ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Иванова Елена Васильевна

Ограниченные решения векторно-операторных дифференциальных уравнений n-го порядка, не разрешенных относительно старшей производной

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор А. И. ПЕРОВ

Воронеж - 2014

Содержание

Введение

Диссертация состоит из двух частей: в первой части дифференциальные уравнения изучаются в банаховом пространстве, во второй- в гильбертовом пространстве. Мы старались изучать материал в духе Ю.Л. Далецкого и М.Г. Крейна "Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве". Основной метод, которым мы пользуемся, – это метод интегральных уравнений, красноречиво подтверждающий свою плодотворность в таких, например, книгах как "Колебания нелинейных систем" Е.Н. Розенвассера или "Нелинейные почти периодические колебания" М.А. Красносельского, В.Ш. Бурда и Ю.С. Колесова.

Каждая часть изучает линейную теорию и нелинейную теорию. К линейной части относятся линейные векторно-операторные дифференциальные уравнения n-го порядка, не разрешённые относительно старшей производной, с постоянными или переменными операторными коэффициентами. Здесь изучаются нерезонансные операторные характеристические многочлены и вводятся частотные постоянные; строится операторная ограниченная функция Грина и определяются интегральные постоянные. Основное внимание обращено на изучение свойств возникающих здесь интегральных операторов типа свёртки, ядром которых служит либо сама ограниченная функция Грина, либо её производная, в различных функциональных пространствах: оценка нормы и спектрального радиуса, структура спектра и строение резольвенты.

Нелинейная теория изучает нелинейные векторно-операторные дифференциальные уравнения n-го порядка, не разрешённые относительно старшей производной; причём изложение разбивается на два раздела: в первом идёт приложение классического принципа сжимающих отображений Банаха – Каччиополи и различных его обобщений к тем дифференциальным уравнениям, в которых нелинейность удовлетворяет условию Липшица; во втором дано применение не менее знаменитой теоремы Тихонова о неподвижной точке к дифференциальным уравнениям, нелинейность в которых удовлетворяет условию типа Липшица.

К дифференциальным уравнениям в банаховом пространстве с ограниченными операторными коэффициентами могут быть сведены различные интегро – дифференциальные уравнения и системы таких уравнений, счётные системы дифференциальных уравнений, рассматриваемые в некоторых банаховых пространствах последовательностей, дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом (дифференциально – разностные уравнения) и т.д. Отметим, что если разрешить коэффициентам дифференциальных уравнений быть неограниченными линейными операторами, то к уравнениям такого сорта, как писал Н.Н. Красовский [20, с. 150–204], могут быть сведены некоторые дифференциальные уравнения с последействием (по А.Д. Мышкису [32]).

Обозначения

$\mathbb{N}$ множество натуральных чисел

$\mathbb{Z}$ множество целых чисел

$\mathbb{R}$ множество вещественных чисел (вещественная прямая)

множество комплексных чисел (комплексная прямая)

$\mathbb{R}^n$ вещественное n-мерное пространство

$\mathbb{C}^n$ комплексное n-мерное пространство

$\mathbb{B}$ комплексное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$

$\mathbb{H}$ комплексное гильбертово пространство с нормой $|\cdot|$

$End\ \mathbb{B}$ банахова алгебра линейных ограниченных операторов $\mathbf{A}$, действующих в банаховом пространстве $\mathbb{B}$ с нормой $\|\mathbf{A}\|$

$End\ \mathbb{H}$ банахова алгебра линейных ограниченных операторов $\mathbf{A}$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ с нормой $|\mathbf{A}|$

$sp\mathbf{A}$ спектр (матрицы) оператора $\mathbf{A}$

$spr\mathbf{A}$ спектральный радиус (матрицы) оператора $\mathbf{A}$

$spa\mathbf{A}$ спектральная абсцисса (матрицы) оператора $\mathbf{A}$

$\mathbf{L}_n(\lambda)$ операторный характеристический многочлен степени n

σ_j j-я частотная постоянная $j = 0, 1, ..., n-1, n.$

$\mathbf{G}(t)$ (приведённая) операторная ограниченная функция Грина

æ_j j-я интегральная постоянная $j = 0, 1, ..., n-1, n.$

$\square$ и $\blacksquare$ начало и конец доказательства (рассуждения).

C банахово пространство непрерывных ограниченных векторных функций $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ с нормой $\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{C}} = \sup\limits_{-\infty<\theta<+\infty} \|\mathbf{f}(t)\|$

L_∞ банахово пространство измеримых ограниченных векторных функций $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ с нормой $\|\mathbf{f}\|_\infty = vrai \max\limits_{-\infty<\theta<+\infty} \|\mathbf{f}(t)\|$

P банахово пространство почти периодических векторных функций $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ с нормой $\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{P}} = \sup\limits_{-\infty<\theta<+\infty} \|\mathbf{f}(t)\|$

P_σ банахово пространство почти периодических векторных функций, спектр которых лежит в σ (как правило σ аддитивная подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}$)

Часть 1. Ограниченные решения векторно-операторных дифференциальных уравнений n-го порядка, не разрешённых относительно старшей производной, в банаховом пространстве

В книгах И.Д. Коструб и А.И. Перов [23] и А.И. Перов и И.Д. Коструб [44] изучались ограниченные решения нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка, разрешённых относительно старшей производной. Таким образом, можно сказать, что эти уравнения изучались в пространствах $\mathbb{R}^d$ или $\mathbb{C}^d$ конечной размерности d, определённых или нормой или скалярным произведением. Иными словами, можно сказать, что они исследовались в конечномерных банаховых или гильбертовых пространствах.

Во всех основных теоремах в указанных выше книгах встречаются интегральные или частотные постоянные. Эти интегральные постоянные $æ_0, æ_1, ..., æ_{n-1}$ и $æ_n$ и частотные постоянные $\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_{n-1}$ и σ_n строились по линейной части рассматриваемых дифференциальных уравнений – линейному векторно-матричному дифференциальному уравнению n-го порядка с постоянными коэффициентами - и были, грубо говоря, первое – нормами некоторых интегральных операторов типа свёртки, а второе – их спектральными радиусами. Впрочем, для скалярных дифференциальных уравнений, т.е. уравнений в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, эти постоянные в точности совпадают с нормами и, соответственно, её спектральными радиусами указанных выше интегральных операторов.

Нужно сказать, что в развиваемой в выше названных книгах теории в теоремах встречаются лишь интегральные постоянные $æ_0, æ_1, ..., æ_{n-1}$ и частотные постоянные $\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_{n-1}$; интегральная постоянная $æ_n$ и частотная постоянная σ_n оказались, как сейчас принято говорить, невостребованными. Рассмотрение в этой кандидатской диссертации дифференциальных уравнений n-го порядка, не разрешённых относительно старшей производной, потребовало привлечения $æ_n$ и σ_n, наряду с другими интегральными и частотными постоянными, в качестве равноправных членов.

Выше говорилось о некоторых интегральных операторах. Вообще, следует сказать, что основной метод, используемый в этой кандидатской диссертации, – это *метод интегральных уравнений* (именно такой подзаголовок имеет книга Е.Н. Розенвассера "Колебание нелинейных систем" [53] и М.А. Красносельского, В.Ш. Бурда и Ю.С. Колесова "Нелинейные почти периодические колебания" [25]). Этот метод использован В.А. Якубовичем и В.М. Старжинским в их монографии "Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами" [62] и В.И. Зубовым в учебнике "Теория колебаний" [14]. Среди других методов, используемых при изучении ограниченных решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, назовём *метод пространства состояний*, относящийся к *методам нелинейной теории дифференциальных уравнений*, характерный пример применения которого даёт, скажем, книга В.А. Плисса "Нелокальные проблемы теории колебаний" [49], *метод направляющий функций*, предложенный в своё время М.А. Красносельским и А.И. Перовым [24] (см. статью А.И. Перов и В.К. Евченко [43]), и *топологический метод* Важевского (Л. Чезари [60]).

Отметим некоторые особенности этой кандидатской диссертации.

Во-первых, дифференциальные уравнения рассматриваются либо в произвольном банаховом пространстве, либо в произвольном гильбертовом пространстве, например так, как это сделано в книге Ю.Л. Далецкого и М.Г. Крейна "Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве" [16]; во всяком случае, мы стремились к этому. Отметим, что если в этой книге и рассматриваются дифференциальные уравнения порядка выше первого, то они всегда оказываются дифференциальными уравнениями второго порядка (векторно-операторными), разрешёнными относительно второй производной, и этим всё заканчивается; ни о какой общей теории дифференциальных уравнений, порядка выше первого, тем более, о не разрешённых относительно старшей производной, и речи нет. Несколько слов (отдельная глава) об уравнениях высшего порядка оказались в книге Х. Л. Массера и Х.Х. Шеффера "Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства" [31], но только всё заканчивается рассмотрением линейных дифференциальных уравнений высшего порядка с периодическими коэффициентами, а нелинейные дифференциальные уравнения вообще не рассматриваются. Интересная во многих отношениях книга С.Г. Крейна "Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве" [26] посвящена линейным дифференциальным уравнениям с неограниченными операторными коэффициентами "в значительной мере опирается на теорию полугрупп" (Э. Хилле и Р. Филлипс "Функциональный анализ и полугруппы" [59]).

Во-вторых, рассматриваются дифференциальные уравнения n-го порядка, не разрешённые относительно старшей производной, и как следствие этого,

В-третьих, в формулировках всех основных теорем нашли своё достойное и законное место как интегральная постоянная $æ_n$, так и частотная постоянная σ_n (о чём уже было сказано выше), наряду с другими интегральными и частотными постоянными.

Глава 1. Линейная теория

1. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Операторный характеристический многочлен и частотные постоянные

1.1. Нерезонансное условие. В комплексном банаховом пространстве $\mathbb{B}$ рассмотрим линейное однородное векторно-операторное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = 0. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{A}_n$ – постоянные линейные ограниченные операторы, действующие в банаховом пространстве $\mathbb{B}$, т.е. из $End\,\mathbb{B}$, причём оператор $\mathbf{A}_0$ непрерывно обратим

$$\mathbf{A}_0^{-1} \in End\,\mathbb{B}. \tag{1.2}$$

Векторная функция $\mathbf{x}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ является гладкой функцией, $\dot{\mathbf{x}}(t) = d/dt\ \mathbf{x}(t), ..., \mathbf{x}^{(n)}(t) = d^n/dt^n\ \mathbf{x}(t)$. Она предполагается n раз непрерывно дифференцируемой, причём производная понимается как предел по норме соответствующего конечно – разностного соотношения, т.е. в сильном смысле. Если искать решение уравнения (1.1) по методу Эйлера в виде $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}h$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ и $h \in \mathbb{B}$, то мы придём к уравнению вида

$$(\mathbf{A}_0\lambda^n + \mathbf{A}_1\lambda^{n-1} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\lambda + \mathbf{A}_n)h = 0.$$

Выпишем соответствующий однородному характеристическому уравнению (1.1) операторный характеристический многочлен

$$\mathbf{L}_n(\lambda) \equiv \mathbf{A}_0\lambda^n + \mathbf{A}_1\lambda^{n-1} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\lambda + \mathbf{A}_n : \mathbb{C} \to End\,\mathbb{B}. \tag{1.3}$$

Число λ называется *регулярным* значением операторного характеристического многочлена, если оператор $\mathbf{L}_n(\lambda)$ непрерывно обратим, т.е. $\mathbf{L}_n^{-1}(\lambda) \in End\,\mathbb{B}$, и *сингулярным* значением, если последнее места не имеет. Совокупность всех регулярных значений образует *резольвентное* множество $\rho(\mathbf{L}_n)$ операторного многочлена $\mathbf{L}_n(\lambda)$, а его дополнение $\sigma(\mathbf{L}_n) = \mathbb{C}\backslash\rho(\mathbf{L}_n)$ – *спектр* рассматриваемого многочлена. Можно показать, что спектр всегда непуст, $\sigma(\mathbf{L}_n) \neq \varnothing$, и является ограниченным замкнутым (компактным) множеством, а резольвентное множество поэтому всегда есть неограниченное открытое множество.

Можно написать операторное характеристическое уравнение

$$\mathbf{A}_0\Lambda^n + \mathbf{A}_1\Lambda^{n-1} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\Lambda + \mathbf{A}_n = 0, \qquad (1.4)$$

однако его рассмотрение завело бы нас слишком далеко от принятого нами направления исследования. Поэтому мы фактически ограничимся только его упоминанием. Кое-что о таких матричных уравнениях можно узнать из книги И.М. Глазмана и Ю.И. Любича "Конечномерный линейный анализ" [11, с. 439-441]. Пусть $\Lambda \in End\,\mathbb{B}$ есть корень уравнения (1.4). Ещё Дж. Сильвестр на матричном уравнении заметил, что

$$\sigma(\Lambda) \subseteq \sigma(\mathbf{L}_n),$$

т.е. спектр корня содержится в спектре операторного многочлена (Р. Беллман [4, с. 249, упражнения 8 и 9]). Действительно, пусть $\Lambda h = \lambda h$, для $\lambda \in \sigma(\Lambda)$ и $h \neq 0$. Тогда $\Lambda^k h = \lambda^k h$ и из (1.4) получаем $\mathbf{L}_n(\lambda)h = 0$, что и означает включение $\lambda \in \sigma(L_n)$.

Во всей диссертации предполагается, что выполнено *нерезонансное условие*, состоящее в том, что при любом $\lambda = i\theta$, $-\infty <$

$\theta < +\infty$, оператор $\mathbf{L}_n(i\theta)$ непрерывно обратим, т.е.

$$\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta) \in End\,\mathbb{B},\ -\infty < \theta < +\infty. \tag{1.5}$$

В случае конечномерности пространства $\mathbb{B}$ условие (1.5) принимает более выразительный вид

$$det\mathbf{L}_n(i\theta) \neq 0,\ -\infty < \theta < +\infty.$$

Из условия (1.5) в частности при $\theta = 0$ вытекает, что у *нерезонансного* операторного многочлена $L_n(\lambda)$, а так мы назовём любой операторный многочлен, удовлетворяющий условию (1.5), коэффициент $\mathbf{A}_n$ также непрерывно обратим

$$\mathbf{A}_n^{-1} \in End\,\mathbb{B}. \tag{1.6}$$

Может случиться, что все остальные коэффициенты нерезонансного многочлена равны нулю: $\mathbf{A}_1 = ... = \mathbf{A}_{n-1} = 0$. Но даже в таком крайнем случае теория оказывается достаточно интересной (см., например, А.И. Перов и И.Д. Коструб [45, с. 209-214]).

По аналогии с Я.Н. Ройтенберг [54, с. 12-14] операторную функцию $\mathbf{W}(\lambda) \equiv \mathbf{L}_n^{-1}(\lambda) : \rho(\mathbf{L}_n) \to End\ \mathbb{B}$ назовём *операторной передаточной функцией*, а если выполнено нерезонансное условие (1.5), то операторную функцию $\mathbf{H}(\theta) \equiv \mathbf{W}(i\theta) : \mathbb{R} \to End\,\mathbb{B}$ назовём *операторной частотной характеристикой.* В дальнейшем нам будет удобно рассмотреть эту терминологию и говорить о *j-й передаточной операторной функции* $\mathbf{W}_j(\lambda) \equiv \lambda^j \mathbf{L}_n^{-1}(\lambda) : \rho(\mathbf{L}_n) \to End\ \mathbb{B}$ и *j-й частотной операторной характеристике* $\mathbf{H}(\theta) \equiv \mathbf{W}_j(i\theta) : \mathbb{R} \to End\,\mathbb{B}$. Здесь $\mathbf{W}_0(\lambda) = \mathbf{W}(\lambda),\ \mathbf{H}_0(\theta) = \mathbf{H}(\theta)$ и $j = 0, 1, ..., n-1, n$.

1.2. Частотные постоянные. Предполагая, что выполнено нерезонансное условие (1.5), введём в рассмотрение *частотные по-*

стоянные, положив

$$\sigma_j = \max_{-\infty<\theta<+\infty} \|(i\theta)^j \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\|, \qquad j = 0, 1, ..., n-1, \tag{1.7}$$

$$\sigma_n = \sup_{-\infty<\theta<+\infty} \|(i\theta)^n \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\|. \tag{1.8}$$

(Заметим, что так как $\|\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\| \le c/(1+|\theta|^n)$, то в формуле (1.7) стоит максимум, ибо стоящая под знаком максимума числовая функция стремится к нулю на бесконечности; в формуле (1.8) последнее места не имеет и потому, вообще говоря, можно говорить только о супремуме). Отметим, что согласно (1.7) и (1.8) во всех случаях справедливо неравенство

$$\|(i\theta)^j \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\| \le \sigma_j,\ -\infty < \theta < +\infty,\ j = 0, 1, ..., n-1, n, \tag{1.9}$$

причём σ_j есть наилучшая постоянная, для которой справедливо написанное выше неравенство.

Проверим, что последовательность положительных частотных постоянных $\{\sigma_j\}$ обладает свойством логарифмической выпуклости

$$\sigma_j^2 \le \sigma_{j+1}\sigma_{j-1},\ j = 1, ..., n-1. \tag{1.10}$$

Действительно, так как

$$\|(i\theta)^j \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\|^2 = \|(i\theta)^{j+1} \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\| \|(i\theta)^{j-1} \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\|,$$

то согласно (1.9) приходим к неравенству

$$\|(i\theta)^j \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\|^2 \le \sigma_{j+1}\sigma_{j-1},\ -\infty < \theta < +\infty,$$

переходя в котором к максимуму в левой части в силу (1.7) получаем (1.10). Наше утверждение доказано.

Отметим ещё два неравенства. Во-первых,

$$\|\mathbf{A}_n^{-1}\| \le \sigma_0. \tag{1.11}$$

Это неравенство непосредственно вытекает из определения (1.7) при $j = 0$ для $\theta = 0$. Во-вторых,

$$\|\mathbf{A}_0^{-1}\| \leq \sigma_n. \tag{1.12}$$

Это неравенство вытекает из определения (1.8) при $j = n$ для $|\theta| \to +\infty$. Действительно, так как при $\theta \neq 0$

$$\|(i\theta)^n \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\| \leq \sigma_n,$$

$$\|(i\theta)^n \ \left[\mathbf{A}_0(i\theta)^n + \mathbf{A}_1(i\theta)^{n-1} + ... + \mathbf{A}_{n-1}(i\theta) + \mathbf{A}_n\right]^{-1} \ \| \leq \sigma_n,$$

$$\| \ \left[\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1(i\theta)^{-1} + ... + \mathbf{A}_{n-1}(i\theta)^{-n+1} + \mathbf{A}_n(i\theta)^{-n}\right]^{-1} \ \| \leq \sigma_n,$$

то при $|\theta| \to +\infty$ из полученного неравенства непосредственно следует (1.12).

В связи с неравенствами (1.11) и (1.12) можно сказать следующее: если в нерезонансном операторном многочлене операторные коэффициенты $\mathbf{A}_0$ и $\mathbf{A}_n$ должны быть не только ненулевыми, но и непрерывно обратимыми, то про остальные коэффициенты ничего подобного уже сказать нельзя. В нерезонансном случае вполне может быть

$$\mathbf{A}_1 = ... = \mathbf{A}_{n-1} = 0, \tag{1.13}$$

т.е. нерезонансный операторный многочлен может быть двухчленным

$$\mathbf{L}_n(\lambda) = \mathbf{A}_0\lambda^n + \mathbf{A}_n. \tag{1.14}$$

1.3. Теорема о возмущённом нерезонансном многочлене. Рассмотрим задачу, при решении которой естественным находят применение частотных постоянных. Пусть дан нерезонансный операторный многочлен $\mathbf{L}_n(\lambda) = \mathbf{A}_0\lambda^n + \mathbf{A}_1\lambda^{n-1} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\lambda + \mathbf{A}_n$, где $\mathbf{A}_j$ из $End\,\mathbb{B}$ при $j = 0, 1, ..., n-1, n$. Спрашивается, каким должно быть возмущение

$$\Delta\mathbf{L}_n(\lambda) \equiv \sum_{j=0}^{n} \mathbf{B}_j \lambda^j, \tag{1.15}$$

где $\mathbf{B}_j$ из $End\,\mathbb{B}$ при $j = 0, 1, ..., n-1, n$, чтобы возмушённый операторный многочлен $\mathbf{M}_n(\lambda) \equiv \mathbf{L}_n(\lambda) + \Delta\mathbf{L}_n(\lambda)$ остался нерезонансным?

Обозначим через $\sigma_j(\mathbf{L}_n)$ частотную постоянную σ_j нерезонансного операторного многочлена $\mathbf{L}_n(\lambda)$, и предположим, что выполнено следующее условие

$$q_\sigma \equiv \sum_{j=0}^{n} \sigma_j(\mathbf{L}_n)\|\mathbf{B}_j\| < 1. \tag{1.16}$$

Теорема 1.1. *Пусть* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ – *нерезонансный операторный многочлен и* $\sigma_j(\mathbf{L}_n)$ – *его частотные постоянные,* $0 \le j \le n$. *Если возмущение* $\Delta\mathbf{L}_n(\lambda)$ *удовлетворяет условию* (1.16), *то и возмущённый многочлен* $\mathbf{M}_n(\lambda)$ *также является нерезонансным, причём для его частотных постоянных* $\sigma_j(\mathbf{M}_n)$ *справедливы двусторонние оценки*

$$\frac{\sigma_j(\mathbf{L}_n)}{1+q_\sigma} \le \sigma_j(\mathbf{M}_n) \le \frac{\sigma_j(\mathbf{L}_n)}{1-q_\sigma}, \; 0 \le j \le n. \tag{1.17}$$

□ Доказательство почти дословно воспроизводит доказательство аналогичного утверждения из А.И. Перов и И.Д. Коструб [45, с. 24-26] и потому здесь не приводится.■

Теорема 1.2. *Пусть* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ – *операторный гурвицев многочлен. Если возмущение* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ *удовлетворяет условию* (1.16), *то и возмущённый многочлен* $\mathbf{M}_n(\lambda)$ *также является гурвицевым.*

Теорема 1.2 важна при изучении устойчивости решений. Поясним, что мы называем операторный многочлен $\mathbf{L}_n(\lambda)$ *гурвицевым*, если его спектр лежит в открытой левой полуплоскости

$$Re\lambda < 0 \text{ при } \lambda \in \sigma(\mathbf{L}_n). \tag{1.18}$$

Чтобы больше не возвращаться к этому вопросу, назовём операторный многочлен $\mathbf{L}_n(\lambda)$ *болевым* (в честь рижского математика Пирса Георгиевича Боля), если его спектр не пересекается с мнимой осью

$$Re\lambda \neq 0 \text{ при } \lambda \in \sigma(\mathbf{L}_n). \tag{1.19}$$

Мы видим, что нерезонансный многочлен и болев многочлен – это одно и то же.

2. Операторная ограниченная функция Грина и интегральные постоянные

2.1. Операторная ограниченная функция Грина. В комплексном банаховом пространстве $\mathbb{B}$ рассмотрим линейное неоднородное векторно-операторное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \mathbf{f}(t), \tag{2.1}$$

в котором $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ есть векторная измеримая *ограниченная* функция; последнее, как известно, означает, что

$$\|\mathbf{f}(t)\| \leq c, \ -\infty < t < +\infty, \tag{2.2}$$

где c – некоторая неотрицательная постоянная.

Известно (см., М.А. Красносельский, В.Ш. Бурд, Ю.С. Колесов [25, с. 45] или Ю.Л. Далецкий И М.Г. Крейн [12, с. 118 – 121]), что неоднородное уравнение (2.1) при любой измеримой ограниченной функции $\mathbf{f}(t)$ имеет единственное ограниченное решение $\mathbf{x}(t)$ тогда и только тогда, когда спектр операторного характеристического многочлена $\mathbf{L}_n(\lambda)$ не пересекается с мнимой осью, то есть когда выполнено нерезонансное условие (1.5) (и многочлен является болевым).

Можно показать, что для уравнения (2.1) справедлива теорема Эсклангона: любое ограниченное решение $\mathbf{x}(t)$ уравнения при условии (2.2) таково, что все его производные $\mathbf{x}^{(j)}(t)$ являются ограниченными, $1 \le j \le n$ (И.Д. Коструб [22], см. также А.И. Перов [35]).

Поэтому если выполнено нерезонансное условие (1.5), то линейное неоднородное дифференциальное уравнение (2.1) при любой измеримой ограниченной векторной функции $\mathbf{f}(t)$ имеет единственное ограниченное решение $\mathbf{x}(t)$, причём ограниченными оказываются все производные $\dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)$ и имеют место следующие формулы

$$\mathbf{x}^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds, \quad 0 \le j \le n-1; \tag{2.3}$$

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds. \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{G}(t) : \mathbb{R} \to End\ \mathbb{B}$ есть *приведенная операторная ограниченная* функция Грина, то есть функция Грина задачи об ограниченных решениях. Как известно, несобственные интегралы в формулах (2.3) и (2.4) именуются свертками:

1) при $t \ne 0$ она является решением однородного операторного дифференциального уравнения n-го порядка

$$\mathbf{A}_0\mathbf{G}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{G}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{G}} + \mathbf{A}_n\mathbf{G} = 0. \tag{2.5}$$

2) производные $\mathbf{G}(t), \dot{\mathbf{G}}(t), ..., \mathbf{G}^{(n-2)}(t)$ непрерывны в нуле, и производная $\mathbf{G}^{(n-1)}(t)$ терпит разрыв

$$\mathbf{G}^{(j)}(+0) - \mathbf{G}^{(j)}(-0) = 0,\ 0 \le j \le n-2; \tag{2.6}$$

$$\mathbf{G}^{(n-1)}(+0) - \mathbf{G}^{(n-1)}(-0) = \mathbf{A}_0^{-1}.$$

3) существуют такие постоянные $M > 0$ и $\gamma > 0$, что справедливы оценки

$$\|\mathbf{G}^{(j)}(t)\| \le Me^{-\gamma|t|}, -\infty < t < +\infty, 0 \le j \le n. \tag{2.7}$$

Оценки (2.7) говорят о том, что несобственные интегралы в формулах (2.3) и (2.4) абсолютно и равномерно сходятся.

