На правах рукописи

Петросян Гарик Гагикович

Методы нелинейного анализа в теории функционально-дифференциальных включений дробного порядка

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2014

Работа выполнена в Воронежском государственном педагогическом университете.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Обуховский Валерий Владимирович.**

Официальные оппоненты:

Арутюнов Арам Владимирович,
доктор физико-математических наук, профессор, Российский университет дружбы народов, кафедра нелинейного анализа и оптимизации, заведующий кафедрой;

Стенюхин Леонид Витальевич,
кандидат физико-математических наук, доцент, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, кафедра высшей математики, доцент.

Ведущая организация: МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского.

Защита состоится "15" апреля 2014 года в 15 час. 10 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394693, г. Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 335.

С диссертацией можно ознакомится в научной библиотеке Воронежского государственного университета.

Автореферат разослан "   " февраля 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гликлих Юрий Евгеньевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория дифференциальных уравнений дробного порядка берет свое начало от идей Лейбница и Эйлера, но лишь к концу XX века интерес к этой тематике значительно усилился, благодаря интересным приложениям в различных разделах прикладной математики, физики, инженерии, биологии, экономики и др. В 70 - 80-х годах большое развитие данное направление получило в работах А.А.Килбаса, С.Г. Самко, О.И. Маричева, И. Подлюбного, K.S. Miller'a, B. Ross'a и других исследователей. В последнее десятилетие исследования в области дробного анализа характеризуются "экспоненциальным" ростом, их проводят как наши соотечественники, так и зарубежные математики.

Геометрические и топологические методы функционального анализа, применяемые к дифференциальным уравнениям, восходят к именам А. Пуанкаре, Л. Брауэра, П.С. Александрова, Г. Хопфа, Ж. Лере, Ю. Шаудера. В дальнейшем эти методы были развиты и продемонстрировали свою высокую эффективность в трудах М.А. Красносельского, С.Г. Крейна, Н.А. Бобылева, Ю.Г. Борисовича, П.П. Забрейко, В.Г. Звягина, А.И. Перова, А.И. Поволоцкого, Б.Н. Садовского, Ю.И. Сапронова, В.В. Стрыгина, Д.И. Рачинского, K. Deimling'a, L. Gorniewicz'a, J. Mawhin'a и других ученых.

Начиная со второй половины XX века, эти методы распространяются на теорию дифференциальных включений. Развитие теории дифференциальных включений связано с тем, что они являются удобным аппаратом для описания управляемых систем различных классов, систем с разрывными характеристиками, изучаемых в различных разделах теории оптимального управления, математической физики, математической экономики и др. Различные задачи теории дифференциальных включений были изучены с помощью методов нелинейного и многозначного анализа в работах Ю.Г. Борисовича, Б.Д. Гельмана, А.Д. Мышкиса, В.В. Обуховского, М.И. Каменского, А.И. Поволоцкого, Ю.Е. Гликлиха, В.Г. Звягина, А.В. Арутюнова, В.Г. Задорожного, А.И. Булгакова, Е.С. Жуковского, Е.Л. Тонкова, А.А. Толстоногова, В.В. Филиппова, J.P. Aubin'a, A. Cellina, K. Deimling'a, L. Gorniewicz'a, W. Kryszewski, P. Nistri, N.S. Papageorgiou, P. Zecca и других.

Одним из наиболее эффективных средств изучения разрешимости и существования оптимальных решений дифференциальных уравнений и включений оказывается теория топологической степени многозначных векторных полей, разработке которой были посвящены труды Ю.Г. Борисовича, Б.Д. Гельмана, А.Д. Мышкиса, В.В. Обуховского, A. Cellina, A. Granas'a, A. Lasota и других исследователей.

Настоящая работа продолжает исследования в этом направлении, в ней указанные методы применяются для изучения новых классов функционально-дифференциальных включений и уравнений дробного порядка в банаховом пространстве.

