

На правах рукописи



Мишин Максим Юрьевич

Математическое моделирование многоцелевых систем с гистерезисными характеристиками

специальность 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж 2014

Работа выполнена на кафедре высшей математики Воронежского государственного архитектурно – строительного университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор **СЕМЕНОВ Михаил Евгеньевич**

Официальные оппоненты: **СОБОЛЕВ Владимир Андреевич**, доктор физико-математических наук, профессор, Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет), кафедра технической кибернетики, профессор

СЕРБУЛОВ Юрий Стефанович, доктор технических наук, профессор, Воронежская государственная лесотехническая академия, кафедра вычислительной техники и информационных систем, профессор

Ведущая организация: ФГУП «Институт точной механики и вычислительной техники имени С.А. Лебедева РАН» (г. Москва)

Защита состоится 11 февраля 2015 года в 17:00 на заседании совета Д212.038.20 при ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская площадь, д.1, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Воронежский Государственный университет», полный текст размещён по адресу: <http://www.science.vsu.ru/>

Автореферат разослан « » декабря 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
доцент



Шабров Сергей Александрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Гистерезисные эффекты проявляются в различных областях естествознания: физике, механике, биологии, химии, экономике и т. д. Поэтому для адекватного и максимально точного моделирования процессов из упомянутых областей гистерезисные явления должны учитываться. Возможность формального описания гистерезисных преобразователей основывается на развитой М.А. Красносельским и его учениками операторной трактовке этих преобразователей как операторов, определённых на соответствующих функциональных пространствах, зависящих от своего начального состояния, как от параметра. Их динамика описывается двумя соотношениями: вход-состояние и состояние-выход. Свойства систем с гистерезисом существенно отличаются от свойств систем с функциональными нелинейностями. Это объясняется сложностью и нелинейной структурой пространства состояний гистерезисных преобразователей. Кроме того, математические модели гистерезисных преобразователей, как правило, не являются гладкими, что затрудняет применение классических методов для анализа соответствующих систем. Особое место среди систем с гистерезисными свойствами играют экономические системы. Наличие гистерезисных явлений в экономике отмечалось, начиная с 50х годов прошлого века. Однако, формальное описание в рамках теории систем гистерезисные явления в экономике получили лишь в последние десятилетия. Это объясняется многими причинами, одна из которых заключается в принципиальном отсутствии возможности проведения экспериментов, в отличие от технических областей. Поэтому математическое моделирование экономических систем с гистерезисными свойствами остаётся единственным способом изучения и анализа этих систем. В частности, гистерезисный механизм ценообразования, описанный на эвристическом уровне во многих работах, к настоящему времени не получил должного формального описания на уровне математических моделей. Также хорошо известен гистерезисный характер спроса в зависимости от соотношения цены товара и покупательской способности. Однако, математические модели, описывающие это отношение к настоящему времени не разработаны. Как следствие, не решены задачи, связанные с оптимизацией производственно-ценовой стратегии в условиях гистерезисного поведения экономических субъектов, задача оптимального функционирования производящих компаний в условиях гистерезисного ценообразования и конкуренции. Эти обстоятельства обуславливают актуальность темы диссертации.

Диссертационная работа выполнена в рамках научного направления кафедры Высшей математики Воронежского государственного архитектурно-строительного университета № г.р. 01200003664.

Цель работы. Разработка методов моделирования многоцелевых систем с гистерезисными свойствами на примере экономической предметной области.

Достижение указанной цели осуществлялось решением следующих задач:

- разработка и исследование дискретной и непрерывной моделей равновесной

динамики систем с учётом гистерезисных свойств;

- разработка численных и аналитических методов оптимизации систем, содержащих звенья гистерезисной природы;
- оптимизация конкурентного функционирования производственных компаний в условиях гистерезисного поведения экономических агентов;
- разработка численных методов моделирования равновесной динамики систем с гистерезисными свойствами, оптимизация функционирования производственных компаний в условиях гистерезисного ценообразования, а также в условиях конкуренции и гистерезисного поведения экономических агентов;
- апробация и тестирование предложенных методик.

Объекты исследования — экономические системы с выраженными гистерезисными свойствами.

Предмет исследования — математические модели экономических систем и процессов с гистерезисными нелинейностями.

Методы исследования. При выполнении работы использовались методы математического моделирования, операторная трактовка гистерезиса, качественная теория дифференциальных уравнений, теория автоматического регулирования, нелинейный анализ, численные методы решения дифференциальных уравнений.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты:

- модифицирована модель равновесной динамики систем с гистерезисными свойствами;
- предложен способ исследования моделей с гистерезисными звеньями на основе принципа оптимального управления;
- разработан алгоритм оптимального конкурентного функционирования систем, содержащих звенья гистерезисной природы на примере оптимизации стратегий экономических агентов с учётом гистерезисных свойств;
- синтезирована методика анализа многокритериальных оптимизационных динамических задач, включая задачи с функционалами, содержащими операторные гистерезисные нелинейности.

