На правах рукописи

ФРОЛОВА ОКСАНА АЛЕКСАНДРОВНА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ СЫПУЧИХ СРЕД С МИКРОСТРУКТУРОЙ

Специальность 05.13.18 - Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж - 2020

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный университет»

Научный руководитель:

Доктор технических наук, профессор,
Вервейко Николай Дмитриевич

Официальные оппоненты:

Ревуженко Александр Филиппович, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН, лаборатория механики деформируемого твердого тела и сыпучих сред, заведующий

Блатов Игорь Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики», факультет базового телекоммуникационного образования, кафедра высшей математики, заведующий

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет»

Защита состоится 23 декабря 2020 года в 15:10 часов на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 при ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет» по адресу: 394018, г.Воронеж, Университетская пл., 1, главный корпус, ауд. 333.

С диссертацией и авторефератом можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/dissertations/8941/Диссертация_Фролова_О.А..pdf

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1, ученому секретарю

Автореферат разослан «_____» _____ 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.038.20, С.А. Шабров
доктор физико-математических наук

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Математические модели сыпучих сред, описывающее процессы течения и деформирования горных пород, грунтов, зерна, различных порошков и гранул, находят широкое применение в строительстве, сельском хозяйстве и на производстве. Данные материалы обладают различными свойствами, среди которых можно выделить сыпучесть, связность, дискретность занимаемого пространства. Модели, описывающее связные сыпучие материалы, применяются для расчёта давления на стенки бункеров и других ёмкостей, анализа движения сыпучих материалов в различных каналах и истечении из ёмкостей, расчётов устойчивости горных выработок и расчётов технологических устройств, работающих с сыпучими материалами.

Для описания сыпучих материалов разработаны различные методы и модели (Кулон Ш.О., Ehlers W., Терцаги К., Соколовский В.В., Ивлев Д.Д., Быковцев Г.И., Шемякин Е.И., Ревуженко А.Ф., Rowe P.W., Moritoki Hitoshi, Радаев Ю.Н., Вервейко Н.Д. и др.). При решении широкого класса задач по течению и деформированию реальных сыпучих материалов используются классические модели: течения идеальной жидкости, вязкой жидкости Навье-Стокса, упругого деформирования Гука, пластического течения Мизеса, конечных дискретных элементов. Решая задачи устойчивости оснований и откосов, среда может быть представлена моделью недеформированного тела, в следствии чего элементы сыпучей среды можно моделировать системой твердых или упругих тел. Часто сыпучие среды представляют моделью сплошной среды в силу гипотезы о сплошном распределении материала в пространстве. Однако при решении практических задач используемые различные допущения и модели не всегда полностью соответствуют реальным физическим процессам, что приводит к большим погрешностям.

Выбор математической модели, описывающей течение и деформирование сыпучих материалов, остаётся одной из важнейших проблем. Одним из проблемных вопросов при построении модели сыпучих материалов является соотношение характерных размеров представительных элементов сыпучих массивов и характерных размеров самих явлений течения и деформирования сыпучих сред. В классических моделях сыпучих сред неявно предполагается, что характерный размер микроструктуры гораздо меньше характерного размера рассматриваемого материала. Для некоторых явлений течения и деформирования сыпучих материалов влияние параметра микроструктуры является существенным, и исследование математических моделей, отражающих эти явления, является востребованным практикой.

Актуальность диссертации обусловлена необходимостью исследования моделей, учитывающих влияние характерного размера микроструктуры на явления течения и деформирования сыпучих материалов.

Цели и задачи. Модификация математической модели предельного состояния связной сыпучей среды, учитывающая влияния характерного размера микроструктуры, проведение качественного анализа и численная реализация с помощью программного комплекса ряда осесимметричных задач.

Цель работы достигается, решением следующих задач:

1. Построение математической модели, учитывающей влияние микроструктуры сыпучего материала на предельное напряжённо-деформированное состояние и поле скоростей перемещений связных сыпучих материалов в осесимметричных задачах.

2. Разработка эффективных приближенных аналитических и численных методов исследования предельного состояния связных сыпучих материалов для осесимметричной задачи.

3. Разработка и реализация в виде программного комплекса алгоритма нахождения скоростей перемещений осесимметричной задачи.

Научная новизна. В диссертации получены следующие результаты, характеризующиеся научной новизной:

- математическая модель, учитывающая характеристики связного сыпучего материала за счет параметров микроструктуры;

- численный метод, основанный на комбинации приближенного аналитического метода возмущений и методов типа пристрелки и Рунге-Кутта для решения дифференциальных уравнений третьего порядка с граничными условиями, отличающийся возможностью учета влияния микроструктуры на скорость перемещений осесимметричной задачи связных сыпучих материалов;

- программный комплекс, включающий модули для реализации приближенных и численных методов решения осесимметричной задачи для цилиндрической области с различными условиями на внутренней и внешней границе.

Область исследования. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки). Область исследования соответствует п.1. Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений, п. 2. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей, п. 4. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента.

Теоретическая и практическая значимость работы. Теоретическая значимость диссертационной работы заключается в возможности развития подхода, учитывающего влияния параметров микроструктуры при построении математических моделей связных сыпучих материалов.

Разработанный численный метод, реализованный в программном комплексе, может быть применён для определения напряжений и скоростей перемещений в осесимметричных задачах с различными параметрами сыпучих материалов. Полученные результаты расчётов предельного напряженно-деформированного состояния могут быть применены в строительстве, промышленности, горнорудном деле и сельском хозяйстве для решения задач устойчивости оснований и фундаментов на сыпучих материалах, а так же течение сыпучих материалов из ёмкостей различных форм.

Методы исследования. Для решения поставленных задач использовались основные положения теории математического моделирования, методы математической физики, численные методы, методы решения уравнений в частных производных, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и методы объектно-ориентированного программирования.

Положения, выносимые на защиту.

1. Математическая модель предельного состояния связного сыпучего материала, учитывающая влияние микроструктуры на предельное напряженно-деформированное состояние.

2. Совместное применение приближенного аналитического метода возмущения и численных методов типа пристрелки и Рунге-Кутта для решения дифференциальных уравнений третьего порядка с граничными условиями при исследовании предельного состояния связных сыпучих материалов с учетом микроструктуры.

3. Программный комплекс для численного решения осесимметричных задач с различными граничными условиями для цилиндрической области.

Степень достоверности. Достоверность выполненных расчётов обусловлена корректной формулировкой математической модели предельного состояния сыпучих материалов с микроструктурой, точной математической постановкой задачи, корректным применением аппарата вычислительной математики, теории дифференциальных уравнений в частных производных и программного обеспечения построения численных решений.

Представленные результаты вычислительного эксперимента по расчету напряжений осесимметричного состояния под действием поверхностного нагружения показывают, что напряженное состояние распространяется в слое конечной глубины, что согласуется с результатами натурных экспериментов, проведенных Г.И. Покровским, И.С. Федоровым и другими для реальных сыпучих материалов.

