^{t}), (1.2.15)$$

$$T^{-}(t)\varphi(x) = \varphi(xe^{-t}), \tag{1.2.16}$$

$t > 0$, $x > 0$ рассматриваются в третьей главе.

Группы.

Как отмечено у [50], с. 274 понятие полугруппы возникло гораздо позже понятия группы. Так еще в 1903 году Ж.Адамар заметил, что задача Коши для волнового уравнения приводит к некоторым группам преобразований.

Определение 1.2.11 (C_0)– группой на E называется семейство операторов $T = \{T(t) : t \in \mathbb{R}$ удовлетворяющим условиям определения 1.1., в которых $\mathbb{R}^{+} = [0, \infty)$ заменяется на $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Генератор A (C_0)– группы $T(t)$ на E определяется равенством (1.1), причем речь идет о двустороннем пределе при $t \to 0$.

Замечание 1.2.1. A— является генератором (C_0)– группы тогда и только тогда, когда $\pm A$ порождает (C_0)– полугруппу $T_{\pm}(t)$. В этом случае

$$T(t) = \begin{cases} T_{+}(t), & t \geq 0; \\ T_{-}(t), & t < 0. \end{cases} \tag{1.2.17}$$

1.2.3. Косинус–функции (КОФ)

С понятием сильно непрерывных групп тесно связано важное понятие сильно непрерывных косинус функций (КОФ). Исследованию КОФ посвящены работы многих математиков, начиная с работ С. Куренны, М. Совы, Г.О. Фатторини. Из воронежских математиков изучением КОФ занимались А.Г. Баскаков, В.А. Костин и др.

Определение 1.2.12. Сильно непрерывной *операторной косинус–функцией* называется семейство операторов $C = \{C(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset B(E)$, удовлетворяющее условиям

(i) $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s)$

(ii) $C(0) = I$

(iii) $C(t)\varphi$— непрерывная функция для каждого $\varphi \in E$.

Определение 1.2.13. *Генератором* A операторной косинус–функции C называется оператор $A = C''(0)$. Его областью определения является множество тех $\varphi \in E$, для которых функция $C(t)$ дважды дифференцируема в точке $t = 0$. Операторные косинус–функции C и (C_0)– полугруппы T связаны между собой формулой ([6], с. 178)

$$T(t)\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} C(s)\varphi ds. \tag{1.2.18}$$

В дальнейшем нам понадобится следующее (см. [6], с. 179)

Утверждение 1.2.1. Пусть B порождает (C_0)– группу $T(t)$. Тогда $A_a = B^2 + aI$, $(a > 0)$ порождает операторную косинус–функцию $C_a(t)$ и справедливо представление

$$C_a(t)\varphi = C_0(t)\varphi(x) + at \int_0^t (t^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}} I_1[a(t^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}] C_0(s) ds, \tag{1.2.19}$$

где $C_0(t) = \frac{1}{2}[T(t) + T(-t)]$, $I_1(s)$— модифицированная функция Бесселя порядка 1.

Следующие факты связывают понятия (C_0)– полугруппы и (C_0)– косинус функций с корректной разрешимостью задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве первого и второго порядков.

$$u'(t) = Au(t) \tag{1.2.20}$$

$$u''(t) = Au(t) \tag{1.2.21}$$

Определение 1.2.14. [7, с. 38] Решением уравнения (1.2.20) на отрезке $[0.t_0]$ называется функция $u(t)$, удовлетворяющая условиям: 1) $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in [0, t_0]$, 2) в каждой точке $t \in [0, t_0]$ существует сильная производная $u'(t)$, 3) уравнение (1.2.18), удовлетворяется при всех $t \in [0, t_0]$.

Под задачей Коши на $[0, t_0]$ понимают задачу о нахождении решения уравнения (1.2.20), удовлетворяющее условию

$$u(0) = u_0 \in D(A). \tag{1.2.22}$$

Определение 1.2.15 Задача Коши поставлена корректно на отрезке $[0, t_0]$ если: 1) при любом $u_0 \in D(A)$ существует ее единственное решение и это решение непрерывно зависит от начальных данных в том смысле, что из $x_0(0) \to 0$ следует, что $x_n(t) \to 0$ равномерно по t на каждом компакте из $[0, t_0]$.

Теорема 1.2.1. ([28], с. 64) Задача (1.2.20)—(1.2.22) равномерно корректна тогда и только тогда когда A является генератором (C_0)– полугруппы $T(t)$, при этом решение имеет вид

$$u(t) = T(t)\varphi, \tag{1.2.23}$$

и существуют константы M и ω не зависящие от φ такие, что выполня-

ется оценка

$$\|u(t)\| \leq Me^{\omega t}\|\varphi\|. \tag{1.2.24}$$

Аналогично для уравнения (1.2.21) решается задача с условиями Коши

$$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1. \tag{1.2.25}$$

Эта задача называется равномерно корректной если существует подпространство $M \subset E$ такое, что задача (1.2.21)–(1.2.25) имеет единственное решение для $u_0, u_1 \in M$ и когда $u_0^{(n)}, u_1^{(n)}$, $(n = 0, 1, \dots)$ являются последовательностью начальных данных в M, стремящихся к нулю, то соответствующее решение $u^{(n)}(t)$ стремится к нулю в метрике E, равномерно на каждом компакте из $[0, \infty)$.

Теорема 1.2.2. (Сова, Куррена , см. [6], с. 176) Задача (1.2.21)–(1.2.25) равномерно корректна тогда и только тогда когда A— генератор (C_0)– косинус функции $C(t)$, при этом решение имеет вид

$$u(t) = C(t)\varphi + \int_0^t C(s)\psi ds \tag{1.2.26}$$

и при некоторых константах M и ω не зависящих от φ и ψ выполняется оценка

$$\|C(t)\varphi\| \leq Me^{\omega t}\|\varphi\|. \tag{1.2.27}$$

Новые примеры косинус–функций являются предметом изучения в последующих главах диссертации, в связи с корректной разрешимостью рассматриваемых там задач.

1.3 Дробные степени операторов.

1.3.1. Позитивные операторы.

В исследовании корректной разрешимости начально–краевых задач для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченными операторами важное место занимают дробные степени этих операторов. В частности, это относится к так называемы позитивным операторам см. [28], с. 135.

Определение 1.3.1. Оператор A с плотной областью определения будем называть *позитивным,* если при всех $t > 0$ существуют операторы $(A + tI)^{-1}$ и если

$$\|(A + tI)^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + t} \tag{1.3.1}$$

Позитивные операторы не обязательно являются производящими операторами сильно непрерывных полугрупп.

Из (1.3.1) следует, что резольвентное множество $\rho(A)$ содержит все круги $|\lambda + t| < \frac{1+t}{C}$ $(t > 0)$ и, в частности сектор

$$|\arg \lambda - \pi| < \arcsin \frac{1}{C} \tag{1.3.2}$$

В этом случае оператор A имеет обратный. При этом для $z \in G_1$ выполняется оценка

$$\|(A - zI)^{-1}\| \leq \frac{1}{dist(z, \partial G_1)}, \tag{1.3.3}$$

здесь $dist(z, \partial G_1)$– расстояние от точки z до границы ∂G_1 области G_1.

Определение 1.3.2. ([28], стр. 298) Оператор A называеться *сильно позитивным,* если он удовлетворяет более сильному, чем условие (1.4.1.) неравенству

$$(\|A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + |\lambda|} \qquad (Re\lambda \leq 0). \tag{1.3.4}$$

то есть резольвентное множество содержит сектор G_1.

Определение 1.3.3. Оператор *слабо позитивен*, если сектор G_2 имеет вершину в нуле.

Для этих операторов можно определить отрицательные дробные степени формулой

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\alpha} \lambda^{-n} R(\lambda) d\lambda,$$

где $\Gamma(\alpha)$— контур ограничивающий спектр оператора.

1.3.2. Дробные степени производящих операторов полугрупп класса C_0

Оказывается что для введения дробных степеней можно ослабить условие позитивности.

Как известно, для производящих операторов C_0-полугрупп, удовлетворяющих оценке (1.2.28)

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\omega t}, \qquad \omega > 0, t > 0, M > 0, \tag{1.3.5}$$

определены дробные степени $(-A)^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$, формулой Балакришнана (см. [13], с. 358)

$$(-A)^\alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{(T(t)-I)x}{t^{1+\alpha}} dt, \quad (x \in D(A)). \tag{1.3.6}$$

И для резольвенты оператора $A_\alpha = -(-A)^\alpha$ справедливо представление

$$(\mu I - A_\alpha)^{-1} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty (rI - A)^{-1} \frac{r^\alpha dr}{\mu^2 - 2\mu r^2 \cos \alpha\pi + r^{2\alpha}}. \tag{1.3.7}$$

Оператор A_α является производящим оператором аналитической полугруппы $T_\alpha(t)$ равностепенно непрерывной и удовлетворяющей C_0- условию.

Справедлива следующая

Теорема 1.3.1. *Если A, генератор C_0-полугруппы, удовлетворяющей оценке (1.3.5), то для полугрупп $T_\alpha(t)$, генераторами которых являются операторы $-(-A)^\alpha$, справедлива оценка*

$$\|T_\alpha(t)\| \leq Me^{-\omega^\alpha t}, \tag{1.3.8}$$

где константы M и ω из (1.2.28).

Доказательство этого факта см. в [23].

Лемма 1.3.1. *Если оператор A удовлетворяет условиям теоремы 2.1.1, то для резольвенты оператора $A_\alpha = -(-A)^\alpha$ имеет место оценка*

$$\|(\mu I - A_\alpha)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\mu + \omega^\alpha)^n}, \tag{1.3.9}$$

где константы M и ω из (1.3.5).

1.4 Уравнение 2–го порядка. Эллиптический случай.

В банаховом пространстве E рассмотривается однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Au(t), \qquad (0 \leq t \leq T) \tag{1.4.1}$$

где A–линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в E, с областью определения $D(A)$.

Приведем необходимые в дальнейшем известные результаты связанные с корректной разрешмостью краевых задач для уравнения (1.4.1), изложенные в [28] гл.III., [23], [7], [16], [8].

В [28] уравнение (1.4.1) расматривается в предположении сильной позитивности оператора A в соответствии со следующим определением

Определение 1.4.1. Решением уравнения (1.4.1) будем называть функцию $u(t)$ со значениями в $D(A)$, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую (1.4.1) на отрезке $[0, T]$.

Так как сильная позитивность оператора A гарантирует существование его дробных степеней и, в частности, операторов $A^{-\frac{1}{2}}$ и $A^{\frac{1}{2}}$, при-

чем оператор $-A^{\frac{1}{2}}$ является производящим оператором полугруппы $V(t)$ класса C_0. При этом для $z_0 \in D(A)$ и $w_T \in D(A)$ функции

$$z(t) = V(t)z_0 \qquad w(t) = V(T-t)w_T \tag{1.4.2}$$

порождают решения уравнения (1.4.1). Однако решения уравнения (1.4.1) на интервале $0 < t < T$ будут бесконечно дифференцируемы при любых $z_0, w_T \in E$.

В связи с этим вводятся следующие определения, классифицирующие понятие решения в зависимости от поведения на концах отрезка $[0, T]$.

Определение 1.4.2. Функция $u(t)$ называется *ослабленным решением* уравнения (1.4.1) если: 1) она непрерывна и имеет непрерывную первую производную на отрезке $[0, T]$ и вторую производную на $(0, T)$, то есть

$$u'(t) \in C[0, T], u'' \in C(0, T); \tag{1.4.3}$$

2) ее значения принадлежат $D(A)$ при $0 < t < T$, а функция $A^{\frac{1}{2}}u(t)$ непрерывна на всем отрезке $[0, T]$, то есть

$$u(t) \in D(A), \qquad 0 < t < T; \tag{1.4.4}$$

$$A^{\frac{1}{2}}u(t) \in C[0, T]; \tag{1.4.5}$$

3) $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1.4.1) в интервале $(0, T)$, то есть

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Au(t), \qquad t \in (0, T). \tag{1.4.6}$$

Определение 1.4.3. Функция $u(t)$ называется *обобщенным решением* уравнения (1.4.1), если: 1) она удовлетворяет условиям (1.4.3), а функция $A^{-\frac{1}{2}}u(t)$ имеет непрерывную вторую производную на $(0, T)$, то есть

$$A^{-\frac{1}{2}}u(t) \in C^1[0, T]; \tag{1.4.7}$$

2) она удовлетворяет условиям (1.4.4), (1.4.6).

В [28] рассматриваются лишь ослабленные или обобщенные решения уравнения (1.4.1).

Справедлива следующая

Теорема (1.4.1.) ([21], стр.307). *Всякое обобщенное решение уравнения (1.4.1) имеет вид*

$$u(t) = V(t)z_0 + V(T-t)w_T \tag{1.4.8}$$

и наоборот, функция вида (1.4.8) является обобщенным решением уравнения (1.4.1) при любых $z_0, w_T \in E$.

Для того чтобы обобщенное решение (1.4.8) было ослабленным, необходимо и достаточно, чтобы $z_0, w_T \in D(A^{\frac{1}{2}})$. Все обобщенные решения уравнения (1.4.1) являются аналитическими функциями от t при $0 < t < T$.

Краевая задача.

Введем в рассмотрение систему краевых условий вида

$$L_1(u) = \alpha_{11}u_0 + \alpha_{12}u_0' + \beta_{11}u_T + \beta_{12}u_T' = f_1;$$

$$L_2(u) = \alpha_{21}u_0 + \alpha_{22}u_0' + \beta_{21}u_T + \beta_{22}u_T' = f_2, \tag{1.4.9}$$

где $\alpha_{ij}, \beta_{ij} (i, j = 1, 2)$–комплексные числа, f_1, f_2–заданные элементы пространства E, $u_0 = u(0), u_0' = u'(0), u_T = u(T), u_T' = u'(T)$. Формф $L_1(u)$ и $L_2(u)$ предполагаются линейно независимыми.