Цель работы. Применяя теорию топологической степени для уплотняющих многозначных векторных полей, исследовать задачи существования решений, описания их топологической структуры и управляемости для новых классов функционально-дифференциальных уравнений и включений дробного порядка в банаховом пространстве.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. С помощью методов нелинейного функционального анализа получены следующие основные результаты:

1. Исследована разрешимость нелокальной задачи Коши для полулинейного функционально-дифференциального уравнения дробного порядка в банаховом пространстве.

2. Доказана теорема о существовании решений и компактности множества решений для нелинейного функционально-дифференциального включения с дробной производной Капуто произвольного порядка с бесконечным запаздыванием и импульсными характеристиками в банаховом пространстве.

3. Доказана теорема о существовании решений и компактности множества решений для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка с бесконечным запаздыванием и импульсными характеристиками в банаховом пространстве.

4. Доказаны теоремы о существовании решений и компактности множества решений нелокальной задачи Коши для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка с конечным запаздыванием и импульсными характеристиками в банаховом пространстве.

5. Доказана теорема о существовании решений и компактности множества решений задачи управляемости для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка с бесконечным запаздыванием и импульсными характеристиками в банаховом пространстве.

6. Доказана теорема о существовании решений и компактности множества решений нелокальной задачи управляемости для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка с конечным запаздыванием и импульсными характеристиками в банаховом пространстве.

7. Рассмотрено приложение полученных результатов к задаче об управляемости процессом дробной диффузии.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы функционального анализа, теории многозначных отображений и теории дробного математического анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты представляют интерес для исследований математической физики, дробной динамики и некоторых задач математической экономики.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на Воронежской зимней математической школе (Воронеж, 2013 г.); на Воронежских весенних математических школах (Воронеж, 2011, 2012, 2013 гг.); на международных конференциях "Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения"(Тамбов, 2011, 2013 гг.); на международной молодежной научной школе "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"(Воронеж, 2012 г.); на международных научно-методических конференциях студентов, аспирантов и преподавателей кафедры высшей математики ВГПУ (Воронеж, 2011, 2012, 2013 гг.); на международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева: "Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования."(Москва, РУДН, 2013 г.). Результаты диссертации докладывались на семинаре проф. Баскакова А.Г. (ВГУ, 2013).

Исследования, включенные в настоящую диссертацию, поддержаны грантами РФФИ № 11-01-00328 и № 12-01-00392.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1]-[10]. Из совместно опубликованной работы [4] в диссертацию включены результаты, принадлежащие лично автору.

Работы [2], [4], [7], [10] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Автор глубоко признателен профессору В.В. Обуховскому за научное руководство и постоянное внимание.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, из которых первая, четвертая и пятая главы разбиты на три, два и три пункта соответственно. Объем работы 132 страницы. Библиография содержит 50 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследования и описывается краткое содержание работы.

В **первой главе** диссертации приводятся основные сведения из функционального анализа, теории многозначных отображений, теории дробного математического анализа и приводится модифицированная модель фазового пространства $\mathcal{B}$, введенного Хейлом и Като.

Вторая глава посвящена задаче существования решения для полулинейного функционально-дифференциального уравнения с дробной производной в сепарабельном банаховом пространстве E следующего вида:

$$D^{\alpha}x(t) = Ax(t) + f(t, x(t), x_t),\ t \in [0, T] \qquad (2.1),$$

с нелокальным начальным условием:

$$x(\theta) + g(x)(\theta) = \vartheta(\theta),\ \theta \in [-h, 0] \qquad (2.2),$$

где $D^{\alpha}, 0 < \alpha < 1,$ - дробная производная Римана-Лиувилля,
$g : C([-h, T]; E) \to C([-h, 0]; E)$ и $\vartheta : [-h, 0] \to E$ - заданные функции, $x_t \in C([-h, 0]; E)$, $h > 0$, x_t определено как $x_t(\theta) = x(t + \theta), -h < \theta \leq 0.$

Предполагаются выполненными следующие условия.

(A) $A : D(A) \subset E \to E$ - линейный замкнутый оператор в E, порождающий сильно непрерывную полугруппу e^{At}, где $t \geq 0$.