Область исследований. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки). Область исследования соответствует п.1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений, перечисленных в формуле специальности», п.2 «Разработка, исследование и обоснование математических объектов, перечисленных в формуле специальности», п.5 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента».

Практическая значимость работы. Разработанные в работе модели и методы анализа экономических систем с гистерезисными свойствами позволяют повысить адекватность формального математического описания соответствующих систем, что, в свою очередь, послужит основой для более

точных и адекватных прогнозов. В частности, алгоритмы оптимизации производственной деятельности в условиях гистерезисного ценообразования позволят на этапе проектирования формировать оптимальную с точки зрения достижения максимальной прибыли ценовую и производственную стратегии. Также, предложенные алгоритмы оптимизации в условиях конкуренции позволят снизить риски и обеспечат устойчивое функционирование производственных (и не только) компаний в современных условиях.

На защиту выносятся:

- модификация модели равновесной динамики систем с гистерезисными свойствами;
- способ исследования моделей систем с гистерезисными звеньями на основе принципа оптимального управления;
- методика анализа многокритериальных оптимизационных динамических задач, охватывающая задачи с функционалами, содержащими операторные гистерезисные нелинейности.

Апробация работы. Основные результаты и положения диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах: международная научная конференция «Научное лето-2011» (г. Киев, 27 июля 2011), Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2011, г. Воронеж, 12-17 сентября 2011), III Всероссийская заочная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Молодёжь в современном мире: гражданский, творческий и инновационный потенциал» (г. Воронеж, 15 декабря 2011), Международная научно-практическая конференция «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий» (АЗММИТ-2012, г. Сочи, 3-9 мая 2012), «Понтрягинские чтения - XIII» в рамках XXVI Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач» (г. Воронеж, 3-9 мая 2012), Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования (ПМТУММ-2012, г. Воронеж, 11-16 сентября 2012), XIV Всероссийский Симпозиум по прикладной и промышленной математике (г. Великий Новгород, 29 сентября – 5 октября 2013).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приведены общая характеристика работы, обосновывается актуальность темы диссертации, сформулированы цель и задачи исследований, дана информация о научной новизне и практической значимости работы, приводится методика исследований.

В первой главе приведены примеры моделей систем из различных предметных областей, динамика которых описывается системами дифференциальных уравнений с гистерезисными нелинейностями. Описаны известные модели гистерезисных преобразователей, используемых в работе: неидеального реле, преобразователя Преисаха, *S*-преобразователя. Следуя

классическим схемам М.А. Красносельского и А.В. Покровского, гистерезисные операторы трактуются как преобразователи, определенные на пространстве непрерывных функций, динамика которых описывается соотношениями: вход-состояние и состояние-выход.

Приведём следующие уточняющие определения. Неидеальное реле – преобразователь $R[\alpha, \beta x_0]$ с пороговыми числами α и β . Пространством состояний неидеального реле является пара чисел $\{0,1\}$. Связь между входом $u(t) \in C_{[0,t]}$ и переменным состоянием, совпадающим с выходом $x(t)$ устанавливается оператором $R[\alpha, \beta x_0]$:

$$x(t) = R[\alpha, \beta, x_0]u(t), \quad (1)$$

здесь x_0 — начальное состояние преобразователя, которое удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} \text{если } U(0) \leq \alpha, \text{ то } x_0 = 0, \\ \text{если } U(0) \geq \beta, \text{ то } x_0 = 1, \\ \text{если } \alpha \leq U(0) \leq \beta, \text{ то } x_0 = 0 \text{ или } x_0 = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Ниже приводятся рисунки, иллюстрирующие динамику входно-выходных соответствий неидеального реле с отрицательным и положительным спином.

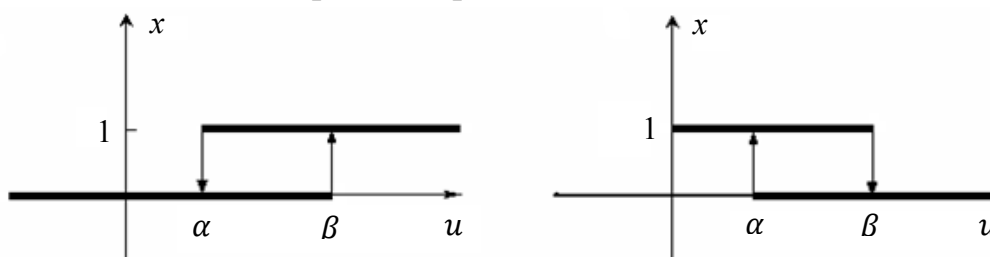


Рис. 1. Динамика входно-выходных соответствий

Преобразователь Прейсаха — континуальный аналог преобразователя, состоящего из неидеальных реле, соединенных параллельно. Пусть на полуплоскости $P_{\alpha, \beta} \equiv \{\alpha, \beta : \alpha < \beta\}$ определена мера $\mu_{\alpha, \beta}$, абсолютно непрерывная относительно лебеговой меры. Пусть ψ — класс ограниченных функций, заданных на неотрицательной полуоси и удовлетворяющих условию Липшица с коэффициентом равным единице.