Определение 1.4.4. Если ослабленное решение $u(t)$ уравнения (1.4.1) удовлетворяет краевым условиям (1.4.9), то оно называется *ослабленным решением* краевой задачи (1.4.1)-(1.4.9).

Обозначая $A^{\frac{1}{2}}z_0 = g_1$ и $A^{\frac{1}{2}}w_T = g_2$, любое ослабленное решение уравнения (1.4.1) можно записать в виде

$$u(t) = V_1(t)g_1 + V_2(t)g_2, \tag{1.4.10}$$

где $V_1(t) = V(t)A^{-\frac{1}{2}}$ и $V_2(t) = V(T-t)A^{-\frac{1}{2}}$, и g_1 и g_2–некоторые элементы из E.

Вводя операторный определитель

$$D = \begin{vmatrix} L_1(V_1) & L_1(V_2) \\ L_2(V_1) & L_2(V_2) \end{vmatrix}, \tag{1.4.11}$$

называемый *характеристическим определителем*, для решения задачи (1.4.1)-(1.4.9) получается представление

$$Du(t) = S_1(t)f_1 + S_2(t)f_2, \tag{1.4.12}$$

где

$$S_1(t) = V_1(t)L_2(V_2) - V_2(t)L_2(V_1),$$

$$S_2(t) = -V_1(t)L_1(V_2) + V_2(t)L_1(V_1). \tag{1.4.13}$$

Операторо D является линейным ограниченным в E оператором коммутирующим с операторами $A^{-\frac{1}{2}}$, $V(T)$,$V(T)A^{-\frac{1}{2}}$.

Определение 1.4.5. Всякую непрерывную на $[0, T]$ функцию $u(t)$, удовлетворяющую соотношению (1.4.12), называют *обобщенным решением* краевой задачи (1.4.1)-(1.4.9).

Таким образом для представления решения задачи (1.4.1)-(1.4.9) необходимо исследовать вопрос о существовании обратного оператора D^{-1} и его вязи с операторами $L_i(V_j)$. Здесь возникают разные возможности связанные с различными свойствами краевой задачи.

Равномерно корректные краевые задачи. Регулярные краевые условия.

Определение 1.4.6. Краевая задача (1.4.1)-(1.4.9) называется *равномерно корректной*, если для всяких f_1 и f_2 из E существует единственное обобщенное решение этой задачи, непрерывно зависящее в норме пространства $C(E)$ от f_1 и $f_2 \in E$.

Справедлива следующая

Теорема (1.4.2.) ([28], с. 316). *Для того, чтобы задача (1.4.1)-(1.4.9) была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы операторы $D^{-1}S_1(t)$ и $D^{-1}S_2(t)$ были равномерно ограниченными на $[0, T]$.*

Для равномерной корректности задачи также как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений существенную роль играет свойство регулярности краевых условий.

В рассматриваемом случае краевые условия регулярны лишь когда выполнено одно из условий

1. $d_{24} \neq 0$,

$$d_{24} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12} \\ \alpha_{22} & \beta_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

2. $d_{24} = 0$, но $|\alpha_{12}| + |\beta_{12}| > 0$ и

$$d_{23} - d_{14} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{11} \\ \alpha_{22} & \beta_{21} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.4.14}$$

3. $\alpha_{12} = \beta_{12} = \alpha_{22} = \beta_{22} = 0$, но $d_{13} \neq 0$,

$$d_{13} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Примерами регулярных краевых условий являются условие Дирихле

$$u(0) = f_1, u(T) = f_2$$

и условие Неймана

$$u'(0) = f_1, u'(T) = f_2.$$

Справедливы следующие теоремы

Теорема (1.4.3.) ([21], с. 318). *Пусть краевые условия задачи (1.4.1)-(1.4.9) регулярны. Тогда оператор D может быть представлен в одной из следующих форм*

$$\begin{aligned} 1.D &= c(1-R), \\ 2.D &= cA^{-\frac{1}{2}}(I-R), \\ 3.D &= cA^{-\frac{1}{2}}(I-R), \end{aligned} \tag{1.4.15}$$

где R–ограниченный оператор в каждом случае свой, а c– константы.

Если единица не является точкой спектра оператора R, то краевая задача (1.4.1)-(1.4.9) равномерно корректна на отрезке $[0, T]$. Все обобщенные решения задачи являются обобщенными решениями уравнения (1.4.1).

Теорема (1.4.4.) *В условиях теоремы 1.4.3. обобщенное решение будет ослабленным при любых f_1 и $f_2 \in E$ в случае 1) из (1.4.15). Для того чтобы оно былло ослабленным в остальных случаях достаточно, чтобы $f_1, f_2 \in D(A^{\frac{1}{2}})$.*

Ограниченные на бесконечности решения.

Пусть $u(t)$–обобщенное решение уравнения (1.4.1), определенное на $[0, \infty)$. Предположим, что оно ограничено:

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|u(t)\| < \infty. \tag{1.4.16}$$

Тогда справедлива

Теорема (1.4.5.) ([28], с. 324). *Для всякого $u_0 \in E$ существует единственнон, ограниченное на полуоси $[0, \infty)$ обобщенное решение уравнения (1.4.1), удовлетворяющее начальному условию $u(0) = u_0$. Это решение задается формулой*

$$u(t) = V(t)u_0, \tag{1.4.17}$$

где $V(t)$– полугруппа класса C_0, генератором которой является оператор $A^{\frac{1}{2}}$.

Таким образом из выше сказанного следует, что при подходе С.Г.Крейна к исследованию краевых задач для уравнения (1.4.1) необходимо существование операторов $A^{-\frac{1}{2}}$ и $A^{\frac{1}{2}}$, в терминах которых формулируются понятия ослабленного и обобщенного решения. При этом условие (1.3.4) влечет существование ограниченного обратного оператора A^{-1}.

Желание расширить класс корректных задач для уравнений вида (1.4.1) привело в [7], [8], [16] к введению понятия а-позитивных операторов.

Определение 1.4.7. Замкнутый линейный оператор A с плотной в E областью определения $D(A)$ называется *а-позитивным*, если для всех $n = 1, 2, ...$ числа $-\frac{\pi^2 n^2}{a^2}$ принадлежат резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A и выполняется неравенство

$$\|(A + (\frac{n\pi}{a})^2)^{-1}\| \leq \frac{a^2}{(n\pi)^2}.$$

Класс а-позитивных операторов является более широким, чем класс сильно позитивных операторов. В частности, он содержит операторы с неограниченным обратным A^{-1}. Вместе с тем этот класс согласуется с оператором заданным дифференциальным выражением $Lu = u''(t)$ и граничными условиями $u(0) = u(a) = 0$, в том смысле, что спектр$-((n\pi)/a)^2$

оператора L содержится в резольвентном множестве $\rho(A)$ оператора A и выполняется оценка $\|(A+((n\pi)/a)^2)^{-1}\| \leq a^2/(n\pi)^2$. В связи с этим вводится понятие корректной задачи Дирихле

$$u(0)=\varphi, u(a)=\psi \tag{1.4.18}$$

для уравнения (1.4.1).

Определение 1.4.8. Задача Дирихле (1.4.1)-(1.4.18) называется корректной, если она однозначно разрешима для любых $\varphi, \psi \in D(A)$ и существует $c>0$ такое, что для всех решений $u(t)$ справедливы неравенства

$$\|\int_0^a \sin\frac{nt\pi}{a}u(t)dt\| \leq \frac{c}{n}(\|\varphi\|+\|\psi)\|) \qquad (n=0,1,...).$$

В [16], [17] выясняется, что задача (1.4.1)-(1.4.18) корректна тогда и только тогда, когда оператор A является а-позитивным. При этом существует $c>0$ такое, что для всякого решения этой задачи имеет место оценка

$$\sup_{t\in[0,a]}\|u(t)\| \leq c(\|u(0)\|+\|u(a)\|).$$

В [36], [39] М.Н. Небольсиной рассматривается задача Неймана

$$u''(t)=Au(t), \qquad t\in[0,a], \tag{1.4.19}$$

$$u'(0)=\varphi, \qquad u'(a)=\psi. \tag{1.4.20}$$

Требуется найти дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения (1.4.19) удовлетворяющее условиям (1.4.20) ($\varphi, \psi \in D(A)$).

Определение 1.4.9.Задача Неймана (1.4.19)-(1.4.20) называется *корректной*, если она однозначно разрешима для всех $\varphi, \psi \in D(A)$ и существует $c>0$ такое, что для всех решений $u(t)$ справедливы неравенства

$$n^2\|\int_0^a \cos\frac{nt\pi}{a}u(t)dt\| \leq c(\|\varphi\|+\|\psi)\|).$$

Теорема 1.4.6. *Задача (1.4.19)-(1.4.20) корректно разрешима тогда и только тогда, когда при всех* $n = 0, 1, ...$ *точки* $(-n^2\pi^2)/a^2 \in \rho(A)$ *и выполняется оценка*

$$n^2\|(A + \frac{n^2\pi^2}{a^2}I)^{-1}\| < \infty.$$

Заметим, что если задача (1.4.19)-(1.4.20) корректно разрешима, то в силу ее линейности существуют линейные операторы (см. [21], стр. 309) $S(t, A)$ такие, что $S(0, A) = I, S(a, A) = 0$, $D(A) \subset D(S(t, A))$, и для любого $x \in D(A)$ $(d^2S(t, A)x)/dt^2 = AS(t, A)x, t \in [0, a]$. В таких обозначениях решением уравнения (1.4.19) с условиями $u'(0) = \varphi, u'(a) = \psi$ является функция $u(t) = S(t, A)\varphi + S(a - t, A)\psi$.

В соответствии со схемой, изложенной в [28] при исследовании корректной разрешимости задач, связанных с уравнением

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Au(t), \qquad (0 \le t \le T) \tag{2.2.1}$$

в диссертации проводятся эти исследования для оператора A, удовлетворяющего условию (1.2.28). Как было доказано, это обеспечивает существование дробных степеней оператора A, для резольвент которых выполняется оценка (2.1.3). Для таких операторов также определена отрицательная дробная степень $A^{-\frac{1}{2}} = A^{-1}A^{\frac{1}{2}}$.

Справедливо утверждение:*если* $V(t) = T_{\frac{1}{2}}(t)$, *то функция*

$$u(t) = V(t)z_0 + V(T - t)z_T, \tag{2.2.2}$$

является ослабленным решением уравнения (2.2.1).

В дальнейшем нам понадобятся следующие теоремы.

Теорема 2.2.1. *Если оператор* A *в уравнении (2.2.1) такой, что оператор* $-A$ *является генератором полугруппы* $T(t)$ *класса* C_0 *с условием (1.3.5), то всякое обобщенное решение уравнения (2.2.1) имеет*

вид (2.2.2), и, наоборот, функция (2.2.2) является обобщенным решением уравнения (2.2.1) при любых $z_0, z_T \in E$.

Для того чтобы обобщенное решение (2.1.5) было ослабленным, необходимо и достаточно чтобы $z_0, z_T \in D(A^{1/2})$. Все обобщенные решения являются аналитическими функциями от t при $t \in (0, T)$.

Результат о представлении ограниченного решения уравнения (2.2.1), рассмотренного на полуоси $[0, \infty)$, в нашем случае, содержит следующая

Теорема 2.2.2. *Если A оператор, удовлетворяет условиям теоремы 2.2.1, то для любого $u_0 \in E$ существует единственное ограниченное на полуоси $[0, \infty)$ обобщенное решение уравнения (2.2.1), удовлетворяющее условию $u(0) = u_0$. Это решение задается формулой*

$$u(t) = V(t)u_0, \tag{2.2.3}$$

и справедлива оценка

$$\|u(t)\| \leq Me^{-\sqrt{\omega}t}\|u(0)\|. \tag{2.2.3}$$

Это решение будет ослабленным, если $u_0 \in D(A^{1/2})$.

Теорема 2.2.3. *Если оператор A удовлетворяет условиям теоремы 2.2.2. при $M = 1$ и $\omega = 0$, то для любого $u_0 \in D(A^{\frac{1}{2}})$ существует единственное ограниченное на полуоси $[0, \infty)$ ослабленное решение удовлетворяющее условию $u(0) = u_0$. Это решение задается формулой (2.2.3), и справедлива оценка*

$$\|u(t)\| \leq \|u(0)\|. \tag{2.2.5}$$

Глава 2

C_0– операторные многочлены и корректная разрешимость с дробными производными Римана–Лиувилля в гипервесовых пространствах

В настоящее время все более актуальными становятся приложения дифференциальных уравнений с дробными производными в механике, гидродинамике, теории тепломассопереноса, радиофизике и т.д.(см.[1], [2], [33], [45], [49]). Однако, как правило, проводимые при этом исследования касаются только вопросов существования решений соответствующих задач и их интегро-дифференциальных представлений. Вопрос же устойчивости этих решений по исходным данным, один из основных при установлении корректной разрешимости, в этих работах не обсуждается.