$f : [0, T] \times E \times C([-h, 0]; E) \to E$ - нелинейное отображение, удовлетворяющее условиям:

(f_1) $f(\cdot, \varphi, \psi)$ - измеримая функция на $[0, T]$, для всех $(\varphi, \psi) \in E \times C([-h, 0]; E)$;

(f_2) $f(t, \cdot, \cdot)$ - непрерывная функция на $E \times C([-h, 0]; E)$, для п. в. $t \in [0, T]$;

(f_3) условие подлинейного роста:

$$\|f(t, x, \psi)\| \leq \eta(t)(1 + \|x\|_E + \|\psi\|_{\mathcal{C}}), \text{п. в.} \quad t \in [0, T],$$

где $\eta : [0, T] \to \mathbb{R}_+$ - суммируемая функция, $\mathcal{C} = C([-h, 0], E)$.

(f_4) условие регулярности: существует суммируемая функция
$k : [0, T] \to \mathbb{R}_+$ такая, что для любого непустого ограниченного множества $Q \subset E$ и для любого непустого ограниченного множества $\Omega \subset \mathcal{C}$

выполнено

$$\chi(f(t,Q,\Omega)) \leq k(t)(\chi(Q)+\varphi(\Omega)),$$

где χ - мера некомпактности Хаусдорфа в E, $\varphi(\Omega) = \sup_{-h\leq\theta\leq 0}\chi(\Omega(\theta))$; $\Omega(\theta) = \{q(\theta), q\in\Omega\}$ - модуль послойной некомпактности в пространстве $\mathcal{C}$.

$(g1)$ $g: C([-h,T];E)\to\mathcal{C}$ - непрерывное отображение, преобразующее ограниченное множество в ограниченное.

$(g2)$ существует суммируемая функция $l:[-h,0]\to\mathbb{R}_+$, такая что:

$$\chi(g(D)(t)) \leq l(t)\chi(D(t)),$$

для любого $t\in[-h,0]$, и для любого ограниченного множества $D\subset C([-h,T];E)$.

$(g3)$ для любого ограниченного множества $D\subset C([-h,T];E)$, $\{g(\psi(\cdot));\psi\in D\}$ - равностепенно непрерывное множество функций и семейство функций $\{e^{At}x, \quad x\in g(D(0))\}$ также равностепенно непрерывно.

$(g4)$ $\underline{\lim}_{\|x\|\to\infty}\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} < 1$.

(ϑ') $\vartheta\in\mathcal{C}$ - заданная функция.

Определение 2.1 *Интегральным решением задачи* (2.1)-(2.2), *мы будем называть функцию* $x\in C([-h,T];E)$ *вида*:

$$x(t) = \begin{cases} \vartheta(t) - g(x)(t), & t\in[-h,0]; \\ e^{At}(\vartheta(0) - g(x)(0) + & \\ \qquad +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1}e^{A(t-s)}f(s,x(t),x_s)ds, & t\in[0,T]. \end{cases}$$

Пусть $\tilde{k} = \max_{t\in[0,T]} k(t)$, $\tilde{l} = \max_{t\in[-h,0]} l(t)$, где $k(\cdot)$ - функция, заданная в условии (f_4), а $l(\cdot)$ - функция, заданная в условии $(g2)$ и $C^{(\chi)}\geq 0$ - константа, такая что выполняется: $\|e^{At}\|^{\chi}\leq C^{(\chi)}$, где $\|e^{At}\|^{\chi}$ обозначает χ-норму оператора.

Теорема 2.1 *При выполнении условий* (A), (ϑ'), (f_1)-(f_4), ($g1$)-($g4$), *а также*:

$$m := \max\left\{\tilde{l}, \left(\tilde{l} + \frac{2T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\tilde{k}\right) C^{(\chi)}\right\} < 1, \tag{2.3}$$

множество решений задачи (2.1)-(2.2) *непустое и компактное подмножество пространства* $C([-h,T];E)$.

В **Третьей главе** рассматривается следующая задача. Пусть E - банахово пространство. Для разбиения отрезка $[0,T]$ точками $0 < t_1 < ... < t_m < T, \quad m \geq 1$ и функции $c : [0,T] \to E$ обозначим

$$c(t_k^+) = \lim_{h\to 0+} c(t_k + h),\ c(t_k^-) = \lim_{h\to 0-} c(t_k + h),$$

для $1 \leq k \leq m$.