Вводится в рассмотрение множество Ω_ψ скалярных функций $\omega(\alpha, \beta)$, заданных на полуплоскости $D_{\alpha, \beta} = \{\alpha, \beta : \alpha < \beta\}$, и таких, что:

$$\omega(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0, \text{ если } \alpha + \beta > \psi(\beta - \alpha), \\ 1, \text{ если } \alpha + \beta \leq \psi(\beta - \alpha), \end{cases} \quad (3)$$

где $\psi(v) \in \psi$. Множество Ω_ψ является пространством возможных состояний преобразователя Прейсаха.

Соотношение вход — переменное состояние преобразователя Прейсаха устанавливается оператором Γ :

$$\omega(\alpha, \beta, t) = \Gamma[\omega_0(\alpha, \beta)]u(t) = R[\omega_0(\alpha, \beta), \alpha, \beta]u(t), \quad (4)$$

причём выход преобразователя Γ определяется соотношением:

$$\xi(t) = \int_{\alpha < \beta} \omega(\alpha, \beta, t) d\mu_{\alpha, \beta} = \mu_{\alpha, \beta}(\{\alpha, \beta\}: R[\omega_0(\alpha, \beta), \alpha, \beta]u(t) = 1). \quad (5)$$

Приведём также описание S -преобразователя. Пусть $x(t) = S[u_0, x_0]u(t) (t \geq 0)$ и связь между выходом $x(t)$ и входом $u(t)$ устанавливается дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (6)$$

с начальными условиями:

$$u(0) = u_0,$$

$$x(0) = x_0.$$

Причём, линия уровня функции $f(x, u) = 0$ показана на рисунке 2.

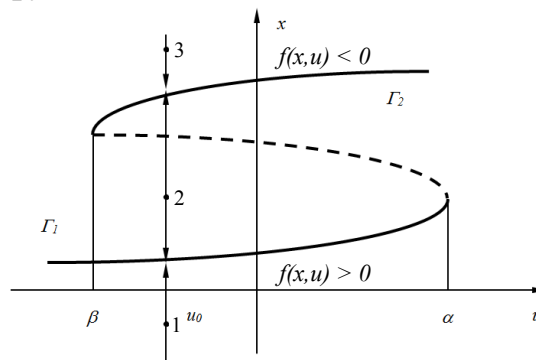


Рис. 2. Линия уровня функции $f(x, u) = 0$

Таким образом, в первой главе приведено описание ряда гистерезисных преобразователей, трактуемых как операторы, зависящие от своего начального состояния, как от параметра, и сопоставляющие всякому допустимому непрерывному входу единственный выход. Эти операторы используются в следующих разделах в качестве моделей различных гистерезисных явлений.

Во второй главе рассматривается гистерезисная модель из экономической предметной области, связанная с проблемой ценообразования. Традиционно, при математическом моделировании этой проблемы использовались либо паутино-образная модель в системах с дискретным временем, либо, в моделях с непрерывным временем, уравнение вида:

$$\dot{p} = \gamma[S(p) - D(p)], \quad (7)$$

где p – цена, $S(p)$ и $D(p)$ — функции спроса и предложения, γ — параметр, определяющий скорость стремления к равновесию. Модификацию модели предложено осуществить с использованием следующего математического объекта:

$$\begin{cases} \dot{p} = f(u, p), \\ \dot{u} = \gamma[S(p) - D(p)], \end{cases} \quad (8)$$

$f(u, p)$ — функция, определяющая S -преобразователем. При естественном

выборе функций $S(p)$ и $D(p)$ система (8) имеет единственный абсолютно устойчивый цикл, физическая трактовка которого соответствует современным представлениям о динамике ценообразования: цена совершает колебания в некоторой окрестности положения равновесия, соответствующего равенству спроса и предложения.

Обозначим через U поштучный поток товарных изделий, z – количество изделий у производителя с динамикой изменения:

$$\dot{z} = U - NQ \left[\frac{S(p)}{p} \right] \quad (9)$$

где N — количество потребителей, $S(p)$ — доход потребителей, $Q \left[\frac{S(p)}{p} \right]$ — функция потребления. Пусть V — количество товаров у потребителей, k — коэффициент потребления. Тогда динамика изменения этого параметра определяется уравнением:

$$\dot{V} = NQ \left[\frac{S(p)}{p} \right] - kV, \quad (10)$$

при этом, функция потребления определена так:

$$Q \left[\frac{S(p)}{p} \right] = q - a \frac{p}{S(p)}, \quad (11)$$

где q – максимальная потребность в изделиях в единицу времени.