Как известно, понятие корректной постановки задач математической физики, было введено Ж.Адамаром в связи с определением наиболее "естественных" граничных условий для различных типов дифференци-

альных уравнений, что на языке функционального анализа означает следующее: пусть U и F-метрические пространства, рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f, \tag{2.0.1}$$

где $f \in F$, $u \in U$. Задача (1) называется *корректной*, если выполнены условия:

1) уравнение (1) разрешимо для любых $f \in F$ единственным образом

2) оператор A^{-1}, определенный на всем F, является непрерывным, т.е. имеет место неравенство

$$\|A^{-1}f\|_U \leq M\|f\|_F, \tag{2.0.2}$$

где константа M не зависит от $f \in F$. Важное место в классе корректных задач занимают задачи в которых U и F плотно вложены в некоторое банахово пространство B и неравенство (2) понимается в смысле $\|.\|_B$. Такие задачи будем называть *равномерно корректными.* Классические результаты в исследовании таких задач для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах получены С.Г.Крейном. Здесь фундаментальную роль играет теория полугрупп преобразований, развитая в работах Э.Хилле, Р.Филлипса, К.Иосиды и др.

В настоящей диссертации устанавливается равномерно корректная разрешимость задач для дифференциальных уравнений с дробными производными. При этом применяемые здесь методы функционального анализа позволяют рассматривать случаи когда не возможно применение преобразования Лапласа, которое является основным в дробно-дифференциальных моделях.

2.1 Корректная разрешимость C_0– полиномиальной задачи

Пусть E-банахово пространство и A-генератор полугруппы преобразований $U(t)$, $t \geq 0$ класса C_0, действующей в E и удовлетворяющей оценке

$$\|U(t)\| \leq Me^{-\omega t}. \tag{2.1.1}$$

Это значит, что область определения $\mathbb{D}(A)$ оператора A плотна в E, а область его значений $\mathbb{R}(A)$ совпадает со всем пространством E. Резольвентное множество этого оператора содержит комплексную полуплоскость $Re\lambda > -\omega$ и для степеней резольвенты $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ выполнены оценки

$$\|R^m(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{(Re\lambda + \omega)^m}, \tag{2.1.2}$$

$m = 1, 2, ...,$ M и ω из (1.1).

В соответствии с [21] для оператора A определены многочлены

$$P_n(A)u = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k u, \tag{2.1.3}$$

$u \in \mathbb{D}(A^n)$, $a_k \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$-комплексная плоскость. При этом $\mathbb{D}(A^n)$ плотно в E, и спектр оператора $P_n(A)$ совпадает с множеством $P_n(\Lambda(A))$, где $\Lambda(A)$-спектр оператора A [36], с.125, [37].

Многочлены $P_n(A)$ будем называть C_0-операторными многочленами (см.[21]).

Пользуясь подходом В.П.Маслова, примененного в [36] с.12 к операции $A = \frac{d}{dx}$, обозначим множество операторов вида (2.1.3) через $K[A]$, а через $K[x]$ обозначим множество полиномов над полем комплексных чисел $x \in \mathbb{C}$.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \tag{2.1.4}$$

Также как и в [36] с.12 полином $P_n(x)$ отвечающий оператору $P_n(A)$ будем называть *символом оператора* $P_n(A)$.

Очевидно, что множества $K[x]$ и $K[A]$ изоморфны, при этом сумма полиномов $K[x]$ переходит в сумму операторов $K[A]$, а произведение в произведение. В силу этого изоморфизма каждому разложению

$$P_n(x) = a_n \prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_i)^{k_i}, \sum_{i=1}^{n} k_i = m$$

соответствует представление

$$P_n(A) = a_n \prod_{i=1}^{m} (A - \alpha_i I)^{k_i}, \tag{2.1.5}$$

где α_i-корни полинома $P_n(x)$, k_i-их кратность, I-тождественный оператор.

Рассмотрим задачу отыскания решения уравнения

$$\mathbb{A}u = P_n(A)u = f, \tag{2.1.6}$$

где $u \in \mathbb{D}(A^n), f \in E$.

Здесь справедлива следующая

Теорема 2.1.1. Если корни многочлена $P_n(x)$ принадлежат резольвентному множеству оператора A, то задача (2.1.6) равномерно корректна, ее решение представимо в виде

$$u = \frac{1}{a_n} \prod_{i=1}^{m} R^{k_i}(\alpha_i, A) f, \tag{2.1.7}$$

где $R(\alpha_i, A)$-значения резольвенты оператора A в точках α_i; и справедлива оценка

$$\|u\| \leq \frac{M}{|a_n|} \prod_{i=1}^{m} (Re\alpha_i + \omega)^{-k_i} \|f\|. \tag{2.1.8}$$

Доказательство. Существование и единственность решения задачи (2.1.6) следует из непосредственного применения оператора $\mathbb{A}$ к элементу u,

представленным соотношением (2.1.7), и из того, что ядро резольвенты генератора полугруппы класса C_0 состоит из одного нуля.

Для доказательства неравенства (2.1.8) воспользуемся известным соотношением

$$R(\lambda, A)f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) f dt, \qquad Re\lambda > -\omega, \tag{2.1.9}$$

из которого следует более общее равенство

$$\prod_{i=1}^{p} R(\lambda_i, A)f = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\sum_{i=1}^{p} \lambda_i t_i} U(\sum_{i=1}^{p} t_i) f dt_1 \dots dt_p. \tag{2.1.10}$$

Пользуясь (2.1.10), оценим

$$\| \prod_{i=1}^{p} R(\lambda_i, A)f \| \leq \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\sum_{i=1}^{p} \lambda_i t_i} \| U(\sum_{i=1}^{p} t_i) \| dt_1 \dots dt_p \| f \| \leq$$

$$\leq \frac{M}{\prod_{i=1}^{p} (Re\lambda_i + \omega)} \| f \|. \tag{2.1.11}$$

Наконец, из (2.1.7), оценки (2.1.11)), получаем (2.1.8) и доказательство теоремы.

Следствие 2.1.1. *Если корни α_i действительные, то оценка принимает вид*

$$\| u \| \leq \frac{M}{|P_n(-\omega)|} \| f \|. \tag{2.1.12}$$

В качестве другого следствия, рассмотрим задачу о разрешимости уравнения

$$P_n(A)u = Q_r(A)f, \tag{2.1.13}$$

где $Q_r(A) = \sum_{j=0}^{r} b_j A^j$-$C_0$ операторный многочлен степени $r < n$, $f \in \mathbb{D}(A^r)$.

В этом случае, применяя оператор $\mathbb{A}^{-1}$ в (2.1.13) получим представление решения

$$u = \mathbb{A}^{-1} f = \prod_{i=1}^{m} R^{k_i}(\lambda_i, A) Q_r(A) f. \tag{2.1.14}$$

Отсюда, пользуясь очевидным неравенством

$$\|AR(\lambda, A)\| \leq 1 + |\lambda|\|R(\lambda, A)\|, \tag{2.1.15}$$

получаем доказательство ограниченности оператора $\mathbb{A}^{-1}$.

2.2 Гипервозрастающие и гиперубывающие весовые функции

Обозначим через Φ_m^+ класс монотонно возрастающих при $t > 0$ функций $\rho_+(t) > 0$, и таких, что при некотором $m > 0$ выполняется соотношение

$$\rho_+'(t) - m\rho_+(t) \geq 0. \tag{2.2.1}$$

Так как из (2.2.1) при $t \to \infty$ следует оценка $\rho_+(t) \geq \rho_0 \exp(mt)$ $(\rho_0 > 0)$, то классы таких весовых функций будем называть *гипервозрастающими*, а $inf\, m$, прикотором выполняется (2.2.1) будем называть *символом* гипервеса веса $\rho_+(t)$. Например, для весов вида

$$\rho_+(t) \;=\; t\exp(\exp\, t), \qquad m = 1. \tag{2.2.2}$$

Заметим, что веса как угодно сильно отличающиеся порядком роста при $t \to \infty$ могут иметь одинаковые символы.

Нетрудно видеть, что символы произведения весов складываются. Так если m_1 порядок роста веса ρ_1, а m_2 – веса ρ_2, то для $\rho_+(t) = \rho_1(t) \cdot \rho_2(t)$ имеем соотношения

$$\rho_+'(t) = \rho_1'(t) \cdot \rho_2(t) + \rho_1(t) \cdot \rho_2'(t) \geq m_1\rho_1 \cdot \rho_2 + m_2\rho_1\rho_2 = (m_1 + m_2)\rho_+.$$

Отсюда при $m + \lambda > 0$ следуют оценки

$$e^{\lambda t}\rho_+(t) \leq \frac{1}{m+\lambda}(e^{\lambda t} \cdot \rho_+(t))', \tag{2.2.3}$$

$$\int\limits_0^t e^{\lambda s} \cdot \rho_+(s)ds \leq \frac{e^{\lambda t}}{m+\lambda}\rho_+(t). \tag{2.2.4}$$

Кроме того, по индукции устанавливается оценка для n-кратного интеграла, $n = 1, 2....$

$$J_+^n \rho_+(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^t (t-s)^{n-1}\rho_+(s)ds \leq \frac{\rho_+(t)}{m^n}. \tag{2.2.5}$$

Очевидно, что при соответствующем m классы Φ_m^+ содержат как угодно быстро растущие на бесконечности функции.

Классы Φ_m^-. Наряду с этим введём также сопряженные классы Φ_m^- весовых положительных функций $\rho_-(t)$, монотонно убывающих и таких, что для некоторого $m > 0$ выполняется соотношение

$$\rho_-'(t) + m\rho_-(t) \leq 0. \tag{2.2.6}$$

Нетрудно видеть, что если $\rho_+ \in \Phi_m^+$, то $\frac{1}{\rho_+} = \rho_- \in \Phi_m^-$.

Таким образом, при $t \to \infty$ функция $\rho_-(t)$ могут убывать как угодно быстро. В связи с этим мы их будем называть *гиперубывающими.* Заметим, что при $t \to 0$ они могут как угодно быстро расти.

Например, веса $\rho_n(t) = t^{-n}\exp(-\exp(t))$ удовлетворяют условию (2.2.6) при $m = \min\limits_{t>0}(e^t + \frac{n}{t})$.

$\sup m$, при котором выполняется (2.2.6) будем называть *символом* гипервеса $\rho_-(t)$.

Заметим, что символ возрастания функции $\rho_+(t)$ совпадает с символом убывания функции $\rho_-(t) = \frac{1}{\rho_+(t)}$.

Кроме того, веса $\rho_-(t)$ обладают следующим очевидным свойством: $\rho_-(\infty) = 0$ и для них при $\lambda + m > 0$ выполняются оценки

$$J_-\rho_-(t) = \int\limits_t^\infty e^{-\lambda s}\rho_-(s)ds \leq \frac{\rho_-(t)\exp(\lambda t)}{m+\lambda}, \tag{2.2.7}$$

$$J_-^n\rho_-(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_t^\infty (s-t)^{n-1}\rho_-(s)ds \le \frac{\rho_-(s)}{m^n},\ n = 1, 2, \dots . \qquad (2.2.8)$$

Полумультипликативные гипервесовые функции. Важными подклассами гипервесовых функций Φ_m^+ и Φ_m^- являются функции связанные с полумультипликативными функциями рассмотренными в [50], с. 154, которые определяются как действительные, измеримые функции на $\mathbb{R}^+$, удовлетворяющие условию *полумультипликативности*

$$0 \le \psi_-(t+s) \le \psi_-(t)\psi_-(s), \qquad (2.2.9)$$

при всех

$$t, s \in \mathbb{R}^+, \psi_-(0) = 1 \qquad (2.2.10)$$

Так как здесь мы будем рассматривать и функции $\psi_+(t)$, удовлетворяющие условию обратному (2.2.9), то есть

$$\psi_+(t)\psi_+(s) \le \psi_+(t+s), \qquad (2.2.11)$$

то классы функций, удовлетворяющие (2.2.9) будем называть *левомультипликативными* и обозначать Ψ^-, а классы, удовлетворяющие условиям (2.2.10) и (2.11)— *правомультипликативными* и обозначать через Ψ^+.

Очевидно что из $\psi_+ \in \Psi^+$ следует $\frac{1}{\psi_+} = \psi_- \in \Psi^-$ и наоборот, из $\psi_- \in \Psi^-$ следует $\psi_+ = \frac{1}{\psi_-} \in \Psi^+$.

На связь классов Ψ^+, Ψ^-, Φ_m^+, Φ_m^- указывает следующая

Лемма 2.2.1. *Если $\psi_+(t)$ непрерывно дифференцируема и $\psi'_+(t) > 0$, то справедливо включение $\Psi^+ \subset \Phi^+_{\psi'(0)}$; если $\psi_-(t)$ непрерывнодифференцируема и $\psi_-(t) < 0$, то $\Psi^- \subset \Phi^-_{\psi'_-(0)}$.*

Доказательство. В случае класса Ψ^+ из (2.2.11) следует неравенство

$$\frac{\psi_+(t)[\psi_+(s)-1]}{s} \le \frac{\psi_+(t+s)-\psi_+(t)}{s}. \qquad (2.2.12)$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $s \to 0$, получаем выполнение условия

$$\psi'_+(0)\psi_+(t) \le \psi'_+(t), \tag{2.2.13}$$

доказывающее справедливость леммы в случае классов ψ_+.

Доказательство для случая ψ^- следует из соотношения $\psi_-(t) = \frac{1}{\psi_+(t)}$.

Теперь покажем, что классы Φ_m^+ и Φ_m^- шире Ψ^+ и Ψ^-, соответственно. Для этого, наряду с функциями, заданными (2.2.2) рассмотрим функции вида

$$\psi_1(t) = \exp\left[\int_0^t \varphi(\xi)\,d\xi\right], \qquad \psi_2(t) = \psi_1(t) - 1, \tag{2.2.14}$$

где функция $\varphi(s)$ монотонно возрастает и удовлетворяет условию $\varphi(s) \ge m > 0$.