Для целого $N \geq 1$ и $\alpha \in (N-1, N]$, изучается следующая задача Коши:

$$^{C}D^\alpha y(t) \in F(t, y_t, \nabla^N y(t)) \quad \text{п.в. } t \in [0,T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}, \tag{3.1}$$

$$\nabla^N y(0) = Y_0, \tag{3.2}$$

$$y(\theta) = \varphi(\theta),\ \theta \in (-\infty, 0], \tag{3.3}$$

где $^{C}D^\alpha$ - дробная производная Капуто порядка α,

$$\nabla^N y(t) = (y(t), y^{'}(t), ..., y^{(N-1)}(t)),$$

и $F : [0,T] \times \mathcal{B} \times E^N \multimap E$ - мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями. Здесь $y_t \in \mathcal{B}$ характеризует предысторию функции до момента $t \in [0,T]$, то есть $y_t(\theta) = y(t+\theta),\ \theta \in (-\infty, 0]$. Начальные данные $Y_0 = (\widetilde{y^0}, \widetilde{y^1}, ..., \widetilde{y^{N-1}})$ заданы в E^N и начальная функция $\varphi \in \mathcal{B}$ такова, что $\varphi(0) = \widetilde{y^0}$. Предполагается, что сужение искомой функции $y : (-\infty, T] \to E$ на $[0,T]$ принадлежит пространству кусочно-дифференцируемых функций $\mathcal{PC}^{N-1}([0,T];E)$.

Будем полагать, что искомая функция и ее производные удовлетворяют в моменты $t_1, ..., t_m$ условиям импульсных воздействий:

$$y^{(j)}(t_k^+) = y^{(j)}(t_k) + \mathcal{I}_k^j(y^{(j)}(t_k)), \quad 0 \leq j \leq N-1,\ k = 1, ..., m, \tag{3.4}$$

где $\mathcal{I}_k^j : E \to E$ - непрерывные импульсные функции, удовлетворяющие слудующим условиям:

$(\mathcal{I}_1)$ функции $\mathcal{I}_k^j : E \to E$, $1 \le k \le m, \quad 0 \le j \le N-1$ являются вполне непрерывными.

$(\mathcal{I}_2)$ функции $\mathcal{I}_k^j$, $1 \le k \le m, \quad 0 \le j \le N-1$ являются глобально ограниченными.

Обозначим $I = [0,T] \backslash \{t_1, ..., t_m\}$. Рассмотрим мультиоператор $F : I \times \mathcal{B} \times E^N \to Kv(E)$, удовлетворяющий следующим условиям.

(F_1) Мультифункция $F(\cdot, \vartheta, y) : [0,T] \to Kv(E)$ допускает сильно измеримое сечение для всех $(\vartheta, y) \in \mathcal{B} \times E^N$;

(F_2) Мультиотображение $F(t, \cdot, \cdot) : \mathcal{B} \times E^N \to Kv(E)$ - полунепрерывно сверху для п. в. $t \in I$;

(F_3) Существует функция $w \in L^p([0,T]), \quad p > \frac{1}{\alpha - N + 1}$, такая, что:

$$\|F(t, \vartheta, y)\| := sup\{\|f\|_E : f \in F(t, \vartheta, y)\} \le w(t)(1 + |\vartheta|_{\mathcal{B}} + \|y\|_{E^N}),$$

для п. в. $t \in I$ и всех $(\vartheta, y) \in \mathcal{B} \times E^N$.

(F_4) Существует функция $\mu \in L^p([0,T])$ такая, что для любых ограниченых множеств $\Omega \subset \mathcal{B}$ и $Q_j \subset E$, $j = 0, 1, ..., N-1$, мы имеем:

$$\chi(F(t, \Omega, \prod_{j=0}^{N-1} Q_j)) \le \mu(t)(\psi(\Omega) + \sum_{j=0}^{N-1} \chi(Q_j)), \text{п. в.} \quad t \in I,$$

где $\psi(\Omega) = \sup_{\theta \le 0} \chi(\Omega(\theta))$.