Для операторной ограниченной функции Грина можно провести представление через контурный интеграл Коши – Рисса, проливающее свет на роль операторной передаточной функции $\mathbf{W}(\lambda) = \mathbf{L}_n^{-1}(\lambda)$:

$$\mathbf{G}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\sigma} e^{t\lambda}\mathbf{W}(\lambda)d\lambda, \tag{2.8}$$

где контур интегрирования $\partial\sigma$ (возможно, составной) лежит в регулярном множестве $\rho(\mathbf{L}_n)$ и окружает спектр $\sigma(\mathbf{L}_n)$ операторного характеристического многочлена $\mathbf{L}_n(\lambda)$. Из формулы (2.8) последовательным дифференцированием получаем

$$\mathbf{G}^{(j)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\sigma} \lambda^j e^{t\lambda}\mathbf{L}_n^{-1}(\lambda)d\lambda,\ 1 \le j \le n. \tag{2.9}$$

2.2. Соответствие между нерезонансными операторными многочленами и ограниченными операторными функциями Грина. Изучим соответствие между нерезонансными операторными многочленами $\mathbf{L}_n(\lambda) : \mathbb{C} \to End\ \mathbb{B}$ и отвечающими им ограниченными операторными функциями Грина $\mathbf{G}(t) : \mathbb{R} \to End\ \mathbb{B}$, которое запишем в виде $\mathbf{G}(t) = \mathbf{G}\{\mathbf{L}_n(\lambda)\}(t)$. Приведём некоторые свойства этого соответствия.

1) *Если* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ *– нерезонансный операторный многочлен, а линейный ограниченный оператор* $\mathbf{A}$ *непрерыв-*

но обратим, то $\mathbf{AL}_n(\lambda)$ $(\mathbf{L}_n(\lambda)\mathbf{A})$ – *также нерезонансный операторный многочлен, причём* $\mathbf{G}\{\mathbf{AL}_n(\lambda)\}(t) = \mathbf{G}\{\mathbf{L}_n(\lambda)\}\mathbf{A}^{-1}(t)$ $\big(\, \mathbf{G}\{\mathbf{L}_n(\lambda)\mathbf{A}\}(t) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{G}\{\mathbf{L}_n(\lambda)\}(t)\,\big)$.

2) *Если* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ *– нерезонансный операторный многочлен и* ν *– произвольное вещественное число, то* $\mathbf{L}_n(\lambda+i\nu)$ *– также нерезонансный операторный многочлен, причём* $\mathbf{G}\{\mathbf{L}_n(\lambda+i\nu)\}(t) = e^{-i\nu t}\mathbf{G}\{L\mathbf{L}_n(\lambda)\}(t)$.

3)*Если* $\mathbf{L}_n(\lambda) = \mathbf{A}_0\lambda^n+\mathbf{A}_1\lambda^{n-1}+...+\mathbf{A}_{n-1}\lambda+\mathbf{A}_n$ *– нерезонансный операторный многочлен и* $\mathbf{M}_n(\lambda) = \mathbf{A}_0+\mathbf{A}_1\lambda+...+\mathbf{A}_{n-1}\lambda^{n-1}+\mathbf{A}_n\lambda^n$, *то есть* $\mathbf{M}_n(\lambda) = \lambda^n\mathbf{L}_n(1/\lambda)$ *при* $\lambda \neq 0$, *то* $\mathbf{M}_n(\lambda)$ *– также нерезонансный операторный многочлен, причём*

$$\sigma_j(\mathbf{M}_n) = \sigma_{n-j}(\mathbf{L}_n),\ 0 \le j \le n. \tag{2.10}$$

Эти свойства приведены без доказательства в А.И. Перов, И.Д. Коструб [45, с. 27], кроме формулы (2.10), которая является новой.

☐ Пусть $\mathbf{L}_n(\lambda)$ – нерезонансный операторный многочлен, а оператор $\mathbf{A} \in End\ \mathbb{B}$ – непрерывно обратим. Положим $\mathbf{M}_n(\lambda) = \mathbf{AL}_n(\lambda)$ (умножим на оператор $\mathbf{A}$ слева). Тогда $\mathbf{M}_n(\lambda)$ – также нерезонансный операторный многочлен, причём $\mathbf{M}_n^{-1}(i\theta) = \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\mathbf{A}^{-1}$.

Пусть $\mathbf{L}_n(\lambda)$ отвечает функция Грина $\mathbf{G}(t)$, а $\mathbf{M}_n(\lambda)$ – функция Грина $\mathbf{H}(t)$. Проверим, что $\mathbf{H}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{A}^{-1}$. Действительно, так как согласно (2.5) и (2.6)

$$\mathbf{A}_0\mathbf{G}^{(n)}(t)+\mathbf{A}_1\mathbf{G}^{(n-1)}(t)+...+\mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{G}}(t)+\mathbf{A}_n\mathbf{G}(t) = 0,$$

$$\mathbf{G}^{(j)}(+0)-\mathbf{G}^{(j)}(-0) = 0,\ 0 \le j \le n-2,$$
$$\mathbf{G}^{(n-1)}(+0)-\mathbf{G}^{(n-1)}(-0) = \mathbf{A}_0^{-1},$$

то для $\mathbf{H}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{A}^{-1}$ имеем

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{A}_0\mathbf{H}^{(n)}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{H}^{(n-1)}(t) + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{H}}(t) + \mathbf{A}_n\mathbf{H}(t)\right) =$$

$$= \mathbf{A}\left(\mathbf{A}_0\mathbf{G}^{(n)}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{G}^{(n-1)}(t) + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{G}}(t) + \mathbf{A}_n\mathbf{G}(t)\right)\mathbf{A}^{-1} =$$

$$= 0,$$

отсюда

$$\mathbf{A}_0\mathbf{H}^{(n)}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{H}^{(n-1)}(t) + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{H}}(t) + \mathbf{A}_n\mathbf{H}(t) = 0.$$

Далее,

$$\mathbf{H}^{(j)}(+0) - \mathbf{H}^{(j)}(-0) = \left\{\mathbf{G}^{(j)}(+0) - \mathbf{G}^{(j)}(-0)\right\}\mathbf{A}^{-1} = 0,$$

$$0 \le j \le n-2,$$

$$\mathbf{H}^{(n-1)}(+0) - \mathbf{H}^{(n-1)}(-0) = \left\{\mathbf{G}^{(n-1)}(+0) - \mathbf{G}^{(n-1)}(-0)\right\}\mathbf{A}^{-1} =$$

$$= \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{A}^{-1},$$

это и доказывает наше утверждение. Аналогично убедимся в справедливости 1), когда умножение на оператор $\mathbf{A}$ производится справа. Свойство 1) доказано.

Пусть нерезонансному операторному многочлену $\mathbf{L}_n(\lambda)$ отвечает операторная функция Грина $\mathbf{G}(t)$, а нерезонансному операторному многочлену $\mathbf{M}_n(\lambda) \equiv \mathbf{L}_n(\lambda + i\nu)$ отвечает операторная функция Грина $\mathbf{H}(t)$. Проверим, что $\mathbf{G}(t) = e^{i\nu t}\mathbf{H}(t)$. Действительно, по приводимой ниже формуле сдвига (2.11) имеем

$$\mathbf{L}_n\left(\frac{d}{dt}\right)\mathbf{G}(t) = \mathbf{L}_n\left(\frac{d}{dt}\right)\left\{e^{i\nu t}\mathbf{H}(t)\right\} =$$

$$= e^{i\nu t}\mathbf{L}_n\left(\frac{d}{dt} + i\nu\right)\mathbf{H}(t) = e^{i\nu t}\mathbf{M}_n\left(\frac{d}{dt}\right)\mathbf{H}(t) \equiv 0,$$

что и доказывает свойство 2).

По определению частотных постоянных (см.(2.9)) получаем

$$\sigma_j(\mathbf{M}_n) = \sup_{-\infty<\theta<+\infty} \|(i\theta)^j \mathbf{M}_n^{-1}(i\theta)\| =$$

$$= \sup_{-\infty<\theta<+\infty} \|(i\theta)^j \frac{1}{(i\theta)^n} \mathbf{L}_n^{-1}(1/i\theta)\| =$$

$$= \sup_{-\infty<\theta<+\infty} \|(i\theta)^{n-j} \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\| = \sigma_{n-j}(\mathbf{L}_n).$$

В промежуточных преобразованиях мы воспользовались тем, что $\mathbf{M}_n(i\theta) = (i\theta)^n \mathbf{L}_n(1/i\theta)$ при $\theta \neq 0$ и положили $i\theta = 1/i\theta$. Формула (2.10), а вместе с ней и свойство 3), установлены. ■

Для доказательства нам потребовалась хорошо известная в теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами формула сдвига – см. М.С. Понтрягин [50], А.В. Боровских и А.И. Перов [6, с. 163-164]

$$\mathbf{L}_n\left(\frac{d}{dt}\right)\{e^{\lambda t}\mathbf{f}(t)\} = e^{\lambda t}\mathbf{L}_n\left(\frac{d}{dt}+\lambda\right)\mathbf{f}(t). \tag{2.11}$$

В этой формуле λ – произвольное комплексное число, а $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ – произвольная n раз непрерывно дифференцируемая векторная функция. Предлагаемое нами доказательство отличается от тех, которые есть в указанной литературе.

□ По определению дифференциального оператора $\mathbf{L}_n(d/dt)$ имеем

$$\mathbf{L}_n\left(\frac{d}{dt}\right)\{e^{\lambda t}\mathbf{f}(t)\} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}_{n-j}\left(e^{\lambda t}\mathbf{f}(t)\right)^{(j)}.$$

Так как по формуле Лейбница дифференциальное произведение

$$(e^{\lambda t}\mathbf{f}(t))^{(j)} = \sum_{k=0}^{j} C_j^k \,(e^{\lambda t})^{(j-k)}\,\mathbf{f}^{(k)}(t),$$

где $C_j^k = k!(j-k)!/j!$ – биноминальные коэффициенты, то

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}_{n-j}\left(e^{\lambda t}\mathbf{f}(t)\right)^{(j)} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}_{n-j}\, \sum_{k=0}^{j} C_j^k \,(e^{\lambda t})^{(j-k)}\,\mathbf{f}^{(k)}(t) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}_{n-j} \ \sum_{k=0}^{j} C_j^k \ \lambda^{j-k} \ e^{\lambda t} \ \mathbf{f}^{(k)}(t) =$$

$$= e^{\lambda t} \ \sum_{j=0}^{n} \mathbf{A}_{n-j} \ \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^j \ \mathbf{f}(t) =$$

$$= e^{\lambda t} \ \mathbf{L}_n \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right) \ \mathbf{f}(t).$$

Формула сдвига (2.11) установлена.■

2.3. Интегральные постоянные. С операторной ограниченной функцией Грина $\mathbf{G}(t)$ тесно связаны постоянные, которые, за неимением лучшего термина, назовём интегральными.

Величину

$$æ_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(j)}(t)\| dt, \ 0 \le j \le n-1, \tag{2.12}$$

назовём *j-й интегральной постоянной*. К ним естественно присоединить *n-ю интегральную постоянную*

$$æ_n = \|\mathbf{A}_0^{-1}\| + \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(n)}(t)\| dt \ \ (= \mathcal{V}\{\mathbf{G}^{(n-1)}(t)\}). \tag{2.13}$$

Как мы видим, формулы выше (2.12) и (2.13) немного отличаются друг от друга. Однако же различие почти исчезает, если воспользоваться равенством, стоящим справа в формуле (2.13): а там стоит полная вариация операторной функции $\mathbf{G}^{(n-1)}(t) : \mathbb{R} \to End \ \mathbb{B}$ на всей вещественной прямой $\mathbb{R}$. Действительно,

$$æ_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(j)}(t)\| dt \ \ (= \mathcal{V}\{\mathbf{G}^{(j-1)}(t)\}), \ 1 \le j \le n-1. \tag{2.14}$$

2.4. Сравнение интегральных и частотных постоянных. Приведём известную формулу

$$\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(t)e^{-i\theta t}dt, \ -\infty < \theta < +\infty, \tag{2.15}$$

означающую, что преобразование Фурье операторной ограниченной функции Грина совпадает с операторной частотной характеристикой. Из неё вытекает неравенство

$$\|\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}(t)\|dt = æ_0,$$

переходя в котором к максимуму по θ в левой части, получаем соотношение

$$\sigma_0 \leq æ_0. \tag{2.16}$$

Далее, из формулы (2.15) последовательным интегрированием по частям выводим равенства

$$(i\theta)^j\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t)e^{-i\theta t}dt, \ -\infty < \theta < +\infty, \tag{2.17}$$

$$1 \leq j \leq n-1.$$

Эти формулы говорят о том, что j-я частотная операторная характеристика (а так называется левая часть написанного равенства) совпадает с преобразованием Фурье j-й производной операторной ограниченной функции Грина. Из равенства (2.17) согласно определению (2.12) вытекает неравенство

$$\|(i\theta)^j\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(j)}(t)\|dt = æ_j,$$

переходя в котором к максимуму по θ в левой части, получаем соотношение в силу определения (1.7)

$$\sigma_j \leq æ_j,\ 1 \leq j \leq n-1. \tag{2.18}$$

Из формулы (2.17) при $j = n-1$ интегрированием по частям убеждаемся в том, что

$$(i\theta)^n \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta) = \mathbf{A}_0^{-1} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t) e^{-i\theta t} dt. \tag{2.19}$$

Отсюда, как и выше, согласно равенству (2.13) вытекает неравенство

$$\|(i\theta)^n \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\| \leq \|\mathbf{A}_0^{-1}\| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(n)}(t)\| dt = æ_n,$$

переходя в котором слева к супремуму по θ, в силу определения (1.8) получаем соотношения

$$\sigma_n \leq æ_n. \tag{2.20}$$

Из (2.16), (2.18) и (2.20) окончательно получаем

$$\sigma_j \leq æ_j,\ 0 \leq j \leq n. \tag{2.21}$$

3. Интегральные операторы. Спектр и резольвента

3.1. Основная теорема. Спектральные постоянные. Геометрический смысл интегральных и частотных постоянных полностью раскрывает приводимая ниже теорема 3.1. Введём обозначения для интегральных операторов, определяемых формулами (2.3) и (2.4):

$$\mathbf{K}_j \mathbf{f}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s) \mathbf{f}(s) ds,\ 0 \leq j \leq n-1, \tag{3.1}$$

$$\mathbf{K}_n\mathbf{f}(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}(t) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds. \qquad (3.2)$$

Рассмотрим банахово пространство $\mathrm{C} = \mathrm{C}(-\infty, +\infty) = \mathrm{C}(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ всех непрерывных ограниченных функций $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$, положим

$$\|\mathbf{f}\| = \|\mathbf{f}\|_{\mathrm{C}} = \sup_{-\infty<t<+\infty} \|\mathbf{f}(t)\|. \qquad (3.3)$$

Теорема 3.1. *При любом* $0 \le j \le n$ *интегральный оператор* $\mathbf{K}_j$ *действует в банаховом пространстве* C *и является линейным ограниченным оператором, причём*

$$\mathbf{K}_j \le æ_j, \qquad (3.4)$$

$$spr\mathbf{K}_j = \widehat{\sigma}_j, \qquad (3.5)$$

где в формуле (3.4) *говорится о норме интегрального оператора, а в формуле* (3.5) *– о его спектральном радиусе.*

□ Из формулы (3.1) в полном соответствии с формулой (2.12) находим

$$\|\mathbf{K}_j\mathbf{f}(t)\| \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}(s)\|ds \le$$

$$\le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(j)}(t-s)\|\|\mathbf{f}(s)\|ds \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(j)}(t-s)\|\|\mathbf{f}\|ds = æ_j\|\mathbf{f}\|.$$

Поэтому

$$\|\mathbf{K}_j\mathbf{f}(t)\| \le æ_j\|\mathbf{f}\|, \ 0 \le j \le n-1. \qquad (3.6)$$

Аналогично из равенства (3.2) в полном соответствии с формулой (2.13) имеем

$$\|\mathbf{K}_n\mathbf{f}(t)\| \le \|\mathbf{A}_0^{-1}\|\|\mathbf{f}(t)\| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(n)}(t-s)\mathbf{f}(s)\|ds \le$$

$$\leq \|\mathbf{A}_0^{-1}\|\|\mathbf{f}\| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(n)}(t-s)\|\|\mathbf{f}(s)\|ds \leq$$

$$\leq \left\{ \|\mathbf{A}_0^{-1}\| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(n)}(t-s)\|ds \right\} \|\mathbf{f}\| = æ_n\|\mathbf{f}\|,$$

откуда вытекает, что

$$\|\mathbf{K}_n\mathbf{f}(t)\| \leq æ_n\|\mathbf{f}\|. \tag{3.7}$$

Из формул (3.6) и (3.7) в силу произвольности выбора $\mathbf{f}$ из C неминуемо вытекают оценки (3.4). Доказательство формулы (3.5) будет дано в следующем пункте 3.2. ■

Но прежде всего нужно объяснить, что это за новые постоянные появились в формуле (3.5). Здесь

$$\widehat{\sigma}_j = \max_{-\infty<\theta<+\infty} spr\left\{(i\theta)^j\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\right\},\ 0 \leq j \leq n-1 \tag{3.8}$$

$$\widehat{\sigma}_n = \sup_{-\infty<\theta<+\infty} spr\left\{(i\theta)^n\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\right\}. \tag{3.9}$$

Эти новые постоянные, напрямую связанные со спектральными операторами $(i\theta)^j\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)$ при $-\infty < \theta < +\infty$ и $0 \leq j \leq n$, назовём *спектральными.* Сравнение формул (3.8) и (3.9) с формулами (1.7) и (1.8) показывает, что всегда

$$\widehat{\sigma}_j \leq \sigma_j,\ 0 \leq j \leq n. \tag{3.10}$$

Сделаем необходимые пояснения к формулам (3.8) и (3.9).

Пусть $0 \leq j \leq n$. Обозначим через $\varphi_j(\theta)$ функцию, фигурирующую в формулах (3.8) и (3.9): $\varphi_j(\theta) = spr\left\{(i\theta)^j\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\right\}$, $-\infty < \theta < +\infty$. Так как для любого оператора $\mathbf{A}$ из $End\,\mathbb{B}$ спектральный радиус $spr\mathbf{A}$ не превосходит его нормы: $spr\mathbf{A} \leq \|\mathbf{A}\|$, то согласно тексту, следующему за формулой (1.8), в рассматриваемом случае имеем

$$\varphi_j(\theta) = spr\left\{(i\theta)^j\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\right\} \leq \|(i\theta)^j\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\| =$$

$$= |\theta|^j \|\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\| \leq \frac{c|\theta|^j}{1+|\theta|^n} \to 0 \qquad (3.11)$$

$$\text{при} \quad |\theta| \to +\infty \quad \text{и} \quad 0 \leq j \leq n-1;$$

$$\varphi_j(\theta) \leq c \quad \text{при} \quad -\infty < \theta < +\infty.$$

Поэтому неотрицательная функция $\varphi_j(\theta)$ является ограниченной $(-\infty < \theta < +\infty)$.

Так как операторная функция $(i\theta)^j \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)$ непрерывно зависит от параметра θ в операторной топологии, то в силу полунепрерывной сверху зависимости спектра оператора от самого оператора (Ю.Л. Далецкий и М.Г. Крейн [12, с. 27-28]), рассматриваемая функция $\varphi_j(\theta)$ оказывается *полунепрерывной сверху*: для заданного θ_0 по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\varphi_j(\theta) < \varphi_j(\theta_0) + \varepsilon \quad \text{при} \quad |\theta - \theta_0| < \delta. \qquad (3.12)$$

Так как полунепрерывная функция на любом отрезке достигает максимума, то при $0 \leq j \leq n-1$ в формуле (3.8) можно писать максимум (мы учитываем, что согласно (3.11) $\varphi_j(\theta) \to 0$ при $|\theta| \to 0$). При $j = n$ этого уже сказать нельзя – поэтому в формуле (3.9) можно писать только супремум.

3.2. Спектр и резольвента. Пусть $j = 0$. Покажем, что справедлива формула

$$sp\mathbf{K}_0 = \{0\} \bigcup \left\{ \bigcup_{-\infty<\theta<+\infty} sp\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta) \right\}. \qquad (3.13)$$

Здесь $sp\mathbf{K}_0$ – это спектр оператора $\mathbf{K}_0$, а $sp\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)$ – это спектр оператора $\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)$, $-\infty < \theta < +\infty$; это и другое множество при каждом фиксированном θ есть непустое замкнутое ограниченное (компактное) множество комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Множество, стоящее в правой части формулы (3.13) есть непустое замкнутое ограниченное множество. Можно показать, что если ξ не входит в это множество, то $\xi \neq 0$ есть регулярное значение интегрального оператора $\mathbf{K}_0$, причём решение $\mathbf{f}$ уравнения

$$(\xi \mathbf{E} - \mathbf{K}_0)\mathbf{f} = \mathbf{g}, \tag{3.14}$$

где $\mathbf{E}$ есть единичный оператор в банаховом пространстве С, имеет вид

$$\mathbf{f}(t) = \frac{1}{\xi}\mathbf{g}(t) + \frac{1}{\xi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}\left\{\mathbf{L}_n(\lambda) - \frac{1}{\xi}\mathbf{I}\right\}(t-s)\mathbf{g}(s)ds. \tag{3.15}$$

Поясним, почему в рассматриваемом случае операторный многочлен $\mathbf{L}_n(\lambda) - (1/\xi)\mathbf{I}$ является нерезонансным. Действительно, так как

$$\mathbf{L}_n(i\theta) - \frac{1}{\xi}\mathbf{I} = \frac{\mathbf{L}_n(i\theta)}{\xi}\left(\xi\mathbf{I} - \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\right),$$

то

$$\left(\mathbf{L}_n(i\theta) - \frac{1}{\xi}\mathbf{I}\right)^{-1} = \left(\xi\mathbf{I} - \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\right)^{-1}\xi\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta),$$

ибо из $\xi \overline{\in} sp\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)$ вытекает существование обратного $\left(\xi\mathbf{I} - \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\right)^{-1}$.

Формула (3.15) есть формула для резольвенты интегрального оператора $\mathbf{K}_0$.

Пусть $0 < j < n$. Покажем, что справедлива формула

$$sp\mathbf{K}_j = \bigcup_{-\infty<\theta<+\infty} sp\left\{(i\theta)^j\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\right\}. \tag{3.16}$$

Формула (3.16) показывает, что при $\theta = 0$ оператор $(i\theta)^j\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)$ является нулевым, поэтому нуль входит в правую часть формулы (3.16). Множество, стоящее в правой части формулы (3.16), есть непустое ограниченное замкнутое множество.

Можно показать, что если ξ не входит в это множество, то $\xi \neq 0$ есть регулярное значение интегрального оператора $\mathbf{K}_j$, причём решение $\mathbf{f}$ уравнения

$$(\xi \mathbf{E} - \mathbf{K}_j)\mathbf{f} = \mathbf{g}, \tag{3.17}$$

можно представить в виде

$$\mathbf{f}(t) = \frac{1}{\xi}\mathbf{g}(t) + \frac{1}{\xi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}\left\{\mathbf{L}_n(\lambda) - \frac{1}{\xi}\lambda^j \mathbf{I}\right\}(t-s)\mathbf{g}(s)ds. \tag{3.18}$$

Поясним, почему в рассматриваемом случае операторный многочлен $\mathbf{L}_n(\lambda) - (1/\xi)\lambda^j \mathbf{I}$ является нерезонансным. Действительно, так как

$$\mathbf{L}_n(i\theta) - \frac{1}{\xi}(i\theta)^j \mathbf{I} = \frac{\mathbf{L}_n(i\theta)}{\xi}\left(\xi \mathbf{I} - (i\theta)^j \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\right),$$

то

$$\left(\mathbf{L}_n(i\theta) - \frac{1}{\xi}(i\theta)^j \mathbf{I}\right)^{-1} = \left(\xi \mathbf{I} - (i\theta)^j \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\right)^{-1} \xi \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta),$$

ибо из $\xi \overline{\in} sp\left\{(i\theta)^j \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\right\}$ вытекает существование обратного $\left(\xi \mathbf{I} - (i\theta)^j \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\right)^{-1}$. Формула (3.18) есть формула для резольвенты интегрального оператора $\mathbf{K}_j$.

Пусть $j = n$. Покажем, что справедлива формула

$$sp\mathbf{K}_n = \left\{\bigcup_{-\infty<\theta<+\infty} sp\left\{(i\theta)^n \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\right\}\right\} sp\mathbf{A}_0^{-1}. \tag{3.19}$$

Формула (3.19) показывает, что при $\theta = 0$ оператор $(i\theta)^n \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)$ является нулевым, поэтому нуль входит в правую часть формулы (3.19). Множество, стоящее в правой части формулы (3.19), есть непустое ограниченное замкнутое множество.

Проверим замкнутость множества, стоящего справа в формуле (3.19). Пусть последовательность Z_k принадлежит этому множеству и $Z_k \to Z$. Если бесконечная подпоследовательность $Z(k)$ принадлежит $sp\mathbf{A}_0^{-1}$, то $Z \in sp\mathbf{A}_0^{-1}$ в силу замкнутости спектра любого оператора.

Пусть теперь $Z \overline{\in} sp\mathbf{A}_0^{-1}$ при $k = 1, 2, \ldots$. Тогда можно указать такую последовательность $\theta_k, -\infty < \theta < +\infty$, что $Z_k \in sp(i\theta_k)^n L_n^{-1}(i\theta_k)$. Если последовательность θ_k является ограниченной, то без ограничения общности можно считать, что $\theta_k \to \theta_0$ (иначе мы бы перешли к подпоследовательности). В этом случае $Z \in sp\left\{(i\theta_0)^n \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta_0)\right\}$ (см. Ю.Л. Далецкий и М.Г. Крейн [12, с.27-28]).

Осталось разобрать случай, когда θ_k является неограниченной. В этом случае $sp\left\{(i\theta_k)^n \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta_k)\right\} \to sp\mathbf{A}_0^{-1}$ и $z \in sp\mathbf{A}_0^{-1}$. Итак, справедливость нашего утверждения установлена.

Можно показать, что если ξ не входит в рассматриваемое нами множество, то $\xi \neq 0$ есть регулярное значение интегрального оператора $\mathbf{K}_j$, причём решение $\mathbf{f}$ уравнения

$$(\xi\mathbf{E} - \mathbf{K}_n)\mathbf{f} = \mathbf{g} \tag{3.20}$$

можно представить в виде

$$\mathbf{f}(t) = \frac{1}{\xi}\mathbf{g}(t) + \frac{1}{\xi^2}\frac{d^n}{dt^n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{G}\left\{\mathbf{L}_n(\lambda) - \frac{1}{\xi}\lambda^n\mathbf{I}\right\}(t-s)\mathbf{g}(s)ds \tag{3.21}$$

или более подробно

$$\mathbf{f}(t) = \frac{1}{\xi}\mathbf{g}(t) + \frac{1}{\xi^2}\left(\mathbf{A}_0 - \frac{1}{\xi}\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{g}(t) +$$

$$+\frac{1}{\xi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{G}^{(n)}\left\{\mathbf{L}_n(\lambda) - \frac{\lambda^n}{\xi}\mathbf{I}\right\}(t-s)\mathbf{g}(s)ds. \tag{3.22}$$

4. Линейные векторно-операторные дифференциальные уравнения n-го порядка с переменными коэффициентами, не разрешённые относительно старшей производной

4.1. Основные предположения. Указанное в заголовке уравнение имеет вид дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}^{(j)} + \mathbf{f}(t), \quad (4.1)$$

где $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{A}_n$ – постоянные линейные ограниченные операторы, действующие в банаховом пространстве $\mathbb{B}$, причём оператор $\mathbf{A}_0$ непрерывно обратим. Мы предполагаем, что операторный характеристический многочлен

$$\mathbf{L}_n(\lambda) \equiv \mathbf{A}_0\lambda^n + \mathbf{A}_1\lambda^{n-1} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\lambda + \mathbf{A}_n \quad (4.2)$$

является нерезонансным (см. условие (1.5)), и, значит, определены интегральные постоянные $æ_0, æ_1, ..., æ_{n-1}, æ_n$ (см. формулы (2.12) и (2.13)).