Покажем, что функции (2.2.14) удовлетворяют условию (2.2.11). Для этого оценим

$$\psi_1(t+s) = \exp\left[\int_0^{t+s} \varphi(\xi)\,d\xi\right] = \exp\left[\int_0^t \varphi(\xi)\,d\xi + \int_t^{t+s} \varphi(\xi)\,d\xi\right] =$$

$$= \exp\left[\int_0^t \varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^s \varphi(\tau+t)\,d\tau\right] \ge$$

$$\ge \exp\left[\int_0^t \varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^s \varphi(\tau)\,d\tau\right] = \psi_1(t)\cdot\psi_1(s). \tag{2.2.15}$$

Здесь мы воспользовались возрастанием функции $\varphi(s)$. Аналогичное неравенство для функции ψ_2 доказывается с помощью соотношения

$$\psi_2(t+s) = \psi_1(t+s) - 1 = [\psi_1(t)-1][\psi_1(s)-1] + \psi_1(t) + \psi_2(t) - 2 \ge$$

$$\ge [\psi_1(t)-1][\psi_1(s)-1] = \psi_2(t)\cdot\psi_2(s).$$

Таким образом, $\psi_1 \in \Psi^+$, но $\psi_2 \overline{\in} \Psi^+$, так как $\psi_2(0) = 0$. Отсюда же следует, что и $\frac{1}{\psi_1} \in \Psi^-$, но $\frac{1}{\psi_2} \overline{\in} \Psi^-$. Кроме того, заметим, что и функции

вида (2.2.2) также не принадлежат Ψ^+, в силу того, что для них не выполнено условие (2.2.11). Такое же замечание относится и к функциям вида $\psi_n(t) = t^{-n}\exp(-t)$.

В дальнейшем, мы будем использовать только весовые пространства Φ_m^+ и Φ_m^-.

2.3 Операторы дробного интегрирования и дифференцирования Римана – Лиувилля в пространствах $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$

На полуоси $t \in [0, \infty)$ будем рассматривать гипервесовые пространства $\mathfrak{C}_{\rho_+^{(0)}}$ и $\mathfrak{C}_{\rho_-}$ непрерывных функций $f(t)$, для которых конечны нормы

$$\|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}} = \sup_{t>0}\left|\frac{f(t)}{\rho_+(t)}\right|, \quad \rho_+ \in \Phi_m^+;$$

$$\|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_-}} = \sup_{t>0}\left|\frac{f(t)}{\rho_-(t)}\right|, \quad \rho_- \in \Phi_m^-.$$

Функции $f \in \mathfrak{C}_{\rho_+}(0)$ удовлетворяют условию $f(0) = 0$. Известно, что $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ – банаховы пространства.

Рассмотрим операторы $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$ заданные дифференциальными выражениями

$$l_+\varphi(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad l_-\varphi(t) = -\frac{d\varphi(x)}{dt} \tag{2.3.1}$$

и областями определения:

$D(\mathfrak{D}_+)$ множество значений оператора $J_+\varphi = \int\limits_0^t \varphi(s)ds$ определенного на $\mathfrak{C}_{\rho_+}$.

$D(\mathfrak{D}_-)$ множество значений оператора $J_-\varphi = \int\limits_t^\infty \varphi(s)ds$ определенного на $\mathfrak{C}_{\rho_-}$.

Справедлива следующая

Теорема 2.3.1. Операторы $-\mathfrak{D}_{\pm}$ является генераторами полугрупп $T(x, -\mathfrak{D}_{\pm})$ класса C_0, для которых выполняется оценка

$$\|T(x, \mathfrak{D}_{\pm})\varphi\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}} \leq e^{-mx}\|\varphi\|_{\mathfrak{C}_{\rho_{\pm}}}, \tag{2.3.2}$$

где m – порядок роста или убывания соответствующего веса.

Доказательство проведём для $\mathfrak{D}_+$. Для этого рассмотрим интеграл.

$$J(\lambda)f(t) = \int\limits_0^t e^{\lambda(s-t)} f(s)ds. \tag{2.3.3}$$

В предположении $f \in \mathfrak{C}_{\rho_+}$ и $\lambda + m > 0$ оценим

$$|J(\lambda)f(t)| \leq \int\limits_0^t e^{\lambda(s-t)}|f(s)|ds \leq \|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}} \cdot e^{-\lambda t} \int\limits_0^t e^{\lambda s}\rho_+(s)ds.$$

Отсюда, пользуясь оценкой (2.2.4), после очевидных операций, получаем неравенство

$$\|J(\lambda)f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}} \leq \frac{\|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}}}{\lambda + m}. \tag{2.3.4}$$

Таким образом, при $\lambda > -m$ операторы $R(\lambda)$ определены и ограничены на пространстве $\mathfrak{C}_{\rho_+}$.

Меняя порядок интегрирования, нетрудно установить, что для них выполняется резольвентное тождество

$$J(\lambda) - J(\mu) = (\mu - \lambda)J(\lambda)J(\mu). \tag{2.3.5}$$

Следовательно (см.[13], с.299), операторы $J(\lambda)$ являются псевдорезольвентами имеющие общее нуль-подпространство $N(J)$, и общую область значений. Кроме того, нетрудно видеть, что нуль пространство $N(J)$ для $J_+f(t) = \int\limits_0^t f(s)ds$ состоит из одного нуля, то есть $N(J_+) = 0$.

Отсюда, по теореме 1, [13], с.300, получаем, что псевдорезольвента $J(\lambda)$ является резольвентой оператора $-\mathfrak{D}_+$.

Наконец, оценка (2.3.4), в силу теоремы Хилле–Филлипса–Феллера–Миадеры–Иосиды, показывает, что оператор $-\mathfrak{D}_+$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $U(x, -\mathfrak{D}_+)$ класса C_0 с оценкой (2.3.2).

Случай $\mathfrak{D}_-$ рассматривается аналогично.

Из теоремы 2.3.1 следует

Теорема 2.3.2. Для операторов $\mathfrak{D}_\pm$ определены дробные степени $\mathfrak{D}_\pm^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ равенствами

$$\mathfrak{D}_\pm^\alpha \varphi(t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int\limits_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (\lambda I + \mathfrak{D}_\pm)^{-1} \mathfrak{D}_\pm \varphi(t) d\lambda \tag{2.3.6}$$

для $\varphi \in D(\mathfrak{D}_\pm)$.

Доказательство следует из формулы Балакришнана (1.3.5), записанной для $A = -\mathfrak{D}_\pm$ и оценки (2.2.3).

Далее, подставляя в (2.3.6) резольвенты

$$(\lambda I + \mathfrak{D}_+)^{-1})\varphi(t) = R(\lambda, -\mathfrak{D}_+)_\varphi = \int\limits_0^t e^{\lambda(s-t)} \varphi(s) ds$$

и

$$(\lambda I + \mathfrak{D}_-)^{-1})\varphi(t) = R(\lambda, -\mathfrak{D}_-)_\varphi = -\int\limits_t^\infty e^{\lambda(t-s)} \varphi(s) ds$$

получаем представление операторов $\mathfrak{D}_\pm^\alpha$ через дробные производные в форме Капуто (см. [49], с.168)

$$\mathfrak{D}_+^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} \varphi'(s) ds, \tag{2.3.7}$$

$$\mathfrak{D}_-^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_t^\infty (s-t)^{-\alpha} \varphi'(s) ds, \tag{2.3.8}$$

Их можно записать и в форме Римана – Лиувилля

$$\mathfrak{D}_+^\alpha\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}\varphi(s)ds, \tag{2.3.9}$$

$$\mathfrak{D}_-^\alpha\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int\limits_t^\infty (t-s)^{-\alpha}\varphi(s)ds, \tag{2.3.10}$$

в случае (2.3.9) в силу равенства $\varphi(0) = 0$, а в случае (2.3.10) – в силу соотношений

$$\int\limits_t^\infty (s-t)^{-\alpha}\varphi'(s)ds = \int\limits_0^\infty \tau^{-\alpha}\varphi'_\tau(\tau+t)d\tau =$$
$$= \int\limits_0^\infty \tau^{-\alpha}\varphi'_t(\tau+t)d\tau = \tfrac{d}{dt}\int\limits_0^\infty \tau^{-\alpha}\varphi(\tau+t)d\tau = \tfrac{d}{dt}\int\limits_t^\infty (s-t)^{-\alpha}\varphi(s)ds$$

Заметим, что отрицательные дробные степени $\mathfrak{D}_+^{-\alpha}$ операторов $\mathfrak{D}_\pm$ в силу (1.2.9) определены соотношением

$$\mathfrak{D}_\pm^{-\alpha}\varphi = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int\limits_0^\infty \lambda^{-\alpha}R(\lambda, -\mathfrak{D}_\pm)\varphi d\lambda, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{2.3.11}$$

Операторы $\mathfrak{D}_\pm$ являются генераторами C_0-полугруппы. Отсюда, пользуясь неравенством (2.3.4), получаем оценку

$$\|\mathfrak{D}_\pm^{-\alpha}\varphi\|_{\rho_\pm} \le \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^\alpha(\lambda+m)}\|\varphi\|_{\rho_\pm} = \frac{1}{m^\alpha}\|\varphi\|_{\rho_\pm}. \tag{2.3.12}$$

показывающую ограниченность операторов $\mathfrak{D}_\pm^{-\alpha}$ в пространствах $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ соответственно.

Далее, подставляя в (2.3.11) значение резольвент $R(\lambda, -\mathfrak{D}_\pm)$, также как и в случае (2.3.9), (2.3.10), получаем для $\mathfrak{D}_\pm^{-\alpha}$ представления в виде дробных интегралов Римана-Лиувилля

$$\mathfrak{D}_+^{-\alpha}\varphi = I_+^\alpha\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)ds, \tag{2.3.13}$$

$$\mathfrak{D}_{-}^{-\alpha}\varphi = -I_{-}^{\alpha}\varphi = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{t}^{\infty}(s-t)^{\alpha-1}\varphi(s)ds. \qquad (2.3.14))$$

Важным фактом, следующим из (2.3.12)–(2.3.14) является

Следствие 2.3.1. Пространство $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ является инвариантными относительно операции дробного интегрирования Римана–Лиувилля.

Как известно см. [9], с.92 для пространств $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ со степенными весами $\rho(t) = (1+t)^{\gamma}$ этот факт не имеет места.

2.4 Дифференциальные уравнения рационального порядка.

Применим полученные результаты к задаче нахождения функции $u(x)$, $x \in (0,\infty)$ имеющей все производные порядка $m\gamma$, $0 < \gamma < 1$, $m = 0, 1, ..., n$ и, удовлетворяющей уравнению

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \mathfrak{D}_{\pm}^{m\gamma} u(x) = f(x), \qquad a_n \neq 0. \qquad (2.4.1)$$

где $f \in \mathfrak{C}_{\rho_\pm}$.

Дифференциальные уравнения такого вида с правыми дробными производными Римана-Лиувиля, но не как операторные уравнения, рассматривались в монографии В.В. Учайкина [49], с. 219–222, где с помощью преобразования Лапласа получено решение задачи Коши для уравнения вида (2.4.1) с начальными условиями

$$u(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0, \qquad (2.4.2)$$

которое выписано в виде

$$u(x) = \int_0^x G(x-s)ds, \qquad (2.4.3)$$

где относительно функции Грина $G(x)$ сказано, что она находится из характеристического многочелена $P_n(\lambda^\gamma)$ с помощью обратного преобразования Лапласа

$$G(x) = L^{-1}\{P_n^{-1}(\lambda(\alpha)\}(x). \tag{2.4.4}$$

При этом, проблема устойчивости полученного решения к погрешностям исходных данных не связанных с введением соответствующих простанств в [49] не обсуждался.

В нашем случае нетрудно видеть, что следствием теоремы 2.1.1 является

Теорема 2.4.1. Задача (2.4.1) равномерно корректно разрешима в пространствах $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ соответственно. Ее решение имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{a_n}\sum_{i=0}^{n} R^{k_i}(\alpha_i, \mathfrak{D}_\pm^\gamma) f(x), \tag{2.4.5}$$

и справедливо неравенство

$$\|u\|_{\rho_\pm} \leq \frac{M}{m^\gamma \prod_{i=1}^{n}(Re\alpha_i + m)^{k_i}} \|f\|_{\rho_\pm}, \tag{2.4.6}$$

где α_i-корни многочлена $P_n(\alpha) = \sum_{m=0}^{n} a_m \alpha^m$, k_i-их кратности, m-символ веса ρ_+ или ρ_- соответственно.

Заметим, что дифференциальные уравнения с левыми производными вида в [49] также не рассматривался. Кроме того, судя по фундаментальности и полноты обзора по рассматриваемой тематике монографии В.В. Учайкина (512 с.), они не рассматривались и другими авторами.

Кроме того, используя представление решения уравнения (2.1.6), полученая в [21] в виде C_0–интеграла Лапласа (см. также[20])

$$u = \int_0^\infty q(t) T(t, A) f dt, \tag{2.4.7}$$

где $T(t,A)$— полугруппа, порожденная оператором A, а $q(t)$— решение задачи Коши

$$P_n\left(-\frac{d}{dt}\right)q(t)=\delta(t) \tag{2.4.8}$$

$$q(0)=\cdots=q^{(n-1)}(0)=0. \tag{2.4.9}$$

Получаем справедливость следующего утверждения

Теорема 2.4.2. При выполнении условий теоремы 2.4.1. решение уравнения

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \mathfrak{D}_+^{m\gamma} u(x)=f(x), \tag{2.4.10}$$

имеет вид

$$u(x)=\int_0^\infty q(t)T(t,-\mathfrak{D}^\gamma)f dt, \tag{2.4.11}$$

где

$$T(t,-\mathfrak{D}_+^\gamma)=\int_0^\infty g_\gamma(t,s)T(s,\mathfrak{D}_+ f(s)ds, \tag{2.4.12}$$

$g_\gamma(t,s)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega-i\infty}^{\omega+ß\infty} e^{t\lambda-s\lambda^\gamma}d\lambda$— обратное преобразование Лапласа от функции $e^{-s\lambda^\gamma}$ см. [13], с. 357.