Примем структуру функции предложения в виде:

$$D(p, z) = z \frac{p}{p_{cr}}, \quad (12)$$

и обозначим через p_0 себестоимость производства единицы изделия, а через k_1 — коэффициент затрат на хранение. Тогда прибыль на $[0; T]$ будет определяться соотношением

$$J(T) = \int_0^T (NpQ \left[\frac{S(p)}{p} \right] - Up_0 - k_1z) dt. \quad (13)$$

Сделано допущение $0 \leq U \leq U_0$, где U_0 — точная верхняя граница, определяемая технологическими возможностями. Сформулированная задача классифицирована как нестандартная задача оптимального управления, к которой всё ещё можно применить классический метод решения, связанный с использованием принципа максимума Л.С. Понтрягина. В этом случае, структура функции Гамильтона будет иметь вид:

$$H = NpQ \left[\frac{S(p)}{p} \right] - Up_0 - k_1z + \lambda_1 f(p, u) + \lambda_2 \gamma [S(p) - D(p)] + \\ + \lambda_3 \left[U - Q \left[\frac{S(p)}{p} \right] \right] + \lambda_4 \left[NQ \left[\frac{S(p)}{p} \right] - kV \right]. \quad (14)$$

При этом, оптимальное значение U будет определяться соотношением:

$$U^* = \operatorname{argmax}_U H, \quad (15)$$

и в силу линейности функции Гамильтона по U :

$$U^* = \begin{cases} U_0, & \text{если } \lambda_3 \geq p_0, \\ 0, & \text{если } \lambda_3 < p_0, \end{cases} \quad (16)$$

что позволяет сделать вывод о её релейном характере. Уравнения для сопряжённых переменных будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial p} = -N \left[q - a \frac{S(p)}{p} \right] z - N \frac{azS(p)}{p} - \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial p} - \lambda_2 \gamma \left[-\frac{azS(p)}{p^2} - \frac{z}{p_{cr}} \right] - \\ &\lambda_3 N \frac{azS(p)}{p^2} + \lambda_4 N \frac{azS(p)}{p^2}, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial u} = -\lambda_1 \frac{\partial f}{\partial u}, \\ \dot{\lambda}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial z} = -N \left[q - a \frac{S(p)}{p} \right] p + a - \lambda_2 \left[\left[q - a \frac{S(p)}{p} \right] + \frac{p}{p_{cr}} \right] + \lambda_3 N \left[q - a \frac{S(p)}{p} \right] - \\ &\lambda_4 N \left[q - a \frac{S(p)}{p} \right], \\ \dot{\lambda}_4 &= -\frac{\partial H}{\partial V} = k\lambda_4. \end{aligned} \quad (17)$$

Граничные условия, в силу условия трансверсальности, определяются как:

$$\lambda_i(T) = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (18)$$

В силу существенной нелинейности системы уравнений (9)-(18), её анализ проведён с помощью вычислительного эксперимента в среде *MatLab Simulink* с присоединенным к пакету специально разработанным приложением. Результаты её численного анализа при следующих значениях параметров: $\gamma = 0.1, k = 0.5, k_1 = 0.6, S = 5, q = 10, N = 10, U_0 = 3, T = 20, p_{cr} = 20$, и нулевых начальных условий для фазовых переменных и функции $f(u, p) = u - 1 - (p - 3)^3 + p$ показаны на рисунках 3-5.