Относительно операторных функций $\mathbf{B}_j(t) : \mathbb{R} \to End\, \mathbb{B},\ 0 \le j \le n$, предположим, что они (сильно) измеримы и являются ограниченными

$$\|\mathbf{B}_j(t)\| \le l_j,\ -\infty < t < +\infty,\ 0 \le j \le n, \quad (4.3)$$

где $l_0, l_1, ..., l_{n-1}, l_n$ – некоторые неотрицательные числа. Наличие ненулевой операторной функции $\mathbf{B}_n(t)$ и говорит о том, что рассматриваемое уравнение (4.1) не разрешимо относительно старшей производной. Во всём дальнейшем важную роль играет *интегральное* условие

$$q_æ \equiv \sum_{j=0}^{n} æ_j l_j < 1, \quad (4.4)$$

в котором часть уравнения с постоянными коэффициентами представлена своими интегральными постоянными, а часть с переменными коэффициентами – своими липшицевыми постоянными.

Да, мы забыли ещё сказать, что $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ есть измеримая ограниченная векторная функция

$$\|\mathbf{f}(t)\| \le a, \ -\infty < t < +\infty. \tag{4.5}$$

Совокупность всех таких функций образует банахово пространство $\mathrm{L}_\infty = \mathrm{L}_\infty(-\infty, +\infty) = \mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ с нормой

$$\|\mathbf{f}\| = \|\mathbf{f}\|_\infty = vrai \max_{-\infty<\theta<+\infty} \|\mathbf{f}(t)\| \tag{4.6}$$

Ясно, что $\mathrm{C} \subset \mathrm{L}_\infty$ и теорема 3.1 справедлива и для банахова пространства L_∞.

4.2. Теорема существования и единственности. Изложение теоретического материала мы начнём с основной теоремы.

Теорема 4.1. *При сделанных выше предположениях – фактически в условиях Каратеодори – уравнение* (4.1) *при любой измеримой ограниченной функции* $\mathbf{f}(t)$ *имеет единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$. *У этого решения оказываются ограниченными все производные* $\dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)$, *причём справедливы оценки*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_\infty \le \frac{æ_j}{1 - q_æ}\|\mathbf{f}\|_\infty, \ 0 \le j \le n. \tag{4.7}$$

Конечно, $\mathbf{x}^{(j)}(t) \in \mathrm{C}$ при $0 \le j \le n-1$ (так как они абсолютно непрерывны) и можно было бы в оценках (4.7) в этом случае писать $\|\mathbf{x}^{(j)}\|_{\mathrm{C}}$; ради единообразия была выбрана приведённая выше запись.

☐ Докажем сначала оценки (4.7). Пусть $\mathbf{x}(t)$ есть ограниченное решение уравнения (4.1). По теореме Эсклангона, перенесённой на дифференциальные уравнения в банаховом пространстве

(И.Д. Кoструб [22]; см. также А.И. Перов [39]) у этого решения оказываются ограниченными все производные $\dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)$. По формулам (2.3) и (2.4) мы можем написать

$$\mathbf{x}^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{g}(s)ds, \ 0 \leq j \leq n-1, \tag{4.8}$$

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{g}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t-s)\mathbf{g}(s)ds, \tag{4.9}$$

$$\mathbf{g}(t) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}^{(j)}(t) + \mathbf{f}(t). \tag{4.10}$$

Согласно оценкам (3.4) – как мы уже говорили, они очевидным образом справедливы и в банаховом пространстве L_∞, – в силу условий (4.3) и (4.5) из (4.8) и (4.9) вкупе с (4.10) получаем

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_\infty \leq æ_j \left\{ \sum_{j=0}^{n} l_k \|\mathbf{x}^{(k)}\| + \|\mathbf{f}\|_\infty \right\}, \ 0 \leq j \leq n. \tag{4.11}$$

Умножив j-е неравенства на неотрицательные l_j и почленно сложив полученные таким образом неравенства, мы находим

$$\sum_{j=0}^{n} l_j \|\mathbf{x}^{(j)}\|_\infty \leq q_æ \left\{ \sum_{j=0}^{n} l_k \|\mathbf{x}^{(k)}\| + \|\mathbf{f}\|_\infty \right\},$$

из которого в силу интегрального условия (4.4) вытекает промежуточная оценка

$$\sum_{j=0}^{n} l_j \|\mathbf{x}^{(j)}\|_\infty \leq \frac{q_æ}{1-q_æ} \|\mathbf{f}\|_\infty,$$

подставляя которую в (4.11), приходим к (4.7).

Для доказательства существования и единственности ограниченного решения уравнения (4.1) рассмотрим систему векторно-операторных интегральных уравнений

$$\mathbf{x}_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{g}(s)ds, \ 0 \leq j \leq n-1, \tag{4.12}$$

$$\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{g}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t-s)\mathbf{g}(s)ds, \tag{4.13}$$

$$\mathbf{g}(t) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}_j(t) + \mathbf{f}(t). \tag{4.14}$$

Рассмотрим в банаховом пространстве $\mathrm{L}_\infty^{(n)} = \mathrm{L}_\infty \times ... \times \mathrm{L}_\infty$ $(n+1)$ раз составных векторных функций $\mathbf{x}(t) = \{\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), ..., \mathbf{x}_{n-1}(t), \mathbf{x}_n(t)\}$, где каждая $\mathbf{x}_j(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ из банахова пространства L_∞, с обобщённой нормой

$$\boldsymbol{|}\,\mathbf{x}\,\boldsymbol{|} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}_0\|_\infty \\ \|\mathbf{x}_1\|_\infty \\ \cdots \\ \|\mathbf{x}_n\|_\infty \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{4.15}$$

операторное уравнение

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \mathrm{L}_\infty^{(n)}, \tag{4.16}$$

где

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{F}_0(\mathbf{x}), \mathbf{F}_1(\mathbf{x}), ..., \mathbf{F}_{n-1}(\mathbf{x}), \mathbf{F}_n(\mathbf{x})\}, \tag{4.17}$$

а $\mathbf{F}_j(\mathbf{x})$ есть правая часть j-го уравнения системы (4.12) – (4.14). Согласно (3.4) из (4.12) – (4.14) выводим

$$\|\mathbf{F}_j(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_j(\mathbf{y})\|_\infty \leq æ_j \sum_{k=0}^{n} l_k \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\|_\infty,\ 0 \leq j \leq n. \tag{4.18}$$

Из системы неравенств (4.18) вытекает в силу обозначения (4.15) возможность её записи в векторно- матричном виде

$$\boldsymbol{|}\,\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})\,\boldsymbol{|} \leq \mathbf{Q}\boldsymbol{|}\,\mathbf{x} - \mathbf{y}\,\boldsymbol{|}, \tag{4.19}$$

где $\mathbf{Q} = (æ_j l_k)$ есть неотрицательная $(n+1) \times (n+1)$ – матрица вида $æ_j l_k$ (произведение положительного вектор – столбца

$æ = col(æ_0, æ_1, ..., æ_{n-1}, æ_n)$ на неотрицательную вектор – строку $l = (l_0, l_1, l_{n-1}, l_n))$, спектральный радиус которой меньше единицы

$$0 \leq \mathbf{Q} = æl, \qquad spr\mathbf{Q} = læ = q_æ < 1 \tag{4.20}$$

в силу интегрального условия (4.4). Так как выполнены все условия обобщённого принципа сжимающих отображений (А.И. Перов [34]), то уравнение (4.16) имеет единственное решение, так как линейный интегральный оператор $\mathbf{F} \in End\ \mathrm{L}_\infty^{(n)}$ имеет единственную неподвижную точку. Осталось проверить, что если $\mathbf{x}(t) = \{\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), ..., \mathbf{x}_{n-1}(t), \mathbf{x}_n(t)\}$ есть неподвижная точка оператора $\mathbf{F}$, то $\mathbf{x}_0(t)$ есть ограниченное решение уравнения (4.1) и $\mathbf{x}_j(t) = \mathbf{x}_0^{(j)}(t),\ 1 \leq j \leq n$. Действительно, имеем

$$\mathbf{x}_0(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(t-s)\mathbf{g}(s)ds,$$

$$\mathbf{g}(t) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}_j(t) + \mathbf{f}(t).$$

Так как

$$\mathbf{x}_0^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{g}(s)ds,\ 1 \leq j \leq n-1,$$

$$\mathbf{x}_0^{(n)}(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{g}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t-s)\mathbf{g}(s)ds,$$

то сравнивая с правыми частями уравнений системы (4.12) – (4.14), получаем $\mathbf{x}_0^{(j)}(t) = \mathbf{x}^{(j)}(t)$ при $1 \leq j \leq n$. Поэтому если положить $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0(t)$, то

$$\mathbf{g}(t) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}^{(j)}(t) + \mathbf{f}(t)$$

и потому $\mathbf{x}(t)$ есть ограниченное решение уравнения (4.1). (Проведённые нами рассуждения показали, что $\mathbf{x}(t)$ есть решение системы интегральных уравнений (4.8) – (4.10)). ■

4.3. Метод последовательных приближений. Теорема 4.1 может быть доказана следующим образом

Теорема 4.2. *При сделанных выше предположениях ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *и его производные* $\dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t)$ *и* $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ *могут быть найдены методом последовательных приближений*

$$\mathbf{x}^{[k]} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{[k-1]}),\ k = 1, 2, ..., \tag{4.21}$$

начиная с произвольного элемента $\mathbf{x}^{[0]}$ *из* $\mathrm{L}_\infty^{(n)}$. *При этом оценка погрешности выглядит следующим образом*

$$\|\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{[k](j)}\| \leq \frac{q_{æ}^{k-1}}{1-q_{æ}} æ_j \sum_{i=0}^{n} l_i \|\mathbf{x}_i^{[1]} - \mathbf{x}_i^{[0]}\|_\infty, \tag{4.22}$$

$$0 \leq j \leq n,\ k = 1, 2, ...$$

4.4. Почти периодические колебания. В приложениях важно приводимое ниже утверждение

Теорема 4.3. *Если при сделанных выше предположениях операторные функции* $\mathbf{B}_j(t)$ *являются (сильно) почти периодическими, так же как и векторная функция* $\mathbf{f}(t)$, *то единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *уравнения* (4.1) *является почти периодическим вместе с производными* $\dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t)$ *и* $\mathbf{x}^{(n)}(t)$, *причём*

группа частот почти периодической функции $\mathbf{x}^{(j)}(t) \subseteq$
группе частот $\mathbf{B}_0(t), \mathbf{B}_1(t), ..., \mathbf{B}_{n-1}(t), \mathbf{B}_n(t)$ *и* $\mathbf{f}(t)$. (4.23)

О группе частот почти периодической функции подробно говориться в книге А.И. Перова и И.Д. Коструб [45, с. 50]. Группа частот в книге Б.М. Левитана [27, с.125] называется модулем почти периодической функции.

Доказательство теоремы 4.3 естественно проводить в банаховом пространстве $\mathrm{P}^{(0)} = \mathrm{P} \times ... \times \mathrm{P}$ ($(n+1)$ раз), где $\mathrm{P} = \mathrm{P}(-\infty, +\infty) =$

$\mathrm{P}(\mathbb{R},\mathbb{B})$ есть банахово пространство векторных почти периодических функций $\mathbf{f}(t):\mathbb{R}\to\mathbb{B}$ с нормой

$$\|\mathbf{f}\|=\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{P}}=\sup_{-\infty<\theta<+\infty}\|\mathbf{f}(t)\|. \tag{4.24}$$

Ясно, что $\mathrm{P}\subset\mathrm{C}$ и вложение непрерывно. Подробнее об этом см. в книге Б.М. Левитана и В.В. Жикова [28]. Нетрудно видеть, что теорема 3.1 сохраняет свою силу и в банаховом пространстве P, что позволяет теорему 4.3 доказать по приведённой выше схеме.

Включение (4.23) проще всего доказывается заменой в только что проведённых рассуждениях пространства P на пространство P_α, где α – группа частот коэффициентов $\mathbf{B}_0(t),\mathbf{B}_1(t),...,\mathbf{B}_{n-1}(t),\mathbf{B}_n(t)$ и функции $\mathbf{f}(t)$, если заметить, что интегральный оператор $\mathbf{F}(t)$ оставляет инвариантным пространство P_α. Мы полагаем, что P_α – это совокупность тех $\mathbf{f}(t)$ из P, спектр которых лежит в α.

4.5. Асимптотическая устойчивость. Приводимое ниже утверждение также важно в приложениях.

Теорема 4.4. *Если при сделанных выше предположениях операторный характеристический многочлен* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ (4.2) *является гурвицевым, то единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *линейного векторно-операторного уравнения* (4.1) *является асимптотически устойчивым по Ляпунову, т.е.*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}(t)-\mathbf{y}^{(j)}(t)\|\to 0 \quad \textit{при} \quad t\to+\infty,\ 0\le j\le n, \tag{4.25}$$

где $\mathbf{y}(t)$ *– любое другое решение уравнения* (4.1).

Мы не приводим здесь доказательство этой теоремы, так как впоследствии – во второй главе – она установлена сразу в нелинейном случае; линейный случай никаких существенных упрощений в доказательство не привносит.

Ниже приведены рассуждения о расчёте нулевой частотной постоянной, а также обобщённый принцип сжимающих отображений, не раз упоминающийся в тексте диссертации при доказательстве теорем существования и единственности.

1. Нулевая частотная постоянная и теорема Адамара о трёх прямых (см. А.И. Перов и И.Д. Коструб [45, с. 202]). При изучении нулевой частотной постоянной

$$\sigma_0\{\mathbf{L}_n(\lambda)\} = \max_{-\infty<\theta<+\infty} \|\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\| \tag{1}$$

может оказаться полезной теорема Адамара о трёх прямых А.И. Маркушевич [30], М. Рид, Б. Саймон [52, с. 46 – 47]. Предполагается, что операторный характеристический многочлен $\mathbf{L}_n(\lambda) : \mathbb{C} \to End\,\mathbb{B}$ является нерезонансным.

Напомним вкратце эту теорему. Пусть функция $\mathbf{f}(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ определена и непрерывна в замкнутой полосе $\alpha \le x \le \beta,\ -\infty < y < +\infty$, и аналитична в открытой полосе $\alpha < x < \beta,\ -\infty < y < +\infty$. предполагается, что она ограничена на граничных прямых

$$|\mathbf{f}(\alpha + iy)| \le M_\alpha,\ |\mathbf{f}(\beta + iy)| \le M_\beta. \tag{2}$$

Тогда она ограничена на всей замкнутой полосе $\alpha \le x \le \beta,\ -\infty < y < +\infty$, и при любом фиксированном $\gamma,\ \alpha < \gamma < \beta$, справедлива оценка

$$|\mathbf{f}(\gamma + iy)| \le M_\alpha \frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha} M_\beta \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha},\ \alpha < \gamma < \beta. \tag{3}$$

Пусть теперь $\mathbf{L}_n(\lambda) = \mathbf{A}_0\lambda^n + \mathbf{A}_1\lambda^{n-1} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\lambda + \mathbf{A}_n$ – операторный многочлен, причём

$$\mathbf{L}_n^{-1}(\lambda) \in End\,\mathbb{B} \text{ при } \alpha \le Re(\lambda) \le \beta. \tag{4}$$

Тогда операторная функция $\mathbf{L}_n^{-1}(\lambda)$ определена и непрерывна в замкнутой полосе $\alpha \leq Re(\lambda) \leq \beta,\ -\infty < Im(\lambda) < +\infty$, и аналитична в открытой полосе $\alpha < Re(\lambda) < \beta,\ -\infty < Im(\lambda) < +\infty$ (Э. Хилле и Р. Филлипс [59, с. 106 – 122]). Кроме того, она ограничена на граничных прямых. По теореме Адамара о трёх прямых имеем при $\alpha < \gamma < \beta$

$$\sigma_0 \left\{\mathbf{L}_n(\gamma+\lambda)\right\} \leq \sigma_0 \left\{\mathbf{L}_n(\alpha+\lambda)\right\} \frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha} \sigma_0 \left\{\mathbf{L}_n(\beta+\lambda)\right\} \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}. \qquad (5)$$

Это неравенство позволяет оценить сверху нулевую частотную постоянную нерезонансного многочлена $\mathbf{L}_n(\gamma+\lambda)$ через известные нулевые частотные постоянные нерезонансных многочленов $\mathbf{L}_n(\alpha+\lambda)$ и $\mathbf{L}_n(\beta+\lambda)$.

2. Обобщённый принцип сжимающих отображений. Пусть $\mathbb{D}$ – комплексное банахово пространство векторных функций $\mathbf{f}(t) : [a, b] \to \mathbb{B}$. Предположим, что каждой функции $\mathbf{f}$ из $\mathbb{D}$ поставлен в соответствие вектор

$$\mathbf{|}\mathbf{f}\mathbf{|} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{f}_1\| \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \|\mathbf{f}_n\| \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_n, \qquad (6)$$

причём выполнены аксиомы *обобщённой нормы*

$$\begin{array}{ll} 1^o. & \mathbf{|}\mathbf{f}\mathbf{|} \geq 0, \\ 2^o. & \mathbf{|}\mathbf{f}\mathbf{|} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{f} = 0, \\ 3^o. & \mathbf{|}\alpha\mathbf{f}\mathbf{|} = |\alpha|\mathbf{|}\mathbf{f}\mathbf{|}, \\ 4^o. & \mathbf{|}\mathbf{f}+\mathbf{g}\mathbf{|} \leq \mathbf{|}\mathbf{f}\mathbf{|} + \mathbf{|}\mathbf{g}\mathbf{|}. \end{array} \qquad (7)$$

При этом естественно предположить, что топология, определяемая обобщённой нормой, совпадает с топологией банахова пространства

$\mathbb{D}$. Это означает, скажем, что норма

$$\widetilde{\boldsymbol{|}\mathbf{f}\boldsymbol{|}} = \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{f}\|_i \qquad (8)$$

эквивалентна норме в $\mathbb{D}$. С точки зрения топологии переход от нормы $\|\mathbf{f}\|$ к обобщённой норме $\boldsymbol{|}\mathbf{f}\boldsymbol{|}$ ничего нового не даёт, но с точки зрения метрики позволяет более полно учесть особенности действующих в $\mathbb{D}$ отображений. Назовём банахово пространство $\mathbb{D}$ с обобщенной нормой $\boldsymbol{|}\mathbf{f}\boldsymbol{|}$ *обобщённым банаховым пространством.* Пусть S – некоторое множество в $\mathbb{D}$, и $\mathbf{F} : S \to \mathbb{D}$ – некоторое отображение этого множества в себя,

$$\mathbf{F}S \subseteq S. \qquad (9)$$

Рассмотрим уравнение

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}\mathbf{f}, \qquad \mathbf{f} \in S, \qquad (10)$$

решением которого могут быть только неподвижные точки оператора $\mathbf{F}$. Предположим, что оператор $\mathbf{F}$ является сжимающим в том смысле, что

$$\boldsymbol{|}\mathbf{F}\mathbf{f} - \mathbf{F}\mathbf{g}\boldsymbol{|} \leq \mathbf{Q}\boldsymbol{|}\mathbf{f} - \mathbf{g}\boldsymbol{|}, \ \mathbf{f}, \mathbf{g} \in S, \qquad (11)$$

где $\mathbf{Q}$ есть неотрицательная квадратная $n \times n$- матрица, спектральный радиус которой меньше единицы:

$$0 \leq \mathbf{Q}, \ spr\mathbf{Q} \equiv q < 1. \qquad (12)$$

Относительно свойств неотрицательных матриц см., например, Ф.Р. Гантмахер [10, с. 392-405].

Для проверки второго условия в (12) можно привлечь критерий Мецлера – Котелянского (А.И. Перов [34], [36], А.И. Перов и Т.С. Грязнова [41]):

Для того чтобы спектральный радиус неотрицательной матрицы $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ *был меньше единицы, необходимо и достаточно, чтобы последовательные главные миноры матрицы* $\mathbf{I}-\mathbf{Q}$ *были положительны:*

$$1 - q_{11} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1-q_{11} & -q_{12} \\ -q_{21} & 1-q_{22} \end{vmatrix} > 0, ..., \begin{vmatrix} 1-q_{11} & -q_{12} & ... & -q_{nm} \\ -q_{21} & 1-q_{22} & ... & 1-q_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -q_{n1} & ... & ... & 1-q_{nm} \end{vmatrix} > 0. (13)$$

Теорема 1. *Пусть* $\mathbb{D}$ *есть обобщённое банахово пространство, в котором задан оператор* $\mathbf{F}$, *отображающий некоторое замкнутое множество* S *в себя (см.* (9)*). Пусть оператор* $\mathbf{F}$ *является сжимающим в смысле* (11) – (12). *Тогда оператор* $\mathbf{F}$ *имеет в* S *единственную неподвижную точку, т.е. уравнение* (10) *имеет в* S *единственное решение. Для этого решения* $\mathbf{f}$ *можно указать локализационную оценку*

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{f_0}\| \leq (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \|\mathbf{F}\mathbf{f_0} - \mathbf{f_0}\| \qquad (14)$$

для любой функции $\mathbf{f}_0$ *из* S.

Для доказательства существования неподвижной точки оператора $\mathbf{F}$ и для приближённого нахождения решения уравнения (10) обычно используют метод последовательных приближений (итераций)

$$\mathbf{f}^{[k]} = \mathbf{F}\mathbf{f}^{[k-1]},\ k = 1, 2, ..., \qquad (15)$$

где в качестве нулевого приближения выбирается произвольный элемент $\mathbf{f}^{[0]}$ из S. Согласно предположению (9) итерационный процесс (15) неограниченно реализуем.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *для любого нулевого приближения* $\mathbf{f}^{[0]}$ *из* S *метод последовательных приближений* (15) *сходится к неподвижной точке* $\mathbf{f}$ *оператора* $\mathbf{F} : \mathbf{f}^{[k]} \to \mathbf{f}$. *Оценка погрешности выглядит следующим образом*

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{f^{[k]}}\| \leq (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\mathbf{Q}^k \|\mathbf{f^{[1]}} - \mathbf{f^{[0]}}\|, \ k = 1, 2, ... \tag{16}$$

Доказательства см. в А.И. Перов [34], [36] и А.И. Перов и Е.В. Иванова [42].

Глава 2. Нелинейная теория

5. Условие Липшица

5.1. Условие Липшица. В комплексном банаховом пространстве $\mathbb{B}$ рассмотрим нелинейное векторно-операторное дифференциальное уравнение n-го порядка, не разрешённое относительно старшей производной, и имеющее следующий вид

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^{(n-1)}, \mathbf{x}^{(n)}). \quad (5.1)$$

Предположим, что $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{A}_n$ – постоянные линейные ограниченные операторы, действующие в пространстве $\mathbb{B}$, то есть элементы из $End\,\mathbb{B}$, причём оператор $\mathbf{A}_0$ непрерывно обратим. Также предполагается, что операторный характеристический многочлен

$$\mathbf{L}_n(\lambda) \equiv \mathbf{A}_0\lambda^n + \mathbf{A}_1\lambda^{n-1} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\lambda + \mathbf{A}_n : \mathbb{C} \to End\,\mathbb{B} \qquad (5.2)$$

удовлетворяет условию нерезонансности

$$\mathbf{L}_n(i\theta) \text{ непрерывно обратим при } -\infty < \theta < +\infty \qquad (5.3)$$

(сравни с (1.5)). Поэтому существует операторная функция Грина $\mathbf{G}(t) : \mathbb{R} \to End\,\mathbb{B}$ и можно ввести интегральные постоянные

$$æ_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(j)}(t)\| dt, \quad 0 \le j \le n-1; \qquad (5.4)$$

$$æ_n = \|\mathbf{A}_0^{-1}\| + \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(n)}(t)\| dt \qquad (5.5)$$

(сравни с (2.12) – (2.13)).

Относительно нелинейной векторной функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) : \mathbb{R}\times\mathbb{B}\times...\times\mathbb{B}$ ($(n+1)$ раз) $\to \mathbb{B}$ предположим, что она удовлетворяет *условию Каратеодори* (Дж. Сансоне [55, с.

120-126]): измерима по t (при фиксированных) $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n$ и непрерывна по $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n$ при почти всех t. Более определённо: она удовлетворяет *условию Липшица* по пространственным переменным

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n)\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n} l_j \|\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j\|, \tag{5.6}$$

где $l_0, l_1, ..., l_{n-1}, l_n$ – некоторые неотрицательные постоянные (*постоянные Липшица* или *липшицевы постоянные*). Особо выделим измеримую векторную функцию

$$\mathbf{f}_0(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, \mathbf{0}) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}, \tag{5.7}$$

относительно которой будем предполагать, что она является ограниченной

$$\|\mathbf{f}_0(t)\| \leq a, \ -\infty < t < +\infty. \tag{5.8}$$

Во всей этой главе мы будем предполагать, что выполнено интегральное условие

$$q_{æ} \equiv \sum_{j=0}^{n} æ_j l_j < 1. \tag{5.9}$$

Проверим, что уравнение (5.1) при выполнении всех сделанных выше предположений равносильно некоторому уравнению такого же вида, но уже разрешённому относительно старшей производной

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1 \mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n \mathbf{x} =$$

$$= \mathbf{g}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, ..., \mathbf{x}^{(n-1)}), \tag{5.10}$$

в котором нелинейная векторная функция $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}) : \mathbb{R} \times \mathbb{B} \times ... \times \mathbb{B}$ (n раз) $\to \mathbb{B}$ также удовлетворяет условиям Каратеодори (см. выше) и *условию Липшица* по пространственным переменным

$$\|\mathbf{g}(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{n-1})-\mathbf{g}(t,\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{n-1})\|\le$$

$$\le\sum_{j=0}^{n-1}m_j\|\mathbf{x}_j-\mathbf{y}_j\|, \tag{5.11}$$

где $m_0,m_1,...,m_{n-1}$ – некоторые неотрицательные постоянные.