Решение задачи 2.4.1 с $\mathfrak{D}_+$:

$$u_+(x)=\int_0^\infty q(t)\int_0^\infty g_\gamma(t,s)T(s,\mathfrak{D}_+)f(s)dsdt=$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty q(t)g_\gamma(t,s)dt\right)T(s,\mathfrak{D}_+)f(x)dsdt=$$

$$=\int_0^x\left(\int_0^\infty q(t)g_\gamma(t,s)dt\right)f(x-s)ds=$$

$$=\int_0^x G(s)f(x-s)ds=f*G(x). \tag{2.4.13}$$

Решение задачи 2.4.1 с $\mathfrak{D}_-$:

$$u_-(x)=\int_x^\infty\left(\int_0^\infty q(t)g_\gamma(t,s)dt\right)f(s-\gamma)ds=$$

$$= \int_x^\infty G(s) f(s-x) ds, \tag{2.4.14}$$

где $G(s) = \int_0^\infty q(t) g_\gamma(t,s) dt$.

Замечание 2.4.1. Уравнение (2.4.1), в случае производных Капутто, рассматривается в [49] с.222, когда $f(x)$ преобразуема по Лапласу, при этом приводится представление решения

$$u(x) = \int_0^x G(x-s) f(s) ds, \tag{2.4.15}$$

где $G(s)$-соответствующая функция Грина.

Таким образом, оценка (2.4.6) показывает ограниченность интегрального оператора (2.4.5) в пространствах $\mathfrak{C}_{\rho_+}$.

Отметим, что для $\mathfrak{D}_-^\gamma$ разрешимость задачи (2.4.1) вообще ранее не рассматривалась.

Глава 3

Корректная разрешимость задач с дифференциальными операторами Адамара–Эйлера

На $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^+$ будем рассматривать дифференциальные операторы выражающиеся через операцию

$$l = x\frac{d}{dx} \tag{3.0.1}$$

с соответствующими областями определения.

Уравнение с такими операторами представляют важный класс в теории дифференциальных укравнений. Например, к их числу относятся классические уравнения Эйлера

$$\sum_{m=0}^{n} a_m x^m \frac{d^m u(x)}{dx^m} = f(x), \qquad a_m \in \mathbb{C}. \tag{3.0.2}$$

Конструкции дробного порядка для операций (3.0.1) рассматривались Ж.Адамаром, как указано в [47], с. 252.

Следует также отметить, что закон реактивного движения объекта (ракеты) с переменной массой описывается уравнением

$$m\frac{dv(m)}{dm} = V(m), \tag{3.0.3}$$

где $m(t)$— масса горючего в момент t, $v(m)$— скорость ракеты, $V(m)$— скорость исктекания горючего из ракеты [3], с. 390.

Интересное приложение операторов Адамара при прогнозировании временных рядов с использованием уравнения

$$\sum_{m=0}^{3} a_m l^3 u(t) = K, \qquad a_m \in \mathbb{R}$$

приводится в работе Р.Р. Нигматуллина и А. Тенрейро Махадо [43].

3.1 Операторы Адамара–Эйлера и сильно непрерывные группы и полугруппы в $L_{p,\omega}$

Обозначим через $L_{p,\omega}$ $(p \geq 1, \omega \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty))$ банахово пространство локально интегрируемых на $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ функций $\varphi(x)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{p,\omega} = \left[\int_0^\infty x^\omega |\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{3.1.1}$$

Для $\varphi \in L_{p,\omega}$ рассмотрим семейство линейных преобразований

$$T(t)\varphi(x) = \varphi(xe^t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{3.1.2}$$

Из очевидных равенств

$$\|T(t)\varphi\|_{p,\omega}^p = \int_0^\infty x^\omega |\varphi(xe^t)|^p dx = e^{-(1+\omega)t} \int_0^\infty \tau^\omega |\varphi(\tau)|^p d\tau = e^{-(1+\omega)t} \|\varphi\|_{p,\omega}^p$$

следует ограниченность операторов $T(t)$ и равенства для их норм.

$$\|T(t)\|_{p,\omega} = e^{-\frac{(1+\omega)t}{p}}. \tag{3.1.3}$$

Справедлива следующая

Теорема 3.1.1. Семейство $T(t)$ является сильно непрерывной группой преобразований в $L_{p,\omega}$. То есть, выполняются условия:

1) $T(0) = I$, I— тождественный оператор;

2) $T(t+s) = T(t)T(s)$;

3) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|T(\varepsilon)\varphi - \varphi\|_{p,\omega} = 0$, при всех $\varphi \in L_{p,\omega}$.

Доказательство. Условия 1) и 2) очевидны. Для доказательство условия 3) имеем равенство

$$\|T(\varepsilon)\varphi(x) - \varphi(x)\|^p_{p,\omega} = \int_0^x x^\omega |\varphi(xe^\varepsilon) - \varphi(x)|^p dx$$

из которого, после замены $s = \ln x$ следует

$$\|T(\varepsilon)\varphi(x) - \varphi(x)\|^p_{p,\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(1+\omega)s} |\varphi(e^{s+\varepsilon} - \varphi(e^s)|^p ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(1+\omega)s} |\psi(s+\varepsilon) - \psi(\varepsilon)|^p ds, \qquad (3.1.4)$$

где $\psi(s) = \varphi(e^s)$.

Далее, пользуясь непрерывностью в целом для L_p– весовых норм, получаем соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|T(\varepsilon)\varphi(x) - \varphi(x)\|^p_{p,\omega} = 0,$$

доказывающее свойство 3), а следовательно и теорему.

Далее, пользуясь определением генератора сильно непрерывной группы $A\varphi = T'(0)\varphi$ (см. [13], с. 347) получаем равенство

$$T'(t)\varphi|_{t\to 0} = x\frac{d\varphi}{dx} = D\varphi. \qquad (3.1.5)$$

Используя (3.1.5), задаем производящий оператор (генератор) $\mathfrak{D}_a$ группы $T(t)$ выражением (3.1.5) и областью определения

$$D(\mathfrak{D}_a) = \{\varphi \in L_{p,\omega},\ x\frac{d\varphi}{dx} \in L_{p,\omega}\}. \qquad (3.1.6)$$

Оператор $\mathfrak{D}_a$ будем называть оператором Адамара–Эйлера, в связи с тем, что с одной стороны уравнение

$$\sum_{m=0}^{n} a_m x^m \frac{d^m\varphi(x)}{dx^m} = f(x)$$

носит имя Эйлера (см. [38], с. 64), а кроме того, оказывается, что интегралы вида

$$J^{\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{1-\alpha}}dt, \quad x>0,\ \alpha>0 \tag{3.1.7}$$

являются отрицательными дробными степенями оператора $\mathfrak{D}_a$, так как в соответствии с соотношениями связывающими полугруппу и дробные степени производящих операторов ([3], с. 150), имеем равенства

$$(-\mathfrak{D}_a^{-\alpha})\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}T_-(t)\varphi(x)dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\varphi(xe^{-t})dt. \tag{3.1.8}$$

Отсюда, после замены $xe^{-t}=\tau$, получаем связь между J^{α} и $(-\mathfrak{D}_a)^{-\alpha}$ в виде равенства

$$(\mathfrak{D}_a)^{-\alpha}\varphi = J^{\alpha}\varphi. \tag{3.1.9}$$

3.2 Сильно непрерывные операторные косинус–функции

Как известно (см. [6], с. 176) операторное семейство $C(t)$, $t\in(-\infty,\infty)$ называется сильно непрерывной косинус–функцией (КОФ) в банаховом пространстве E, если оно удовлетворяет условиям

1. $C(0)=I$, 2. $C(t+s)+C(t-s)=2C(t)C(s)$ и 3. функция $C(t)\varphi$— сильно непрерывна в E при всех $\varphi\in E$.

В нашем случае нетрудно видеть, что операторное семейство

$$C(t)\varphi = \frac{1}{2}[T(t)+T(-t)] \tag{3.2.1}$$

удовлетворяет всем указанным условиям и, следовательно, является сильно непрерывной КОФ с производящим оператором

$$\mathfrak{D}_a^2\varphi = C''(t)\varphi|_{t=0} = x^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + x\frac{d\varphi}{dx}. \tag{3.2.2}$$

Отсюда, в силу теоремы [6], с. 178 следует, что оператор $\mathfrak{D}_a^2$ порождает и сильно непрерывную полугруппу вида

$$T_c(t)\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} C(s)\varphi(x)ds. \tag{3.2.3}$$

Применяя равенство (3.2.3) в (3.2.1), имеем оценку

$$\|C(t)\varphi\|_{p,\omega} \leq \operatorname{ch}\left(\frac{\omega+1}{p}\right) t \cdot \|\varphi\|_{p,\omega}. \tag{3.2.4}$$

Замечание 3.2.1. При $p = \infty$ из (3.2.4) следует ограниченность $C(t)$ по $t \in [0, \infty)$ в пространствах измеримых и ограниченных функций с нормой $\|\varphi\|_\infty = vrai \sup_{x\in[0,\infty)} |\varphi(x)|$. То есть, справедлива оценка

$$\|C(t)\varphi\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty. \tag{3.2.5}$$

Кроме того, справедливость теоремы легко переносится и на случай пространств равномерно непрерывных и ограниченных функций $C_{[0,\infty]}$ с нормой $\|\varphi\| = \sup_{x\in[0,\infty)} |\varphi(x)|$ с оценкой

$$\|T(t)\varphi\| \leq \|\varphi\|. \tag{3.2.6}$$

Далее, пользуясь (3.2.4) и (3.2.2), получаем также оценку

$$\|T_c(t)\varphi(x)\|_{p,\omega} \leq \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} \cdot \operatorname{ch}\frac{(1+\omega)s}{p} \cdot \|\varphi\|_{p,\omega} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t} - \frac{(1+\omega)}{p}s} ds \cdot \|\varphi\|_{p,\omega} = e^{\left(\frac{1+\omega}{p}\right)^2 t} \cdot \|\varphi\|_{p,\omega}. \tag{3.2.7}$$

Далее, следуя [6], с. 120, укажем необходимые нам в дальнейшем формулы для полугрупп с генераторами $-(-\mathfrak{D}_a)^{\frac{1}{2}}$ и $-(-\mathfrak{D}_a^2)^{\frac{1}{2}}$.

$$T(t, -(\mathfrak{D}_a)^{\frac{1}{2}})\varphi(x) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{t^2}{4s}} T(s)\varphi(x)ds =$$

$$= \frac{t}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty s^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{t^2}{4s}} \varphi(xe^s)ds; \tag{3.2.8}$$

$$T(t, -(\mathfrak{D}_a)^{\frac{1}{2}})\varphi(x) = \frac{t}{4\pi} \int_{)}^\infty s^{-2} \cdot e^{-\frac{t^2}{4s}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4s}} \varphi(xe^\xi)d\xi ds =$$

$$= \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(xe^\xi)}{t^2+\xi^2} d\xi. \tag{3.2.9}$$

3.3 Полугруппы и группы Адамара–Эйлера в обобщенных пространствах Степанова

3.3.1. Обобщенные пространства Степанова $S^{\pm}_{p,\omega,\gamma}$

Как известно (см. [14], [15], [32]), банаховы пространства В.В. Степанова $S_p(\mathbb{R})$ интегрируемых на каждом промежутке $\delta \subset \mathbb{R}$ функций $f(x)$, определяются нормой

$$\|f\|_{S_{p,l}} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{l}\int_t^{t+l} |f(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sup_{t\in\mathbb{R}} \left[\frac{1}{l}\int_0^{l} |f(x+t)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{3.3.1}$$

где $l > 0$, $p \geq 1$.

Инвариантность нормы (3.3.1) относительно сдвига $T(a)f(x) = f(x+a)$ значительно расширяет классы непрерывных почти–периодических функций по Г. Бору.

В то же время, как показано в [15], нормы (3.3.1) и соответствующие пространства функций, а также и их различные обобщения, приведенные в [ ], обладают многими свойствами, полезными как с теоретической точки зрения, так и возможности их приложений.

Здесь мы воспользуемся обобщенными пространствами Степанова, используя нормы эквивалентные (3.3.1) ([15], с. 132)

$$\|f\|^{+}_{S_{p,\omega}} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left[\int_{-\infty}^{x} e^{\omega(s-x)}|f(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{3.3.2}$$

$$\|f\|^{-}_{S_{p,\omega}} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left[\int_{x}^{\infty} e^{\omega(x-s)}|f(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{3.3.3}$$

Замена $s = \ln\tau$ в (3.3.2), (3.3.3) приводит их к виду

$$\|f\|_{S^{+}_{p,\omega}} = \sup_{y\in\mathbb{R}^+} \left[\frac{1}{y^{\omega}}\int_0^{y} \tau^{\omega-1}|f(\ln\tau)|^p d\tau\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{3.3.4}$$

$$\|f\|_{S^-_{p,\omega}} = \sup_{y\in\mathbb{R}^+}\left[y^\omega\int_y^\infty \tau^{-(\omega+1)}|f(\ln\tau)|^p d\tau\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{3.3.5}$$

Такое представление норм Степанова позволяет обобщить эти пространства введением норм

$$\|f\|_{S^+_{p,\omega,\gamma}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\left[\frac{1}{x^\omega}\int_0^x s^\gamma|\varphi(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{3.3.6}$$

$$\|f\|_{S^-_{p,\omega,\gamma}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\left[\frac{1}{x^\omega}\int_0^x s^{-\gamma}|\varphi(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{3.3.7}$$

где $\omega \geq 0$, $\gamma \geq 0$.