Точность вычислительного эксперимента подтверждена сравнительным анализом численных расчетов с точными решениями для частных случаев.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на: семинарах проводимых кафедрой механики и компьютерного моделирования ВГУ (2010 - 2020 гг.); научных сессиях факультета ПММ ВГУ (2010 - 2019 гг.); международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики"(Воронеж, ВГУ, 2010 - 2019 гг.); международной научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики"(Тула, 2014 г.); международной научно-практической конференции "Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения (Воронеж, ВГЛТУ, 2015 г.); четвёртой научно-практической конференции "Молодёжные чтения, посвященные памяти Ю.А. Гагарина (Воронеж, ВУНЦ ВВС "ВВА 2017 - 2019 гг.).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 20 научных трудах, 5 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК РФ, 1 в издании, индексируемом в базах Web of Science и Scopus, 1 свидетельство о регистрации программы для ЭВМ. Представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, библиографического списка, состоящего из 183 наименований, и 1 приложения. Работа изложена на 130 страницах, содержит 28 рисунков и 4 таблицы.

Основное содержание работы.

Во введении представлен обзор работ различных авторов по исследуемой тематике и проведен анализ различных подходов к математическому моделированию различных явления в сыпучих материалах. Показывается преимущество математического моделирования связных сыпучих материалов с микроструктурой по сравнению с классическими подходами в решении задач.

Первая глава содержит основные гипотезы и законы сохранения, используемые при построении математической модели предельного состояния микроструктурной сыпучей среды. Предполагается, что частицы связной сыпучей среды при деформировании представительного элемента находятся в контакте и взаимодействуют друг с другом по площадкам контакта с усилиями, имеющими нормальные и касательные компоненты. На гранях элемента присутствуют силы и моменты, которые определяют несимметричный тензор напряжений и тензор моментных напряжений. Антисимметричность тензора напряжений и наличие моментов обусловлены кинематически независимым микровращением отдельных частиц, которое порождает силовое взаимодействие между частицами, определяемое трением скольжения и трением качения.

Предполагается, что напряжённое состояние пластически деформируемой микроструктурной сыпучей среды, соответствующее взаимному проскальзыванию и относительному вращению представительных элементов для случая малого влияния моментных напряжений на микровращение, в пространстве полных напряжений удовлетворяет замкнутому условию пластичности.

Вторая глава посвящена построению математической модели осесимметричного предельного напряжённо-деформированного состояния связной сыпучей среды и качественному исследованию влияния характерного размера микроструктуры на предельное

состояние. В ней представлены основные соотношения, описывающие математическую модель для осесимметричной задачи. Представлено напряжённое состояние в нулевом приближении (внешнее разложение) и представлен метод построения первого приближения (внутреннее разложение), учитывающий характерный размер микроструктуры среды.

Осесимметричное состояние связной сыпучей среды характеризуется компонентами тензора напряжений σ_{ij}, компонентами тензора скорости деформации Коши ε^c_{ij} и компонентами скорости перемещения U_i вдоль осей r, θ, z :

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r,z), \;\; \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r,z), \;\; \sigma_{zz} = \sigma_{zz}(r,z), \;\; \sigma_{rz} = \sigma_{rz}(r,z), \;\; \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0;$$

$$\varepsilon^c_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r}, \;\; \varepsilon^c_{\theta\theta} = \frac{U_r}{r}, \;\; \varepsilon^c_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}, \;\; \varepsilon^c_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r}\right), \;\; \varepsilon^c_{r\theta} = \varepsilon^c_{\theta z} = 0; \tag{1}$$

$$U_r = U_r(r,z), \;\; U_\theta = 0, \;\; U_z = U_z(r,z).$$

Математическая модель предельного осесимметричного состояния с учетом микроструктуры материала описывается следующими основными соотношениями:

– уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{f}{\sqrt{2}}(I_{1\sigma})_{,z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \;\; \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \frac{f}{\sqrt{2}}(I_{1\sigma})_{,r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} - \frac{f}{r\sqrt{2}} I_{1\sigma} = -\gamma, \tag{2}$$

где $\gamma = \rho_c g L$ – сила тяжести слоя;

– условие пластичности

$$\Phi = \sigma^2_{rr} + \sigma^2_{\theta\theta} + \sigma^2_{zz} + 2\sigma^2_{rz} - \frac{1}{3} I^2_{1\sigma} - (Y + \alpha I_{1\sigma})^2 + f^2 I^2_{1\sigma} = 0, \tag{3}$$

где Y – сцепление, α – коэффициент внутреннего трения, f – коэффициент трения качения, $I_{1\sigma}$ – первый инвариант тензора напряжений.

Система уравнений, описывающая математическую модель в напряжениях является не замкнутой, для её замыкания используется ассоциированный закон пластического течения

$$\varepsilon_{ij} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \tag{4}$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа.

Выражения для тензора скорости деформации в цилиндрической системе координат с учетом характерного размера микроструктуры h имеют следующий вид:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{h^2}{6}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial z^2 \partial r}\right),$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{U_r}{r} + \frac{h^2}{6}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r^3} U_r + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2}\right), \tag{5}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{h^2}{6}\left(\frac{\partial^3 U_z}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 U_z}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U_z}{\partial r \partial z}\right),$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r}\right) + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^3 U_r}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U_r}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^3 U_r}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 U_z}{\partial r^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 U_z}{\partial r \partial z^2}\right).$$

Для случая малых h внешнее разложение тензора скоростей деформации соответствует тензору скоростей деформации Коши. Для учета влияния микроструктуры на малых характерных размерах рассматривается метод внутреннего разложения путем растяжения координаты r. Новая координата ρ определяется соотношением $\rho = \dfrac{r}{h^2}$. При $h \to 0$ в координатах ρ, z для первого приближения компоненты тензора скорости деформации имеют следующий вид:

$$\varepsilon_{rr}^{(1)} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U_r^{(1)}}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^3 U_r^{(1)}}{\partial\rho^3}\right), \quad \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U_r^{(1)}}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial U_r^{(1)}}{\partial\rho} + \frac{U_r^{(1)}}{\rho^3}\right),$$
$$\varepsilon_{zz}^{(1)} = 0, \quad \varepsilon_{rz}^{(1)} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U_z^{(1)}}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^3 U_z^{(1)}}{\partial\rho^3}\right), \tag{6}$$

где индекс (1) означает первое приближение.