Фиксируем $t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_{n-1}$ и рассмотрим уравнение относительно $\mathbf{x}_n$:

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}_n+\mathbf{A}_1\mathbf{x}_{n-1}+...+\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{x}_1+\mathbf{A}_n\mathbf{x}_0=\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{x}_n),$$

$$\mathbf{x}_n=h(\mathbf{x}_n)\equiv \tag{5.12}$$

$$\equiv\mathbf{A}_0^{-1}\left\{\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{x}_n)-\mathbf{A}_1\mathbf{x}_{n-1}-...-\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{x}_1-\mathbf{A}_n\mathbf{x}_0\right\}.$$

Проверим, что отображение $h(\mathbf{x}_n)\ :\ \mathbb{B}\to\mathbb{B}$, зависящее от $t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_{n-1}$ как от параметров, является сжимающим. Согласно (5.12) имеем

$$h(\mathbf{x}_n)-h(\mathbf{y}_n)=\mathbf{A}_0^{-1}\left\{\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{x}_n)-\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{y}_n)\right\}$$

и потому в силу условия Липшица (5.6)

$$\|h(\mathbf{x}_n)-h(\mathbf{y}_n)\|\le$$

$$\le\|\mathbf{A}_0^{-1}\|\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{x}_n)-\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{y}_n)\|\le$$

$$\le\|\mathbf{A}_0^{-1}\|l_n\|\mathbf{x}_n-\mathbf{y}_n\|,$$

т.е.

$$\|h(\mathbf{x}_n)-h(\mathbf{y}_n)\|\le q\|\mathbf{x}_n-\mathbf{y}_n\|,\ (q\equiv\|\mathbf{A}_0^{-1}\|l_n). \tag{5.13}$$

Так как $\|\mathbf{A}_0^{-1}\|\le æ_n$ согласно (5.5), то в силу интегрального условия (5.9) получаем

$$q\equiv\|\mathbf{A}_0^{-1}\|l_n\le æ_n l_n\le\sum_{j=0}^{n}æ_j l_j\equiv q_{æ}<1 \tag{5.14}$$

и рассматриваемое отображение $h(\mathbf{x}_n) : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ является сжимающим. Поэтому в силу классического принципа сжимающих отображений Банаха – Каччиополли при любых $t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}$ уравнение (5.12) имеет единственное решение, которое мы обозначим

$$\mathbf{x}_n = \varphi(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}). \tag{5.15}$$

Мы видим, что уравнение (5.1) равносильно нелинейному уравнению (5.10), в котором

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}) =$$

$$= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \varphi(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1})). \tag{5.16}$$

Проверим, что так определённая векторная функция $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}) : \mathbb{R} \times \mathbb{B} \times ... \times \mathbb{B}$ (n раз) $\to \mathbb{B}$ измерима по времени t и удовлетворяет условию Липшица (5.11) с некоторыми постоянными $m_0, m_1, ..., m_{n-1}$. Согласно (5.12) и (5.15) имеем

$$\varphi(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}) =$$

$$= \mathbf{A}_0^{-1} \left\{ \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \varphi(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1})) - \mathbf{A}_1 \mathbf{x}_{n-1} - ... - \mathbf{A}_n \mathbf{x}_0 \right\}$$

$$\varphi(t, \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{n-1}) =$$

$$= \mathbf{A}_0^{-1} \left\{ \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{n-1}, \varphi(t, \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{n-1})) - \mathbf{A}_1 \mathbf{y}_{n-1} - ... - \mathbf{A}_n \mathbf{y}_0 \right\}$$

Поэтому в силу условия Липшица (5.6) и условия сжатия (5.13) получим

$$\|\Delta\varphi\| = \|\varphi(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}) - \varphi(t, \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_{n-1})\| \leq \tag{5.17}$$

$$\leq \|\mathbf{A}_0^{-1}\| \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} l_j \|\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j\| + l_n \|\Delta\varphi\| + \sum_{j=0}^{n-1} \|\mathbf{A}_{n-j}\| \|\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j\| \right\},$$

откуда вытекает, что

$$\|\Delta\varphi\| \leq \frac{1}{1-q}\sum_{j=0}^{n-1}\|\mathbf{A}_0^{-1}\|\,(l_j+\|\mathbf{A}_{n-j}\|)\,\|\mathbf{x}_j-\mathbf{y}_j\|. \tag{5.18}$$

Мы видим, что выполнено условие Липшица (5.11), в котором

$$m_j = \frac{1}{1-q}\|\mathbf{A}_0^{-1}\|\,(l_j+\|\mathbf{A}_{n-j}\|)\,,\ 0 \leq j \leq n-1. \tag{5.19}$$

Небольшая прикидка покажет, что нет основания считать, что интегральное условие (5.9) влечёт за собой выполнение нового интегрального условия

$$\sum_{j=0}^{n} æ_j m_j < 1. \tag{5.20}$$

5.2. Основная система интегральных уравнений. Пусть $\mathbf{x}(t)$ есть ограниченное решение нелинейного дифференциального уравнения (5.1). Так как выполнено не только условие Липшица (5.6), но и интегральное условие (5.9), то можно показать, что для уравнения (5.1) справедлива теорема Эсклангона, согласно которой в этом случае все производные $\dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t)$ и $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ также являются ограниченными (И.Д. Коструб [22], см. также А.И. Перов [38]). Поэтому согласно предположениям (5.6) и (5.8) является ограниченной векторная функция

$$\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)),$$

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t))\| \leq \tag{5.21}$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n} l_j\|\mathbf{x}^{(j)}\|_\infty + \|\mathbf{f}_0\|_\infty.$$

Мы видим, что ограниченное решение нелинейного дифференциального уравнения является одновременно и ограниченным решением линейного дифференциального уравнения

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \mathbf{f}(t). \tag{5.22}$$

с ограниченной правой частью, и потому по формулам (2.3) и (2.4)

$$\mathbf{x}^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds,\ 0 \le j \le n-1, \tag{5.23}$$

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds, \tag{5.24}$$

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)). \tag{5.25}$$

Иногда нам удобно от этой системы векторно-операторных интегральных уравнений перейти к несколько иной системе

$$\mathbf{x}_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds,\ 0 \le j \le n-1; \tag{5.26}$$

$$\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds, \tag{5.27}$$

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), ..., \mathbf{x}_{n-1}(t), \mathbf{x}_n(t)). \tag{5.28}$$

Здесь уже не предполагается, что $\mathbf{x}_j(t) = \mathbf{x}_0^{(j)}(t)$ при $1 \le j \le n$.

Проверим эквивалентность написанных выше систем нелинейных интегральных уравнений (5.23) – (5.25) и (5.26) – (5.28) (из дальнейшего будет ясно, что мы под этим понимаем). При проверке ограничимся случаем, когда нелинейная векторная функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ непрерывна по совокупности переменных.

Пусть $\{\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), ..., \mathbf{x}_{n-1}(t), \mathbf{x}_n(t)\}$ есть ограниченное решение системы (5.26) – (5.28), то есть все векторные функции $\mathbf{x}_j(t)$ являются непрерывными и ограниченными и удовлетворяющими системе (5.26) – (5.28). Первое уравнение системы из (5.26) означает, что $\mathbf{x}_0(t)$ есть ограниченное решение линейного векторно-операторного уравнения (5.22), в котором $\mathbf{f}(t)$ находится по формуле (5.28). Поэтому по формулам (2.3) и (2.4) находим

$$\mathbf{x}_0^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds,\ 1 \le j \le n-1,$$

$$\mathbf{x}_0^{(n)}(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds.$$

Сравнивая с остальными уравнениями системы (5.26) – (5.28), получаем, что

$$\mathbf{x}_0^{(j)}(t) = \mathbf{x}_j(t),\ 0 \le j \le n \tag{5.29}$$

(при $j = 0$ равенство (5.29) очевидно). Подставляя найденные значения компонент решения в правые части системы (5.26) – (5.28), мы видим, что $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}_0(t)$ есть решение системы (5.23) – (5.25).

5.3. Метод последовательных приближений. Для приближённого нахождения ограниченного решения нелинейного уравнения (5.1) и его производных до порядка n включительно можно использовать метод последовательных приближений, к описанию которого мы переходим. В качестве нулевого приближения $\mathbf{x}^{[0]}(t)$ выбирается любая векторная функция, обладающая абсолютными непрерывными и ограниченными производными до $(n-1)$-го порядка включительно, для которой измеримая n-я производная считается только ограниченной. После этого в качестве первого приближения $\mathbf{x}^{[1]}(t)$ принимается единственное ограниченное вместе с производными до порядка n решение линейного неоднородного дифференциального уравнения вида (5.22)

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{[1](n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{[1](n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}}^{[1]} + \mathbf{A}_n\mathbf{x}^{[1]} =$$

$$= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^{[0]}(t), \dot{\mathbf{x}}^{[0]}(t), ..., \mathbf{x}^{[0](n-1)}(t), \mathbf{x}^{[0](n)}(t))$$

с известной правой частью. После этого все последующие приближения $\mathbf{x}^{[2]}(t), ..., \mathbf{x}^{[k]}(t)$ находятся по рекурентным формулам

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{[k](n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{[k](n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}}^{[k]} + \mathbf{A}_n\mathbf{x}^{[k]} =$$

$$= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^{[k-1]}(t), \dot{\mathbf{x}}^{[k-1]}(t), ..., \mathbf{x}^{[k-1](n-1)}(t), \mathbf{x}^{[k-1](n)}(t)), \tag{5.30}$$

$$k = 1, 2, ...;$$

где $\mathbf{x}^{[k]}(t)$ есть единственное ограниченное (вместе с производными до порядка n включительно) решение написанного линейного неоднородного векторно-операторного дифференциального уравнения n-го порядка (5.30) с известной измеримой и ограниченной правой частью.

Используя формулы (2.3) и (2.4), описанный выше итерационный процесс можно записать также и в интегральном виде

$$\mathbf{x}^{[k](j)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}^{[k-1]}(s)ds,\ 0 \le j \le n-1, \tag{5.31}$$

$$\mathbf{x}^{[k](n)}(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}^{[k-1]}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t-s)\mathbf{f}^{[k-1]}(s)ds, \tag{5.32}$$

$$\mathbf{f}^{[k-1]}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^{[k-1]}(t), \dot{\mathbf{x}}^{[k-1]}(t), ..., \mathbf{x}^{[k-1](n-1)}(t), \mathbf{x}^{[k-1](n)}(t)), \tag{5.33}$$

$$k = 1, 2, ...$$

6. Принцип сжимающих отображений. Основные теоремы

6.1. Основные теоремы. Содержание этого параграфа составляют следующие четыре теоремы.

Теорема 6.1. *Пусть выполнено нерезонансное условие* (5.3) *и тем самым определены положительные интегральные постоянные* $æ_0, æ_1, ..., æ_{n-1}, æ_n$ (5.4) – (5.5). *Пусть нелинейная векторная функция* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори: измерима по времени* t *и удовлетворяет условию Липшица по пространственным переменным* (5.6); *тем самым определены неотрицательные липшицевые постоянные* $l_0, l_1, ..., l_{n-1}, l_n$. *Пусть измеримая векторная функция* $\mathbf{f}_0(t)$ (5.7) *является ограниченной, т.е.*

выполнено условие (5.8). *Пусть выполнено основное интегральное условие* (5.9).

Тогда нелинейное дифференциальное уравнение (5.1) *имеет единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$. *У этого решения оказываются ограниченными все производные до n-го порядка включительно и справедливы оценки*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_\infty \le \frac{æ_j}{1-q_{æ}}\|\mathbf{f}_0\|_\infty,\ 0 \le j \le n. \tag{6.1}$$

Заметим, что при $0 \le j \le n-1$ слева в (6.1) можно писать $\|\mathbf{x}^{(j)}\|$.

Теорема 6.2. *В условиях теоремы* 6.1 *единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *и его производные* $\dot{\mathbf{x}}, ..., \mathbf{x}^{(n-1)}, \mathbf{x}^{(n)}$ *до n-го порядка включительно могут быть получены обычным методом последовательных приближений* (5.30) *или* (5.31) – (5.33), *причём погрешности приближений характеризуются следующими оценками*

$$\|\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{[k](j)}\| \le \frac{q_{æ}^{k-1}}{1-q_{æ}} æ_j \sum_{i=0}^{n} \|\mathbf{x}^{[1](i)} - \mathbf{x}^{[0](i)}\|_\infty, \tag{6.2}$$

$$0 \le j \le n,\ k = 1, 2, ...$$

Заметим, что при $0 \le i, j \le n-1$ в (6.2) норму можно писать в пространстве C.

Теорема 6.3. *Если в условиях теоремы* 6.1 *нелинейная векторная функция* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ *по времени* t *является стационарной, периодической или почти периодической, то единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *(и его производные до n-го порядка включительно) также является стационарным, периодическим или почти периодическим соответственно, причём имеет место включение:*

группа частот решения $\mathbf{x}(t)$ *включена в* *группу частот функции* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$. (6.3)

Теорема 6.4 *Пусть операторный характеристический многочлен* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ (5.2) *является гурвицевым. Тогда выполнено нерезонансное условие* (5.3). *Пусть выполнены все остальные требования теоремы* 6.1.

Тогда единственное ограниченное решение $\mathbf{x}(t)$ *нелинейного дифференциального уравнения* (5.1) *является асимптотически устойчивым в целом, т.е.*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}(t) - \mathbf{y}^{(j)}(t)\| \to 0 \text{ при } t \to +\infty, \text{ для } 0 \le j \le n-1, \quad (6.4)$$

где $\mathbf{y}(t)$ *– любое другое решение этого же самого уравнения* (5.1).

6.2. Доказательство теоремы 6.1. □ Прежде всего докажем справедливость оценок (6.1). Пусть $\mathbf{x}(t)$ есть ограниченное решение уравнения (5.1). Как мы об этом уже говорили выше, в условиях теоремы 6.1 все производные $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}$ до n-го порядка включительно также являются ограниченными. Из условий Липшица (5.6) получаем

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)})\| \le \sum_{j=0}^{n} l_j \|\mathbf{x}^{(j)}(t)\|_\infty + \|\mathbf{f}_0\|_\infty. \quad (6.5)$$

Поэтому из системы интегральных уравнений (5.23) – (5.25) в силу оценок (3.4) находим

$$\|\mathbf{x}^{(j)}(t)\|_\infty \le æ_j \left\{ \sum_{k=0}^{n} l_k \|\mathbf{x}^{(k)}(t)\|_\infty + \|\mathbf{f}_0\|_\infty \right\}, \ 0 \le j \le n. \quad (6.6)$$

Умножив j-е неравенства на неотрицательные l_j и сложив все полученные таким образом неравенства, получим

$$\sum_{j=0}^{n} l_j \|\mathbf{x}^{(j)}(t)\|_\infty \le q_æ \left\{ \sum_{k=0}^{n} l_k \|\mathbf{x}^{(k)}(t)\|_\infty + \|\mathbf{f}_0\|_\infty, \right\},$$

откуда в силу интегрального условия (5.9) вытекает промежуточная оценка
$$\sum_{j=0}^{n} l_j \|\mathbf{x}^{(j)}(t)\|_\infty \le \frac{q_{æ}}{1-q_{æ}}\|\mathbf{f}_0\|_\infty,$$
подставив которую в (6.6), имеем
$$\|\mathbf{x}^{(j)}(t)\|_\infty \le æ_j \left\{\frac{q_{æ}}{1-q_{æ}}\|\mathbf{f}_0\|_\infty + \|\mathbf{f}_0\|_\infty\right\} = \frac{æ_j}{1-q_{æ}}\|\mathbf{f}_0\|_\infty,$$
и оценки (6.1) установлены.

Для доказательства существования и единственности ограниченного решения системы нелинейных интегральных уравнений (5.23) – (5.25) применим обобщённый принцип сжимающих отображений А.И. Перов [34],[36] (см. также Дж. Ортега, В. Рейнболдт [33, с. 414 – 415]).

Обозначим через $\mathrm{C}^{(n)} = \mathrm{C}^{(n)}(-\infty, +\infty) = \mathrm{C}^{(n)}(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ банахово пространство всех непрерывных и ограниченных функций $\mathbf{f}(t)$: $\mathbb{R} \to \mathbb{B}$, имеющих непрерывные и ограниченные производные вплоть до n-го порядка включительно, положив
$$\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{C}^{(n)}} = \sum_{j=0}^{n} \|\mathbf{f}^{(j)}\|_{\mathrm{C}}. \tag{6.7}$$
Предположим временно для простоты, что векторная функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ непрерывна по совокупности переменных и систему нелинейных интегральных уравнений (5.23) – (5.25), которую естественно теперь изучать в банаховом пространстве $\mathrm{C}^{(n)}$, коротко запишем в виде
$$\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{x},\ \mathbf{x} \in \mathrm{C}^{(n)}, \tag{6.8}$$
где нелинейный интегральный оператор $\mathbf{F} : \mathrm{C}^{(n)} \to \mathrm{C}^{(n)}$ является правой частью рассматриваемой системы (5.23) – (5.25): $\mathbf{F}\mathbf{x} =$

$\{\mathbf{F}_0\mathbf{x}, \mathbf{F}_1\mathbf{x}, ..., \mathbf{F}_{n-1}\mathbf{x}, \mathbf{F}_n\mathbf{x}\}$. В силу оценок (3.4) и условия Липшица (5.6) получаем

$$\|\mathbf{F}_j(\mathbf{x}) - \mathbf{F}_j(\mathbf{y})\|_{\mathrm{C}} \leq æ_j \sum_{k=0}^{n} l_k \|\mathbf{x}^{(k)}(t) - \mathbf{y}^{(k)}(t)\|_{\mathrm{C}},\ 0 \leq j \leq n. \quad (6.9)$$

Наделим банахово пространство $\mathrm{C}^{(n)}$ обобщённой нормой, положив

$$\boldsymbol{|}\,\mathbf{x}\,\boldsymbol{|} = col\{\|\mathbf{x}\|_{\mathrm{C}}, |||\dot{\mathbf{x}}\|_{\mathrm{C}}, ..., |||\mathbf{x}^{(n-1)}\|_{\mathrm{C}}, |||\mathbf{x}^{(n)}\|_{\mathrm{C}}\}. \quad (6.10)$$

Обобщённая норма позволяет записать систему неравенств (6.9) в векторно-матричном виде

$$\boldsymbol{|}\,\mathbf{Fx} - \mathbf{Fy}\,\boldsymbol{|} \leq \mathbf{Q}\boldsymbol{|}\,\mathbf{x} - \mathbf{y}\,\boldsymbol{|},\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{C}^{(n)}, \quad (6.11)$$

где $\mathbf{Q} = (æ_j l_k)$ есть неотрицательная $(n+1) \times \times (n+1)$ – квадратная матрица вида $æ_j l_k$ (произведение столбца æ на строку l), где æ есть столбец $col(æ_0, æ_1, ..., æ_{n-1}, æ_n)$, а l есть строка (l_0, l_1, l_{n-1}, l_n), причём

$$0 \leq \mathbf{Q} = æl, \qquad spr\mathbf{Q} = læ = q_æ < 1. \quad (6.12)$$

Неотрицательность квадратной матрицы $\mathbf{Q}$ очевидна, а последующее неравенство для спектрального радиуса этой матрицы имеет место в силу формулы $spr\mathbf{Q} = læ$ и в силу интегрального условия (5.9), так как $læ = l_0æ_0 + l_1æ_1 + ... + l_{n-1}æ_{n-1} + l_næ_n$ (произведение строки на столбец).

Из условия Липшица (5.6) и основного интегрального условия (5.9) в силу обобщённого принципа сжимающих отображений вытекает, что нелинейный интегральный оператор $\mathbf{F}$ в пространстве $\mathrm{C}^{(n)}$ имеет единственную неподвижную точку, т.е. уравнение (6.8) имеет единственное решение. ■

Мы для простоты восприятия эту часть доказательства теоремы 6.1 провели в пространстве $\mathrm{C}^{(n)}$. Практически ничего не меняется при переходе к пространству $\mathrm{L}_\infty^{(n)}$.

Обозначим через $\mathrm{L}_\infty^{(n)} = \mathrm{L}_\infty^{(n)}(-\infty, +\infty) = \mathrm{L}_\infty^{(n)}(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ банахово пространство всех измеримых и ограниченных векторных функций $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$, имеющих измеримые и ограниченные производные вплоть до n-го порядка включительно, положив

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{L}_\infty^{(n)}} = \sum_{j=0}^{n} \|\mathbf{f}^{(j)}\|_{\mathrm{L}_\infty}. \tag{6.13}$$

Также, $\mathbf{f}^{(j)}(t)$ являются абсолютно непрерывными и ограниченными при $0 \le j \le n-1$, а измеримая $\mathbf{f}^{(n)}(t)$ должна быть ограниченной.

Локальный вариант этой теоремы мы изложим в конце этого параграфа.

6.3. Доказательство теоремы 6.2. □ Метод последовательных приближений (5.31) – (5.33) коротко может быть записан как

$$\mathbf{x}^{[k]} = \mathbf{F}\mathbf{x}^{[k-1]},\ k = 1, 2, ...;\ \mathbf{x}^{[0]} \in \mathrm{C}^{(n)}, \tag{6.14}$$

причём оценка погрешности в терминах обобщённой нормы (6.10) записывается в виде

$$\boldsymbol{|}\mathbf{x} - \mathbf{x}^{[\mathbf{k}]}\boldsymbol{|} \le \mathbf{Q}^k(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1}\boldsymbol{|}\mathbf{x}^{[\mathbf{1}]} - \mathbf{x}^{[\mathbf{0}]}\boldsymbol{|},\ k = 1, 2, ... \tag{6.15}$$

В нашем случае $\mathbf{Q} = (æl)$, что позволяет написать

$$\mathbf{Q}^k = q_{æ}^{k-1}\mathbf{Q},\ (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} =$$

$$\mathbf{I} + \frac{1}{1 - q_{æ}}\mathbf{Q},\ \mathbf{Q}^k(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \frac{q_{æ}^{k-1}}{1 - q_{æ}}\mathbf{Q}. \tag{6.16}$$

Поэтому оценка (6.15) принимает вид

$$\boldsymbol{|}\mathbf{x} - \mathbf{x}^{[\mathbf{k}]}\boldsymbol{|} \le \frac{q_{æ}^{k-1}}{1 - q_{æ}}\mathbf{Q}\boldsymbol{|}\mathbf{x}^{[\mathbf{1}]} - \mathbf{x}^{[\mathbf{0}]}\boldsymbol{|},\ k = 1, 2, ... \tag{6.17}$$

покомпонентная запись которой в точности приводит к оценкам (6.2). ■

6.4. Доказательство теоремы 6.3. □ Пусть нелинейная функция *стационарна* по t:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n). \tag{6.18}$$

Будем искать стационарное уравнение (5.1) в виде $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}$. Подставляя его в уравнение (5.1), приходим к уравнению

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \text{ где } \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}, 0, ..., 0, 0) \tag{6.19}$$

(напомним, что в силу нерезонансного условия (5.3) оператор $\mathbf{A}_n$ непрерывно обратим (см. (1.6))). В силу условия Липшица (5.6) имеем

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{y})\| \le q\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \text{ где } q = \mathbf{A}_n^{-1}l_0. \tag{6.20}$$

Так как

$$\|\mathbf{A}_n^{-1}\| \le æ_0,$$

то в силу интегрального условия (5.9) находим $q \le æ_0 l_0 \le æ_0 l_0 + æ_1 l_1 + ... + æ_{n-1} l_{n-1} + æ_n l_n = q_æ < 1$, то есть

$$0 \le q \le q_æ < 1. \tag{6.21}$$

Согласно классическому принципу сжимающих отображений уравнение (6.19) имеет единственное решение, которое и является стационарным решением исходного уравнения (5.1) в рассматриваемом случае.

Пусть нелинейная функция *периодична* по t:

$$\mathbf{f}(t + \omega, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n), \tag{6.22}$$

где ω – некоторое положительное число (период). Пусть $\mathbf{x}(t)$ есть ограниченное решение уравнения (5.1), существующее в силу теоремы 6.1. Проверим, что

$$\mathbf{x}(t+\omega) = \mathbf{x}(t). \tag{6.23}$$

Действительно, для векторной функции $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{x}(t+\omega)$ в силу условия периодичности (6.22) получаем

$$\mathbf{A}_0\mathbf{y}^{(n)}(t) + \mathbf{A}_1\mathbf{y}^{(n-1)}(t) + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{A}_n\mathbf{y}(t) =$$

$$= \mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)}(t+\omega) + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)}(t+\omega) + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}}(t+\omega) + \mathbf{A}_n\mathbf{x}(t+\omega) =$$

$$= \mathbf{f}(t+\omega, \mathbf{x}(t+\omega), \dot{\mathbf{x}}(t+\omega), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t+\omega), \mathbf{x}^{(n)}(t+\omega)) =$$

$$= \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t), ..., \mathbf{y}^{(n-1)}(t), \mathbf{y}^{(n)}(t)).$$

Мы видим, что $\mathbf{y}(t)$ есть также решение уравнения (5.1), причём ограниченное. В силу единственности ограниченного решения у уравнения (5.1) оно должно совпадать с исходным решением $\mathbf{x}(t)$, то есть должно быть $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{x}(t)$, что и доказывает соотношение (6.23).

Почти периодичность ограниченного решения уравнения (5.1) в случае почти периодичности по t нелинейной векторной функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ может быть доказана, например, следующим образом.

Вместо банахова пространства $\mathrm{C}^{(n)}$ возьмём банахово пространство $\mathrm{P}^{(n)} = \mathrm{P}^{(n)}(-\infty, +\infty) = \mathrm{P}^{(n)}(\mathbb{R}, \mathbb{B})$, состоящее из тех же самых векторных функций, при условии, что $\mathbf{f}(t), \dot{\mathbf{f}}(t), ..., \mathbf{f}^{(n-1)}(t), \mathbf{f}^{(n)}(t)$ являются почти периодическими. Так как нелинейный интегральный оператор $\mathbf{F}$ действует в этом пространстве (см. Ю.Л. Далецкий и М.Г. Крейн [12, с. 421 – 423]), являющимся подпространством банахова пространства $\mathrm{C}^{(n)}$, то на основании обобщённого принципа сжимающих отображений он имеет в этом пространстве неподвижную точку, т.е система уравнений (5.1) имеет решение, являющееся почти периодическим вместе с производными до порядка n включительно.