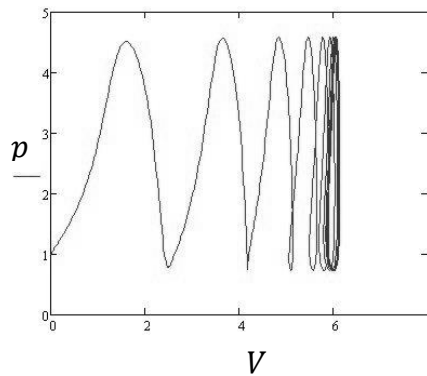


Рис. 3. Проекция фазового пространства на плоскость p, V

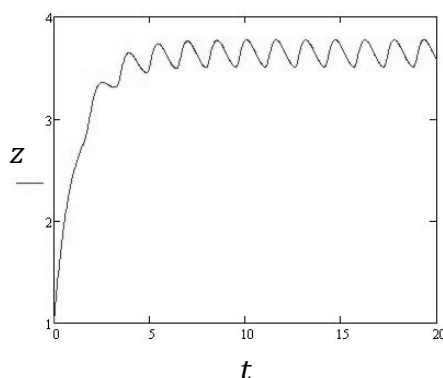


Рис. 4. Зависимость от времени количества товара у производителя

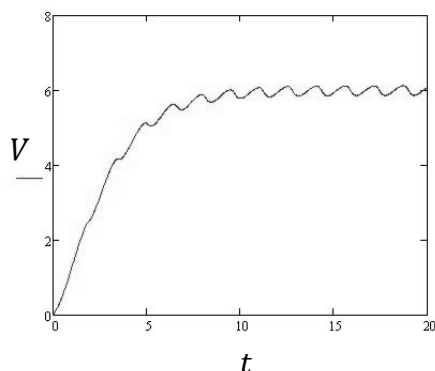


Рис. 5. Зависимость от времени количества товара у потребителей

Как видно из рисунков 3-5, на оптимальном режиме фазовые переменные после незначительного (по времени) переходного процесса выходят на устойчивый периодический режим. Оптимальное производство является релейным: принимает максимальное значение на начальном временном интервале и равно нулю на конечном.

В третьей главе изучается дискретная динамическая система:

$$\begin{aligned} x_n &= A(t)x_{n-1}(1 - y_{n-1}), \\ y_{n-1} &= \Gamma[\omega_0(\alpha, \beta)]\xi(t)|_{t=1}, \\ \xi(t) &= x_{n-2}(1 - t) + tx_{n-1} \quad (0 \leq t \leq 1). \end{aligned} \quad (19)$$

Эта система является математической моделью задачи равновесного ценообразования (в приближении Вальраса) и $A(t)$ — отношение суммарной мощности производства к суммарному потреблению, x_n — величина, обратно-пропорциональная цене, Γ — преобразователь Прејзаха, носитель меры которого сосредоточен в треугольнике на плоскости (α, β) , выделяемом неравенствами:

$$0 \leq \alpha \leq \beta \leq L. \quad (20)$$

Предполагается выполненным неравенство:

$$0 \leq A(t) \leq A_M(\alpha), \quad (21)$$

в котором $A_M(\alpha)$ соответствует максимально возможному для технологического уклада отношению суммарной мощности к потреблению. Увеличение параметра A означает увеличение производства по отношению к суммарному спросу.

Рассмотрим, как с увеличением этого параметра изменяется асимптотическое поведение траекторий динамической системы (19). Если $0 \leq A \leq 1$, то при любом начальном условии x_0 траектория системы (19) стремится к нулю. С содержательной точки зрения это означает, что производственных мощностей не хватает для удовлетворения спроса, при этом цена товара стремится к $+\infty$. При $A = 1$ происходит бифуркация, в результате которой неподвижная точка $x = 0$ становится неустойчивой, и рождается устойчивая (при A , близких к 1) неподвижная точка $x_p(A, \alpha)$. Известно, что для устойчивости неподвижной точки $x_p(A, \alpha)$ необходимо, чтобы

$$\left| \frac{\partial f(x, A, \alpha)}{\partial x} \right|_{x=x_p(A, \alpha)} \leq 1, \quad (22)$$

и достаточно, чтобы

$$\left| \frac{\partial f(x, A, \alpha)}{\partial x} \right|_{x=x_p(A, \alpha)} < 1. \quad (23)$$

Отсюда следует, что неподвижная точка $x_p(A, \alpha)$ устойчива при

$$1 < A < \frac{\alpha+2}{\alpha} = \frac{\gamma+3\mu}{\gamma+\mu} = A_1(\alpha) \quad (24)$$

и неустойчива при $A > A_1(\alpha)$. Поскольку

$$\left| \frac{\partial f(x, A_1(\alpha), \alpha)}{\partial x} \right|_{x=x_p(A, \alpha)} = -1 \quad (25)$$

то, при $A = A_1(\alpha)$, неподвижная точка $x_p(A, \alpha)$ теряет устойчивость в результате бифуркации Хопфа.

Результаты исследования динамической системы (19) при $\alpha = 1$ частично обобщаются на системы $x_{n+1} = F(x_n)$ с отрицательной производной Шварца

$$S(F(x)) = \frac{F'''(x)}{F'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{F''(x)}{F'(x)} \right)^2. \quad (26)$$

$$S(f(x, A, \alpha)) = \frac{\alpha(\alpha+1)(2(\alpha-1) + (\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha)x^{\alpha-2}}{2(1 - (\alpha+1)x^\alpha)^2} \quad (27)$$

Следовательно, $S(f(x, A, \alpha)) < 0$ при $x \in (0, 1] \setminus x_c$ и $\alpha \geq 1$.

На рисунке 6 изображено дерево бифуркаций, т.е. зависимость аттрактора от параметра A .