Из ассоциированного закона пластического течения (4) получены выражения, позволяющее замкнуть систему уравнений для математической модели в первом приближении

$$12\lambda\left(\sigma_{rr}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U_r^{(1)}}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^3 U_r^{(1)}}{\partial\rho^3},$$
$$12\lambda\left(\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U_r^{(1)}}{\partial\rho^2} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial U_r^{(1)}}{\partial\rho} + \frac{U_r^{(1)}}{\rho^3},$$
$$\lambda\left(\sigma_{zz}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}\right) = 0, \tag{7}$$
$$48\lambda\sigma_{rz}^{(1)} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 U_z^{(1)}}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^3 U_z^{(1)}}{\partial\rho^3}.$$

Из третьего уравнения (7), при условии $\lambda \neq 0$, получено выражение

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \frac{\beta}{1-\beta}\left(\sigma_{rr}^{(1)} + \sigma_{\theta\theta}^{(1)}\right). \tag{8}$$

Переходя в уравнениях равновесия к новой координате ρ и выделяя слагаемые второго порядка малости, с учётом (8) получены уравнения для математической модели в первом приближении

$$\frac{\partial\sigma_{rr}^{(1)}}{\partial\rho} + \frac{\sigma_{rr}^{(1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(1)}}{\rho} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{rz}^{(1)}}{\partial\rho} - \frac{f}{\sqrt{2}}\frac{\partial\left(I_{1\sigma}^{(1)}\right)}{\partial\rho} + \frac{\sigma_{rz}^{(1)}}{\rho} - \frac{f}{\sqrt{2}}\frac{I_{1\sigma}^{(1)}}{\rho} = -\gamma, \tag{9}$$

$$\sigma_{rr}^{(0)}\sigma_{rr}^{(1)} + \sigma_{\theta\theta}^{(0)}\sigma_{\theta\theta}^{(1)} + 2\sigma_{rz}^{(0)}\sigma_{rz}^{(1)} - \frac{\beta\left(\sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{\theta\theta}^{(0)}\right) + \alpha Y}{1-\beta}\left(\sigma_{rr}^{(1)} + \sigma_{\theta\theta}^{(1)}\right) = 0. \tag{10}$$

Напряжённое состояние в нулевом приближении без учета характерного размера микроструктуры, ранее полученное в работах Н.Д. Вервейко, (рис. 1) имеет вид

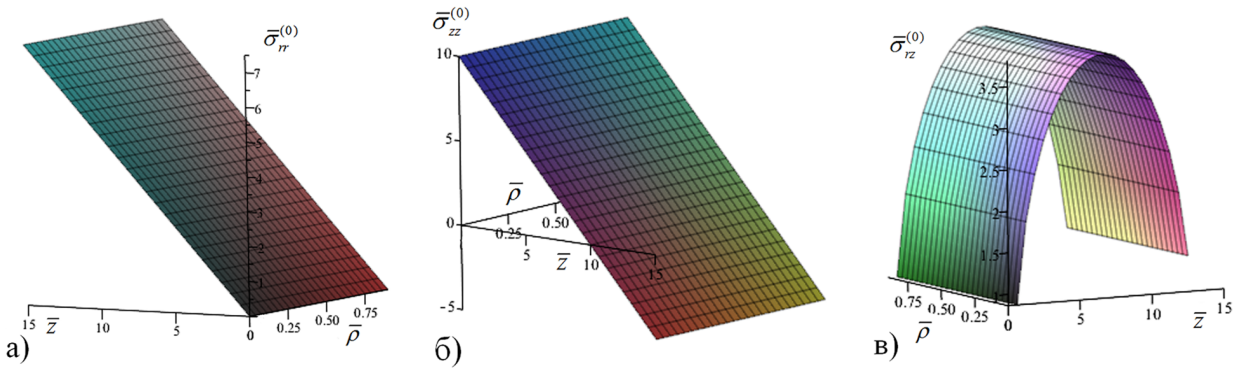


Рис. 1. Компоненты тензора напряжений в нулевом приближении
а) радиальная, б) осевая, в) касательная

$$\bar\sigma_{rr}^{(0)} = \bar\sigma_{\theta\theta}^{(0)} = \frac{1}{2}\bar z, \quad \bar\sigma_{zz}^{(0)} = \bar\sigma_{z0} - \bar z,$$
$$\bar\sigma_{rz}^{(0)} = \frac{\alpha f}{\sqrt{2}b}\left(1 \pm \frac{1}{\alpha}\sqrt{-\frac{3}{2}b\bar z^2 + 2b\bar\sigma_{z0}\bar z + 2f^2 - b\bar\sigma_{z0} - \frac{1}{3}}\right), \tag{11}$$

где $\bar{\sigma}_{z0} = \dfrac{\sigma_{z0}}{Y}$, $\bar{z} = \dfrac{\gamma z}{Y}$, $b = 2f^2 - \alpha^2 - \dfrac{1}{3}$, σ_{z0} – начальное давление.

Система уравнений (9) – (10) служит для определения компонент тензора напряжений в первом приближении.

Компоненты тензора напряжений для математической модели связной сыпучей среды с учетом микроструктуры в осесимметричной задаче имеют вид

$$\bar{\sigma}_{rr} = \frac{1}{2}\bar{z} + h^2(1-\beta)\bar{P}(z)\bar{\gamma}\left(\frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{1}{3}\bar{\rho} - \frac{2}{3}\frac{1}{\bar{\rho}^2}\right),$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{1}{2}\bar{z} + h^2(1-\beta)\bar{P}(z)\bar{\gamma}\left(\frac{4}{3}\bar{\rho} - \frac{2}{\bar{\rho}} + \frac{2}{3}\frac{1}{\bar{\rho}^2}\right), \quad \bar{\sigma}_{zz} = \bar{\sigma}_{z0} - \bar{z} + h^2\beta\bar{P}(z)\bar{\gamma}\left(\bar{\rho} - \frac{1}{\bar{\rho}}\right), \qquad (12)$$

$$\bar{\sigma}_{rz} = \frac{\alpha f}{\sqrt{2}b}\left(1 \pm \frac{1}{\alpha}\sqrt{-\frac{3}{2}b\bar{z}^2 + 2b\bar{\sigma}_{z0}\bar{z} + 2f^2 - b\bar{\sigma}_{z0} - \frac{1}{3}}\right) + h^2\left(\frac{f}{\sqrt{2}}\bar{P}(z) - \frac{1}{2}\right)\bar{\gamma}\left(\bar{\rho} - \frac{1}{\bar{\rho}}\right),$$

где $\bar{P}(z) = \dfrac{\bar{\sigma}_{rz}^{(0)}}{f\sqrt{2}\bar{\sigma}_{rz}^{(0)} + (1-3\beta)\bar{\sigma}_{rr}^{(0)} - \alpha}$, $\bar{\gamma} = \dfrac{\gamma\rho_0}{Y}$, $\bar{\rho} = \dfrac{\rho}{\rho_0}$.