Перейдём к доказательству включения (6.3). Выпишем ряд Фурье почти периодического решения (Б.М. Левитан и В.В. Жиков [28, с. 29])

$$\mathbf{x}(t) \sim \sum_k \mathbf{x}_k e^{i\lambda_k t}. \tag{6.24}$$

Показатели Фурье λ_k иначе называются *частотами*; совокупность всех частот образует, по определению, *спектр* $\lambda = \{\lambda_k\}$ векторной почти периодической функции $\mathbf{x}(t)$. Наименьшая подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}$, содержащая весь спектр λ, называется *группой частот* почти периодической функции $\mathbf{x}(t)$ и обозначается (λ). Она состоит из всех конечных линейных комбинаций с целочисленными коэффициентами частот λ_k (М.С. Понтрягин [51, с, 32]). В книге Б.М. Левитана [27, с. 125] наша группа частот именуется *модулем*.

Предположим, что можно указать такое конечное или счётное множество частот $\mu = \{\mu_k\}$, что при любых фиксированных $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n$ имеет место разложение в ряд Фурье

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) \sim$$

$$\sum_k \mathbf{f}_k(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) \exp i\mu_k t. \tag{6.25}$$

(Так обстоять дело будет всегда, если дополнительно предполагать, что банахово пространство $\mathbb{B}$ сепарабельно). Множество μ, для которого справедлива формула (6.25) называется *спектром* рассматриваемой почти периодической по t функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ и (μ) служит для обозначения её *группы частот*.

Вместо банахова пространства $\mathrm{P}^{(n)}$ рассмотрим более узкое пространство $\mathrm{P}^{(n)}_{(\mu)}$, состоящее из тех векторных функций $\mathbf{f}(t)$ из $\mathrm{P}^{(n)}$, спектр которых лежит в (μ). Опираясь на теорему аппроксимации теории почти периодических векторных функций со значениями в банаховом пространстве (Б.М. Левитан и В.В. Жиков [28, с. 22]) и на теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций на компактных множествах многочленами, можно показать, что нелинейный интегральный оператор $\mathbf{F}$ действует в банаховом пространстве $\mathrm{P}^{(n)}_{(\mu)}$. Рассмотрим банахово пространство $\mathrm{P}^{(n)}_{(\mu)}$ с обобщённой нормой типа (6.10). Мы видим, что уравнение (6.8) имеет единственное решение $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)\}$, где $\mathbf{x}^{(j)}(t) \in \mathrm{P}_{(\mu)}$ для $0 \leq j \leq n$. Включение (6.3) установлено. ■

6.5. Доказательство теоремы 6.4. □ Доказательство проводится по той же схеме, что и в статье А. И. Перов, С.А. Барамзин, М.Ф. Григорова, М.М. Кириллова [40] (см. также А.И. Перов, И.Д. Коструб [44]).

Обозначим через $\mathbf{z}(t)$ разность $\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)$ и покажем, что

$$\|\mathbf{z}^{(j)}(t)\| \to 0 \;\text{ при }\; t \to +\infty \;\text{ для }\; 0 \leq j \leq n. \tag{6.26}$$

Из общей теории линейных дифференциальных уравнений n-го порядка известно, что

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{h}(t) + \int\limits_0^t K(t-s)\mathbf{g}(s)ds. \tag{6.27}$$

Здесь $\mathbf{h}(t)$ – решение линейного однородного дифференциального уравнения (1.1), для которого $\mathbf{h}(0) = \mathbf{z}(0)$, $\dot{\mathbf{h}}(0) = \dot{\mathbf{z}}(0), ..., \mathbf{h}^{(n-1)}(0) = \mathbf{z}^{(n-1)}(0)$, а $K(t)$ – это операторная приведённая функция Коши, т.е. $K(t,s) = K(t-s)$ есть операторная функция

Коши для уравнения (2.1), и

$$\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}) -$$

$$-\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t), ..., \mathbf{y}^{(n-1)}(t), \mathbf{y}^{(n)}). \tag{6.28}$$

Из формулы (6.27) дифференцированием получаем

$$\mathbf{z}^{(j)}(t) = \mathbf{h}^{(j)}(t) + \int\limits_0^t K^{(j)}(t-s)\mathbf{g}(s)ds, \ 0 \le j \le n-1; \tag{6.29}$$

$$\mathbf{z}^{(n)}(t) = \mathbf{h}^{(n)}(t) + \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{g}(t) + \int\limits_0^t K^{(n)}(t-s)\mathbf{g}(s)ds. \tag{6.30}$$

Из (6.28) в силу условия Липшица (5.6) находим

$$\|\mathbf{g}(t)\| \le \sum_{j=0}^{n} l_j \|\mathbf{z}^{(j)}(t)\|. \tag{6.31}$$

Оценивая по норме из (6.29) – (6.30) согласно (6.31) имеем

$$\|\mathbf{z}^{(j)}(t)\| \le \|\mathbf{h}^{(j)}(t)\| +$$

$$+ \int\limits_0^t \|K^{(j)}(t-s)\| \sum_{k=0}^{n} l_k \|\mathbf{z}^{(k)}(s)\| ds, \ 0 \le j \le n-1; \tag{6.32}$$

$$\|\mathbf{z}^{(n)}(t)\| \le \|\mathbf{h}^{(n)}(t)\| + \|\mathbf{A}_0^{-1}\| \sum_{k=0}^{n} l_k \|\mathbf{z}^{(k)}(t)\| +$$

$$+ \int\limits_0^t \|K^{(n)}(t-s)\| \sum_{k=0}^{n} l_k \|\mathbf{z}^{(k)}(s)\| ds. \tag{6.33}$$

В (6.32) – (6.33) умножим почленно j-е неравенства на неотрицательные l_j и сложим почленно все вновь полученные неравенства; после введения обозначений

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{j=0}^{n} l_j \|\mathbf{z}^{(j)}(t)\|, \ \ \mathbf{c}(t) = \sum_{j=0}^{n} l_j \|\mathbf{h}^{(j)}(t)\|,$$

$$\mathfrak{K}(t) = \sum_{j=0}^{n} l_j \|K^{(j)}(t)\| \tag{6.34}$$

мы придём к скалярному линейному интегральному неравенству

$$\mathbf{u}(t) \leq \mathbf{c}(t) + l_n \|\mathbf{A}_0^{-1}\| \mathbf{u}(t) + \int\limits_0^t \mathfrak{K}(t-s)\mathbf{u}(s)ds. \tag{6.35}$$

Отметим следующее обстоятельство, играющее в наших рассуждениях решающую роль: в условиях гурвицевости операторного характеристического многочлена $\mathbf{L}_n(\lambda) : \mathbb{C} \to End\ \mathbb{B}$ операторная ограниченная функция Грина $\mathbf{G}(t) : \mathbb{R} \to End\ \mathbb{B}$ совпадает с операторной приведённой функцией Коши $K(t) : \mathbb{R} \to End\ \mathbb{B}$ при $t > 0$ (и равна 0 при $t < 0$). Поэтому в силу интегрального условия (5.9) имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_0^t \mathfrak{K}(t-s)ds = \int\limits_0^t \mathfrak{K}(s)ds = \int\limits_0^t \sum_{j=0}^{n} l_j \|K^{(j)}(s)\|ds = \\ = \sum_{j=0}^{n} l_j \int\limits_0^t \|\mathbf{G}^{(j)}(s)\|ds = \sum_{j=0}^{n} l_j \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(j)}(s)\|ds = \\ = \sum_{j=0}^{n-1} l_j æ_j + l_n \left(æ_n - \|\mathbf{A}_0^{-1}\|\right) = \sum_{j=0}^{n} l_j æ_j - l_n \|\mathbf{A}_0^{-1}\| = \\ = q_{æ} - l_n \|\mathbf{A}_0^{-1}\|.\end{gathered} \tag{6.36}$$

Введём в рассмотрение банахово пространство $\mathrm{C}_+ = \mathrm{C}[0,+\infty) = \mathrm{C}(\mathbb{R}_+,\ \mathbb{B})$ всех непрерывных и ограниченных на неотрицательной полупрямой векторных функций $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{B}$, положив

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{C}_+} = \sup_{0 \leq t < +\infty} \|\mathbf{f}(t)\|. \tag{6.37}$$

В условиях теоремы неотрицательная функция $c(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$ и потому она является ограниченной на неотрицательной полупрямой $\mathbb{R}_+$. Покажем теперь, прежде всего, что из интегрального неравенства (6.35) вытекает ограниченность неотрицательной непрерывной функции $\mathbf{u}(t)$ на неотрицательной полупрямой и, более того, имеет место оценка

$$0 \leq \mathbf{u}(t) < \frac{\|c\|_+}{1 - q_{æ}}, \;\; 0 \leq t < +\infty. \tag{6.38}$$

При $t = 0$, как это следует из неравенства $l_n\|\mathbf{A}_0^{-1}\| < l_n æ_n \leq q_{æ}$, оценка (6.38) очевидна. Предположим, тем не менее, что оценка (6.38) где-то нарушается, и пусть $t_0 > 0$ – первое значение времени, когда в (6.38) имеет место знак равенства, то есть

$$0 \leq \mathbf{u}(t) < \frac{\|c\|_+}{1 - q_{æ}}, \; 0 \leq t \leq t_0; \;\; \mathbf{u}(t_0) = \frac{\|c\|_+}{1 - q_{æ}}. \tag{6.39}$$

Тогда из (6.35) в силу (6.36) имеем

$$\mathbf{u}(t_0) \leq c(t_0) + l_n\|\mathbf{A}_0^{-1}\|\mathbf{u}(t_0) + \int\limits_0^{t_0} \mathfrak{K}(t_0 - s)\frac{\|c\|_+}{1 - q_{æ}}ds <$$

$$< \|c\|_+ + l_n\|\mathbf{A}_0^{-1}\|\frac{\|c\|_+}{1 - q_{æ}} + (q_{æ} - l_n\|\mathbf{A}_0^{-1}\|)\frac{\|c\|_+}{1 - q_{æ}} =$$

$$= \frac{\|c\|_+}{1 - q_{æ}},$$

что противоречит второму равенству в (6.39). Оценка (6.38) установлена.

Покажем теперь, что $\mathbf{u}(t)$ не только ограничена на неотрицательной полупрямой, но и стремится к нулю по экспоненциальному закону. Положим

$$q(\varepsilon) = \int\limits_0^{+\infty} \mathfrak{K}(\sigma)e^{\varepsilon\sigma}d\sigma + \|\mathbf{A}_0^{-1}\|l_n, \;\; \varepsilon \geq 0. \tag{6.39}$$

Обозначим через $-\alpha < 0$ спектральную абсциссу оператора $\mathbf{A}$. В силу гурвицевости оператора $\mathbf{A}$ такое $\alpha > 0$ существует ($spa\mathbf{A} = -\alpha$).

Ясно, что при $0 \le \varepsilon < \alpha$ несобственный интеграл в (6.39) сходится, причём его сходимость абсолютная и равномерная на любом отрезке, целиком лежащем в полуинтервале $[0, \alpha)$. Поэтому $q(\varepsilon)$ есть непрерывная положительная функция, определённая во всяком случае при $0 \le \varepsilon < \alpha$. Так как, согласно (6.36) $q(0) = q_{æ} < 1$, то можно указать такое $\varepsilon > 0$, что $q(\varepsilon) < 1$. Найденное ε зафиксируем. Из интегрального неравенства (6.35) находим

$$\mathbf{u}_\varepsilon(t) \le c_\varepsilon(t) + l_n \|\mathbf{A}_0^{-1}\| \mathbf{u}_\varepsilon(t) + \int\limits_0^t \mathfrak{K}_\varepsilon(t-s)\mathbf{u}_\varepsilon(s)ds, \tag{6.40}$$

где $\mathbf{u}_\varepsilon(t), c_\varepsilon(t)$ и $\mathfrak{K}_\varepsilon(t)$ – это функции $\mathbf{u}(t), c(t)$ и $\mathfrak{K}(t)$, помноженные на $exp(\varepsilon t)$. В условиях теоремы неотрицательная функция $c_\varepsilon(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$, и потому является ограниченной на неотрицательной полупрямой. Далее, в силу (6.39)

$$\int\limits_0^t \mathfrak{K}_\varepsilon(t-s)ds = \int\limits_0^t \mathfrak{K}_\sigma e^{\varepsilon\sigma} d\sigma < \int\limits_0^{+\infty} \mathfrak{K}_\sigma e^{\varepsilon\sigma} d\sigma = q(\varepsilon) - \|\mathbf{A}_0^{-1}\| l_n. \tag{6.41}$$

Поэтому из интегрального неравенства (6.40) вытекает оценка (сравни интегральное неравенство (6.35) и оценку (6.38))

$$0 \le \mathbf{u}_\varepsilon(t) < \frac{\|c_\varepsilon\|_+}{1 - q(\varepsilon)}, \quad 0 \le t < +\infty. \tag{6.42}$$

Из полученной оценки следует, что $0 \le \mathbf{u}(t) \le c_\varepsilon e^{-\varepsilon t},\ 0 \le t < +\infty$, где c_ε – некоторая положительная постоянная, откуда и вытекает справедливость утверждения (6.26) (даже в более сильном смысле). ■

Рассуждение, аналогичное нашим при работе с интегральными неравенствами (6.35) и (6.40), встречается при исследовании уравнения восстановления в книге Р. Беллмана и К. Кук [5, с. 250 – 251].

Отметим, что все четыре теоремы 6.1 – 6.4 сохраняют свою силу, если основное интегральное условие (5.9) заменить на менее ограничительное

$$\widetilde{q} \equiv \sum_{j=0}^{n} \|K_j\| l_j \ \ (\leq q_{æ}) \ < \ 1, \tag{6.43}$$

а в условиях теорем интегральные постоянные $æ_j$ заменить нормами $\|K_j\|$.

Сделаем некоторые пояснения относительно гурвицевости операторного характеристического многочлена (5.2). Поставим ему в соответствие составную (блочную, клеточную) матрицу – *сопровождающую матрицу Фробениуса*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{A}_n & -\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{A}_{n-1} & -\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{A}_{n-2} & \cdots & -\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{A}_1 \end{pmatrix} \tag{6.44}$$

Составная матрица $\mathbf{A}$ в общем случае имеет вид $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})$, где $\mathbf{A}_{ij} \in End\, \mathbb{B}$. Она определяет некоторый линейный интегральный оператор $\mathbf{A} : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$, обозначаемый той же самой буквой, где $\mathbb{B}^n = \mathbb{B} \times ... \times \mathbb{B}$ (n раз) есть комплексное банахово пространство. Спектр операторного характеристического многочлена $\mathbf{L}_n(\lambda)$ – это спектр линейного ограниченного оператора $\mathbf{A}$ из $End\, \mathbb{B}$.

7. Условие типа Липшица, критерий компактности и локальная теорема

7.1. Условие типа Липшица. Рассмотрим дифференциальное уравнение (5.1). Относительно нелинейной векторной функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ предположим, что она удовлетворяет условию Каратеодори (Дж. Сансоне [55, с. 120 – 126]): измерима по времени t (при фиксированных $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n$) и непрерывна по пространственным переменным $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n$ (при почти всех t). Кроме этого предполагается, что выполнено *условие типа Липшица*

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)\| \leq \sum_{j=0}^{n} l_j \|\mathbf{x}_j\| + a, \tag{7.1}$$

где $l_0, l_1, ..., l_{n-1}, l_n$ – некоторые неотрицательные постоянные (*постоянные Липшица* или *липшицевы постоянные*) и $a \geq 0$.

Так как в банаховых пространствах отсутствует теорема Пеано (если только оно не является конечномерным!), то для развития содержательной теории сделаем ещё одно важное предположение (*условие компактности*):

для любых отрезка $[a, b]$ *числовой прямой* $\mathbb{R}$ *и ограниченных*

множеств $S_0, S_1, ..., S_{n-1}, S_n$ *в банаховом пространстве* (7.2)

$\mathbb{B}$ *множество* $\mathbf{f}([a, b], S_0, S_1, ..., S_{n-1}, S_n)$ *компактно в* $\mathbb{B}$.

Заметим, что в конечномерном банаховом пространстве $\mathbb{B}$ условие компактности (7.2) выполнено автоматически.

7.2. Теорема Арцела-Асколи. Пусть, как обычно, $\mathbb{B}$ – комплексное банахово пространство, $[a, b]$ – отрезок вещественной прямой $\mathbb{R}$ и $\mathrm{C} = \mathrm{C}[a, b]$ – банахово пространство непрерывных векторных функций $\mathbf{f}(t) : [a, b] \to \mathbb{B}$ с нормой

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{C}} = \max_{a<t<b} \|\mathbf{f}(t)\|. \tag{7.3}$$

Теорема 7.1 (Арцела-Асколи). *Для того чтобы семейство* $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}(t)\} \subset \mathrm{C}$ *было компактным, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие два условия:*

1) *при любом* $t \in [a,b]$ *множество* $\mathbf{F}(t) = \{\mathbf{f}(t) : \mathbf{f} \in \mathbf{F}\}$ *значений функции* $\mathbf{f}$ *из семейства* $\mathbf{F}$ *в точке* t *было компактным;* (7.4)

2) *семейство* $\mathbf{F}$ *было равностепенно непрерывным, то есть для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *чтобы*

$$\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(s)\| < \varepsilon \ \ \text{\textit{при}} \ \ |t-s| < \delta(\varepsilon), \ \ \mathbf{f} \in \mathbf{F}. \tag{7.5}$$

Если условие (7.4) слегка изменить с помощью условия (7.5), то теорема Арцела-Асколи приобретёт знакомые очертания: *для того чтобы семейство* $\mathbf{F} \subset \mathrm{C}$ *было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно компактным и равностепенно непрерывным.* При этом *равномерная компактность* означает, что существует такое компактное множество $\mathbf{K}$ в $\mathbf{B}$, что $\mathbf{F}(t) \subset \mathbf{K}$ при $a \le t \le b$.

Доказательство теоремы 7.1 мы здесь не приводим, хотя в математической литературе мы не нашли точно такого же утверждения; доказательство следует классическим традициям и опирается как на канторовский диагональный процесс, так и на теорему Хаусдорфа об ε-сети (см., например, А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин [21, с. 105 – 108]).

7.3. Критерий компактности в $\mathrm{C}^{(n)}$. Пусть $\mathbb{B}$ – комплексное банахово пространство, $[a,b]$ – отрезок вещественной прямой $\mathbb{R}$ и $\mathrm{C}^{(n)} = \mathrm{C}^{(n)}[a,b]$ – банахово пространство всех векторных функций $\mathbf{f}(t) : [a,b] \to \mathbb{B}$, обладающих производными $\dot{\mathbf{f}}(t), ..., \mathbf{f}^{(n-1)}(t), \mathbf{f}^{(n)}(t)$ вплоть до n-го порядка включительно, с нормой

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathrm{C}^{(n)}} = \sum_{j=0}^{n} \|\mathbf{f}^{(j)}\|_{\mathrm{C}}. \tag{7.6}$$

Можно дать очень простой критерий компактности в пространстве $\mathrm{C}^{(n)}$ (к слову сказать, в учебнике по функциональному анализу Л.В. Канторовича и Г.П. Акилова [19, с. 31] – это задача для самостоятельных исследований читателя (для числовых функций)).

Теорема 7.2. *Для того чтобы семейство функций* $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}(t)\} \subset \mathrm{C}^{(n)}$ *было компактным, необходимо и достаточно, чтобы каждое семейство функций* $\mathbf{F}^{(j)} = \{\mathbf{f}^{(j)}(t)\} \subset \mathrm{C}$ *было компактным,* $0 \le j \le n$ *то есть каждое семейство* $\mathbf{F}^{(j)} \subset \mathrm{C}$ *должно быть равномерно компактным и равностепенно непрерывным.*

Отметим следующий очевидный факт: если семейство функций $\mathbf{F}$ компактно в $\mathrm{C}^{(n)}$, то оно компактно и в $\mathrm{C}^{(m)}$ при $m < n$.

Наш принцип компактности звучит так:

Теорема 7.3 (обобщённая теорема Арцела-Асколи). *Для того чтобы семейство* $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}(t)\} \subset \mathrm{C}^{(n)}$ *было компактным, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие два условия:*

1) *семейство* $\mathbf{F}^{(0)} = \{\mathbf{f}(t)\} \subset \mathrm{C}$ *было равномерно компактным;* (7.7)

2) *семейство* $\mathbf{F}^{(n)} = \{\mathbf{f}^{(n)}(t)\} \subset \mathrm{C}$ *было равностепенно непрерывным, то есть для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что*

$$\|\mathbf{f}^{(n)}(t) - \mathbf{f}^{(n)}(s)\| < \varepsilon \ \text{ при } \ |t - s| < \delta(\varepsilon). \tag{7.8}$$

□ Необходимость условий (7.7) и (7.8) непосредственно вытекает из теоремы 7.2 и из теоремы 7.1 Арцела-Асколи.

Достаточность доказывается несколько сложнее. Будем доказывать теорему 7.3 индукцией по порядку n. При $n = 0$, когда $\mathrm{C}^0 = \mathrm{C}$, наш критерий совпадает с теоремой 7.1 Арцела-Асколи и потому условия 1) и 2) являются достаточными. Предположим, что достаточность условий 1) и 2) установлена при $n = k$ (индуктивные предположения). Проверим, что они остаются достаточными и при $n = k + 1$.

Рассмотрим некоторое семейство $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}(t)\}$ в пространстве $\mathrm{C}^{(k+1)}$, для которого выполнены условия 1) и 2) нашей теоремы. Для использования предположения индукции рассмотрим семейство $\dot{\mathbf{F}} = \{\dot{\mathbf{f}}(t)\}$ в пространстве $\mathrm{C}^{(k)}$. Это семейство удовлетворяет условию 2) доказываемой теоремы в $\mathrm{C}^{(k)}$, так как некоторое семейство $\mathbf{F}$ удовлетворяет ему в $\mathrm{C}^{(k+1)}$.

Докажем, что семейство $\dot{\mathbf{F}}$ удовлетворяет и условию 1) при $n = k$, то есть семейство $\dot{\mathbf{F}} \subset \mathrm{C}$ равномерно компактно. При этом мы воспользуемся теоремой Хаусдорфа о том, что *множество, равномерно аппроксимируемое компактным, само является компактным* (см., например, Л.А. Люстерник, В.И. Соболев [29, с.105-108]). Предположим, что нам удалось установить, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\left\| \frac{\mathbf{f}(t+\frac{h}{2}) - \mathbf{f}(t-\frac{h}{2})}{h} - \dot{\mathbf{f}}(t) \right\| < \varepsilon \ \text{ при } \ (0 <)|h| < \delta(\varepsilon) \qquad (7.9)$$

для любой функции $\mathbf{f}$ из семейства $\mathbf{F}$. Так как по предположению семейство $\mathbf{F} \subset \mathrm{C}$ равномерно компактно, то можно указать такое компактное множество $K \subset \mathbb{B}$, что $\mathbf{F}(t) \subseteq K$ при $a \le t \le b$. Формула (7.9) показывает, что

$$\dot{\mathbf{f}}(t) \in U\left(\frac{K-K}{h}, \varepsilon\right) \quad \text{при } \ (0 <)|h| < \delta(\varepsilon), \qquad (7.10)$$

где $U(M, \varepsilon)$ есть ε-окрестность множества M. Поэтому семейство $\dot{\mathbf{F}} \subset \mathrm{C}$ равномерно компактно как равномерно аппроксимируемое компактным множеством $(K-K)/h$.

Мы показали, что семейство $\dot{\mathbf{F}}$ удовлетворяет условиям 1) и 2) нашей теоремы при $n = k$. По предположению индукции это множество компактно в $\mathrm{C}^{(k)}$. Проверим, что семейство $\mathbf{F}$ компактно в

$C^{(k+1)}$. Согласно теореме 7.2 нам нужно лишь убедиться в том, что семейство $\mathbf{F} \subset C$ равностепенно непрерывно, что немедленно вытекает из доказанной нами равномерной компактности (а, значит, и равномерной ограниченности) семейства $\dot{\mathbf{F}} \subset C$. ■

В дальнейших рассуждениях может оказаться полезной формула

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!}\mathbf{f}^{(j)}(a)(t-a)^j + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^t (t-s)^{n-1}\mathbf{f}^{(n)}(s)ds \tag{7.11}$$

для любой функции $\mathbf{f}(t)$ из $C^{(n)}$. Она представляет собой обычную формулу Тейлора с остаточным членом. Из неё нетрудно видеть, что если семейство $\mathbf{F}^{(n)} \subset C$ равностепенно непрерывно, то и любое семейство $\mathbf{F}^{(j)} \subset C$ равностепенно непрерывно (если $\mathbf{F}^{(0)} \subset C$ равномерно компактно), $0 \le j \le n-1$.

Обозначим через $\mathcal{J}$ семейство функций $\mathbf{g}(t) : [a,b] \to \mathbb{B}$, где

$$\mathbf{g}(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^t (t-s)^{n-1}\mathbf{f}^{(n)}(s)ds,\ a \le t \le b,\ \mathbf{f} \in \mathbf{F}. \tag{7.12}$$

Проверим, что семейство $\mathcal{J}$ равностепенно непрерывно, если $\mathbf{F}^{(n)}$ равностепенно непрерывно. Имеем согласно формуле (7.12)

$$\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(s) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^t \left\{(t-\sigma)^{n-1} - (s-\sigma)^{n-1}\right\}\mathbf{f}^{(n)}(\sigma)d\sigma. \tag{7.13}$$

Поэтому

$$(t-\sigma)^{n-1} - (s-\sigma)^{n-1} = (t-s+s-\sigma)^{n-1} - (s-\sigma)^{n-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (t-s)^k (s-\sigma)^{n-1-k} - (s-\sigma)^{n-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (t-s)^k (s-\sigma)^{n-1-k},$$

что даёт возможность написать оценку

$$|(t-\sigma)^{n-1} - (s-\sigma)^{n-1}| \leq \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k |t-s|^k (b-a)^{n-1-k}. \qquad (7.14)$$

Мы видим, что

$$\|\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(s)\| \leq \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_a^t |(t-\sigma)^{n-1} - (s-\sigma)^{n-1}| \|\mathbf{f}^{(n)}(\sigma)\| d\sigma \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k |t-s|^k (b-a)^{n-k} \|\mathbf{f}^{(n)}\|_{\mathrm{C}},$$

что и доказывает равностепенную непрерывность семейства $\mathcal{J}$.

7.4. Локальная теорема. В нелинейной теории в работах А.И. Перов, И.Д. Коструб [45] и И.Д. Коструб, А.И. Перов [23] нелинейность предполагалась определённой при всех значениях аргумента и удовлетворяющей условию Липшица (см. А.И. Перов [37]) с неизменными липшицевыми постоянными.