В связи с этим дадим

Определение 3.3.1. Множества интегрируемых на каждом интервале $\delta \subset \mathbb{R}^+$ функций, определенных нормами (3.3.6) или (3.3.7) будем называть $S^+_{p,\omega,\gamma}$ или $S^-_{p,\omega,\gamma}$ соответственно обобщенными функциональными пространствами Степанова на $\mathbb{R}^+$.

Пространства $S^\pm_{p,\omega,\gamma}$ являются банаховыми. Это следует из утверждения [15], с. 102.

Заметим, что при $\gamma = \omega = 0$ пространства $S^\pm_{p,\omega,\gamma}$ являются L_p– пространствами с нормой

$$\|f\|_{S^\pm_{p,\omega,\gamma}} = \|f\|_{S^+_{p,0,0}} = \left[\int_0^\infty |f(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L_p}. \tag{3.3.8}$$

Кроме того справедлива следующая

Лемма 3.3.1. Пусть $C(\mathbb{R}^+)$— пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^+$ функций с нормой

$$\|f\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f(x)|,$$

тогда

а) $C(\mathbb{R}^+) \subset S^-_{p,\omega,\gamma}$, в том и только в том случае, когда

$$\omega = \gamma + 1 > 0. \tag{3.3.9}$$

При этом справедливо неравенство

$$\|f\|_{S^+_{p,\omega,\gamma}} \leq \frac{\|f\|_C}{\gamma+1}, \tag{3.3.10}$$

б) $C(\mathbb{R}^+) \subset S^-_{p,\omega,\gamma}$, в том и только в том случае, когда

$$\omega = \gamma - 1 > 0. \tag{3.3.11}$$

При этом справедливо неравенство

$$\|f\|_{S^-_{p,\omega,\gamma}} \leq \frac{\|f\|_C}{\gamma-1}, \tag{3.3.12}$$

Доказательство. В случае а) если $f \in C(\mathbb{R}^+)$, то из оценки

$$x^{-\omega}\int_0^x s^\gamma |f(s)|^p ds \leq \frac{x^{\gamma+1-\omega}}{\gamma+1}\|f\|_C, \tag{3.3.13}$$

очевидно следует (3.3.10).

В другую сторону: если при всех $f \in C(\mathbb{R}^+$ выполнено (3.3.10), то оно выполнено и для $f(x) \equiv 1$. Но тогда для этой функции справедливо равенство

$$\|f\|_{S^+_{p,\omega,\gamma}} = \frac{x^{\gamma+1-\omega}}{\gamma+1}. \tag{3.3.14}$$

Из которого необходимо следует (3.3.10). Точная константа $\frac{1}{\gamma+1}$.

Доказательство для норм $S^-_{p,\omega,\gamma}$ аналогичное.

В дальнейшем, если параметры ω и γ связаны соотношениями (3.3.9) или (3.3.11), то нормы (3.3.6) и (3.3.7) соответственно будем обозначать

$$\|f\|_{S^+_{p,\omega}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\left[\frac{1}{x^\omega}\int_0^x s^{\omega-1}|\varphi(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{3.3.15}$$

$$\|f\|_{S^-_{p,\omega}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\left[\frac{1}{x^\omega}\int_0^x s^{-(\omega+1)}|\varphi(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{3.3.16}$$

Отметим, что справедливо следующее

Утверждение 3.3.1 Нормы (3.3.15) и (3.3.16) инвариантны относительно операции мультипликатавного сдвига $T(a)f(x) = f(ax)$, $a > 0$.

Доказательство следует из легко проверяемых равенств. Например для (3.3.15) имеем

$$\frac{1}{x^\omega}\int_0^x s^{\omega-1}|T(a)f(s)|^p ds = \frac{1}{x^\omega}\int_0^x s^{\omega-1}|f(as)|^p ds = \frac{1}{(ax)^\omega}\int_0^x \tau^{\omega-1}|f(\tau)|^p d\tau.$$

Откуда, возводя обе части этого равенства в степень $\frac{1}{p}$ и, переходя к sup по $x \in \mathbb{R}^+$ получаем равенство

$$\|T(a)f\|_{S^+_{p,\omega}} = \|f\|_{S^+_{p,\omega}}. \tag{3.3.17}$$

Утверждение доказано.

Для норм (3.3.16) оно доказывается аналогично.

Пространства $\overline{S}^{\pm}_{p,\omega}$

Как известно ([15], с. 110) нормы классических пространств Степанова, в отличии от L_p– норм не обладают свойствами непрерывности в целом, в смысле выполнения условия

$$\lim_{h\to 0}\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|_{S_p} = 0 \tag{3.3.18}$$

для $\varphi \in S_p(\mathbb{R})$, также как и нормы пространств в $C_{(-\infty,\infty)}$ непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций.

Учитывая изометрию пространств Степанова и $S^{\pm}_{p,\omega}$– пространств, в силу преобразования $x \to \ln\tau$, будем рассматривать пространства $\overline{S}^{\pm}_{p,\omega}$ как образы пространств $\overline{S}_p(\mathbb{R})$ для этих преобразований. В силу такой изометрии пространства $\overline{S}^{\pm}_{p,\omega}$ также будут банаховыми с нормами (3.3.15), (3.3.16).

Так как пространства $C_{(-\infty,\infty)}$, плотно вложены в $\overline{S}_p$, с учетом указанной изометрии, также можно заключить, что пространства $\overline{S}^{\pm}_{p,\omega}$ являются замыканиями пространств $C_{(-\infty,\infty)}$ в нормах (3.3.15), (3.3.16).

3.3.3. Полугруппы Адамара–Эйлера в пространствах $S_{p,\omega,\gamma}$

Следуя [21], введем следующие понятия.

Пусть $x \in (a,b) \subset \mathbb{R}$ и функция $h(x)$ определенная на $x \in (a,b)$ такая что

$$h'(x) > 0, \tag{3.3.19}$$

$$\lim_{x\to a} h(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to b} h(x) = \infty. \tag{3.3.20}$$

Как показано в [21], операторные семейства

$$T^+(t)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x)+t)] \tag{3.3.21}$$

$$T^-(t)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x)-t)] \tag{3.3.22}$$

являются сильно непрырывными полугруппа линейных преобразований в пространсвах $C_{\omega,h}$.

В диссертации более детально изучаются полугруппы вида (3.3.21), (3.3.22) в случае $(a,b) = (0,\infty)$, $h(x) = \ln x$ в пространствах $S^{\pm}_{p,\omega,\gamma}$.

В эом случае полугруппы $T^{\pm}(t)$ имеют представления

$$T^+(t)\varphi(x) = \varphi[xe^t], \tag{3.3.23}$$

$$T^-(t)\varphi(x) = \varphi[xe^{-t}], \tag{3.3.24}$$

Для этих полугрупп справедлива

Теорема 3.3.1. Операторные семейства $T^{\pm}(t)$ являются ограниченными полугруппами в пространствах $S^+_{p,\omega,\gamma}$ $S^-_{p,\omega,\gamma}$ соответственно.

И справедливы оценки

$$\|T^+(t)\|_{S^+_{p,\omega,\gamma}} \le e^{-\frac{(1+\gamma-\omega)t}{p}}, \tag{3.3.25}$$

$$\|T^-(t)\|_{S^-_{p,\omega,\gamma}} \le e^{-\frac{(\gamma+\omega-1)t}{p}}. \tag{3.3.26}$$

Доказательство. Для $\varphi \in S^+_{p,\omega,\gamma}$ имеем

$$\frac{1}{x^\omega}\int_0^x s^\gamma |T^+(t)\varphi(s)|^p ds = \frac{1}{x^\omega}\int_0^x s^\gamma |\varphi(se^t)|^p ds.$$

Замена $s = \tau e^{-t}$ дает равенство

$$\frac{1}{x^\omega}\int_0^x s^\gamma |T^+(t)\varphi(s)|^p ds = \frac{1}{x^\omega}\cdot e^{-(1+\gamma)t}\int_0^{xe^t} \tau^\gamma |\varphi(\tau)|^p d\tau =$$

$$= e^{\omega t-(1+\gamma)t}\cdot y^{-\omega}\int_0^y \tau^\gamma |\varphi(\tau)|^p d\tau \le e^{-(\gamma+1-\omega)}\cdot \|\varphi\|^p_{S^+_{p,\omega,\gamma}},$$

где $y = xe^t$.

Переходя к sup по $x \in (0,\infty)$, $y(0,\infty)$ в обеих частях этого неравенства и, возводя в степень $\frac{1}{p}$, получаем оценку

$$\|T^+(t)\varphi\|_{S^+_{p,\omega,\gamma}} \le e^{-\frac{(1+\gamma-\omega)t}{p}}\cdot \|\varphi\|^p_{S^+_{p,\omega,\gamma}}, \tag{3.3.27}$$

доказывающую неравенство (3.3.25).

Аналогично для $\varphi \in S^-_{p,\omega,\gamma}$ доказывается неравенство (3.3.26).

Таким образом, ограниченность операторных семейств $T^+(t)$ и $T^-(t)$ в пространствах $S^+_{p,\omega,\gamma}$ и $S^-_{p,\omega,\gamma}$ доказана.

Полугрупповые свойства этих семейств

1. $T^\pm(0)\varphi$ и

2. $T^\pm(t+s)\varphi = T^\pm(t)T^\pm(s)\varphi$ очевидны.

Теорема 3.3.2. Полугруппы $T^\pm(t)$ являются сильно непрерывными в пространствах $\overline{S}^\pm_{p,\omega}$– соответственно.

Доказательство проведем для случая полугруппы $T^+(t)$. Для случая $T^-(t)$ оно аналогичное.

Пусть $\varphi \in \overline{S}^\pm_{p,\omega}$, имеем

$$\|T^+(t)\varphi - \varphi\|^p_{\overline{S}^+_{p,\omega}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\frac{1}{x^\omega}\int_0^x s^{\omega-1}|\varphi(se^t)-\varphi(s)|^p ds. \tag{3.3.28}$$

Замена $s = e^\tau$ под интегралом дает

$$\|T^+(t)\varphi - \varphi\|^p_{\overline{S}^+_{p,\omega}} = \sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{-\infty}^{y} e^{\omega(\tau-y)}|\psi(t+\tau) - \psi(\tau)|^p d\tau,$$

где $\psi(\tau) = \varphi(e^\tau)$, $y = \ln x$. Отсюда, в силу непрерывности в целом пространств $\overline{S}_{p,\omega}$, получаем соотношение

$$\lim_{t\to 0+} \|T^+(t)\varphi - \varphi\|_{S^+_{p,\omega}} = 0,$$

из которого следует сильная непрерывность полугруппы $T^+(t)$.

Далее, как и в случае теоремы 3.3.1 определяем генераторы $\mathfrak{D}^\pm_a$ таких полугрупп

$$\left.\frac{dT^+(t)}{dt}\varphi\right|_{t=0} = x\frac{d\varphi}{dx} = \mathfrak{D}^+\varphi,$$

$$\left.\frac{dT^-(t)}{dt}\varphi\right|_{t=0} = -x\frac{d\varphi}{dx} = \mathfrak{D}^-\varphi,$$

с областями определения

$$D^+_a(\mathfrak{D}^+\varphi) = \{\varphi \in \overline{S}^+_{p,\omega},\, \mathfrak{D}\varphi \in S^+_{p,\omega}\},$$

$$D^-_a(\mathfrak{D}^-\varphi) = \{\varphi \in \overline{S}^-_{p,\omega},\, \mathfrak{D}\varphi \in S^-_{p,\omega}\}.$$

3.4 Дробные степени операторов Адамара–Эйлера

Оценки на полугруппы (3.3.25), (3.3.26), в соответствии с результатами Балакришнана (1.3.5), позволяют ввести отрицательные дробные степени для операторов Адамара–Эйлера согласно соотношений

$$(-\mathfrak{D}^+_a)^{-\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\varphi^+(t)\varphi(x)dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty T^{\alpha-1}\varphi(xe^t)dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\ln x - \ln t)^{1-\alpha}}, \qquad (3.4.1)$$

$$(-\mathfrak{D}_a^-)^{-\alpha}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\ln\tau - \ln x)^{1-\alpha}}, \tag{3.4.2}$$

$0 < \alpha < 1$.

Нетрудно видеть, что операторы (3.4.1), (3.4.2) совпадают с констрк-цией Ж. Адамара приведенной в [47], с. 251, где они называются дробными интегралами Ж.Адамара $\mathfrak{J}_\pm^\alpha\varphi(x)$.

Оказывается, что справедлива следующая

Лемма 3.4.1. Операторы (3.4.1), (3.4.2) являются ограниченными в пространствах $S^\pm_{p,\omega,\gamma}$– соответственно, и для них справедливы оценки

$$\|(-\mathfrak{D}_a^+\varphi)^{-\alpha}\|_{S^+_{p,\omega,\gamma}} \le \left(\frac{p}{1+\gamma-\omega}\right)^\alpha \cdot \|\varphi\|_{S^+_{p,\omega,\gamma}}, \tag{3.4.3}$$

если $1+\gamma-\omega > 0$ и

$$\|(-\mathfrak{D}_a^-\varphi)^{-\alpha}\|_{S^-_{p,\omega,\gamma}} \le \left(\frac{p}{\omega+\gamma-1}\right)^\alpha \cdot \|\varphi\|_{S^-_{p,\omega,\gamma}}, \tag{3.4.4}$$

если $\omega+\gamma-1 > 0$.

Доказательство. В случае норм $S^+_{p,\omega,\gamma}$, используя неравенство (3.3.25), имеем

$$\|(-\mathfrak{D}_a^+)^{\alpha}\|_{S^+_{p,\omega,\gamma}} \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\|T^+(t)\varphi\|dt \le$$

$$\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-\frac{(1+\gamma-\omega)}{p}t}dt \cdot \|\varphi\|_{S^+_{p,\omega,\gamma}} = \left(\frac{p}{1+\gamma-\omega}\right)^\alpha \cdot \|\varphi\|_{S^+_{p,\omega,\gamma}}.$$

То есть оценка (3.4.3) доказана.