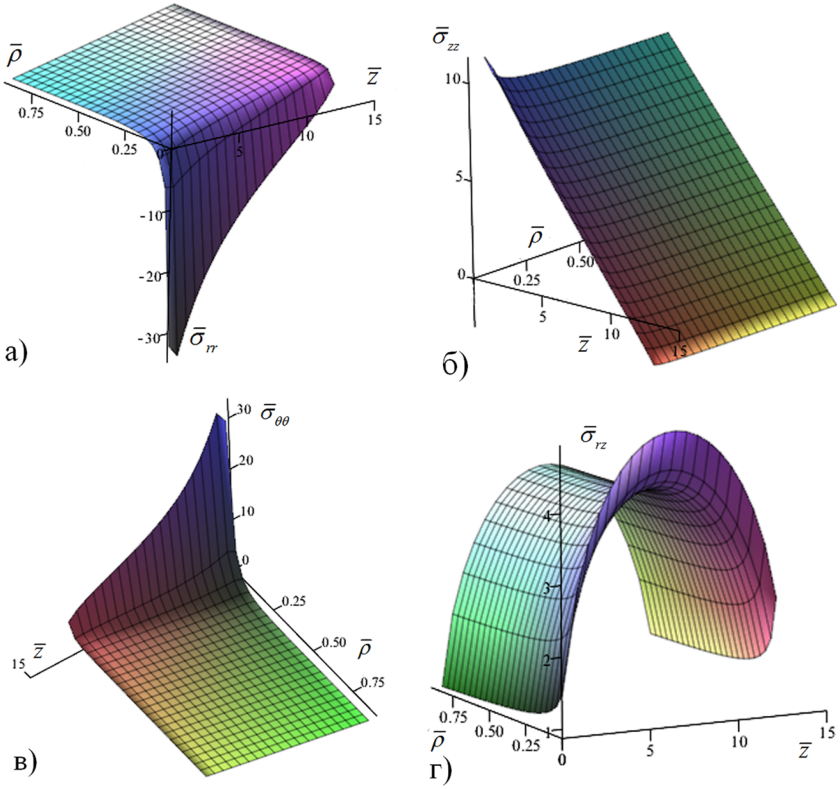


Рис. 2. Полные компоненты тензора напряжений
а) радиальная, б) осевая, в) окружная, г) касательная

Анализ напряженного состояния для математической модели показал, что учёт характерного размера h представительного элемента сыпучей среды имеет существенное значение. На рис. 1 и 2 представлены компоненты тензора напряжений в нулевом приближении и полные компоненты с учетом h. Из анализа напряженного состояния следует: в нулевом приближении напряжения зависят только от z, а с учетом микроструктуры от z и ρ; в нулевом приближении радиальная и окружная компоненты равны, а с учетом первого приближения различны; учет микроструктуры позволил выявить особенности вблизи осей.

Рассматривается метод построения математической модели для поля скоростей перемещений осесимметричной задачи деформирования связной сыпучей среды, учитывающей влияние характерного размера микроструктуры. Скорости перемещений разлагаются

в ряд по малому параметру h, ограничиваясь слагаемыми второго порядка малости

$$U_r = U_r^{(0)} + h^2 U_r^{(1)} + o(h^4), \qquad U_z = U_z^{(0)} + h^2 U_z^{(1)} + o(h^4). \tag{13}$$

Компоненты скоростей перемещений в нулевом приближении без учета характерного размера микроструктуры, ранее полученные в работах Н.Д. Вервейко, имеют вид

$$U_r^{(0)} = \frac{U_r(r_0(z), z)}{r_0(z)}\, r, \tag{14}$$

$$U_z^{(0)} = U_z(r, z_0(r)) - 2\frac{U_r(r_0(z), z)}{r_0(z)} \left[z - z_0 + \frac{3(\alpha^2 - f^2)\sigma_{z0} + 3\alpha Y}{\gamma} \ln \left| \frac{\gamma z - 2\beta\sigma_{z0} - 2\alpha Y}{\gamma z_0 - 2\beta\sigma_{z0} - 2\alpha Y} \right| \right],$$

где $U_r(r_0(z), z)$ – значение радиальной компоненты скорости на некоторой границе $r = r_0(z)$, $U_z(r, z_0(r))$ – значение осевой компоненты скорости на некоторой границе $z = z_0(r)$.

Для нахождения первого приближения поля скоростей перемещений в осесимметричной задачи рассматривается система дифференциальных уравнений (7). Для известного поля напряжений из первого и второго уравнения (7) получено уравнение для определения радиальной компоненты скорости перемещения

$$\rho^3 \frac{\partial^3 U_r^{(1)}}{\partial \rho^3} + \rho^2 \frac{\partial^2 U_r^{(1)}}{\partial \rho^2}(1 - F(\rho, z)) + \rho \frac{\partial U_r^{(1)}}{\partial \rho} F(\rho, z) - U_r^{(1)} F(\rho, z) = 0, \tag{15}$$

где $F(\rho, z) = \dfrac{\sigma_{rr}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}}$.

Четвертое уравнение (7) после нахождения λ позволяет определить осевую компоненту скорости перемещения $U_z^{(1)}$.

Третья глава. Уравнение (15) и четвертое уравнение (7) являются дифференциальными уравнениями третьего порядка, и решить их в аналитическом виде не предоставляется возможным. Для решения указанных уравнений численными методами необходимо задать по три граничных условия для радиальной U_r и осевой U_z скоростей перемещений:

- на внутренней границе рассматриваемой области при $\rho = \rho_1 : U_r^{(1)} = U_{r1}^{(1)}$ и $U_z^{(1)} = U_{z1}^{(1)}$;
- на внешней границе при $\rho = \rho_2 : U_r^{(1)} = U_{r2}^{(1)}$ и $\dfrac{\partial U_r^{(1)}}{\partial \rho} = \dfrac{\partial U_{r2}^{(1)}}{\partial \rho}$, $U_z^{(1)} = U_{z2}^{(1)}$ и $\dfrac{\partial U_z^{(1)}}{\partial \rho} = \dfrac{\partial U_{z2}^{(1)}}{\partial \rho}$.

Для случая $\sigma_{rr}^{(1)} = \sigma_{\theta\theta}^{(1)}$, что соответствует гидростатическому распределению давления в рассматриваемой математической модели, дифференциальные уравнения (15) и четвертое уравнение (7) для определения поля скоростей перемещений могут быть проинтегрированы

$$U_r = \frac{U_r(r_0(z), z)}{r_0(z)}\rho + h^2(C_1\rho + C_2\rho\ln\rho + C_3\rho\ln^2\rho), \quad U_z = U_z(\rho, z_0(\rho)) - 2\frac{U_r(r_0(z), z)}{r_0(z)} \times$$

$$\times \left[z - z_0 + \frac{3(\alpha^2 - f^2)\sigma_{z0} + 3\alpha Y}{\gamma} \ln \left| \frac{\gamma z - 2\beta\sigma_{z0} - 2\alpha Y}{\gamma z_0 - 2\beta\sigma_{z0} - 2\alpha Y} \right| \right] + \tag{16}$$

$$+ h^2 \left(\frac{8C_3\sigma_{rz}^{(1)}}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}}(\rho - \rho\ln\rho + \frac{1}{2}\rho\ln^2\rho) + \tilde{C}_1^z + \tilde{C}_2^z\rho + \tilde{C}_3^z\rho\ln\rho \right),$$

где C_1, C_2, C_3, $\tilde{C}_1^z$, $\tilde{C}_2^z$, $\tilde{C}_3^z$ – константы определяемые из граничных условий.