Пусть задан набор положительных чисел

$$a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n > 0. \qquad (7.15)$$

Обозначим через S_j шар $\|\mathbf{x}_j\| \leq a_j$. Предположим, что нелинейная векторная функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) : \mathbb{R} \times S_0 \times S_1 ... \times \times S_{n-1} \times S_n \to \mathbb{B}$ измерима по t и удовлетворяет *условию Липшица* по пространственным переменным

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n)\| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{n} l_j \|\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j\| \qquad (7.16)$$

при $-\infty < t < +\infty$ и $\|\mathbf{x}_j\|, \|\mathbf{y}_j\| \le a_j$ при $0 \le j \le n$, где

$$l_0, l_1, ..., l_{n-1}, l_n \ge 0 \tag{7.17}$$

некоторые неотрицательные постоянные. Рассмотрим измеримую векторную функцию

$$\mathbf{f}_0(t) \equiv \mathbf{f}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, \mathbf{0}) \tag{7.18}$$

и предположим, что она является ограниченной

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, \mathbf{0})\| \le a, \qquad -\infty < t < +\infty. \tag{7.19}$$

Пусть выполнено интегральное условие (5.9). Заметим, что интегральные постоянные $æ_0, æ_1, ..., æ_{n-1}, æ_n$ и a не зависят от набора (7.15). Предположим ещё, что

$$æ_j \left(\sum_{k=0}^{n} l_k a_k + a \right) \le a_j, \qquad 0 \le j \le n. \tag{7.20}$$

Мы видим, что условие (7.20) нужно проверять, если предварительно известно, что $æ_j a < a_j$ при $0 \le j \le n$, и пусть

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \left\| \frac{\partial \mathbf{f}(t, 0, 0, ..., 0, 0)}{\partial x_j} \right\| = l_j^0, \qquad 0 \le j \le n. \tag{7.21}$$

Для того чтобы были выполнены интегральное условие (5.9) и (7.20), сформулируем и докажем локальную теорему существования и единственности.

Теорема 7.4. *При выполнении всех перечисленных предположений нелинейное дифференциальное уравнение* (5.1) *имеет единственное решение, лежащее в параллелотопе* $S_0 \times S_1 ... \times S_{n+1} \times S_n$, *причём справедливы оценки*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_\infty \le \frac{æ_j}{1 - q_æ} \|\mathbf{f}_0\|_\infty, \qquad 0 \le j \le n. \tag{7.22}$$

$\square$ Проверим сначала, что если выполнены условия (5.9) и (7.20), то

$$\frac{æ_j}{1-q_æ}a \leq a_j, \qquad 0 \leq j \leq n. \tag{7.23}$$

Умножим последовательно обе части неравенства в (7.20) на неотрицательные $l_j \geq 0$ и сложим почленно все полученные таким образом неравенства:

$$\sum_{j=0}^{n} l_j æ_j \left(\sum_{k=0}^{n} l_k a_k + a \right) \leq \sum_{j=0}^{n} l_j a_j.$$

Согласно (7.20) мы можем положить

$$q_æ \left(\sum_{k=0}^{n} l_k a_k + a \right) \leq \sum_{j=0}^{n} l_j a_j,$$

откуда получим оценку снизу

$$\sum_{j=0}^{n} l_j a_j + a \geq \frac{q_æ}{1-q_æ}a.$$

Поэтому

$$a_j \geq æ_j \left(\sum_{k=0}^{n} l_k a_k + a \right) \geq æ_j \left(\frac{q_æ}{1-q_æ} + 1 \right) a = \frac{æ_j}{1-q_æ}a$$

и требуемая оценка (7.23) установлена.

В силу оценок (7.22) неравенства (7.23) говорят о том, что решение $\mathbf{x}(t)$ не выходит за пределы параллелотопа S.

Осталось доказать существование и единственность ограниченного решения, то есть решения, лежащего в параллелотопе $S_0 \times S_1 ... \times S_{n+1} \times S_n$ и наличие оценок (7.22) для него.

Выпишем систему нелинейных интегральных уравнений

$$\mathbf{x}^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds, \qquad 0 \leq j \leq n-1,$$

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds, \tag{7.24}$$

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)).$$

Мы её перепишем немного в другом виде

$$\mathbf{x}_j(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds, \qquad 0 \le j \le n-1,$$

$$\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds, \tag{7.25}$$
$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), \ldots, \mathbf{x}_{n-1}(t), \mathbf{x}_n(t)).$$

Необязательно, чтобы $\mathbf{x}_j(t) = \mathbf{x}_0^{(j)}(t)$. Теперь нужно построить функциональное пространство, в котором удобно будет изучать нелинейный интегральный оператор $\mathbf{F}[x] = \{\mathbf{F}_0[x], \mathbf{F}_1[x], ..., \mathbf{F}_{n-1}[x], \mathbf{F}_n[x]\}$, где $\mathbf{F}_j[x]$ – правая часть j-го уравнения в (7.25), где $[\mathbf{x}] = [\mathbf{x}](t) = \{\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), ..., \mathbf{x}_{n-1}(t), \mathbf{x}_n(t)\}$. Если бы нелинейность была непрерывна по времени t, то в качестве $\mathbb{C}^{(n)}$ можно было бы взять $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times ... \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ $(n+1)$ раз, где $\mathbb{C}$ – банахово пространство непрерывных и ограниченных векторных функций с sup-нормой. Но было решено охватить и измеримый случай – условие Каратеодори – и это вызывает некоторые осложнения.

Попробуем так: $\mathbb{C}^{(n)} = \mathbb{L}_\infty \times \mathbb{L}_\infty \times ... \times \mathbb{L}_\infty \times \mathbb{L}_\infty$ $(n+1)$ раз, где $\mathbb{L}_\infty$ – это банахово пространство измеримых и ограниченных векторных функций с sup-нормой ($vraimax$). Обозначим через S совокупность $[\mathbf{x}](t)$ из $\mathbb{C}^{(n)}$, для которых $\mathbf{x}_j(t) \in S_j \quad 0 \le j \le n$. Система нелинейных интегральных уравнений (7.25) тогда запишется в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}[\mathbf{x}], \qquad \mathbf{x} \in S. \tag{7.26}$$

Множество S есть непустое ограниченное замкнутое выпуклое в банаховом пространстве $\mathbb{C}^{(n)}$. Нетрудно видеть, что нелинейный интегральный оператор $\mathbf{F}$ определён на S и отображает его в себя

$$\mathbf{F}S \subseteq S. \tag{7.27}$$

Действительно, если $[\mathbf{x}](t) \in S$, то $\mathbf{f}(t)$ есть измеримая ограниченная векторная функция, и в силу условия типа Липшица имеем

$$\|\mathbf{y}_j\| = \|\mathbf{F}_j[\mathbf{x}]\|_\infty \le æ_j \left(\sum_{k=0}^{n} l_k \|\mathbf{x}_k\|_\infty \right) \le$$

$$\le æ_j \left(\sum_{k=0}^{n} l_k \frac{æ_j}{1 - q_æ} a + a \right) = æ_j \left(\frac{q_æ}{1 - q_æ} + 1 \right) a =$$

$$= \frac{æ_j}{1 - q_æ} a.$$

Согласно (7.23) включение (7.27) установлено.

Проверим, что рассматриваемый нами нелинейный интегральный оператор $\mathbf{F}$ удовлетворяет условиям обобщённого принципа сжимающих отображений. Введём в $\mathbb{C}^{(n)}$ обобщённую норму, положив

$$\mathbf{|}\,\mathbf{x}\,\mathbf{|} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}_0\|_\infty \\ \|\mathbf{x}_1\|_\infty \\ \dots \\ \|\mathbf{x}_{n-1}\|_\infty \\ \|\mathbf{x}_n\|_\infty \end{pmatrix}. \tag{7.28}$$

Из условия Липшица (5.6) в силу определения оператора $\mathbf{F}$ получаем

$$\|\mathbf{F}_j[\mathbf{x}] - \mathbf{F}_j[\mathbf{y}]\|_\infty \le æ_j \left(\sum_{k=0}^{n} l_k \|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}_k\| \right), \qquad 0 \le j \le n. \tag{7.29}$$

Система числовых неравенств (7.29) может быть записана в виде одного векторно-матричного неравенства

$$\mathbf{|}\,\mathbf{F}[\mathbf{x}] - \mathbf{F}[\mathbf{y}]\,\mathbf{|} \le \mathbf{Q}\mathbf{|}\,\mathbf{x} - \mathbf{y}\,\mathbf{|} \qquad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S). \tag{7.30}$$

Здесь $\mathbf{Q} = (æ_j l_n)$ есть неотрицательная квадратная $(n+1) \times$ $\times (n+1)$ матрица, $\mathbf{Q} = æ l$, где $æ$ – столбец с координатами

$æ_0, æ_1, ..., æ_{n-1}, æ_n$, а l – строка: $l = (l_0, l_1, ..., l_{n-1}, l_n)$. Далее

$$0 \leq \mathbf{Q} = æl, \qquad spr\mathbf{Q} = tr\mathbf{Q} = \sum_{j=0}^{n} æ_j l_j = q_æ < 1. \tag{7.31}$$

Последнее неравенство в (7.31) верно в силу интегрального условия (5.9). Так как выполнены все условия обобщённого принципа сжимающих отображений, то оператор $\mathbf{F}$ имеет в S единственную неподвижную точку, то есть уравнение (7.26) имеет единственное решение. ■

Это первая теорема из четырёх теорем обычного квартета (см. А.И. Перов, И.Д. Коструб [45] или И.Д. Коструб, А.И. Перов [23]).

Теорема 7.5. *В условиях теоремы* 7.4 *ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *нелинейного дифференциального уравнения* (5.1) *и его производные могут быть получены обычным методом последовательных приближений* (7.13) $\mathbf{x}^{[k]} = \mathbf{F}\mathbf{x}^{[k-1]}$, $k = 0, 1, 2, ...$, *начиная с произвольного нулевого приближения* $\mathbf{x}^{[0]}$ из S, *при этом справедлива следующая оценка погрешности*

$$\| \mathbf{x} - \mathbf{x}^{[\mathbf{k}]} \| \leq \frac{q_æ^{k-1}}{1 - q_æ} æ_j \sum \| \mathbf{x}^{[\mathbf{1}]} - \mathbf{x}^{[\mathbf{0}]} \|, \qquad k = 1, 2, ... \tag{7.32}$$

Теорема 7.6. *Если в условиях теоремы* 7.3 *нелинейности* $f(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ *стационарны по* t *или периодичны или почти периодичны, то единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *также стационарно, периодично или почти периодично соответственно. Имеет место включение:*

группа частот решения $\mathbf{x}(t)$ *включена в группу частот нелинейности* $f(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$. (7.33)

Завершает упомянутый квартет теорема, представляющая несомненный интерес для приложений.

Теорема 7.7. *Если операторный характеристический многочлен* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ *является гурвицевым, то единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *асимптотически устойчиво в целом, то есть*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}(t) - \mathbf{y}^{(j)}(t)\| \to 0 \text{ при } t \to +\infty, \qquad j = 0, 1, ..., n-1, \quad (7.34)$$

где $\mathbf{y}(t)$ *- любое другое решение уравнения* (5.1), *определённое при всех достаточно больших* t.

Единственный недостаток в этой теореме – это поведение остальных решений: если $\mathbf{y}(t)$ – любое другое решение, $\mathbf{y}^{(j)}(t_0) = \mathbf{y}^{(j)} \in S_j$ при $j = 0, 1, ..., n-1$, то решение $\mathbf{y}(t)$ определено при всех $t : t_0 \leq t < +\infty$, и имеют место соотношения (7.34).

Теорема 7.7 представляет собой локальный признак конвергентности. Достаточно много об этом виде устойчивости говорится в книге В.А. Плисса [49].

8. Теорема Тихонова о неподвижной точке. Теорема существования ограниченного решения

8.1. Теорема Тихонова. Процитируем сначала одно место из Э. Хилле, Р. Филлипс [59, с. 26]:

"Одним из прекраснейших результатов в теории линейных топологический пространств является теорема Тихонова [1] о неподвижной точке. Мы приведём её здесь, хотя в дальнейшем она нам и не потребуется.

Теорема 1.10.3. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– локально выпуклое топологическое линейное пространство. Если* $\mathbf{C}$ *– выпуклое компактное подмножество пространства* $\mathfrak{X}$, *а* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$*– непрерывное отображение* $\mathbf{C}$ *самого в себя, то* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ *для некоторого* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{C}$."

Изложение теории линейных топологических пространств можно найти, например, в Л.В. Канторович, Г.П. Акилов [19, с. 355-418].

Теорема Тихонова была опубликована в 1935 в статье А.Н. Тихонова [56]. Её доказательство можно найти в монографии Н. Данфорда и Дж. Шварца [13, с. 490-495] и в монографии Р. Эдвардса [61, с. 227-231]. Как инструмент исследования она просто изложена, причём по недосмотру в условиях теоремы пропущено требование непрерывности отображения, в книге Ф. Хартмана [58, с. 476]; в этой же книге приведены и различные приложения этой теоремы в пространствах Фреше.

8.2. Теорема существования. Сначала мы откажемся от условий Каратеодори и докажем теорему в простом варианте. Начнём с определения. Векторная функция $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ называется компактной, если компактно её множество значений $\mathbf{f}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{B}$.

Теорема 8.1. *Рассмотрим дифференциальное уравнение* (5.1). *Пусть операторный характеристический многочлен* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ *удовлетворяет нерезонансному условию* (5.3). *Пусть нелинейная векторная функция* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ *непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет условию типа Липшица* (7.1). *Пусть выполнены условия компактности* (7.2). *Пусть, наконец, выполнено интегральное условие* (5.9).

Тогда нелинейное дифференциальное уравнение (5.1) *имеет по крайней мере одно ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *и это решение является компактным; у любого ограниченного решения уравнения* (5.1) *ограниченными и компактными являются все производные до* n*- го порядка включительно и справедливы оценки*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_{\mathrm{C}} \leq \frac{æ_j}{1 - q_{æ}} a, \quad 0 \leq j \leq n. \tag{8.1}$$

□ Прежде всего докажем оценки (8.1). Пусть $\mathbf{x}(t)$ есть ограниченное решение нелинейного дифференциального уравнения (5.1).

Как мы уже говорили об этом выше, в условиях доказываемой теоремы все производные $\dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)$ до n-го порядка включительно также являются ограниченными. Из условия типа Липшица (7.1) получаем

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t))\| \leq \sum_{j=0}^{n} l_j \|\mathbf{x}^{(j)}\|_{\mathrm{C}} + \|\mathbf{f}\|_{\mathrm{C}}. \quad (8.2)$$

Поэтому из системы нелинейных интегральных уравнений (5.23) – (5.25) в силу оценки (3.4) находим

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_{\mathrm{C}} \leq æ_j \left(\sum_{k=0}^{n} l_k \|\mathbf{x}^{(k)}\|_{\mathrm{C}} + \|\mathbf{f}\|_{\mathrm{C}} \right), \;\; 0 \leq j \leq n. \quad (8.3)$$

Умножив j-е неравенства (8.3) на неотрицательные l_j и сложив почленно полученные таким образом неравенства, находим

$$\sum_{j=0}^{n} l_j \|\mathbf{x}^{(j)}\|_{\mathrm{C}} \leq q_æ \left(\sum_{k=0}^{n} l_k \|\mathbf{x}^{(k)}\|_{\mathrm{C}} + \|\mathbf{f}\|_{\mathrm{C}} \right),$$

откуда в силу интегрального условия (5.9) вытекает промежуточная оценка

$$\sum_{j=0}^{n} l_j \|\mathbf{x}^{(j)}\|_{\mathrm{C}} \leq \frac{q_æ}{1 - q_æ} \|\mathbf{f}\|_{\mathrm{C}},$$

подставляя которую в (8.3), окончательно имеем

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_{\mathrm{C}} \leq æ_j \left(\frac{q_æ}{1 - q_æ} + 1 \right) a = \frac{æ_j}{1 - q_æ} \|\mathbf{f}\|_{\mathrm{C}},$$

и оценки (8.1) установлены.

Для существования ограниченного решения системы нелинейных интегральных уравнений (5.23) – (5.25) применим теорему Тихонова о неподвижной точке (см. пункт 8.1). Систему нелинейных интегральных уравнений (5.23) – (5.25), которую естественно изучать в банаховом пространстве $\mathrm{C}^{(n)}$, коротко запишем в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{x}, \;\; \mathbf{x} \in \mathrm{C}^{(n)}, \quad (8.4)$$

где нелинейный интегральный оператор $\mathbf{F} : \mathrm{C}^{(n)} \to \mathrm{C}^{(n)}$ определяется правыми частями рассматриваемой системы нелинейных интегральных уравнений (5.23) – (5.25), $\mathbf{Fx} = \{\mathbf{F}_0\mathbf{x}, \mathbf{F}_1\mathbf{x}, ..., \mathbf{F}_{n-1}\mathbf{x}, \mathbf{F}_n\mathbf{x}\}$. В силу оценок (3.4) и условия типа Липшица (7.1) получаем

$$\|\mathbf{F}_j\mathbf{x}\|_{\mathrm{C}} \leq æ_j \left(\sum_{k=0}^{n} l_k \|\mathbf{x}^{(k)}\|_{\mathrm{C}} + a \right), \quad 0 \leq j \leq n. \tag{8.5}$$

Наделим банахово пространство $\mathrm{C}^{(n)}$ обобщённой нормой, положив

$$\boldsymbol{|}\,\mathbf{x}\,\boldsymbol{|} = col(\|\mathbf{x}\|_{\mathrm{C}}, \|\dot{\mathbf{x}}\|_{\mathrm{C}}, ..., \|\mathbf{x}^{(n-1)}\|_{\mathrm{C}}, \|\mathbf{x}^{(n)}\|_{\mathrm{C}}). \tag{8.6}$$

Обобщённая норма позволяет записать систему неравенств (8.5) в векторно-матричном виде

$$\boldsymbol{|}\,\mathbf{Fx}\,\boldsymbol{|} \leq \mathbf{Q}\boldsymbol{|}\,\mathbf{x}\,\boldsymbol{|} + aæ, \mathbf{x} \in \mathrm{C}^{(n)}, \tag{8.7}$$

где $\mathbf{Q} = (æ_j l_k)$ есть неотрицательная $(n+1) \times (n+1)$ – квадратная матрица вида $æ_j l_k$ (произведение столбца æ на строку l), где æ есть столбец $col(æ_0, æ_1, ..., æ_{n-1}, æ_n)$, а l есть строка (l_0, l_1, l_{n-1}, l_n), причём

$$0 \leq \mathbf{Q} = æl, \qquad spr\mathbf{Q} = læ = q_æ < 1. \tag{8.8}$$

Неотрицательность квадратной матрицы $\mathbf{Q}$ очевидна, и последующие неравенства для спектрального радиуса этой матрицы есть следствие очевидной формулы $spr\mathbf{Q} = spræl = læ$ и основного интегрального условия (5.9), так как $q_æ = l_0æ_0 + l_1æ_1 + l_{n-1}æ_{n-1} + l_næ_n = læ$ (произведение строки l на столбец æ).

Обозначим через S шар в обобщённом банаховом пространстве $\mathrm{C}^{(n)}$ радиуса

$$\rho = \frac{a}{1 - q_æ}æ > 0, \quad \rho \in \mathbb{R}^{n+1} \tag{8.9}$$

с центром в нуле. Согласно оценке (8.7), если $\mathbf{x} \in S$, то

$$\boldsymbol{|}\,\mathbf{Fx}\,\boldsymbol{|} \leq \mathbf{Q}\boldsymbol{|}\,\mathbf{x}\,\boldsymbol{|} + aæ \leq \mathbf{Q}\frac{a}{1 - q_æ}æ + aæ =$$

$$= \frac{a}{1 - q_{æ}} \mathbf{Q}æ + aæ = \frac{a}{1 - q_{æ}} q_{æ}æ + aæ =$$
$$= \frac{a}{1 - q_{æ}} æ = \rho.$$

Поэтому

$$\mathbf{F}S \subseteq S. \tag{8.10}$$

Однако непрерывный нелинейный оператор $\mathbf{F}$ не является компактным в банаховом пространстве $\mathrm{C}^{(n)}$. Поэтому здесь неприменим принцип Шаудера. Выход состоит в том, чтобы превратить пространство $\mathrm{C}^{(n)}$ в линейное локально выпуклое топологическое пространство, в котором $\mathbf{F}$, по-прежнему оставаясь непрерывным, становится компактным, что позволяет для доказательства существования неподвижной точки оператора $\mathbf{F}$, то есть решения уравнения (8.4), привлечь теорему Тихонова (см. пункт 8.1).

Локально выпуклая топология в $\mathrm{C}^{(n)}$ вводится следующим образом. Окрестность нуля определяется числами $\varepsilon_0 > 0, \varepsilon_1 > 0, ..., \varepsilon_{n-1} > 0, \varepsilon_n > 0$ и $a > 0$, и состоит из тех функций $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^{(n)}$, для которых

$$\|\mathbf{x}^{(j)}(t)\| < \varepsilon_j \text{ при } |t| \leq a, \; 0 \leq j \leq n. \tag{8.11}$$

Проверим, что интегральный оператор $\mathbf{F}$ непрерывен в S в локально выпуклой топологии. Пусть $\xi \in S$ и $\eta = \mathbf{F}\xi$. Покажем, что для любых $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_1 > 0, ..., \varepsilon_{n-1} > 0, \varepsilon_n > 0$ и $a > 0$ можно указать числа $\delta_0 > 0, \delta_1 > 0, ..., \delta_{n-1} > 0, \delta_n > 0$ и $b > a$, что из

$$\|\mathbf{x}^{(j)}(t) - \xi^{(j)}(t)\| < \delta_j \text{ при } |t| \leq b \text{ и } 0 \leq j \leq n \tag{8.12}$$

вытекает, что

$$\|\mathbf{y}^{(j)}(t) - \eta^{(j)}(t)\| < \varepsilon_j \text{ при } |t| \leq a \text{ и } 0 \leq j \leq n. \tag{8.18}$$

Здесь, конечно, $\mathbf{x} \in S$ и $\mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{x}$.

Из определения оператора $\mathbf{F}$ вытекает, что

$$\|\mathbf{y}^{(j)}(t)-\eta^{(j)}(t)\| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(j)}(t-s)\|\|\triangle\mathbf{f}(s)\|ds, \ \ 0 \leq j \leq n-1, \quad (8.14)$$

$$\|\mathbf{y}^{(j)}(t) - \eta^{(j)}(t)\| \leq$$

$$\leq \|\mathbf{A}_0^{-1}\|\|\triangle\mathbf{f}(t)\| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(n)}(t-s)\|\|\triangle\mathbf{f}(s)\|ds, \quad (8.15)$$

$$\triangle\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)) -$$

$$-\mathbf{f}(t, \xi(t), \dot{\xi}(t), ..., \xi^{(n-1)}(t), \xi^{(n)}(t)). \quad (8.16)$$

Так как выполнено условие типа Липшица (7.1), то

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t))\| \leq c = \frac{a}{1-q_{æ}}, \ \ \mathbf{x} \in S. \quad (8.17)$$

Поэтому, если $b > a$ и $|t| \leq a$, то

$$\int\limits_{b}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(j)}(t-s)\|\|\triangle\mathbf{f}(s)\|ds \leq$$

$$\leq \int\limits_{b}^{+\infty} M \exp^{-\gamma(t-s)} 2cds = \quad (8.18)$$

$$= \frac{2cM}{\gamma} \exp^{-\gamma(b-a)} < \frac{\varepsilon_j}{3},$$

для $0 \leq j \leq n$, если разность $b - a > 0$ достаточно велика. Аналогично,

$$\int\limits_{-\infty}^{-b} \|\mathbf{G}^{(j)}(t-s)\|\|\triangle\mathbf{f}(s)\|ds \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{-b} M \exp^{-\gamma(t-s)} 2cds = \quad (8.19)$$

$$= \frac{2cM}{\gamma} \exp^{-\gamma(b-a)} < \frac{\varepsilon_j}{3},$$

для $0 \leq j \leq n$, если разность $b - a > 0$ достаточно велика. Фиксируем найденные $b > a$. Предположим, что по заданному $\alpha > 0$ можно указать такие $\delta_0 > 0, \delta_1 > 0, ..., \delta_{n-1} > 0, \delta_n > 0$, что

$$\|\triangle \mathbf{f}(t)\| = \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)) -$$

$$-\mathbf{f}(t, \xi(t), \dot{\xi}(t), ..., \xi^{(n-1)}(t), \xi^{(n)}(t))\| < \alpha, \tag{8.20}$$

если $|t| \leq b$ и

$$\|\mathbf{x}(t) - \xi(t)\| < \delta_0, \ \ ..., \ \ \|\mathbf{x}^{(n)}(t) - \xi^{(n)}(t)\| < \delta_n. \tag{8.21}$$

Поэтому если выполнены условия (8.21), то

$$\int\limits_{-b}^{b} \|\mathbf{G}^{(j)}(t-s)\| \|\triangle \mathbf{f}(s)\| ds \leq M\alpha 2b \leq \frac{\varepsilon_j}{3}, \qquad 0 \leq j \leq n. \tag{8.22}$$

Это есть условие для выбора числа $\alpha > 0$. Поясним, что в оценках (8.18), (8.19) и (8.22) мы пользуемся оценками (2.7) для операторной функции Грина и её производных $\|\mathbf{G}^{(j)}(t)\| \leq M \exp^{-\gamma|t|}, -\infty < t < +\infty, 0 \leq j \leq n$, где $M > 0$ и $\gamma > 0$.

Мы видим, что из (8.12) (см. (8.21)) в силу оценок (8.18), (8.19) и (8.22) вытекает (8.13), и наше утверждение о непрерывности интегрального оператора $\mathbf{F}$ в локально выпуклой топологии установлено.

Осталось проверить утверждения (8.20) – (8.21). Предположим обратное, что такой конечной последовательности $\delta_j, \ \ 0 \leq j \leq n$ указать нельзя: тогда для любой последовательности $\delta_j^{[k]}, \ \ 0 \leq j \leq n, \ \ 0 < \delta_j^{[k]} \to 0$ при $k \to +\infty$ для любого k можно указать такую функцию $\mathbf{x}^{[k]} \in \mathrm{C}^{(n)}[-b, b]$, что

$$\|\mathbf{x}^{[k](j)}(t) - \xi^{(j)}(t)\| < \delta_j^{[k]}, \qquad 0 \leq j \leq n, \tag{8.23}$$

$$\|\mathbf{f}(t_k, \mathbf{x}^{[k](j)}(t_k)) - \mathbf{f}(t_k, \xi^{(j)}(t_k))\| \geq \alpha. \tag{8.24}$$

Соотношение (8.23) говорит о том, что $\|\mathbf{x}^{[k]} - \xi\|_{\mathrm{C}^{(n)}} \to 0$ при $k \to +\infty$, откуда вытекает компактность последовательности $\mathbf{x}^{[k]}$. Так как $t_n \in [-b, b]$, то без ограничения общности можно считать, что $t_k \to \tau,\ \ -b \leq \tau \leq b$.