Пусть $\mathcal{C}_E(-\infty; T]$ - линейное пространство функций $y : (-\infty; T] \to E$, таких, что $y_0 \in \mathcal{B}$ и $\overline{y} = y|_{[0,T]} \in \mathcal{PC}^{N-1}([0,T]; E)$, с полунормой: $\|y\|_{\mathcal{C}_E(-\infty;T]} = |y_0|_{\mathcal{B}} + \|\overline{y}\|_{\mathcal{PC}}$.

Определение 3.1. *Интегральным решением на* $(-\infty, T]$ *задачи* (3.1)-

(3.4), *называется функция* $y \in \mathcal{C}_E(-\infty, T]$ *вида:*

$$y(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ \sum_{j=0}^{N-1} \frac{t^j}{j!} \left(\widetilde{y^{(j)}} + \sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k^j(y^{(j)}(t_k)) \right) + & \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} \phi(s) ds, & t \in [0, T], \end{cases}$$

где $\phi \in \mathcal{P}_F(y)$.

Теорема 3.1. *При выполнении условий* $(F_1)-(F_4)$ *и* $(\mathcal{I}_1)-(\mathcal{I}_2)$, *множество решений задачи* (3.1)-(3.4) *на* $\mathcal{C}_E(-\infty; T)$ *- непусто и компактно.*

Четвертая глава состоит из двух пунктов. В **пункте 4.1** рассматривается существование решения для полулинейного функционально-дифференциального включения с дробной производной в банаховом пространстве E следующего вида:

$$D^\alpha y(t) \in Ay(t) + F(t, y_t, y(t)),\ t \in [0, T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}, \tag{4.1.1}$$

с начальным условием:

$$y(\theta) = \vartheta(\theta),\ \theta \in (-\infty, 0], \tag{4.1.2}$$

где $D^\alpha,\ 0 < \alpha < 1$, - дробная производная Римана-Лиувилля, $A : D(A) \subset E \to E$ - линейный замкнутый оператор в E, порождающий сильно непрерывную полугруппу $e^{At},\ t \geq 0,\ F : [0, T] \times \mathcal{B} \times E \multimap E$ - мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями удовлетворяющее условиям аналогичным условиям $(F_1),\ (F_2),\ (F_3),\ (F_4)$. Начальная функция $\vartheta \in \mathcal{B}$, считается заданной (условие (ϑ)) и искомая функция удовлетворяет в моменты $t_1, ..., t_m$ условиям импульсных воздействий:

$$y(t_k^+) = y(t_k) + \mathcal{I}_k(y(t_k)), \quad k = 1, ..., m, \tag{4.1.3}$$

где $\mathcal{I}_k : E \to E$ - непрерывные импульсные функции, удовлетворяющие условиям аналогичным условиям $(\mathcal{I}_1),\ (\mathcal{I}_2)$.

Определение 4.1.1. *Интегральным решением на* $(-\infty, T]$ *задачи* (4.1.1)-(4.1.3), *называется функция* $y \in \mathcal{C}_E(-\infty, T]$ *вида*:

$$y(t) = \begin{cases} \vartheta(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ e^{At}\left(\vartheta(0) + \sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k(y(t_k))\right) + \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}\phi(s)ds, & t \in [0, T], \end{cases}$$

где $\phi \in \mathcal{P}_F(y)$.

Обозначим $J^{(\chi)} = \sup_{t\in[0,T]} \|e^{At}\|^{(\chi)}$.

Теорема 4.1.1. *При выполнении условий* (A), $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$, $(F4)$, (ϑ), $(\mathcal{I}1) - (\mathcal{I}2)$, *и*:

$$V := \frac{2T^\alpha \|\mu\|_\infty J^{(\chi)}}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \qquad (4.1.4)$$

множество решений задачи (4.1.1)-(4.1.3) *на* $\mathcal{C}_E(-\infty; T]$ - *непусто и компактно.*

В **пункте 4.2** рассматривается существование решения для полулинейного функционально-дифференциального включения с дробной производной в банаховом пространстве E вида (4.1.1), но с нелокальным начальным условием:

$$y(s) + g(y)(s) = \varphi(s), \; s \in [-h, 0] \qquad (4.2.1)$$

где $F : [0, T] \times \mathcal{PC}([-h, 0]; E) \times E \multimap E$ - мультиотображение с непустыми выпуклыми компактными значениями.