В случае $\sigma_{rr}^{(1)} \neq \sigma_{\theta\theta}^{(1)}$ уравнения (15) и четвертое уравнение (7) не имеют аналитического решения. Для решения данных уравнений разработан метод численного решения, учитывающий особенности этих уравнений.

В дифференциальном уравнении (15) при старшей производной стоит множитель ρ^3. Для рассматриваемой осесимметричной задачи ($\rho_1 < \rho < \rho_2$) ρ_1 может принимать значения близкие к нулю. Это приводит к большой погрешности при интегрировании данного дифференциального уравнения. Проведённый анализ различных методов решения дифференциальных уравнений с граничными условиями показал, что для минимизации погрешности целесообразно применить методы типа пристрелки и Рунге-Кутта.

Реализация разработанного специального численного метода для решения дифференциальных уравнений третьего порядка с граничными условиями для нахождения радиальной компоненты скорости перемещения осуществляется по следующему алгоритму.

1. Уравнение (15) преобразуется в систему трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial U_r^{(1)}}{\partial \rho} = W, \quad \frac{\partial W}{\partial \rho} = X, \quad \frac{\partial X}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho}X(1 - F(\rho, z)) - \frac{1}{\rho^2}WF(\rho, z) + \frac{1}{\rho^3}U_r^{(1)}F(\rho, z), \quad (17)$$

с граничными условиями

$$U_r^{(1)}(\rho_1) = U_{r1}^{(1)}, \quad U_r^{(1)}(\rho_2) = U_{r2}^{(1)}, \quad W(\rho_2) = \frac{\partial U_{r2}^{(1)}}{\partial \rho}. \quad (18)$$

2. Краевая задача (17) – (18) сводится к задаче Коши. На правом конце рассматриваемого отрезка по ρ заданы два граничных условия, которые являются начальными условиями задачи Коши. Для нахождения третьего начального условия на правом конце рассматриваемого отрезка дважды интегрируется справа налево методом Рунге-Кутта с помощью схемы четвертого порядка точности для двух произвольных значений η_1 и η_2.

$$KX1_i = -\frac{X_i}{\rho_i} \cdot (1 - F_i(\rho, z)) - \frac{W_i}{\rho_i^2} \cdot F_i(\rho, z) + \frac{U_{ri}^{(1)}}{\rho_i^3} \cdot F_i(\rho, z), \quad KW1_i = X_i, \quad KU1_i = W_i;$$

$$KX2_i = -\frac{X_i - \dfrac{KX1_i}{2}}{\rho_i - \dfrac{\triangle\rho}{2}} \cdot (1 - F_i(\rho, z)) - \frac{W_i - \dfrac{KW1_i}{2}}{\left(\rho_i - \dfrac{\triangle\rho}{2}\right)^2} \cdot F_i(\rho, z) + \frac{U_{ri}^{(1)} - \dfrac{KU1_i}{2}}{\left(\rho_i - \dfrac{\triangle\rho}{2}\right)^3} \cdot F_i(\rho, z),$$

$$KW2_i = X_i - \frac{KX1_i}{2}, \quad KU2_i = W_i - \frac{KW1_i}{2};$$

$$KX3_i = -\frac{X_i - \dfrac{KX2_i}{2}}{\rho_i - \dfrac{\triangle\rho}{2}} \cdot (1 - F_i(\rho, z)) - \frac{W_i - \dfrac{KW2_i}{2}}{\left(\rho_i - \dfrac{\triangle\rho}{2}\right)^2} \cdot F_i(\rho, z) + \frac{U_{ri}^{(1)} - \dfrac{KU2_i}{2}}{\left(\rho_i - \dfrac{\triangle\rho}{2}\right)^3} \cdot F_i(\rho, z),$$

$$KW3_i = X_i - \frac{KX2_i}{2}, \quad KU3_i = W_i - \frac{KW2_i}{2}; \quad (19)$$

$$KX4_i = -\frac{X_i - KX3_i}{\rho_i - \triangle\rho} \cdot (1 - F_i(\rho, z)) - \frac{W_i - KW3_i}{(\rho_i - \triangle\rho)^2} \cdot F_i(\rho, z) + \frac{U_{ri}^{(1)} - KU3_i}{(\rho_i - \triangle\rho)^3} \cdot F_i(\rho, z),$$

$$KW4_i = X_i - KX3_i, \quad KU4_i = W_i - KW3_i;$$

$$X_{i-1} = X_i - \frac{\triangle\rho}{6}(KX1_i + 2 \cdot KX2_i + 2 \cdot KX3_i + KX4_i),$$

$$W_{i-1} = W_i - \frac{\triangle\rho}{6}(KW1_i + 2 \cdot KW2_i + 2 \cdot KW3_i + KW4_i),$$

$$U_{ri-1}^{(1)} = U_{ri}^{(1)} - \frac{\triangle\rho}{6}(KU1_i + 2 \cdot KU2_i + 2 \cdot KU3_i + KU4_i),$$

где $\triangle\rho$ – шаг по ρ.

Найдены $U_r^{(1)}(\rho_1,\eta_1)$ и $U_r^{(1)}(\rho_1,\eta_2)$. Данные значения не удовлетворяют заданному граничному условию (18) на левой границе рассматриваемого отрезка. Решение алгебраического уравнения $\varphi(\eta) = U_r^{(1)}(\rho_1,\eta) - U_{r1}^{(1)} = 0$, найденное с помощью метода секущих

$$\eta_* = \eta_2 - \frac{\varphi(\eta_2)(\eta_2-\eta_1)}{\varphi(\eta_2)-\varphi(\eta_1)}, \tag{20}$$

является третьем начальным условием $X(\rho_2) = \eta_*$ задачи Коши.

3. Интегрирование справа налево методом Рунге-Кутта (19) с начальными значениями при $\rho = \rho_2 : U_r^{(1)} = U_{r2}^{(1)}$, $W = \dfrac{\partial U_{r2}^{(1)}}{\partial\rho}$ и $X = \eta_*$, позволяет найти искомое решение $U_r^{(1)}$ для дифференциального уравнения (15) с заданными граничными условиями (18).