Проверим, что

$$\mathbf{x}^{[k](j)}(t_k) \to \xi^{(j)}(\tau), \qquad 0 \leq j \leq n. \tag{8.25}$$

Действительно,

$$\|\mathbf{x}^{[k](j)}(t_k) - \xi^{(j)}(t_k)\| \leq$$

$$\leq \|\mathbf{x}^{[k](j)}(t_k) - \mathbf{x}^{[k](j)}(\tau)\| + \|\mathbf{x}^{[k](j)}(\tau) - \xi^{(j)}(\tau)\| \to 0.$$

Первое слагаемое стремится к нулю в силу равностепенной непрерывности компактного семейства функций $\mathbf{x}^{[k]}$ в $\mathrm{C}^{(n)}$; второе слагаемое стремится к нулю в силу $\|\mathbf{x}^{[k]} - \xi\|_{\mathrm{C}^{(n)}} \to 0$. Итак, соотношения (8.25) установлены.

Так как согласно (8.25)

$$(t_k, \mathbf{x}^{[k]}(t_k), \dot{\mathbf{x}}^{[k]}(t_k), ..., \mathbf{x}^{[k](n-1)}(t_k), \mathbf{x}^{[k](n)}(t_k)) \to$$

$$\to (\tau, \xi(\tau), \dot{\xi}(\tau), \xi^{(n-1)}(\tau), \xi^{(n)}(\tau)),$$

то в силу непрерывности $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ по совокупности переменных получаем

$$\mathbf{f}(t_k, \mathbf{x}^{[k](j)}(t_k)) \to \mathbf{f}(\tau, \xi^{(j)}(\tau)). \tag{8.26}$$

С другой стороны, в силу непрерывности $\xi^{(j)}(t)$ в точке τ при $0 \leq j \leq n$ имеем

$$\mathbf{f}(t_k, \xi^{(j)}(t_k)) \to \mathbf{f}(\tau, \xi^{(j)}(\tau)). \tag{8.27}$$

Соотношения (8.26) и (8.27) (выражения справа в них совпадают) противоречат соотношениям (8.24) в силу предположения $\alpha > 0$.

Проверим, что $\mathbf{F}S$ состоит из компактных векторных функций. Пусть $\mathbf{x} \in S$ и $\mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{x}$. Так как из $\mathbf{x} \in S$ вытекает, что $\mathbf{x}^{(j)} \in S_j$, где S_j есть шар радиуса $\alpha_j = æ_j a/(1-q_æ)$ с центром в нуле пространства $\mathbb{B}$, то по условию компактности $\mathbf{f}(\mathbb{R}, S_0, S_1, ..., S_{n-1}, S_n)$ компактно в $\mathbb{B}$. Обозначим это множество Σ. Так как каждый из линейных ограниченных операторов K_j в линейном топологическом пространстве компактное $\mathbf{f}$ переводит в компактное $\mathbf{K}_j\mathbf{f}$ при $0 \le j \le n$, то $\mathbf{y}^{(j)}(t) = \mathbf{K}_j\mathbf{f}(t)$ – компактная функция, $0 \le j \le n$, и проверка завершена.

Так как неподвижная точка $\mathbf{x}$ оператора $\mathbf{F}$ в силу условия $\mathbf{x} = \mathbf{F}\mathbf{x}$ входит в $\mathbf{F}S$, то $\mathbf{x}(t)$, как и $\mathbf{x}^{(j)}(t)$ при $1 \le j \le n$ – компактные функции.

Проверим, что семейство функций $\mathbf{F}S$ компактно в линейном топологическом пространстве $\mathrm{C}^{(n)}$. Ну, это пока не получается, а получается чуть меньше в $\mathrm{C}^{(n-1)}$. Каждое семейство $\{\mathbf{y}^{(j)}(t)\}$ равномерно компактно и равностепенно непрерывно при $0 \le j \le n-1$; последнее в силу равномерной ограниченности семейства $\{\mathbf{y}^{(j+1)}(t)\}$ при $1 \le j+1 \le n$. Здесь мы используем принцип компактности, составляющий содержание теоремы 7.2.

По теореме Тихонова нелинейный интегральный оператор $\mathbf{F}$ имеет в S неподвижную точку; при этом мы считаем, что $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ не зависит от $\mathbf{x}_n$! ■

8.3. Доказательство теоремы 8.2.

Теорема 8.2. *Если в условиях теоремы* 8.1 *нелинейная векторная функция* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ *по времени* t *является стационарной, периодической или почти периодической, то среди огра-*

ниченных вместе с производными до порядка n решений уравнения (5.1) *есть по крайней мере одно стационарное, периодическое или почти периодическое решение соответственно, причём имеет место следующее включение:*

группа частот решения $\mathbf{x}(t)$ *(и его производных* $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)$ *включена в группу частот* (8.28) *векторной функции* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$.

□ Пусть нелинейная функция *стационарна* по t:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n). \tag{8.29}$$

Будем искать стационарное решение уравнения (5.1) в виде $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}$ $(\in \mathbb{B})$. Подставляя в уравнение (5.1), приходим к конечному (не дифференциальному) уравнению

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \text{где} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}, 0, ..., 0, 0) \tag{8.30}$$

(положим, что в силу нерезонансного условия (5.3) оператор $\mathbf{A}_n$ непрерывно обратим (см. (1.6))). В силу условия типа Липшица (7.1) имеем

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| \le q\|\mathbf{x}\| + a, \quad \text{где} \quad q = \|\mathbf{A}_n^{-1}\| l_0. \tag{8.31}$$

Так как $\|\mathbf{A}_n^{-1}\| \le æ_0$, то в силу интегрального условия (5.9) находим $q \le æ_0 l_0 \le æ_0 l_0 + æ_1 l_1 + ... + æ_{n-1} l_{n-1} + æ_n l_n \equiv q_æ < 1$, то есть

$$0 \le q \le q_æ < 1. \tag{8.32}$$

Пусть

$$r = \frac{a}{1-q}. \tag{8.33}$$

Тогда нелинейный оператор $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ отображает шар Σ в себя

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| \le q\|\mathbf{x}\| + a \le q\frac{a}{1-q} + a = r.$$

Так как оператор $\mathbf{g}$ компактен (в силу условия компакта) 7.2, то по принципу Шаудера уравнение (8.30) имеет по крайней мере одно решение – это и будет искомое ограниченное решение дифференциального уравнения (5.1). ■

Приведём результаты для скалярного уравнения с частотными постоянными, выписанными в явном виде (см А.И Перов, И.Д. Коструб [45], см. также М.И. Вязанкина [8]). Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение произвольного порядка n следующего специального вида:

$$a_0 x^{(n)} + a_n x = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)}, x^{(n)}), \tag{8.34}$$

не разрешенное относительно старшей производной, в котором коэффициенты

$$a_0 \neq 0, a_n \neq 0. \tag{8.35}$$

Предположим, что нелинейная функция $f(t, x_0, \ldots, x_n)$ непрерывна по времени t и удовлетворяет условию Липшица по пространственным переменным

$$|f(t, x_0, x_1, \ldots, x_n) - f(t, y_0, y_1, \ldots, y_n)| \leq \sum_{j=0}^{n} l_j |x_j - y_j|, \tag{8.36}$$

где $l_0, l_1, \ldots, l_n$ — некоторые неотрицательные постоянные. Пусть непрерывная функция

$$f_0(t) = f(t, 0, \ldots, 0) \text{ является ограниченой.} \tag{8.37}$$

Теорема 8.3. *Пусть n - чётное число, $n = 2m$, причём $a_0 a_1 > 0$, если m - чётное число, и $a_0 a_1 < 0$, если m - нечётное число. Пусть выполнены условие Липшица* (8.36) *и условие* (8.37). *Пусть, наконец, выполнено частотное условие*

$$l_0 \frac{1}{|a_n|} + \sum_{j=0}^{n-1} l_j \left(\frac{j}{n}\right)^{j/n} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{1-j/n} \frac{1}{|a_n|^{1-j/n} |a_1|^{j/n}} + \tag{8.38}$$

$$+l_n\frac{1}{|a_0|} < 1.$$

Тогда нелинейное дифференциальное уравнение (8.34) *имеет единственное ограниченное решение; у этого решения оказываются ограниченными все производные до* n*-го порядка включительно.*

Теорема 8.4. *Пусть* n *- нечётное число, пусть выполнены условие Липшица* (8.36) *и условие* (8.37). *Пусть, наконец, выполнено частотное условие*

$$l_0\frac{1}{|a_n|} + \sum_{j=0}^{n-1} l_j\sqrt{\left(\frac{j}{n}\right)^{j/n}\left(1-\frac{j}{n}\right)^{1-j/n}}\frac{1}{|a_n|^{1-j/n}|a_1|^{j/n}}+ \tag{8.39}$$

$$+l_n\frac{1}{|a_0|} < 1.$$

Тогда нелинейное дифференциальное уравнение (8.34) *имеет единственное ограниченное решение; у этого решения оказываются ограниченными все производные до* n*-го порядка включительно.*

Часть 2. Ограниченные решения векторно-операторных дифференциальных уравнений n-го порядка, не разрешённых относительно старшей производной, в гильбертовом пространстве

Вторая часть диссертации посвящена подробному изложению результатов (вместе с различными дополнениями), опубликованных в кратких сообщениях на конференциях, посвященных памяти Я.Б. Лопатинского (Украина, Донецк) (см. А.И. Перов, И.Д. Коструб, Е.В. Иванова [46]) и памяти С.Л. Соболева (Россия, Новосибирск) (см. А.И. Перов, И.Д. Коструб, Е.В. Иванова [47]), в тех частях, где излагаются различные подходы к решению проблемы существования (и единственности) ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений, не разрешённых относительно старшей производной в гильбертовом пространстве.

Нацеленность на приложения находит своё отражение в теоремах существования периодических и почти периодических решений теории нелинейных колебаний.

Особая окраска развиваемой теории заключается в том, что вышеназванные проверяемые условия даны в терминах так называемых интегральных и частотных постоянных. При изучении линейных векторно-операторных дифференциальных уравнений n-го порядка с переменными коэффициентами используется один результат А.Г. Баскакова, учитывающий особенности гильбертова пространства.

9. Линейное векторно-операторное дифференциальное уравнение n-го порядка с периодическими коэффициентами, не разрешённое относительно старшей производной, в гильбертовом пространстве

9.1. Нерезонансное условие. Частотное условие. В комплексном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ рассмотрим линейное однородное векторно-операторное дифференциальное уравнение n-го порядка, не разрешённое относительно старшей производной и имеющее следующий вид

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{n}\mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}^{(j)}, \qquad (9.1)$$

где $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{A}_n$ – постоянные линейные ограниченные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, причём оператор $\mathbf{A}_0$ непрерывно обратим, а операторные функции $\mathbf{B}_j(t) : \mathbb{R} \to End\ \mathbb{H}$ (сильно) непрерывные или измеримые ω-периодические и ограниченные:

$$\mathbf{B}_j(t+\omega) = \mathbf{B}_j(t), \qquad -\infty < t < +\infty, \qquad (9.2)$$

$$\|\mathbf{B}_j(t)\| \le l_j, \qquad 0 \le j \le n, \qquad (9.3)$$

где $l_0, l_1, ..., l_{n-1}, l_n$ – некоторые неотрицательные постоянные. По поводу (9.3) нужно сказать следующее. Так как операторные функции $\mathbf{B}_j(t)$ по условию считаются непрерывными, то при любом $h \in \mathbb{H}$ непрерывна векторная ω – периодическая функция $\mathbf{B}_j(t)h$ на отрезке $[0, \omega]$, и потому ограниченная: $\|\mathbf{B}_j(t)h\| \le c_j(h), 0 \le t \le \omega$. Отсюда по теореме Банаха – Штейнгауза вытекает равномерная ограниченность семейства $\mathbf{B}_j(t)$, $0 \le t \le \omega$, то есть $\|\mathbf{B}_j(t)\| \le l_j$, $0 \le t \le \omega$ при $0 \le j \le n$.

Дифференциальные уравнения в гильбертовом пространстве изучались Ю.В. Трубниковым и А.И. Перовым в [57]. Интересный результат получен в работе А.Г. Баскакова [3], в которой даны нетривиальные оценки ограниченных решений в гильбертовом пространстве.

По сравнению с прежним материалом, который содержится в монографиях А.И. Перова, И.Д. Коструб [45] или И.Д. Коструб, А.И. Перова [23], новое здесь заключается в том, что рассмотрение ведётся в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ произвольной размерности, в условиях Каратеодори сильная измеримость вместо сильной или равномерной непрерывности, и при наличии члена $\mathbf{B}_n(t)\mathbf{x}^{(n)}$ с n-й производной в правой части.

Отметим, что в работе Б.Р. Басит и Л. Ценд [1] осуществлено интересное перенесение теоремы Бора – Нойгебауэра на случай гильбертова пространства.

Основное внимание будет обращено на линейное неоднородное векторно-операторное дифференциальное уравнение n-го порядка, не разрешённое относительно старшей производной,

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}^{(j)} + \mathbf{f}(t), \quad (9.4)$$

в котором непрерывная или измеримая векторная функция $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ является ω – периодической

$$\mathbf{f}(t+\omega) = \mathbf{f}(t), \qquad -\infty < t < +\infty, \quad (9.5)$$

и из $\mathbf{L}_2[0,\omega]$. Отметим, что в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ справедливо равенство Парсеваля (см. Е.В. Иванова [17]): если ряд Фурье функции $\mathbf{f}(t)$ имеет вид

$$\mathbf{f}(t) = \sum_k \mathbf{f}_k \exp i\text{æ}kt, \qquad \text{æ} = \frac{2\pi}{\omega}, \tag{9.6}$$

то

$$\|\mathbf{f}\|_2^2 \equiv \int_0^\omega \|\mathbf{f}(t)\|^2 dt = \omega \sum_k \|\mathbf{f}_k\|^2. \tag{9.7}$$

Пусть операторный характеристический многочлен

$$\mathbf{L}_n(\lambda) \equiv \mathbf{A}_0\lambda^n + \mathbf{A}_1\lambda^{n-1} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\lambda + \mathbf{A}_n \tag{9.8}$$

является нерезонансным. Выпишем все его частотные постоянные

$$\sigma_j = \sup_{-\infty<\theta<+\infty} \|(i\theta)^j \mathbf{L}^{-1}(i\theta)\|, \qquad 0 \le j \le n. \tag{9.9}$$

Далее всюду важную роль играет *частотное условие*

$$q_\sigma \equiv \sum_{j=0}^n l_j \sigma_j < 1. \tag{9.10}$$

9.2. Теорема существования и единственности. Эта теорема в нелинейном варианте, но при более жёстких условиях (в частности, при $\mathbf{B}_n(t) \equiv 0$) приведена в статье А.И. Перова [39] и в препринте А.И. Перова, И.Д. Коструб, Е.В. Ивановой [48]. Общим вопросам в проблеме ограниченных решений с точки зрения интегральных операторов посвящена работа А.Г. Баскакова [2].

Отметим также, что в скалярном случае эта теорема была приведена без доказательства в работе М.И. Вязанкиной [9].

Теорема 9.1. *Пусть операторный характеристический многочлен* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ *является нерезонансным. Пусть операторные функции* $\mathbf{B}_j(t)$ *являются измеримыми* ω *– периодическими и ограниченными, то есть выполнены условия* (9.2) *и* (9.3) *при* $0 \le j \le n$. *Пусть выполнено частотное условие* (9.10).

Тогда неоднородное дифференциальное уравнение (9.4) *при любой* $\mathbf{f}(t)$ *из* $\mathbf{L}_2[0,\omega]$ *имеет единственное* ω *– периодическое решение* $\mathbf{x}(t)$ *также из* $\mathbf{L}_2[0,\omega]$, *как и все его производные* $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)$. *При этом справедливы следующие оценки*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_2 \leq \frac{\sigma_j}{1-q_\sigma}\|\mathbf{f}\|_2, \qquad 0 \leq j \leq n. \tag{9.11}$$

□ Искомое ω – периодическое решение дифференциального уравнения (9.4) является решением системы линейных векторно-операторных интегральных уравнений

$$\mathbf{x}^{(j)}(t) = \int_0^\omega \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{g}(s)ds, \qquad 0 \leq j \leq n-1,$$

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{g}(t) + \int_0^\omega \mathbf{G}^{(n)}(t-s)\mathbf{g}(s)ds, \tag{9.12}$$

$$\mathbf{g}(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{B}_k(t)\mathbf{x}^{(k)}(t) + \mathbf{f}(t).$$

Сначала получим оценки (9.11). Из системы (9.12) имеем

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_2 \leq \sigma_j(\omega)\left\{\sum_{k=0}^{n} l_k\|\mathbf{x}^{(k)}\|_2 + \|\mathbf{f}\|_2\right\}, \qquad 0 \leq j \leq n, \tag{9.13}$$

где

$$\sigma_j(\omega) = \sup_{-\infty<k<+\infty} \|(i æ k)^j \mathbf{L}_n^{-1}(i æ k)\|, \qquad 0 \leq j \leq n. \tag{9.14}$$

Из сравнения (9.9) и (9.14) ясно, что

$$\sigma_j(\omega) \leq \sigma_j, \qquad 0 \leq j \leq n. \tag{9.15}$$

Поэтому из (9.13) вытекает

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_2 \leq \sigma_j\left\{\sum_{k=0}^{n} l_k\|\mathbf{x}^{(k)}\|_2 + \|\mathbf{f}\|_2\right\}, \qquad 0 \leq j \leq n. \tag{9.16}$$

Умножим j-е неравенства в (9.16) на неотрицательные l_j и сложим все получившиеся таким образом неравенства; в силу частотного условия (9.10) получим

$$\sum_{j=0}^{n} l_j \|\mathbf{x}^{(j)}\|_2 \le q_\sigma \left\{ \sum_{k=0}^{n} l_k \|\mathbf{x}^{(k)}\|_2 + \|\mathbf{f}\|_2 \right\}, \qquad (9.17)$$

откуда вытекает промежуточная оценка

$$\sum_{j=0}^{n} l_j \|\mathbf{x}^{(j)}\|_2 \le \frac{q_\sigma}{1-q_\sigma} \|\mathbf{f}\|_2,$$

подставляя которую в неравенства (9.16), приходим к требуемой оценке (9.11):

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_2 \le \sigma_j \left\{ \frac{q_\sigma}{1-q_\sigma} + 1 \right\} \|\mathbf{f}\|_2 = \frac{\sigma_j}{1-q_\sigma} \|\mathbf{f}\|_2.$$

Для доказательства существования и единственности решения системы (9.12) перепишем её сначала в виде

$$\mathbf{x}_j(t) = \int_0^\omega \mathbf{G}^{(j)}(t-s,\omega)\mathbf{g}(s)ds, \qquad 0 \le j \le n-1,$$

$$\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{g}(t) + \int_0^\omega \mathbf{G}^{(n)}(t-s,\omega)\mathbf{g}(s)ds, \qquad (9.18)$$

$$\mathbf{g}(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{B}_k(t)\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{f}(t).$$

Здесь, как и выше, $\mathbf{G}(t,\omega)$ есть приведённая операторная ω – периодическая функция Грина; в (9.13) участвуют и её производные $\mathbf{G}^{(j)}(t,\omega)$:

$$\mathbf{G}^{(j)}(t,\omega) \sim \frac{1}{\omega} \sum_{k} (i\text{æ}k)^j \mathbf{L}_n^{-1}(i\text{æ}k) \exp^{i\text{æ}kt}, \qquad 0 \le j \le n. \qquad (9.19)$$

Введём в рассмотрение гильбертово пространство $\mathbf{L}_2^{(n)}[0,\omega] = \mathbf{L}_2[0,\omega] \times ... \times \mathbf{L}_2[0,\omega]$ $(n+1)$ раз $= \mathbf{L}_2^{n+1}[0,\omega]$ составных элементов $\mathbf{x}(t) = \{\mathbf{x}_0(t), \mathbf{x}_1(t), ..., \mathbf{x}_{n-1}(t), \mathbf{x}_n(t)\}$, где

$\mathbf{x}_j(t) \in \mathbf{L}_2[0,\omega]$ и $0 \le j \le n$. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2^{(n)}[0,\omega]$ линейный ограниченный интегральный оператор $\mathbf{A}$, сопоставляющий элементу $\mathbf{x}(t)$ из $\mathbf{L}_2^{(n)}[0,\omega]$ элемент $\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, где $\mathbf{y}(t) = \{\mathbf{y}_0(t), \mathbf{y}_1(t), ..., \mathbf{y}_{n-1}(t), \mathbf{y}_n(t)\} \in \mathbf{L}_2^{(n)}[0,\omega]$,

$$\mathbf{y}_j(t) = \int_0^\omega \mathbf{G}^{(j)}(t-s,\omega)\mathbf{h}(s)ds, \qquad 0 \le j \le n-1,$$

$$\mathbf{y}_n(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{h}(t) + \int_0^\omega \mathbf{G}^{(n)}(t-s,\omega)\mathbf{h}(s)ds. \tag{9.20}$$

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{B}_k(t)\mathbf{x}_k(t).$$

Тогда система (9.18) коротко может быть записана как операторное уравнение

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{z}, \;\; \mathbf{x}(t) \in \mathbf{L}_2^{(n)}[0,\omega],$$

$$\mathbf{z}_j(t) = \int_0^\omega \mathbf{G}^{(j)}(t-s,\omega)\mathbf{f}(s)ds, \qquad 0 \le j \le n-1, \tag{9.21}$$

$$\mathbf{z}_n(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}(t) + \int_0^\omega \mathbf{G}^{(n)}(t-s,\omega)\mathbf{f}(s)ds.$$

Введём в $\mathbf{L}_2^{(n)}[0,\omega]$ обобщённую норму, положив

$$[\![\mathbf{x}]\!] = \begin{pmatrix} \|\mathbf{x}_0\|_2 \\ \|\mathbf{x}_1\|_2 \\ \dots \\ \|\mathbf{x}_{n-1}\|_2 \\ \|\mathbf{x}_n\|_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}. \tag{9.22}$$

Оценим как и выше (см. (9.16)), получим

$$\|\mathbf{A}_j\mathbf{x}\|_2 \le \sigma_j \left\{ \sum_{k=0}^{n} l_k \|\mathbf{x}_k\|_2 \right\}, \qquad 0 \le j \le n. \tag{9.23}$$

С помощью обобщённой нормы систему последних неравенств можно записать в векторно-матричном виде

$$[\![\mathbf{A}\mathbf{x}]\!] \le \mathbf{Q}[\![\mathbf{x}]\!], \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{L}_2^{(n)}[0,\omega]. \tag{9.24}$$

Так как $\mathbf{Q} = (\sigma_j l_j)$ и

$$0 \le \mathbf{Q} = \sigma l, \qquad spr\mathbf{Q} = l\sigma = q_\sigma < 1, \tag{9.25}$$

то согласно обобщённому принципу сжимающих отображений (см. теорему 9.1) операторное уравнение (9.21) имеет единственное решение. ■

9.3. О сходимости метода последовательных приближений. Для приближённого нахождения решения операторного уравнения (9.21) можно исследовать обычный метод итераций

$$\mathbf{x}^{[k]} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{[k-1]} + \mathbf{z}, \qquad k = 1, 2, ..., \tag{9.26}$$

в котором нулевое приближение $\mathbf{x}^{[0]}$ выбирается произвольно в $\mathbf{L}_2^{(n)}[0, \omega]$.

Теорема 9.2. *В условиях теоремы* 9.1 *единственное ω – периодическое решение $\mathbf{x}(t)$ и его производные $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)$ могут быть найдены указанным выше методом последовательных приближений* (9.26); *при этом имеют место следующие оценки погрешности*

$$\|\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{[k](j)}\|_2 \le \frac{q_\sigma^{k-1}}{1 - q_\sigma}\sigma_j \sum_{i=0}^{n} l_j \|\mathbf{z}_i\|, \tag{9.27}$$

$$0 \le j \le n, \;\; k = 1, 2, ...; \;\; \mathbf{x}^{[0]} = 0.$$

9.4. Признак асимптотической устойчивости периодического решения. Для приложений весьма важна приводимая ниже теорема, восходящая к круговым критериям, итальянского математика Дж. Бонжиорно.

Теорема 9.3. *Если в условиях теоремы* 9.1 *операторный характеристический многочлен $\mathbf{L}_n(\lambda)$ не только является нерезо-*

нансным, но и является гурвицевым, то единственное ω – периодическое решение уравнения (9.4) *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Эта теорема дополняет различные признаки асимптотической устойчивости, указанные в известной монографии В.А. Якубовича, В.М. Старжинского [62, с. 118-136].

10. Линейное векторно-операторное дифференциальное уравнение n–го порядка с почти периодическими коэффициентами, не разрешённое относительно старшей производной

10.1. Равенство Парсеваля. Норма Безиковича. В комплексном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ рассмотрим линейное однородное векторно-операторное дифференциальное уравнение n-го порядка, не разрешённое относительно старшей производной, и имеющее следующий вид

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}^{(j)}, \qquad (10.1)$$

где $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{A}_n$ – постоянные линейные ограниченные операторы, действующие в $\mathbb{H}$, причём оператор $\mathbf{A}_0$ непрерывно обратим, $\mathbf{A}_0^{-1} \in End\,\mathbb{H}$, а операторные функции $\mathbf{B}_j(t) : \mathbb{R} \to End\,\mathbb{H}$:

(сильно) почти периодические операторные функции, (10.2)

$$\|\mathbf{B}_j(t)\| \le l_j, \qquad -\infty < t < +\infty, \qquad 0 \le j \le n; \qquad (10.3)$$

где $l_0, l_1, ..., l_{n-1}, l_n$ – некоторые неотрицательные постоянные.

Основное внимание будет обращено на линейное неоднородное векторно-операторное дифференциальное уравнение n-го порядка, не разрешённое относительно старшей производной,

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}^{(j)} + \mathbf{f}(t). \quad (10.4)$$

Относительно векторной функции $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ предположим, что

$$\mathbf{f}(t) \text{ – почти периодическая векторная функция.} \quad (10.5)$$

Отметим, что в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ для почти периодических функций $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ справедливо равенство Парсеваля: если ряд Фурье почти периодической векторной функции $\mathbf{f}(t)$ имеет вид

$$\mathbf{f}(t) \sim \sum_k \mathbf{f}_k \exp i\lambda_k t, \quad (10.6)$$

то

$$\llbracket \mathbf{f} \rrbracket^2 = M\left\{(\mathbf{f}(t), \mathbf{f}(t))\right\} = \sum_k \|\mathbf{f}_k\|^2. \quad (10.7)$$

Норму $\llbracket \cdot \rrbracket$ назовём *нормой Безиковича.* Пространство $\mathbb{P}$ почти периодических векторных функций $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ со скалярным произведением $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = M\left\{(\mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t))\right\}$ образует пространство со скалярным произведением – предгильбертово пространство, гильбертовым пространством оно, к сожалению, не является. Пополнение по стандартной процедуре, приводит к мало известным функциям Безиковича.