Пусть $\mathcal{C}_E[-h; T]$ - линейное пространство функций $y : [-h; T] \to E$, с нормой:

$$\|y\|_{\mathcal{C}_E[-h;T]} = \sup_{t\in[-h,T]} \|y(t)\|_E.$$

Мультиотображение F удовлетворяет условиям $(F1)$, $(F2)$, $(F4)$, и следующему условию

$(F'3)$ Для каждого $n \in \mathbb{N}$, найдется функция $w_n \in L^\infty([0, T])$, такая, что для любой функции $y \in \mathcal{C}_E[-h; T]$, удовлетворяющей оценке

$\|y\|_{\mathcal{C}_E[-h;T]} \leq n$, выполнено:

$$\|F(t, y_t, y(t))\| := sup\left\{\|f\|_E : f \in F(t, y_t, y(t))\right\} \leq w_n(t) \quad \text{п.в.} \quad t \in I.$$

На импульсные функции $\mathcal{I}_k$ мы накладываем условия $(\mathcal{I}1)$, $(\mathcal{I}'2)$, а на отображение g, и функцию φ следующие условия:

(φ) $\varphi \in \mathcal{C}$ - заданная функция;

(g_1) $g : \mathcal{C}_E[-h;T] \to \mathcal{C}$ - вполне непрерывное отображение;

(g_2) найдется такая последовательность $\{\rho_n\}$, что для любого $y \in \mathcal{C}_E[-h;T]$, $\|y\| \leq n$, выполнено $\|g(y)\| \leq \rho_n$ и при этом: $\lim_{n\to\infty} \frac{J\rho_n}{n} < 1$.

Определение 4.1.2. *Интегральным решением на* $[-h, T]$ *задачи* (4.1.1), (4.2.1), (4.1.3), *называется функция* $y \in \mathcal{C}_E[-h, T]$ *вида:*

$$y(t) = \begin{cases} \vartheta(t) - g(y)(t), & t \in [-h, 0]; \\ e^{At}(\vartheta(0) - g(y)(0) + \sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k(y(t_k)))+ & \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} e^{A(t-s)} \phi(s) ds, & t \in [0, T], \end{cases}$$

где $\phi(s) \in \mathcal{P}_F(y)$.

Теорема 4.2.1. *При выполнении условий* (A), $(F1)$, $(F2)$, $(F'3)$, $(F4)$, $(g_1) - (g_2), (\varphi)$, $(\mathcal{I}1) - (\mathcal{I}'2)$, (4.1.4) *и асимптотического условия*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|w_n\|_\infty}{n} = 0, \tag{4.2.5}$$

где $w_n(\cdot)$ - *функции определенные в условии* $(F'3)$, *множество решений задачи* (4.1.1), (4.2.1), (4.1.3) *на* $\mathcal{C}_E[-h;T]$ - *непусто и компактно.*

Пятая глава состоит из трех пунктов. В **пунте 5.1** рассматривается задача управляемости для системы, описываемой полулинейным функционально-дифференциальным включением с дробной производной в банаховом пространстве E следующего вида:

$$D^\alpha y(t) \in Ay(t) + F(t, y_t, y(t)) + Bu(t),\ t \in [0, T] \setminus \{t_1, ..., t_m\}, \tag{5.1.1}$$

с начальным условием (4.1.2), где функция управления $u(\cdot)$ рассматривается в $L^p(I, U)$, $p > 1/\alpha$, где U - гильбертово пространство управлений. Оператор $B : U \to E$ предполагается ограниченным и линейным.