4. Найденные значения $U_r^{(1)}$, $W = \dfrac{\partial U_r^{(1)}}{\partial\rho}$ и $X = \dfrac{\partial^2 U_r^{(1)}}{\partial\rho^2}$ позволяют найти значения множителя Лагранжа

$$\lambda = \frac{1}{\sigma_{\theta\theta}^{(1)} - \beta I_{1\sigma}^{(1)}}\left(\frac{1}{\rho}X - \frac{1}{\rho^2}W + \frac{1}{\rho^3}U_r^{(1)}\right). \tag{21}$$

Для численного нахождения осевой компоненты скорости перемещения $U_z^{(1)}$ в первом приближении используется четвертое уравнение (7) с заданными граничными условиями и найденное λ. Алгоритм нахождения $U_z^{(1)}$ аналогичен определению радиальной компоненты скорости перемещения $U_r^{(1)}$.

Дифференциальное уравнение третьего порядка для $U_z^{(1)}$ преобразуется в систему трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial U_z^{(1)}}{\partial\rho} = W^z, \quad \frac{\partial W^z}{\partial\rho} = X^z, \quad \frac{\partial X^z}{\partial\rho} = -\frac{1}{\rho}X^z + 48\lambda\sigma_{rz}^{(1)}, \tag{22}$$

с граничными условиями

$$U_z^{(1)}(\rho_1) = U_{z1}^{(1)}, \quad U_z^{(1)}(\rho_2) = U_{z2}^{(1)}, \quad W^z(\rho_2) = \frac{\partial U_{z2}^{(1)}}{\partial\rho}. \tag{23}$$

На правом конце рассматриваемой отрезке по ρ ($\rho_1 < \rho < \rho_2$) заданы два граничных условия, которые будут являться начальными условиями для задачи Коши. Для нахождения третьего начального условия произвольно задается $X^z = \dfrac{\partial^2 U_{z2}^{(1)}}{\partial\rho^2} = \xi$. Дважды проинтегрировав систему уравнений (22) методом Рунге-Кутта справа налево для $X^z = \xi_1$ и $X^z = \xi_2$, получены значения $U_z^{(1)}(\rho_1,\xi_1)$ и $U_z^{(1)}(\rho_1,\xi_2)$. Данные значения отличны от заданного граничного условия на левой границе $U_{z1}^{(1)}$. Методом секущих находится решение алгебраического уравнения $\psi(\xi) = U_z^{(1)}(\rho_1,\xi) - U_{z1}^{(1)} = 0$

$$\xi_* = \xi_2 - \frac{\psi(\xi_2)(\xi_2-\xi_1)}{\psi(\xi_2)-\psi(\xi_1)}, \tag{24}$$

Значение $X^z(\rho_2) = \xi_*$ является третьим начальным условием задачи Коши.

Интегрируя методом Рунге-Кутта систему уравнений (22) с начальными условиями $U_z^{(1)} = U_{z2}^{(1)}$, $W^z = \dfrac{\partial U_{z2}^{(1)}}{\partial\rho}$ и $X^z = \xi_*$, будет получено искомое решение $U_z^{(1)}$.

Найденное первое приближение поля скоростей перемещений позволяет учесть влияние микроструктуры в связном сыпучем материале.

Для оценки точности предложенного метода численного нахождения поля скоростей перемещений для осесимметичных моделей сыпучих материалов было проведено сравнение результатов, полученных при решении дифференциальных уравнений третьего порядка с граничными условиями, имеющих точное решение, с результатами, полученными

по предложенному методу. В результате установлено что при уменьшении шага вычислений точность возрастает. Уменьшение шага особенно актуально при приближении левой границы к нулю. Предложенный метод реализован в программном комплексе.

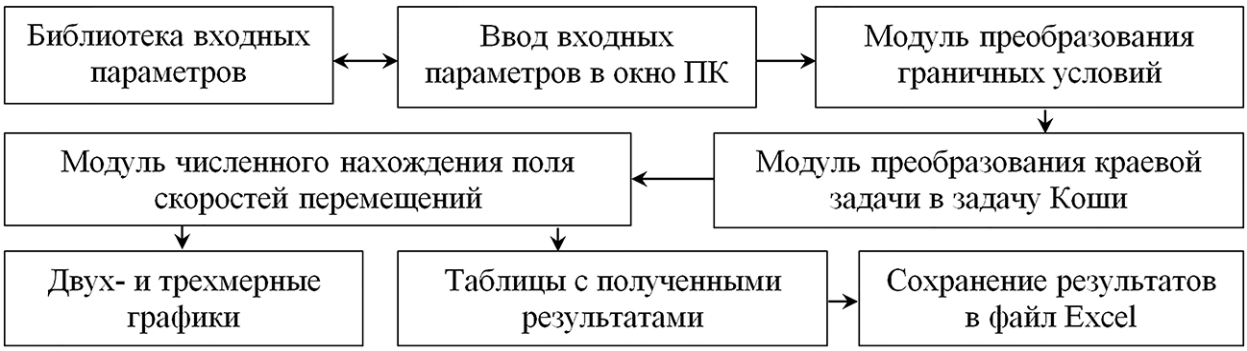
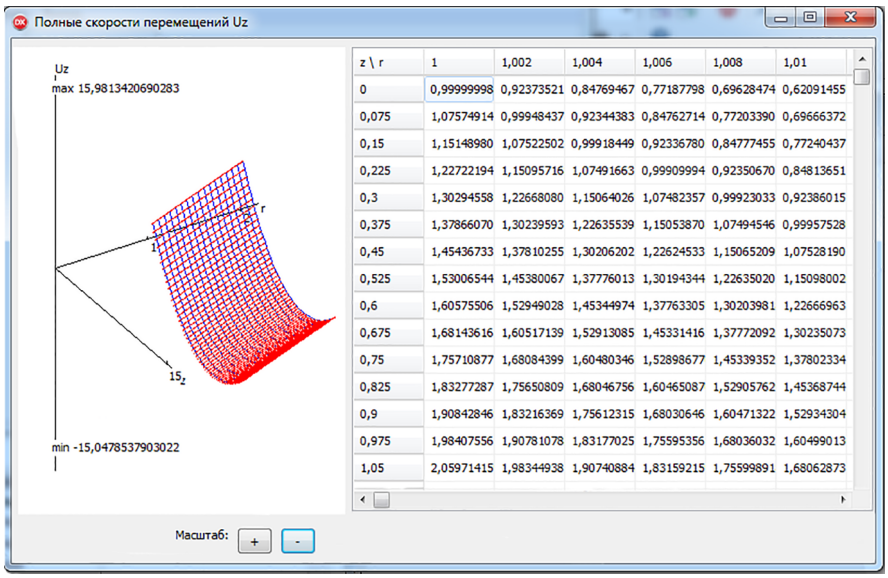


Рис. 3. Схема взаимодействия модулей

Программный комплекс "Расчет напряженно-деформированного состояния цилиндрической области из связного сыпучего материала реализованный в среде Delphi, позволяет проводить вычислительные эксперименты по расчету предельного напряженно-деформированного состояния цилиндрической области из связанного сыпучего материала с различными входными параметрами, учитывающими структуру сыпучего материала, а так же с различными граничными условиями на внутренней и внешней границах цилиндрической области.