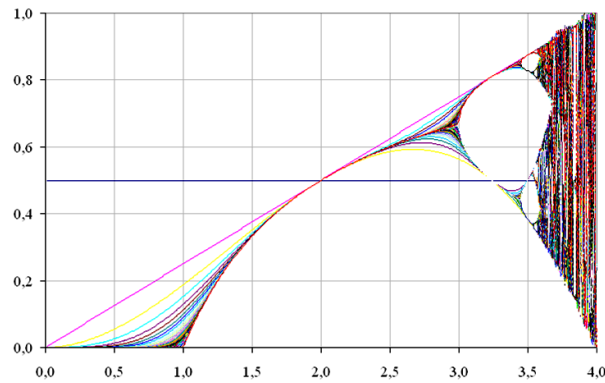


Рис. 6. Дерево бифуркаций

С увеличением параметра A динамика цен становится практически не прогнозируемой, и это обстоятельство препятствует деловой активности экономических субъектов.

В четвёртой главе рассматривается модель конкуренции в условиях гистерезисной функции спроса. В ней отношение индивидуального потребителя к изделию характеризуется неидеальным реле (1), входом на который будет цена изделия, а выход равен единице, если изделие приобретается, и нулю в противном случае. Для системы из n потребителей суммарное количество приобретаемых ими изделий будет определяться соотношением

$$P(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i R[\alpha_i, \beta_i, \omega_{0i}] p(t), \quad (28)$$

Коэффициенты γ_i имеют смысл и размерность количества изделий, приобретаемых потребителями в единицу времени, а в качестве $R[\alpha_i, \beta_i, \omega_{0i}]$ выбран преобразователь неидеального реле с отрицательным спином. В случае большого числа потребителей естественно перейти к непрерывному аналогу преобразователя (28) — преобразователю Прейзаха с инверсией нулей и единиц с мерой

$$d\mu = \gamma(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \quad (29)$$

Здесь функция $\gamma(\alpha, \beta)$ является аналогом коэффициентов γ_i в соотношении (28). В простейшем случае, задача о максимизации прибыли на конечном временном интервале (без учета затрат на хранение, производство, а также без учета конкуренции) сводится к максимизации функционала

$$Q(p(t)) = \int_0^T p(t) P(t) dt. \quad (30)$$

Пусть носитель меры $\mu(t)$ при любом t сосредоточен в треугольнике плоскости (α, β) , выделяемом системой неравенств: $0 \leq \beta \leq \alpha; \beta \geq \alpha$.

Сформулирована модель конкуренции двух производителей в условиях гистерезисной функции спроса. Пусть $Z_1(t)$ — количество товара на складе у первого производителя, $U_1(t)$ — темп производства, $P_1(t)$ — темп продаж в первого производителя, k_1 — коэффициент затрат на хранение единицы изделия

первого производителя, $c_1(t)$ — цена единицы изделия у первого производителя. Аналогично с индексом 2 обозначим параметры, характеризующие второго производителя; $Z(t)$ — количество товара у потребителя, k — коэффициент потребления. Динамика введенных величин описана системой:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_1 &= U_1 - P_1, \\ \dot{Z}_2 &= U_2 - P_2, \\ \dot{Z} &= P_1 + P_2 - kZ, \\ P_1 &= Z_1(t) \int_{\alpha < \beta} \gamma_1(\alpha, \beta, t) \omega_1(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta, \\ \omega_1(\alpha, \beta, t) &= \Gamma[\omega_{01}(\alpha, \beta)] p_1(t), \\ P_2 &= Z_2(t) \int_{\alpha < \beta} \gamma_2(\alpha, \beta, t) \omega_2(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta, \\ \omega_2(\alpha, \beta, t) &= \Gamma[\omega_{02}(\alpha, \beta)] p_2(t), \end{aligned} \quad (31)$$

с нулевыми начальными условиями. Целевые функционалы, выражающие прибыль каждого из производителей, определялись соотношениями:

$$J_1 = \int_0^T (p_1 P_1 - U_1 - k_1 Z_1) dt \rightarrow \max, \quad (32)$$

$$J_2 = \int_0^T (p_2 P_2 - U_2 - k_2 Z_2) dt \rightarrow \max, \quad (33)$$

в предположении, что производители используют одинаковую технологию и стоимость производства единицы изделия для каждого из них равна единице. Таким образом, предложенная модель сводится к многокритериальной задаче оптимального управления: необходимо определить управляющие воздействия: темп производства и цену для каждого из производителей, которые максимизировали бы функционалы (32)-(33), при условиях (31), описывающих динамику объекта. Примем следующие ограничения:

$$p_1(t) \geq 0, p_2(t) \geq 0, 0 \leq U_1 \leq U_{01}, 0 \leq U_2 \leq U_{02} \quad (34)$$

где U_{01}, U_{02} — максимально возможные потоки изделий соответствующих производителей. Механизм конкуренции задавался уравнением:

$$\dot{\gamma}_1(\alpha, \beta, t) - \dot{\gamma}_2(\alpha, \beta, t) = \eta(p_2(t) - p_1(t)), \quad (35)$$

при ограничении

$$\gamma_1(\alpha, \beta, t) + \gamma_2(\alpha, \beta, t) = \text{const} \quad (36)$$

с соответствующими начальными условиями. Параметр η выбирался достаточно малым, что соответствовало тому, что потребители «привыкают» к изделиям соответствующих производителей.