Оценка (3.4.4) доказывается аналогично.

Следствие 3.4.1. При $\omega = 0$ и $1+\gamma > 0$ из (3.4.3) следует оценка в случае L_p– пространств с весом s^γ

$$\|(-\mathfrak{D}_a^-)^{\alpha}\|_{L^+_{p,\gamma}} \le \left(\frac{p}{1+\gamma}\right)^\alpha \cdot \|\varphi\|_{L^+_{p,\gamma}}. \tag{3.4.5}$$

Если $\gamma > 1$, то оценка (3.4.4) дает неравенство

$$\|(-\mathfrak{D}_a^-)^{\alpha}\|_{L^-_{p,\gamma}} \le \left(\frac{p}{\gamma-1}\right)^\alpha \cdot \|\varphi\|_{L^-_{p,\gamma}}. \tag{3.4.6}$$

3.5 Задачи с оператором Адамара–Эйлера

В пространстве $L_{p,\omega}$ рассмотрим следующие задачи:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathfrak{D}^2 u(t,x), \qquad u(0,x) = \varphi(x), \tag{3.5.1}$$

$$\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t^2} = \mathfrak{D}^2 v(t,x), \qquad v(0,x) = v_0(x),\ \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{3.5.2}$$

$$\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial T^2} = -\mathfrak{D}^2 w(t,x), \qquad w(0,x) = w_0(x),\ w(\infty,x) = 0. \tag{3.5.3}$$

Здесь $\mathfrak{D}^2 = x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial x}$, и функция $u(t,x)$ непрерывно дифференцируема по t, функции $v(t,x)$, $w(t,x)$— дважды дифференцируемы по t и значения этих функций, как и начально–краевых задач $\varphi(x)$, $v_0(x)$, $w_0(x)$ принадлежат $D(\mathfrak{D}^2)$.

Из результатов §3.1., 3.2., 3.3. и общих теорем 1.2.1., 1.2.2., 1.4.5., связывающих полугруппы, косинусные функции и корректно поставленные задачи для параболических, гиперболических и эллиптических уравнений, вытекают следующие ответы:

I. Задача (3.5.1) равномерно корректна и ее решение имеет вид

$$u(t,x) = T(t,\mathfrak{D}^2)\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{4t}}\varphi(xe^s)ds, \tag{3.5.4}$$

и справедлива оценка

$$\|u(t,x)\|_{p,\omega} \le e^{-\frac{(1+\omega)t}{p}} \cdot \|\varphi\|_{p,\omega}. \tag{3.5.5}$$

II. Задача (3.5.2) равномерно корректна, ее решение имеет вид

$$v(t,x) = C(t,\mathfrak{D}^2)v_0(x) = \frac{1}{2}[v_0(xe^t) + v_0(xe^{-t})] \tag{3.5.6}$$

и справедлива оценка

$$\|v(t,x)\|_{p,\omega} \le \operatorname{ch}\frac{(1+\omega)t}{p} \cdot \|v_0\|_{p,\omega}. \tag{3.5.7}$$

III. Задача (3.5.3) равномерно корректна в пространстве $C_{(0,\infty]}$, ее решение имеет вид

$$w(t,x) = T(t, -(-\mathfrak{D}^2)^{\frac{1}{2}})w_0(x) = \frac{t}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(xe^s)ds}{t^2+s^2} \tag{3.5.8}$$

и справедлива оценка

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|w(t,x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}}|w_0(x)|. \tag{3.5.9}$$

3.6 О корректной разрешимости задачи Коши для обобщенного телеграфного уравнения

Сильно непрерывные h–полугруппы и h–косинус–функции

Пусть $x \in (a,b) \subset \mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ и функция $h(x)$ непрерывно дифференцируемая, строго монотонно возрастающая и такая, что

$$\lim_{x\to a} h(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to b} h(x) = \infty. \tag{3.6.1}$$

Через $L_{p,\nu,h}$ будем обозначать пространства функций $\varphi(x)$, определяемые нормой

$$\|\varphi\|_{L_{p,\nu,h}} = \left[\int_a^b e^{\nu h(x)}|\varphi(x)|^p dh\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad p \ge 1, \nu \in \mathbb{R}. \tag{3.6.2}$$

При $t \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in L_{p,\nu,h}$ рассмотрим семейство операторных функций, заданных выражением

$$T(t)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x)+t)]. \tag{3.6.3}$$

Справедлива

Теорема 3.6.1. Операторное семейство, заданное соотношением (3.6.3), является сильно непрерывной группой линейных преобразований в пространстве $L_{p,\nu,h}$

Доказательство. Для $\varphi \in L_{p,\nu,h}$ имеем

$$T(t)\varphi\|^p_{L_{p,\nu,h}} = \int_a^b e^{\nu h(x)}|\varphi[h^{-1}(h(x)+t)]|^p h(x). \tag{3.6.4}$$

Замена $h^{-1}(h(x)+t) = s$ дает соотношение

$$\|T(t)\varphi\|^p_{L_{p,\nu,h}} = e^{-\nu t}\int_a^b = e^{\nu h(s)}|\varphi(s)|^p dh(s). \tag{3.6.5}$$

Отсюда следует равенство

$$\|T(t)\varphi\|_{L_{p,\nu,h}} = e^{-\frac{\nu t}{p}}\|\varphi\|_{L_{p,\nu,h}}, \tag{3.6.6}$$

дающее норму полугруппы T в $L_{p,\nu,h}$.

Далее нетрудно видеть выполнение необходимых групповых сдвигов

$$1.\, T(0)\varphi = \varphi, \qquad 2.\, T(t+s)\varphi = T(t)T(s)\varphi. \tag{3.6.7}$$

Для доказательства сильно непрерывности имеем

$$\|T(t)\varphi(x) - \varphi(x)\|^p_{L_{p,\nu,h}} = \int_a^b e^{\nu} h(x)|\varphi[h^{-1}(h(x)+t)] - \varphi(x)|^p dh.$$

Делая замену $h(x) = s$, получаем

$$\|T(t)\varphi(x) - \varphi(x)\|^p_{L_{p,\nu,h}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu s}|\varphi[h^{-1}(t+s)] - \varphi[h^{-1}(s)]|ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu s}|\psi(t+s) - \psi(s)|^p ds, \tag{3.6.8}$$

здесь $\varphi(s) = \varphi[h^{-1}(s)]$.

Из (3.6.8), пользуясь непрерывностью L_p– весовых норм, и переходя к пределу при $t \to \infty$ в (3.6.8), получаем

$$\lim_{t\to 0+}\|T(t)\varphi - \varphi\|_{L_{p,\nu,h}} = 0, \tag{3.6.9}$$

что и доказывает теорему.

Следствие 3.6.1. Семейство преобразований

$$C(t)\varphi = \frac{1}{2}[T(t)\varphi + T(-t)\varphi] \tag{3.6.10}$$

является сильно непрерывной косинус–функцией в $L_{p,\nu,h}$. При этом из (3.6.6) и (3.6.10) следует оценка

$$\|C(t)\varphi\|_{L_{p,\nu,h}} \leq \mathrm{ch}(\frac{\nu}{p}t)\|\varphi\|_{L_{p,\nu,h}}. \tag{3.6.11}$$

Следствие 3.6.2. При $t \geq 0$ и $\nu \geq 0$ $T(t)$ является сжимающей полугруппой $T_+(t)$ с нормой

$$\|T_+(t)\|_{L_{p,\nu,h}} = e^{-\nu t}, \tag{3.6.12}$$

а при $\nu \leq 0$ полугруппа $T_-(t) = T(-t)$ является сжимающей с нормой

$$\|T_-(t)\|_{L_{p,\nu,h}} = e^{\nu t}. \tag{3.6.13}$$

Теорема 3.6.2. Полугруппы $T_+(t)$, $T_-(t)$ и косинус–функция $C(t)$ имеют своими генераторами операторы заданные выражениями:

$$a)\, T'_{\pm}(0)\varphi(x) = \pm\frac{\varphi'(x)}{h'(x)} = \pm\frac{d\varphi}{dh} = \mathbb{D}_{\pm,h}\varphi \tag{3.6.14}$$

с областью определения $D(\mathbb{D}_{\pm,h}) = \{\varphi \in L_{p,\nu,h}, \frac{d\varphi}{dh} \in L_{p,\nu,h}\}$.

$$b)\, C''(0)\varphi(x) = \frac{1}{h'(x)}\left(\frac{\varphi'(x)}{h'(x)}\right)' = \mathbb{D}_h^2\varphi, \tag{3.6.15}$$

с областью определения $D(\mathbb{D}_h^2) = \{\varphi \in L_{p,\nu,h}, D_h^2 \in L_{p,\nu,h}\}$.

Дробные степени операторов $\mathbb{D}_{\pm h}$ и $\mathbb{D}_h^2$.

Из равенств (3.6.12) и (3.6.13) следует, что, в соответствии с К. Иосидой ([13], с. 324), C_0– полугруппы $T_{\pm}(t)$ являются равностепенно непрерывными и, таким образом, их генераторы $\mathbb{D}_{\pm h}$ обладают тем свойством,

что для операторов $-\mathbb{D}_{\pm h}$ определены дробные степени $(-\mathbb{D}_{\pm h})^{\alpha}$, $(0 < \alpha \leq 1)$. При этом, операторы $\widetilde{\mathbb{D}}^{\alpha}_{\pm h} = -(-\mathbb{D}^{\alpha}_{\pm h})$ являются генераторами C_0- полугрупп $T_{\pm}(t, \widetilde{D}^{\alpha}_{\pm h})$. Отметим, что из результата (1.3.7) и (3.6.12), (3.6.13) для этих полугрупп следуют оценки

$$\|T_{\pm}(t, \widetilde{\mathbb{D}}^{\alpha}_{\pm h})\| \leq e^{-\left(\frac{|\nu|}{p}\right)^{\alpha} t}. \tag{3.6.16}$$

Вместе с тем для операторов $-\mathbb{D}_{\pm h}$ определены и отрицательные дробные степени $(-\mathbb{D}_{\pm n})^{-\alpha}$, $(0 < \alpha < 1)$, в соответствии с формулой (1.2.9), имеющие вид

$$(-\mathbb{D}^{-\alpha}_{\pm h})\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} T_{\pm}(t)\varphi(x)dt. \tag{3.6.17}$$

В нашем случае представление $T_{\pm}(t)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x) \pm t)]$ дает следующие виды этих операторов

$$(-\mathbb{D}^{-\alpha}_{+h})\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \varphi[h^{-1}(h(x) + t)]dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b [h(s) - h(x)]^{\alpha-1} \varphi(s)dh(s), \tag{3.6.18}$$

$$(-\mathbb{D}^{-\alpha}_{-h})\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x [h(x) - h(s)]^{\alpha-1} \varphi(s)dh(s). \tag{3.6.19}$$

Используя (3.6.12), (3.6.13) и (3.6.17) получаем оценки при $t \geq 0$

$$\|(-\mathbb{D}^{-\alpha}_{+h})\varphi\|_{p,\nu,h} \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} |T_+(t)|dt \cdot \|\varphi\|_{p,\nu,h} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-\frac{\nu}{p}t} dt \cdot \|\varphi\|_{p,\nu,h} = \left(\frac{p}{\nu}\right)^{\alpha} \cdot \|\varphi\|_{p,\nu,h}. \tag{3.6.20}$$

Аналогично

$$\|(-\mathbb{D}^{-\alpha}_{-h})\varphi\|_{p,\nu,h} \leq \left(\frac{p}{|\nu|}\right)^{\alpha} \cdot \|\varphi\|_{p,\nu,h}. \tag{3.6.21}$$

Заметим, что операторы $(-\mathbb{D}_{+h})^\alpha$ совпадают с интегралами $J^\alpha_{a+,h}$, при $h(x) = g(x)$, называемыми в [47], с. 248 дробными интегралами функции $\varphi(x)$ по функциям $g(x)$ порядка α.

Частными случаями таких интегралов являются интегралы Эрдейи–Коббера при $h(x) = x^\tau$ и интегралы Адамара при $h(x) = \ln x$, $x \in (0, \infty)$ ([47], с. 251).

Однако в [47] оценок вида (3.6.20), (3.6.21) не приводится, так как интегралы рассматриваются в нормах пространств L_1, то есть при $\nu = 0$. Но эти пространства не инвариантны относительно рассматриваемых операций даже в случае дробных интегралов Римана–Лиувиля (см. утверждение в [47], с. 94).

Обобщенное телеграфное уравнение

Пусть $x \in (a, b)$, $t \in \mathbb{R}$ и $\mathbb{D}_{h,x} = \frac{\partial}{\partial h(x)}$. Рассмотрим уравнение

$$\mathbb{D}^2_{h,x}\omega(t,x) + 2\beta\mathbb{D}_{h,x}\omega(t,x) = a_0\frac{\partial^2\omega(t,x)}{\partial t^2} + 2b_0\frac{\partial\omega(t,x)}{\partial t} + c_0\omega(t,x). \quad (3.6.22)$$

В случае $h(x) = x$, $\beta = 0$ уравнение (3.6.22) является классическим телеграфным уравнением [25], с. 90.

Решением уравнения (3.6.22) будем называть функцию $\omega(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируемую по $t \in \mathbb{R}$, $x \in (a, b)$ и удовлетворяющую уравнению (3.6.22).