Определение 5.1.1. *Интегральным решением на* $(-\infty, T]$ *задачи* (5.1.1), (4.1.2), (4.1.3), *называется функция* $y \in \mathcal{C}_E(-\infty, T]$ *вида*:

$$y(t) = \begin{cases} \vartheta(t), & t \in (-\infty, 0]; \\ e^{At}\left(\vartheta(0) + \sum_{t_k<t} \mathcal{I}_k(y(t_k))\right) + \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}\phi(s)ds + \\ +\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t e^{A(t-s)}(t-s)^{\alpha-1}Bu(s)ds, & t \in [0, T], \end{cases}$$

где $\phi \in \mathcal{P}_F(y)$ *и* $u \in L^p(I, U)$.

Наша основная задача управляемости может быть описана следующим образом. Для заданной начальной функции $\vartheta(\cdot) \in \mathcal{B}$ и заданного $x_1 \in E$ мы будем рассматривать существование решения $y \in \mathcal{C}_E(-\infty, T]$ и управления $u \in L^p(I, U)$ таких, что: $y(t) = \vartheta(t),\ t \in (-\infty, 0]$ и

$$y(T) = x_1. \tag{5.1.2}$$

Теорема 5.1.1. *При выполнении условий* (A), $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$, $(F4)$, (ϑ), (W), $(\mathcal{I}1) - (\mathcal{I}2)$, *и*

$$V := \frac{2T^\alpha \|\mu\|_\infty J^{(\chi)}}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{2T^\alpha \|\mu\|_\infty J^{(\chi)} M_1^{(\chi)} \|\gamma\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)}\right) < 1. \tag{5.1.7}$$

множество решений задачи (5.1.1), (4.1.2), (4.1.3), (5.1.2) *на* $\mathcal{C}_E(-\infty; T]$ *- непусто и компактно.*

В **пункте 5.2**, с использованием асимптотических условий $(F'3)$ и (4.2.5), доказывается аналогичный результат для нелокальной задачи управляемости.

В последнем **пункте 5.3** дается приложение теоремы 5.1.1 к исследованию управляемости процессом дробной диффузии.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Петросян Г.Г. О существовании решения для дифференциального уравнения с дробной производной и нелинейным граничным условием /

Г.Г. Петросян // Современные методы теории краевых задач: материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения - XXII". - Воронеж: Издательство ВГУ. - 2011. - С. 143.

[2] Петросян Г.Г. О нелокальной задаче Коши для функционально-дифференциального уравнения с дробной производной в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Вестник ВГУ, серия: физика, математика. - 2012. - №2, - С. 207-212.

[3] Петросян Г.Г. О задаче Коши для дифференциального включения с дробной производной и импульсными характеристиками в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач. - Воронеж: издательско-полиграфический центр "Научная книга". - 2012.- С. 24-29.

[4] Петросян Г.Г. О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками в банаховом пространстве / В.В. Обуховский, Г.Г. Петросян // Вестник ВГУ, серия: физика, математика. - 2013. - №1, - С. 192-209.

[5] Петросян Г.Г. О нелокальной задаче Коши для полулинейного функционально-дифференциального включения с дробной производной и импульсными характеристиками в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы ВЗМШ. - Воронеж: Издательство ВГУ. - 2013. - С. 185-187.

[6] Петросян Г.Г. О задаче управляемости для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования. - Москва: Типография РУДН. - 2013. - С. 316-317.

[7] Петросян Г.Г. О задаче управляемости для одного класса полулинейных функционально-дифференциальных включений дробного порядка в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. - 2013. - Т.18.

- вып. 5. - С. 2632-2634.

[8] Петросян Г.Г. О задаче управляемости для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка с импульсными характеристиками / Г.Г. Петросян // Современные методы теории краевых задач: материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения - XXIV". - Воронеж: Издательство ВГУ. - 2013. - С. 145-147.

[9] Петросян Г.Г. О задаче Коши для функционально-дифференциального включения дробного порядка содержащего полунепрерывное снизу мультиотображение / Г.Г. Петросян // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. - Воронеж: Издательство "Наука-юнипресс". - 2013. - С. 123-125.

[10] Петросян Г.Г. О нелокальной задаче Коши для полулинейного функционально-дифференциального включения дробного порядка в банаховом пространстве / Г.Г. Петросян // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. - Т.18. - вып. 6. - 2013. - С. 3129-3143.

Работы [2], [4], [7], [10] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.