Рассматриваемая задача решалась с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина. В силу существенной нелинейности найдено численное её решение. При этом задача решалась итерационно: выбирался некоторый опорный план для обоих производителей, соответствующие функции $c_i(t), U_i(t), Z_i(t)$ подставлялись в систему сопряженных переменных, после нахождения которых,

решалась задача для основных переменных. Экспериментально были определены значения параметров, при которых этот процесс сходился. На рисунке 7 показаны результаты моделирования при следующих значениях параметров: $U_{01} = 6, U_{02} = 5, T = 6, \gamma_1(\alpha, \beta, 0) = \gamma_2(\alpha, \beta, 0) = \frac{1}{2} e^{-(\alpha-\beta)^2/4}$ при $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 5$.

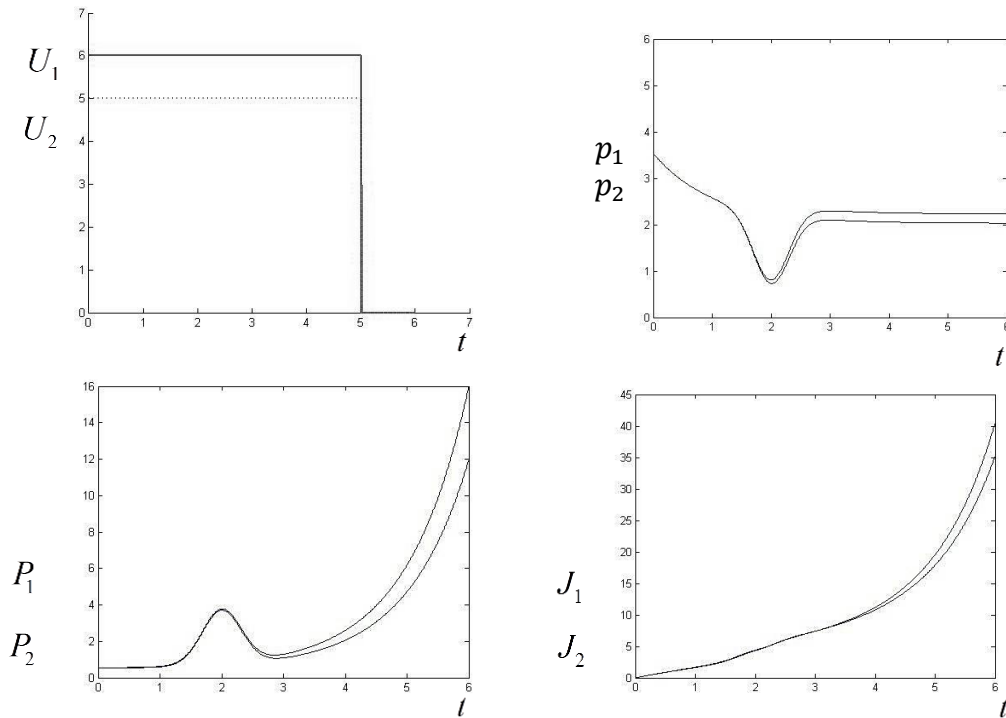


Рис. 7. Динамика изменений параметров задачи о конкуренции

На рисунке 8 показано нулевое и конечное состояния «потребителей», приобретающих изделие у более «слабого» конкурента (с меньшим темпом производства).

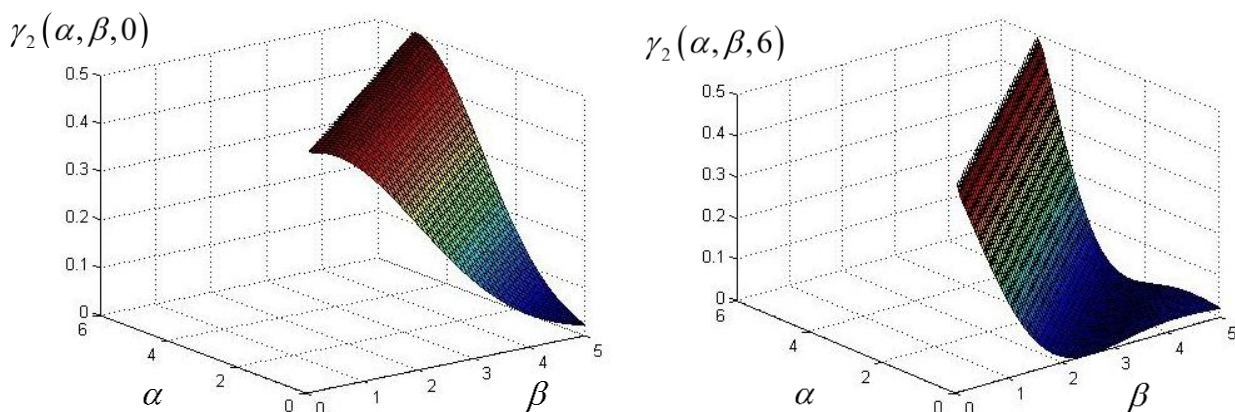


Рис. 8. Начальное и конечное состояния потребителей, приобретающих товар у второго производителя