На рис. 3 представлена схема взаимодействия модулей программного комплекса. Рассчитанные значения выводятся в окно программы в таблицах и визуализируются с помощью двух- и трехмерных графиков (рис. 4). При необходимости числовые результаты вычислений сохраняются в файл Excel.



z \ r	1	1,002	1,004	1,006	1,008	1,01
0	0,99999998	0,92373521	0,84769467	0,77187798	0,69628474	0,62091455
0,075	1,07574914	0,99948437	0,92344383	0,84762714	0,77203390	0,69666372
0,15	1,15148980	1,07522502	0,99918449	0,92336780	0,84777455	0,77240437
0,225	1,22722194	1,15095716	1,07491663	0,99909994	0,92350670	0,84813651
0,3	1,30294558	1,22668080	1,15064026	1,07482357	0,99923033	0,92386015
0,375	1,37866070	1,30239593	1,22635539	1,15053870	1,07494546	0,99957528
0,45	1,45436733	1,37810255	1,30206202	1,22624533	1,15065209	1,07528190
0,525	1,53006544	1,45380067	1,37776013	1,30194344	1,22635020	1,15098002
0,6	1,60575506	1,52949028	1,45344974	1,37763305	1,30203981	1,22666963
0,675	1,68143616	1,60517139	1,52913085	1,45331416	1,37772092	1,30235073
0,75	1,75710877	1,68084399	1,60480346	1,52898677	1,45339352	1,37802334
0,825	1,83277287	1,75650809	1,68046756	1,60465087	1,52905762	1,45368744
0,9	1,90842846	1,83216369	1,75612315	1,68030646	1,60471322	1,52934304
0,975	1,98407556	1,90781078	1,83177025	1,75595356	1,68036032	1,60499013
1,05	2,05971415	1,98344938	1,90740884	1,83159215	1,75599891	1,68062873

Рис. 4. Окно результатов работы программы

В четвертой главе на основе предложенной математической модели предельного состояния связных сыпучих сред с микроструктурой рассмотрен ряд упрощенных осесимметричных задач:

1. Предельное напряжённое состояние полупространства. Предполагается, что поперечные деформации малы ($\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z)$). Скорости перемещения удовлетворяют условиям $U_r = 0$ и $U_z = U_z(z)$, что соответствует деформированию тонкого стержня с приложенными к нему вертикальными нагрузками. Для данной модели аналитически определены поля напряжений и скоростей перемещений

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2}\left(\frac{3fp_0}{r\sqrt{2}} + \gamma\right) z - p_0, \quad \sigma_{zz} = \left(-\frac{3fp_0}{r\sqrt{2}} - \gamma\right) z - p_0, \tag{25}$$

$$U_z = -\lambda z^2 \left(\frac{3fp_0}{r\sqrt{2}} + \gamma\right) - 2\lambda z \left(3p_0(f^2 - \alpha^2) + \alpha Y\right) + C_1, \tag{26}$$

где p_0 – начальное давление, C_1 – константа интегрирования, которая соответствует заданной начальной скорости.

Учёт параметра микроструктуры h в рассматриваемой модели оказывает влияние на распределение осевой скорости в пограничном слое, то есть вблизи внешней границы.

Решение для скорости перемещения $\check{U}_z$ в пограничном слое имеет следующий вид:

$$\check{U}_z = \frac{2\lambda h(3p_0(f^2 - \alpha^2) + \alpha Y)}{\cos\dfrac{1}{\sqrt{6}}} \cos\frac{z}{h\sqrt{6}}. \tag{27}$$

2. Предельное напряжённое состояние сжимаемого сыпучего материала, имеющего цилиндрическую полость и находящегося в состоянии плоской деформации, для трёх случаев нагружения:

- невесомый материал с внутренним цилиндрическим вырезом, на поверхности которого задано давление. Определено напряженное состояние $\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -\alpha Y/2$, $\sigma_{zz} = \alpha Y$.

- цилиндрический слой в пластическом состоянии для невесомого сыпучего материала с граничными условиями вида $\sigma_{rr}(R_-) = -P_-^0$, $\sigma_{rr}(R_+) = -P_+^0$, где R_- – внутренняя граница, R_+ – внешняя. Напряженное состояние имеет вид

$$\sigma_{rr} = -\frac{P_+^0 R_+^2 - P_-^0 R_-^2}{R_+^3 - R_-^3} r - \frac{\alpha Y}{R_+ - R_-} r + \frac{(P_+^0 R_- - P_-^0 R_+) R_+^2 R_-^2}{R_+^3 - R_-^3} \frac{1}{r^2} + \frac{\alpha Y}{2} \frac{R_+^2 R_-^2 - R_+^2 + R_-^2}{R_+^2 - R_-^2},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{(P_+^0 R_- + P_-^0 R_+) R_+^2 R_-^2}{R_+^3 - R_-^3} \frac{1}{r^2} - \frac{\alpha Y}{2} \frac{R_+^2 R_-^2 + R_+^2 - R_-^2}{R_+^2 - R_-^2}, \tag{28}$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{\beta}{1-\beta} \frac{P_+^0 R_+^2 - P_-^0 R_-^2}{R_+^3 - R_-^3} r - \frac{\alpha Y \beta}{1-\beta} \frac{1}{R_+ - R_-} r + \alpha Y.$$

- сжатие цилиндра из невесомого сыпучего материала. Для данной задачи напряженное состояние имеет вид

$$\sigma_{rr} = -\frac{\alpha Y}{2} - \frac{R_-^2}{r^2}\left(P_0 - \frac{\alpha Y}{2}\right), \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{\alpha Y}{2} + \frac{R_-^2}{r^2}\left(P_0 + \frac{\alpha Y}{2}\right), \quad \sigma_{zz} = \alpha Y. \tag{29}$$

3. Предельное состояние сыпучего материала с микроструктурой в конической области под действием равномерного давления в сферической системе координат r, θ, φ, начало которой совпадает с вершиной конуса. Предполагается, что компоненты напряжения не зависят от r, φ и являются функциями от θ. В зависимости от угла раствора конуса θ_0 получено поле напряжений (рис. 6а, 6б) и скорость перемещения (рис. 6в)

$$\sigma_{rr} = \frac{\alpha Y}{1 - 3\beta} = \frac{\alpha Y}{3(f^2 - \alpha^2)}, \tag{30}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\alpha Y(\cos 2\theta_0 - \cos 2\theta)}{6(f^2 - \alpha^2)\sin^2\theta} - \frac{p\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\alpha Y(2 + \cos 2\theta_0 - \cos 2\theta)}{6(f^2 - \alpha^2)\sin^2\theta} - \frac{p\sin^2\theta_0}{\sin^2\theta},$$

$$U_\theta = rC_1(-\sin\theta)^{\dfrac{\alpha Y - 6C(f^2 - \alpha^2)}{-\alpha Y - 6C(f^2 - \alpha^2)}} \cdot \left[\alpha Y(\cos 2\theta - 2) - 6C(f^2 - \alpha^2)\right]^{\dfrac{\alpha Y}{\alpha Y + 6C(f^2 - \alpha^2)}}.$$