10.2. Теорема существования и единственности. Эта теорема демонстрирует, насколько естественна и удобна в почти периодическом случае норма Безиковича (см. (10.7)).

Теорема 10.1. *Пусть операторный характеристический многочлен* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ из (9.8) *является нерезонансным. Пусть операторные функции* $\mathbf{B}_j(t)$ *являются (сильно) почти периодическими* *(см.* (10.2)) *и вместо условия* (10.3) *пусть выполнено частотное условие* (9.10).

Тогда для любой векторной почти периодической функции $\mathbf{f}(t)$ *уравнение* (10.4) *имеет единственное почти периодическое решение* $\mathbf{x}(t)$ *(других ограниченных решений* (10.4) *не имеет). Производные* $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)$ *этого решения также являются почти периодическими и имеют место следующие оценки*

$$\square\mathbf{x}^{(j)}\square_2 \leq \frac{\sigma}{1-q_\sigma}\square\mathbf{f}\square, 0 \leq j \leq n. \tag{10.8}$$

Эта теорема доказывается по той же схеме, что и теорема 9.1, с тем единственным отличием, что теперь пространство, в котором изучается система линейных интегральных уравнений, не является полным. Как эта трудность преодолевается, мы узнаем ниже.

10.3. Общий случай. В комплексном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ рассмотрим линейное однородное векторно-операторное дифференциальное уравнение n-го порядка, не разрешённое относительно старшей производной, и имеющее следующий вид

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{n}\mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}^{(j)} \tag{10.9}$$

при прежних предположениях относительно постоянных коэффициентов $\mathbf{A}_j \in End\,\mathbb{H}$ при $0 \leq j \leq n$, в котором операторные функции $\mathbf{B}_j(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ (сильно) непрерывные или измеримые ограниченные, причём

$$\|\mathbf{B}_j(t)\| \leq l_j, \qquad -\infty < t < +\infty, \qquad 0 \leq j \leq n; \tag{10.10}$$

где $l_0, l_1, ..., l_{n-1}, l_n$ – некоторые неотрицательные постоянные.

Основное внимание будет обращено на линейное неоднородное векторно-операторное дифференциальное уравнение n-го порядка, не разрешённое относительно старшей производной

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)}+\mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)}+...+\mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}}+\mathbf{A}_n\mathbf{x}=\sum_{j=0}^{n}\mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}^{(j)}+\mathbf{f}(t), \quad (10.11)$$

в котором непрерывная или измеримая векторная функция $\mathbf{f}(t):\mathbb{R}\to\mathbb{H}$ является ограниченной

$$\|\mathbf{f}(t)\|\leq c, \qquad -\infty<t<+\infty, \quad (10.12)$$

где c – некоторая неотрицательная постоянная.

10.4. Основная теорема.

Теорема 10.2. *Пусть операторный характеристический многочлен $\mathbf{L}_n(\lambda)$ является нерезонансным. Пусть операторные функции $\mathbf{B}_j(t)$ являются (сильно) измеримыми и ограниченными, причём вместо условия* (10.10) *пусть выполнено частотное условие.*

Тогда неоднородное дифференциальное уравнение (10.11) *при любой измеримой и ограниченной векторной функции $\mathbf{f}(t)$ имеет единственное ограниченное решение $\mathbf{x}(t)$. При этом ограниченными являются все производные $\mathbf{x}(t),\dot{\mathbf{x}}(t),...,\mathbf{x}^{(n-1)}(t),\mathbf{x}^{(n)}(t)$ и справедливы оценки*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_\infty\leq c_j\|\mathbf{f}\|_\infty, \qquad 0\leq j\leq n, \quad (10.13)$$

где $c_0,c_1,...,c_{n-1},c_n$ – некоторые положительные постоянные, определяемые линейной частью уравнения (10.11) *с постоянными коэффициентами (точнее частотными постоянными $\sigma_0,\sigma_1,...,\sigma_{n-1},\sigma_n$) и липшицевыми постоянными $l_0,l_1,...,l_{n-1},l_n$.*

Вопрос о явном виде постоянных c_j – это старый и больной вопрос в теории ограниченных решений; он ещё ждёт своей точной постановки и своего решения; тем более преждевременным становится вопрос о точности ещё не полученных оценок!

Этот результат – речь идёт о теореме 10.2 – сразу же нашёл применение для липшицевых нелинейных дифференциальных уравнений.

Глава 2. Нелинейная теория

11. Распространение основной теоремы на нелинейную теорию

11.1. Единственность. Результаты опубликованы в работе Е.В. Ивановой [18]. Пусть нелинейное дифференциальное уравнение (5.1) имеет два ограниченных решения $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$. Обозначим их разность через $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)$. Согласно (5.1) можно написать

$$\mathbf{A}_0\mathbf{z}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{z}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{A}_n\mathbf{z} = \mathbf{g}(t), \tag{11.1}$$

где

$$\begin{gathered}\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)) - \\ -\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t), ..., \mathbf{y}^{(n-1)}(t), \mathbf{y}^{(n)}(t)).\end{gathered} \tag{11.2}$$

Это есть измеримая функция и в силу условия Липшица (5.6) ограниченная функция (мы предположим, что рассматриваемые решения являются ограниченными вместе с производными до порядка n включительно). Представим функции (11.2) в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)) - \\ -\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)) + \\ + \sum_{j=1}^{n-1}\{\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), ..., \mathbf{y}^{(j-1)}(t), \mathbf{x}^{(j)}(t), \mathbf{x}^{(j+1)}(t), ..., \mathbf{x}^{(n)}(t)) - \\ -\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), ..., \mathbf{y}^{(j-1)}(t), \mathbf{y}^{(j)}(t), \mathbf{x}^{(j+1)}(t), ..., \mathbf{x}^{(n)}(t))\} + \\ +\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), ..., \mathbf{y}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)) - \\ -\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), ..., \mathbf{y}^{(n-1)}(t), \mathbf{y}^{(n)}(t)).\end{gathered} \tag{11.3}$$

Для удобства пометим эту разность так:

$$\mathbf{g}(t) = \triangle_0\mathbf{g}(t) + \sum_{j=1}^{n-1} \triangle_j\mathbf{g}(t) + \triangle_n\mathbf{g}(t). \qquad (11.4)$$

Положим для краткости

$$\triangle_j\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}^{(j)}(t) - \mathbf{y}^{(j)}(t), \qquad 0 \le j \le n. \qquad (11.5)$$

В силу условия Липшица (5.6) получаем

$$\|\triangle_j\mathbf{g}(t)\| \le l_j\|\triangle_j\mathbf{g}(t)\|, \qquad 0 \le j \le n. \qquad (11.6)$$

Введём в рассмотрение операторные функции $\mathbf{B}_j(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$, положив

$$\mathbf{B}_j(t)h \;=\; \begin{cases} \dfrac{(h, \triangle_j\mathbf{z}(t))}{(\triangle_j\mathbf{z}(t), \triangle_j\mathbf{z}(t))}\triangle_j\mathbf{g}(t), & \text{если} \;\; \triangle_j\mathbf{z}(t) \neq 0, \\ 0, & \text{если} \;\; \triangle_j\mathbf{z}(t) = 0, \end{cases} \qquad (11.7)$$

$$0 \le j \le n.$$

Мы видим, что при каждом j операторные функции $\mathbf{B}_j(t)$ измеримы по t,

$$\|\mathbf{B}_j(t)\| \le l_j \;\; \text{в силу (11.6)}, \qquad (11.8)$$

$$\mathbf{B}_j(t)\mathbf{z}^{(j)}(t) \le \triangle_j\mathbf{g}(t), \qquad 0 \le j \le n, \qquad (11.9)$$

и уравнение (11.1) принимает вид уравнения (10.9). Поэтому $\mathbf{z}(t)$ (как ограниченное решения однородного уравнения (10.9)) в силу основной теоремы 10.2 тождественно равно нулю, откуда вытекает, что $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{y}(t)$, и теорема единственности установлена.

11.2. Оценка ограниченного решения в условиях Липшица. Основная теорема 10.2 нам ещё послужит. Предположим, что существование ограниченного решения уравнения (5.1) в условиях

Липшица (5.6) нами уже установлено. Пусть $\mathbf{x}(t)$ есть ограниченное решение уравнения (5.1). По теореме в статье И.Д. Коструб [22] (см. также А.И. Перов [37] или А.И. Перов [38]) в этом случае все производные $\dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)$ также являются ограниченными, при этом существенно используется частотное условие $q_\sigma < 1$, а также вытекающее из него неравенство $\sigma_n l_n < 1$. Поэтому в силу условия типа Липшица (7.1) измеримая функция

$$\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)) \tag{11.10}$$

является ограниченной

$$\|\mathbf{f}(t)\| \leq \sum_{j=0}^{n} l_j \|\mathbf{x}^{(j)}\| + a. \tag{11.11}$$

Запишем $\mathbf{f}(t)$ в виде

$$\mathbf{f}(t) = \triangle_0 \mathbf{f}(t) + \sum_{j=1}^{n-1} \triangle_j \mathbf{f}(t) + \triangle_n \mathbf{f}(t), \tag{11.12}$$

или подробнее

$$\begin{gathered}
\mathbf{f}(t) = \\
= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)) - \\
- \mathbf{f}(t, 0, \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)) + \\
+ \sum_{j=1}^{n-1} \{ \mathbf{f}(t, 0, ..., 0, \mathbf{x}^{(j)}(t), \mathbf{x}^{(j+1)}(t), ..., \mathbf{x}^{(n)}(t)) - \\
- \mathbf{f}(t, 0, ..., 0, 0, \mathbf{x}^{(j+1)}(t), ..., \mathbf{x}^{(n)}(t)) \} + \\
+ \mathbf{f}(t, 0, 0, ..., 0, \mathbf{x}^{(n)}(t)) - \\
- \mathbf{f}(t, 0, 0, ..., 0, 0).
\end{gathered} \tag{11.13}$$

Если выполнено условие Липшица (5.6), то

$$\|\triangle_j \mathbf{f}(t)\| \leq l_j \|\mathbf{x}^{(j)}(t)\|, \qquad 0 \leq j \leq n. \tag{11.14}$$

Введём в рассмотрение операторные функции $\mathbf{B}_j(t) : \mathbb{R} \to End\ \mathbb{H}$, положив

$$\mathbf{B}_j(t)h \;=\; \begin{cases} \dfrac{(h, \mathbf{x}^{(j)}(t))}{(\mathbf{x}^{(j)}(t), \mathbf{x}^{(j)}(t))} \triangle_j \mathbf{f}(t), & \text{если } \ \mathbf{x}^{(j)}(t) \neq 0, \\ \qquad 0, & \text{если } \ \mathbf{x}^{(j)}(t) = 0, \end{cases} \qquad (11.15)$$

$$0 \le j \le n.$$

Мы видим, что при каждом j операторная функция $\mathbf{B}_j(t)$ измерима по t и является ограниченной

$$\|\mathbf{B}_j(t)\| \le l_j \qquad (11.16)$$

в силу (11.4). И – самое главное! –

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}^{(j)}(t) + \mathbf{f}_0(t). \qquad (11.17)$$

Потому по основной теореме 10.2 справедлива оценка

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_\infty \le c_j \|\mathbf{f}_0\|_\infty, \qquad 0 \le j \le n. \qquad (11.18)$$

Центральная идея последних наших двух пространных рассуждений заключалась в том, чтобы ограниченные решения нелинейного дифференциального уравнения (5.1) всеми правдами и неправдами старались интерпретироваться как ограниченные решения некоего линейного дифференциального уравнения вида (10.9) или (10.11), возможно с весьма экзотическими коэффициентами $\mathbf{B}_j(t)$, $\ -\infty < t < +\infty$, $\ 0 \le j \le n$. Это, кстати сказать, объясняет, почему мы вынуждены были вести наши рассуждения в условиях Каратеодори. Наши рассуждения – возвращаясь к началу этого абзаца – можно истолковать как применение и дальнейшее развитие "принципа линейного включения" Б.Ф. Былова, Д.М. Гробмана (см. Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, В.В. Немыцкий [4, с. 157-159]).

Отметим явно, в чём мы видим дальнейшее развитие "принципа линейного включения":

1) "принцип линейного включения" распространяется на дифференциальные уравнения высшего порядка;

2) никакой гладкости (как в лемме Адамара) дополнительно не требуется;

3) "принцип линейного включения" распространяется на дифференциальные уравнения в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

11.3. Оценка ограниченного решения в условиях типа Липшица. Пусть $\mathbf{x}(t)$ есть ограниченное решение нелинейного дифференциального векторно-операторного уравнения (5.1). Попробуем придать тождеству

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} =$$

$$= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)) \qquad (11.19)$$

следующий вид

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}^{(j)} + \mathbf{f}_0(t), \qquad (11.20)$$

где операторные измеримые ограниченные функции $\mathbf{B}_j(t) : \mathbb{R} \to End\mathbb{H}$ и измеримая ограниченная векторная функция $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ таковы, что

$$\|\mathbf{B}_j(t)\| \le l_j, \qquad 0 \le j \le n; \qquad \mathbf{f}_0(t) \le a \qquad (11.21)$$

(постоянные $l_0, l_1, ..., 1_{n-1}, l_n$ и a взяты из условия типа Липшица (7.1)).

Если это удастся сделать, то ограниченное решение нелинейного уравнения (11.19) будет одновременно и ограниченным решением линейного уравнения (11.20), что в силу основной теоремы 10.2 согласно формуле (11.21) влечёт оценку (10.13).

Итак, пусть $\mathbf{x}(t)$ есть ограниченное решение нелинейного дифференциального уравнения (11.19). Как мы об этом уже говорили выше, в этом случае будут ограниченными все производные $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)$. Рассмотрим векторную функцию $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$, где

$$\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)). \tag{11.22}$$

Из формулы (11.22) в силу условия типа Липшица (7.1) получим

$$\|\mathbf{f}(t)\| \leq \sum_{j=0}^{n} l_j \|\mathbf{x}^{(j)}(t)\| + a \equiv \mathbf{r}(t). \tag{11.23}$$

Введём в рассмотрение операторные функции $\mathbf{B}_j(t)$ и векторную функцию $\mathbf{f}_0(t)$, положив

$$\mathbf{B}_j(t)h = \begin{cases} \dfrac{(h, \mathbf{x}^{(j)}(t))}{\|\mathbf{x}^{(j)}(t)\|} \dfrac{l_j}{\mathbf{r}(t)} \mathbf{f}(t), & \text{если } \mathbf{x}^{(j)}(t) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \mathbf{x}^{(j)}(t) = 0, \end{cases} \tag{11.24}$$

$$\mathbf{f}_0(t) = \frac{a}{\mathbf{r}(t)} \mathbf{f}(t). \tag{11.25}$$

Операторная функция $\mathbf{B}_j(t)$ измерима (она равна нулевому оператору из $End\,\mathbb{H}$ на измеримом (замкнутом в непрерывном случае) множестве нулей производной $\mathbf{x}^{(j)}(t)$) и непрерывна в операторной топологии на дополнительном (открытом в непрерывном случае) множестве. Далее, если $\mathbf{x}^{(j)}(t) \neq 0$, то

$$\|\mathbf{B}_j(t)h\| = \frac{|(h, \mathbf{x}^{(j)}(t))| l_j}{\|\mathbf{x}^{(j)}(t)\| \mathbf{r}(t)} \|\mathbf{f}(t)\| \leq \frac{\|h\| \|\mathbf{x}^{(j)}(t)\|}{\|\mathbf{x}^{(j)}(t)\|} \frac{l_j}{\mathbf{r}(t)} \|\mathbf{f}(t)\| =$$

$$= \|h\| \frac{l_j}{\mathbf{r}(t)} \|\mathbf{f}(t)\| \le l_j \|h\|, \quad \|\mathbf{B}_j(t)h\| \le l_j, \quad 0 \le j \le n \tag{11.26}$$

и первое требование в (11.21) выполнено ($\|\mathbf{f}(t)\| \le \mathbf{r}(t)$ вытекает из (11.23)). Далее, из равенства (11.25) в силу формулы (11.23) имеем $\|\mathbf{f}_0(t)\| \le a\|\mathbf{f}(t)\|/\mathbf{r}(t) \le a$ – и второе требование в (11.21) также выполнено.

Проверим требуемые равенства

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}^{(j)} + \mathbf{f}_0(t). \tag{11.27}$$

Формулы (11.24), (11.25) и определение $\mathbf{r}(t)$ из (11.23) дают нам

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}^{(j)} + \mathbf{f}_0(t) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(\mathbf{x}^{(j)}(t), \mathbf{x}^{(j)}(t))}{\|\mathbf{x}^{(j)}(t)\|} \frac{l_j}{\mathbf{r}(t)} \mathbf{f}(t) + \frac{a}{\mathbf{r}(t)} \mathbf{f}(t) =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{n} \|\mathbf{x}^{(j)}(t)\| l_j + a \right) \frac{\mathbf{f}(t)}{\mathbf{r}(t)} = \mathbf{f}(t).$$

Литература

1. Басит Б.Р. Обобщённая теорема Бора – Нойгебауэра / Б.Р. Басит, Л. Ценд // Дифференциальные уравнения. – 1972. – Т. 8, № 8. – С. 1343–1348.

2. Баскаков А.Г. Об обратимости оператора $d/dt - \mathbf{A}(t)$ в некоторых функциональных пространствах / А.Г. Баскаков // Функциональный анализ и его приложения. – 1996. – Т. 30, № 3. – С. 1–11.

3. Баскаков А.Г. Оценки ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений / А.Г. Баскаков // Дифференциальные уравнения. – 2003. – Т. 39, № 3. – С. 413–415.

4. Беллман Р. Введение в теорию матриц / Р. Беллман. – М. : Наука, 1969. – 368 с.

5. Беллман Р. Дифференциально – разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук. – М. : Мир, 1967. – 548 с.

6. Боровских А.В. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А.В. Боровских, А.И. Перов. – Москва – Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотичная динамика" , Институт компьютерных исследований, 2004. – 540 с.

7. Теория показателей Ляпунова и её приложение к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов и др. ; под ред. Б.Ф. Былова. – М. : Наука, 1966. – 576 с.

8. Вязанкина М.И. Об одной теореме существования и единственности периодического решения нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка / М. И. Вязанкина // Материалы Воронежской зимней математической школы. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013. – С. 46–47.

9. Вязанкина М.И. Об одной нелинейном дифференциальном уравнении, не разрешённом относительно старшей производной / М.И. Вязанкина // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. – Тамбов, 2013. – Т. 18, № 5. – С. 2475–2477.

10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М. : Наука, 1967. – 576 с.

11. Глазман И.М. Конечномерный линейный анализ / И.М. Глазман, Ю.И. Любич. – М. : Наука, 1969. – 476 с.

12. Далецкий Ю.Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 536 с.

13. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н.Данфорд, Дж.Т.Шварц. – М. : Иностранная литература, 1962. – Т. 1. – 896 с.

14. Зубов В.И. Теория колебаний / В.И. Зубов. – М. : Высшая школа, 1979. – 400 с.

15. Иванова Е.В. Ограниченные решения нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка, не разрешённого относительно старшей производной / Е. В. Иванова // Материалы Воронежской весенней математической школы. – Воронеж, 2012. – С. 46–47.

16. Иванова Е.В. Об одном признаке конвергентности. Современные методы теории функций и смежные проблемы / Е.В. Иванова // Материалы Воронежской зимней математической школы. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр, Воронежский государственный университет, 2013. – С. 107 – 108.

17. Иванова Е.В. Свойства логарифмической выпуклости последовательности L_2-норм производных периодических функций / Е.В. Иванова // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. – Тамбов, 2013. – Т. 18, № 5. – С. 2536–2538.

18. Иванова Е.В. Частотные признаки существования ограниченных решений / Е. В. Иванова // Материалы Воронежской весенней математической школы. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга" , 2014. – С. 73 – 75.

19. Канторович Л.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М. : Физматлит, 1950. – 634 с.

20. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н.Н. Красовский. – М. : Физматлит, 1959. – 212 с.

21. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М. : Наука, 1968. – 496 с.

22. Коструб И.Д. Неравенства типа Ландау-Адамара для гладких векторных функций и теорема Эсклангона для нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка / И.Д. Коструб // Вестник факультета ПММ. – 2010. – № 8. – С. 233–243.

23. Коструб И.Д. Ограниченные решения нелинейных дифференциальных уравнений (существование и единственность периодических, почти – периодических и ограниченных решений, а также их устойчивость) / И.Д. Коструб, А.И. Перов. – Saarbrucken : LAP (Lambert Academic Publishing), 2012. – 162 с.

24. Красносельский М.А. Об одном принципе существования ограниченных, периодический и почти периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений / М.А. Красносельский, А.И. Перов // ДАН СССР, 1958. – Т. 123, № 2. – С. 235–238.

25. Красносельский М.А. Нелинейные почти периодические колебания / М. А. Красносельский, В.Ш. Бурд, Ю.С. Колесов. – М. : Наука, 1970. – 352 с.

26. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. – М. : Наука, 1967. – 464 с.

27. Левитан Б.М. Почти – периодические функции / Б.М. Левитан. – М. : ГИТТЛ, 1953. – 396 с.

28. Левитан Б.М. Почти – периодические функции и дифференциальные уравнения / Б.М. Левитан, В.В. Жиков. – М. : Издательство МГУ, 1978. – 208 с.

29. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М. : Наука, 1965. – 520 с.

30. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций / А.И. Маркушевич. – Москва – Ленинград. : ГИТТЛ, 1950. – 704 с.

31. Массера Х.Л. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства / Х.Л. Массера, Х.Х. Шеффер. – М. : Мир, 1970. – 456 с.

32. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / Мышкис А.Д. – Москва : Наука, 1962. – 352 с.

33. Ортега Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М. : Мир, 1975. – 360 с.

34. Перов А.И. Обобщённый принцип сжимающих отображений / А.И. Перов // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика. – Воронеж, 2005. – № 1. – С. 190–201.

35. Перов А.И. Частотные признаки существования ограниченных решений / А.И. Перов // Дифференциальные уравнения, 2007. – Т. 43, № 7. – С. 896 – 904.

36. Перов А.И. Принцип сжимающих отображений в теории нелинейных колебаний / А.И. Перов. – Воронеж : Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2005. – 63 с.

37. Перов А.И. О лемме Адамара и условии Липшица / А.И. Перов // Известия вузов, 2009. – № 12. – С. 36 – 48.

38. Перов А.И. Неравенства типа Ландау-Адамара для гладких векторных функций / А.И. Перов // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Физика. Математика. – Воронеж, 2010. – № 1. – С. 159 – 161.

39. Перов А.И. Частотные методы в теории ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка (существование, почти периодичность, устойчивость) / А.И. Перов // Дифференциальные уравнения, 2012. – Т. 48, № 5. – С. 663 – 673.

40. Об ограниченных решениях дифференциальных уравнений n-го порядка / А.И. Перов и др // Труды молодых учёных ВГУ, 2004. – Вып. 2. – С. 14 – 21.

41. Перов А.И. Детерминантный признак сжатия. Современные методы теории функций и смежные вопросы / А.И. Перов, Т.С. Грязнова // Воронеж: Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2013. – С. 183 – 184.

42. Перов А.И. Ограниченные решения векторно-операторных нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка, не разрешённых относительно старшей производной / А.И. Перов, Е.В. Иванова // Вестник Воронежского государственного университета, Серия физика, математика. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2012. – Выпуск 2. – С. 198 – 206.

43. Перов А.И. Метод направляющих функций / А.И. Перов, В.К. Евченко. – Воронеж : Издательско- полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2012. – 1182 с.

44. Перов А.И. Ограниченные решения нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка (æ-теория) / А.И. Перов, И.Д. Коструб // Препринт № 36, май 2011 г. – Воронеж, Воронежский государственный университет, 2011. – 50 с.

45. Перов А.И. Ограниченные решения нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка / А.И. Перов, И.Д. Коструб. – Воронеж : Научная книга, 2013. – 228 с.

46. Перов А.И. Принцип неподвижной точки Тихонова и ограниченные решения нелинейных дифференциальных уравнений / А.И. Перов, И.Д. Коструб, Е.В. Иванова // Fourth International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications Dedicated to Ya.B. Lopatinskii : book of abstracts, 14–17 November 2012, Donetsk, Ukraine. – Donetsk, 2012. – С. 61 – 62.

47. Перов А.И. Ограниченные решения нелинейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и теорема Тихонова о неподвижной точке / А.И. Перов, И.Д. Коструб, Е.В. Иванова // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений : Международная конференция, посвящённая 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия, 18–24 августа 2013 г. – Новосибирск, 2013. – 214 с.

48. Перов А.И. Ограниченные решения нелинейных дифференциальных уравнений и теорема Тихонова о неподвижной точке / А.И. Перов, И.Д. Коструб, Е.В. Иванова // Препринт № 48, июль 2014. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2014. – 51 с.

49. Плисс В.А. Нелокальные проблемы теории колебаний / В.А. Плисс. – Л. : Наука, 1964. – 366 с.

50. Понтрягин М.С. Дифференциальные уравнения / М.С. Понтрягин. – М. : Наука, 1970. – 332 с.

51. Понтрягин М.С. Непрерывные группы / М.С. Понтрягин. – М. : Наука, 1973. – 520 с.

52. Рид М. Методы современной математической физики, Том 2 / М. Рид, Б. Саймон. – М. : Мир, 1978. – 400 с.

53. Розенвассер Е.Н. Колебания нелинейных систем : метод интегральных уравнений / Е.Н. Розенвассер. – М. : Наука, 1973. – 520 с.

54. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление / Я.Н. Ройтенберг. – М. : Наука, 1971. – 396 с.

55. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Дж. Сансоне. – М. : Иностранная литература, 1954. – 415 с.

56. Тихонов А.Н. Ein Fixpunktsatz / А.Н. Тихонов // Math. Ann., 1935. – № 3 – С. 767 – 776.

57. Трубников Ю.В. Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями / Ю.В. Трубников, А.И. Перов. – Минск : Наука и техника, 1980. – 200 с.

58. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М. : Мир, 1970. – 720 с.

59. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. – М. : Иностранная литература, 1962. – 832 с.

60. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. – М. : Мир, 1964. – 480 с.

61. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения / Р. Эдвардс. – М. : Мир, 1969. – 1072 с.

62. Якубович В.А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В.А. Якубович, В.М. Старжинский. – М. : Наука, 1972. – 720 с.