При увеличении промежутка моделирования ($T = 25$), оптимальный режим для каждого из производителей содержал несколько переключений оптимального производства (при достаточно большом коэффициенте затрат на хранение), а

разница в доходах была более существенна. Увеличение коэффициента η еще более «усиливала» более сильного производителя. Более того, при одновременно высоких затратах на хранение и большой разнице в максимальных темпах производства у второго производителя оптимальный режим соответствовал отсутствию производства.

В заключении сформулированы полученные результаты и приведены основные выводы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

- модифицирована модель равновесной динамики систем с гистерезисными свойствами;
- предложен способ исследования моделей с гистерезисными звеньями на основе принципа оптимального управления;
- разработан алгоритм оптимального конкурентного функционирования систем, содержащих звенья гистерезисной природы на примере оптимизации стратегий экономических агентов с учётом гистерезисных свойств;
- синтезирована методика анализа многокритериальных оптимизационных динамических задач, включая задачи с функционалами, содержащими операторные гистерезисные нелинейности;
- создан комплекс программ, реализующий модель равновесной динамики систем с гистерезисными свойствами, позволяющий строить оптимальную производственную стратегию в условиях гистерезисного ценообразования и оптимизировать поведение производителей в условиях гистерезисного отношения потребителей к товарам в условиях конкуренции.

Список публикаций по теме диссертации

Журналы, включенные в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, выпускаемых в РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук»

1. Mishin M.Y. Stabilization and Control Models of Systems With Hysteresis Nonlinearities / Grachikov D.V., Semenov M.E., Mishin M.Y., Shevlyakova D.V. // European Researcher . 2012. – Vol. (20) № 5-1., pp. 523-528
2. Mishin M.Y. The model of market equilibrium under conditions of hysteresis demand functions / Abopolova E.A., Semenov M.E., Mishin M.Y. // European Researcher, №5-1 (7), May 2011, с. 677-680
3. Мишин М.Ю. Динамическая модель рыночного равновесия в условиях гистерезисного поведения экономических агентов / Абополова Е.А., Кабулова Е.Г., Мишин М.Ю., Семёнов М.Е. // Современная экономика: проблемы и решения, №7 (31) 2012, с. 146-155
4. Мишин М.Ю. Динамическая модель оптимального производства в условиях гистерезисного поведения цены / Лебедев Г.Н., Матвеев М.Г., Мишин М.Ю., Семёнов М.Е. // Современная экономика: проблемы и решения, №7 (19) 2011, с.

162-169

5. Мишин М.Ю. Искусственные нейронные сети с гистерезисной функцией активации / Соловьев А.М., Семенов М.Е., Мишин М.Ю., Кабулова Е.Г. // Теория и техника радиосвязи. 2013, № 2, с. 102-110.

Другие публикации

6. Мишин М.Ю. Дифаззификация нечётких решений дифференциальных уравнений / Абополова Е.А., Мишин М.Ю., Семёнов М.Е. // Обзорное приложение к прикладной и промышленной математике, том 18, выпуск 5, 2011, с. 735-736

7. Мишин М.Ю. Модель оптимального производства / Абополова Е.А., Гринёва Е.В., Мишин М.Ю. // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (ПМТУММ-2011), г. Воронеж, 12-17 сентября, с. 3-4.

8. Мишин М.Ю. Дифаззификация нечётких решений дифференциальных уравнений / Абополова Е.А., Мишин М.Ю., Семёнов М.Е. // Сборник научных трудов по материалам Международной научной конференции «Научное лето-2011», часть 2, Киев, 2011, с. 53-56

9. Мишин М.Ю. Динамическая модель оптимального производства в условиях гистерезисного поведения цены / Абополова Е.А., Мишин М.Ю., Семёнов М.Е. // Материалы междунауч. научн.-техн. конф. «Современные сложные системы управления – X» (HTCS-2012), Ст.Оскол, 2012, с. 168-171

10. Мишин М.Ю. Модели гистерезисных эффектов в микроэкономике / Мишин М.Ю., Семёнов М.Е. // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования» (ПМТУММ-2012), г. Воронеж, с. 318-319.

11. Мишин М.Ю. Расчет параметров динамических систем с гистерезисными свойствами. / Д.В. Грачиков, М.Ю. Мишин, М.Е. Семенов // Реестр программ для ЭВМ, регистрационный № 2011617057 от 10.10.2013г