Для уравнения (3.6.22) рассматривается задача Коши отыскания решения этого уравнения удовлетворяющего условиям

$$\omega(0,x) = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial\omega}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad (3.6.23)$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ такие, что $\varphi \in L_{p,\nu,h}$, $\mathbb{D}_{h,x}\varphi \in L_{p,\nu,h}$, $\psi \in L_{p,\nu,h}$, $\mathbb{D}_{h,x}\psi \in L_{p,\nu,h}$.

Из выше приведенных результатов следует

Теорема 3.6.3. Если коэффициенты a_0, b_0, c_0, β такие, что выполняется неравенство

$$a_0(c_0 + \beta^2) \leq b_0^2, \tag{3.6.24}$$

то задача (3.6.22)—(3.6.23) равномерно корректна и ее решение имеет вид

$$\omega(t,x) = e^{-\frac{b_0}{a_0}t}[C_f(t)\varphi(x) + \int_0^t C_a(s)\psi(s)ds], \tag{3.6.25}$$

где

$$C_a(t)\varphi(x)\psi(x) = C_0(t)\varphi(x) +$$
$$+\frac{at}{2}\int_0^t (t^2 - s^2)^{-\frac{1}{2}} I_1[a(t^2 - s^2)^{\frac{1}{2}} C_0(s)\varphi(x), \tag{3.6.26}$$

здесь

$$C_0(s)\varphi(x) = \frac{1}{2}[T\sqrt{a_0}s) + T(-\sqrt{a_0}s)]\varphi(x),$$

T— полугруппа вида (3.6.24), $a = \frac{b_0 - a_a(c_0+\beta^2)}{a_0^2}$, I_1— модифицированная функция Бесселя первого рода.

Доказательство. Вводя функцию

$$u(t,x) = e^{\frac{b_0}{a_0}t + \beta h(x)}\omega(t,x), \tag{3.6.27}$$

приведем задачу (3.6.22)–(3.6.23) к виду

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{1}{a_0}\mathbb{D}^2_{h,x}u(t,x) + au(t,x) \tag{3.6.28}$$

$$u(0,x) = e^{\beta h(x)}\varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \frac{b_0}{a_0}e^{\beta h(x)}\psi(x). \tag{3.6.29}$$

При этом, в силу равенств

$$\|u(t)\|^p_{p,\nu-\beta p,h} = \int_a^b e^{(\nu-\beta p)h(x)}|u(t,x)|^p dh(x) =$$

$$= \int_a^b e^{\nu h(x)}|\omega(t,x)|^p dh(x) = \|\omega\|^p_{p,\nu,h} \tag{3.5.30}$$

условие (3.6.22) переходит в условия

$$\|u(0,x)\|_{p,\nu-\beta p,h} = \|\varphi\|_{p,\nu,h}, \tag{3.5.31}$$

$$\| \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} \|_{p,\nu-\beta p,h} = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \cdot \|\psi\|_{p,\nu,h}. \tag{3.6.32}$$

Так как оператор $\frac{1}{a_0}\mathbb{D}^2_{h,x}$ является генератором косинусной функции $C(t)\varphi(x) = \frac{1}{2}[T(t) + T(-t)]\varphi$, то в силу (3.6.6) выполняются все условия теоремы корректности Совы и Куреппы. Отсюда следует доказательство теоремы.

В заключении заметим, что из теоремы 3.6.2 следует равномерная корректная разрешимость задачи Коши для классического телеграфного уравнения, в пространствах $L_{p,\nu}$ с $\|\varphi\|_{p,\nu} = [\int_0^\infty e^{\nu x}|\varphi(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}}$, так как в этом случае $\beta = 0$, $h(x) = x$ и, следовательно, условие (3.6.32) выполняется в силу соотношения 10, [25], с. 90. Также следует равномерная корректная разрешимость задачи Коши и для уравнения с оператором Адамара–Эйлера в пространствах $L_{p,\nu}$ с оператором $\|\varphi\|_{p,\nu} = [\int_0^\infty x^\nu \|\varphi(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}}$.

Литература

[1] Бабенко Ю.И. Методы дробного интегродифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена. // СПБ.: НПО "Профессионал 2009, 584 с.

[2] Бабенко Ю.И. Тепломассообмен, методы расчета тепловых и диффузионных потоков. Л.: Химия, 1986 144 с.

[3] Боровских А.В., Перов А.И. Лекции по дифференциальным уравнениям./ Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотичная динамика"Институт компьютерных исследований, 2004, 540 с.

[4] Баскаков А.Г. Гармонический анализ косинусной и экспоненциальной операторной функций// А.Г. Баскаков, Мат. сб.— 1984.—124 (166), N I(15).— с. 68–95.

[5] Васильев В.В. Дробное исчисление и аппраксимационные методы в моделировании динамических систем. Научное издание// В.В. Васильев, Л.А. Симак.— Киев, НАН Украина, 2008.— 256 с. ISBN N 978–966-02

[6] Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения /Дж. Голдстейн.- Киев: Высща школа, 1989. - 347 с.

[7] Горбачук В.И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.// В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук, – Киев, – "Наука Думка". 1984. 283 с.

[8] Горбачук В.И., Князюк А.И. Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений. // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, № 3 (267). С. 55—91.

[9] Глушко В.П. О вырождающихся линейных дифференциальных уравнениях в банаховом пространстве/ В.П. Глушко, С.Г. Крейн.-ДАН СССР, т. 181, N 4, 1968, стр. 784—787.

[10] Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве./ Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн.— Физмат. лит., 1970. 534 с.

[11] Джалиль М.С. Абстрактные ортогональные многочлены и дифференциальные уравнения. Диссертация на соискание уч. ст. канд. физмат. наук. – Воронеж, ВГУ, 2004, 76 с.

[12] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. // А. Зигмунд. – М.: Мир. – Т.1, 1965. 616 с.

[13] Иосида К. Функциональный анализ: Учебник/ К. Иосида, пер. с анг. В.М. Волосова.– М.: Мир, 1967—624 с.

[14] Князюк А.В. Граничные значения эволюционных уравнений в банаховом пространстве. Диссертация на соискание уч. ст. канд. физ-мат. наук. – Киев. 1985. 115 с.

[15] Костин А.В. К теории функциональных пространств Степанова/ А.В. Костин, В.А. Костин.– Воронеж: Издательско полиграфический центр ВГУ, 2007. 259 с.

[16] Костин А.В. S–весовые пространства Степанова и некоторые модели тепломассопереноса./ А.В.Костин, В.А.Костин – Воронеж:2009. 35 с.

[17] Костин А.В. Гипервесовые пространства Степанова и интегралы дробного порядка Риммана-Лиувилля на R/ А.В. Костин, Материалы Воронежской весенней математической школы "Потрягинские чтения XXIII" Воронеж: Изд-во ВГУ, 2012, с. 94-95

[18] Костин В.А. О равномерно корректной разрешимости краевых задач для абстрактных уравнений с оператором Келдыша-Феллера. // В.А. Костин. – Дифференциальные уравнения. – Т.7, 31, №8. с.1419 — 1425.

[19] Костин В.А. Об аналитических полугруппах и сильно непрерывных косинус–функциях// В.А. Костин, ДАН СССР, 1989, Т. 307, №4, с. 796–799.

[20] Костин В.А. C_0–операторный интеграл Лапласа / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин, ДАН.— 2011, Т. 441, №1,с. 10–13.

[21] Костин В.А. Операторный метод Маслова-Хевисайда и C_0–операторный интеграл Дюамеля /В.А.Костин, А.В.Костин, Д.В.Костин, ДАН. - 2013. -Т.452, №4. - с.367-370

[22] Костин В.А. Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения /В.А.Костин, А.В.Костин, Д.В.Костин// ДАН. - 2014. - Т.455 №2 с.142-146

[23] Костин В.А. О корректной разрешимости краевых задач для уравнений второго порядка /В.А. Костин, М.Н.Небольсина // ДАН. - 2009. - Т.428 №1 с.20-23.

[24] Костин Д.В. К решению задачи и распространении сигналов во фрактальных средах в классах функций не преобразуемых по Лапласу //Д.В.Костин, В.А.Костин, А.В.Костин. Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна 2012. Материалы международной конференции, Воронеж, с.109-111

[25] Кошляков Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики /Н.С.Кошляков, Э.Б.Глиннер, М.М.Смирнов. - М: Физмат. лит., 1962. 767с.

[26] Красносельский М. А., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., Наука, 1966, 499 с.

[27] Крейн С. Г., Хазан М. И., Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, Итоги науки и техники. Мат. анализ, Т.21 130—264.

[28] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве/ С.Г. Крейн.– М.: Наука, 1967.—464 с.

[29] Функциональный анализ/ под редакцией С.Г Крейна.М.: Наука, 1979, 418 с.

[30] Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного/ М.А. Лаврентьев, Б.П. Шабат.–М.: Наука, 1973.—736 с.

[31] Лаврентьев М.М. Одномерные обратные задачи математической физики / М.М. Лаврентьев, К.Г. Резницкая, В.Г.Яхно. - Наука,Сибир.отд. Новосибирск, 1982, 88 с.

[32] Левитан Б.М. Почти-периодические функции/ Б.М. Левитан.—М.: Тех-лит, 1953. 396 с.

[33] Mainardi F. The time fractional diffusion equation /Изв. ВУЗов, Радиофизика, т.87, №1-2, 1995

[34] Мартыненко Н.А. Конечные интегральные преобразования и их применение/ Н.А. Мартыненко, Л.М. Пустыльников.–М.: Наука, 1986. 301 с.

[35] Маслов В.П. Операторные методы/ В.П. Маслов.–М.: Наука, 1973. 543 с.

[36] Маслов В.П. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса/ В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов, М.:Наука, 1987. 352 с.

[37] Маслов В.П. Асимптотические методы и теория возмущений/ В.П. Маслов.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 312 с.

[38] Большой математический словарь. Математика. Науч. изд. БСЭ, М.: 2000, 847 с.

[39] Небольсина М.Н. Задача Неймана для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве и ортогональные многочлены / М.Н. Небольсина// Математические модели и операторные уравнения – Воронеж: ВорГу, 2007. Т. 4. С. 104—115.

[40] Небольсина М.Н. О корректной разрешимости краевых задач для уравнений в банаховом пространстве с оператором Штурма-Лиувилля / М.Н. Небольсина// Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2008 : тез. докл. – Воронеж, 2008. С. 109.

[41] Небольсина М.Н. Исследование методом С.Г. Крейна некоторых математических моделей тепломассопереноса / В.И. Гондарев, В.А. Костин, М.Н. Небольсина// Математические модели и операторные уравнения .– Воронеж: ВорГу, 2008. Т. 5, ч. 2. С. 55—66.

[42] Небольсина М.Н. Представление решения одной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве через абстрактные полиномы Чебышева / М.Н. Небольсина// Математические модели и операторные уравнения – Воронеж: ВорГу, 2005– Т. 3. С. 57—64.

[43] Nigmatullin R.R. Self–Similar Property of Random Signals: Solution of Invers Problem/ R/R/ Nigmatullin, J.A. Tenreiro Machado, Jornal of Applied Dynamics 292) (2013) с. 141–150.

[44] Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и в радиолакации // М.: Логос, 2002, 664 с.

[45] Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений //А.А. Самарский , Е.С. Николаев – М.: Наука, 1978, 591 с.

[46] Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения/ С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев.– Минск: Наука и техника, 1987, 687 с.

[47] Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я.Арсенин –М: Наука,Гл. ред физ-мат. лит. 1986. –288 с.

[48] Уиттекер Э.Т. Курс современного анализа, т. 2/ Э.Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, пер с англ. под ред. Ф.В. Широкого, М.: Физ-мат. лит., 1963.—515 с.

[49] Учайкин В.В. Методы дробных производных// Ульяновск, Изд. "Логос" 2002.— 512 с.

[50] Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы// Э. Хилле, Р.Филлипс.— М.: Издательство иностранной литературы, 1962 – 829с.

[51] Бадран С. C_0-операторные многочлены и корректная разрешимость уравнений с дробными производными// С.Бадран, В.А. Костин, М.Н. Небольсина, Белгород: Научные ведомости БелГУ, серия Математика.Физика, №5 (144), вып. 30, 2013, с. 68—78.

[52] Бадран С. О корректной разрешимости задачи Коши для обобщенного телеграфного уравнения// С. Бадран, В.А. Костин, А.В. Костин, Вестник Южно-Уральского государственного университета, серия Матмоделирование и программирование, 2014, т. 7, №3, с. 50—59.

[53] Бадран С. Дробные интегралы Адамара в обобщенных пространствах Степанова// С.Бадран, Воронеж: Материалы международной конференции ВЗМШ 2014, с. 288—289.

[54] Бадран С. О корректной разрешимости одного уравнения с дробными производными / М.Н. Небольсина, Салим Бадран Джасим Салим // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения XXIV".- Воронеж, 2013 .- С. 131-133.

[55] Бадран С. Об одном представлении краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения второго порядка / В.А. Костин, М.Н. Небольсина, Салим Бадран Джасим Салим // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения XXV".- Воронеж, 2014 .- С. 98-100

[56] Бадран С. Гипервесовые пространства Степанова и корректная разрешимость некоторых нестационарных задач для уравнений с дробными производными// С. Бадран, А.В. Костин, Воронеж: Современные проблемы теории краевых задач, 2013, с.

[57] Бадран С. О корректной разрешимости некоторых начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с вырождением // Костин А.В., Салим Б.Д. Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2014. Т. 2. № 4-2 (9-2). С. 94-99.

[58] Бадран С. О корректной разрешимости некоторых нестационарных задач для уравнений с дробными производными// С. Бадран, А.В. Костин, Д.В. Костин, Воронеж: Издательско–полиграфический центр "Научная книга Материалы Международной молодежной научной школы Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач, 2012, с. 219—224.