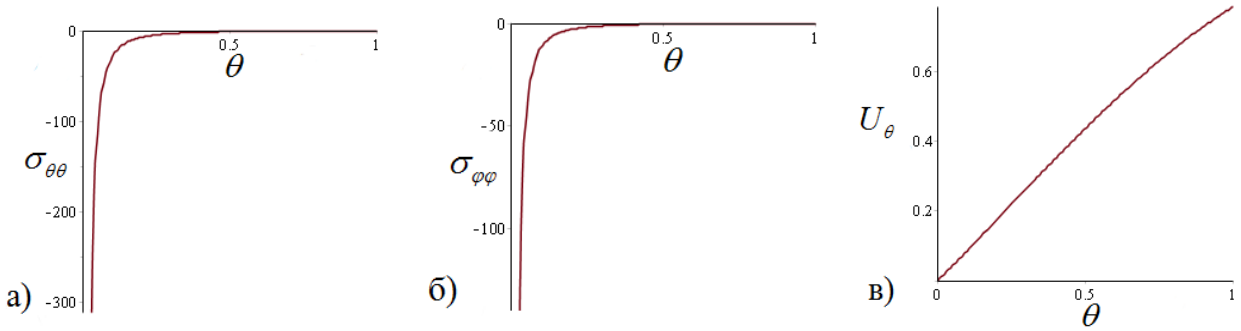


Рис. 6. Напряжения и скорость перемещений для конической области

Заключение содержит основные результаты диссертационного исследования.

Основные результаты работы:

1. Построена математическая модель предельного состояния связного сыпучего материала с учетом параметров микроструктуры для осесимметричных задач. Данная модель при предельном переходе (не учет коэффициентов трения качения и скольжения) последовательно преобразуется в классические модели В.В. Соколовского, Р. Мизеса, Д.Д. Ивлева.

2. Разработан метод, основанный на комбинации приближенно-аналитического метода возмущений и численных методов типа пристрелки и Рунге-Кутта, для решения дифференциальных уравнений третьего порядка с граничными условиями при исследовании предельного состояния связных сыпучих материалов, который позволил получить выражения для компонент тензора напряжений и поля скоростей перемещений предельного осесимметричного напряжённо-деформированного состояния микроструктурного сыпучего материала.

3. Разработан программный комплекс в среде Delphi, реализующей разработанный метод исследования предельного осесимметричного напряженно-деформированного состояния связного сыпучего материала. Программный комплекс предназначен для проведения вычислительных экспериментов по определению полей напряжений и скоростей перемещений для цилиндрической области с различными граничными условиями на внутренней и внешней границе. Результаты вычислительного эксперимента представляются в табличном виде и визуализируются графиками.

4. Получены выражения для напряженного состояния и поля скоростей перемещений для математических моделей: предельного напряжённого состояния полупространства, находящегося под действием вертикальной нагрузки; осесимметричного предельного напряжённого состояния сжимаемого сыпучего материала с цилиндрической полостью, находящегося в состоянии плоской деформации; предельного напряжённо-деформированного состояния сыпучего материала с микроструктурой в конической области под действием равномерного внутреннего давления в сферической системе координат.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Фролова О. А. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния связного сыпучего материала в конической области / О. А. Фролова // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2018. – №4 – С. 44–49.

2. Фролова О. А. Численный метод нахождения поля скоростей перемещений для осесимметричной задачи связных сыпучих материалов / О. А. Фролова // Вестник Воронежского государственного университета. Сер. Системный анализ и информационные технологии. – 2018. – №4 – С. 50–57.

3. Фролова О. А. Влияние характерного размера микроструктуры сыпучего материала на одномерное предельное напряженное состояние полупространства / О. А. Фролова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2015. – № 3 (25). – С. 21–28.

4. Вервейко Н. Д. Предельное осесимметричное напряженное состояние сжимаемого сыпучего материала с цилиндрической полостью / Н. Д. Вервейко, О. А. Фролова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2015. – №3 (25). – С. 29–36.

5. Фролов А. Л. Осесимметричное напряженное состояние связного сыпучего материала с учетом микроструктуры материала / А. Л. Фролов, О. А. Фролова // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. – 2013. – № 1 (15). – С. 214–221.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

6. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018660822. Расчет напряженно-деформированного состояния цилиндрической области из связанного сыпучего материала : № 2018618091 : заявл. 23.07.2018 : опубл. 28.08.2018 / Фролова О. А. – 1 с.

Публикации в изданиях, индексируемых в WoS и Scopus

7. Frolov A. L. Mathematical modeling of axisymmetric flow of granular materials / A. L. Frolov, O. A. Frolova, R. S. Sumina, E. N. Sviridova // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. – 2020. – Vol. 1479, № 012115. – 11 p. – doi:10.1088/1742-6596/1479/1/012115.

Публикации в других изданиях

8. Фролова О. А. Осесимметричное напряженно–деформированное состояние связной сыпучей среды с учетом микроструктуры / О. А. Фролова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной конференции. – Воронеж, 2010. – С. 364–366.

9. Фролова О. А. Осесимметричное напряженное состояние микроструктурной сыпучей среды / О. А. Фролова // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – Воронеж, 2010. – Вып. 8. – С. 324–327.

10. Вервейко Н. Д. Влияние характерного размера представительного элемента сыпучей среды на осесимметричное напряженное состояние / Н. Д. Вервейко, О. А. Фролова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной конференции. – Воронеж, 2011. – С. 106–109.

11. Фролова О. А. Поле скоростей перемещений сыпучего материала в осесимметричной задаче вблизи оси симметрии / О. А. Фролова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной конференции, Воронеж, 26–28 ноября 2012 г. : в 2 ч. – Воронеж, 2012. – Ч. 2. – С. 271–272.

12. Фролова О. А. Коническое напряженно-деформированное состояние сыпучей среды / О. А. Фролова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов международной конференции, Воронеж, 12–14 декабря 2013 г. – Воронеж, 2014. – С. 310–312.

13. Фролова О. А. Влияние микроструктуры сыпучего материала на одномерное радиальное напряженное состояние вне цилиндрической полости / О. А. Фролова // Современные проблемы математики, механики, информатики : материалы международной научной конференции. – Тула, 2014. – С. 427–430.

14. Фролова О. А. Влияние микроструктуры сыпучего материала на поле скоростей перемещения в осесимметричной задаче / О. А. Фролова // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика : сборник научных трудов по материалам международной заочной научно-практической конференции "Современные проблемы математики. Методы, модели, приложения". – Воронеж, 2015. – № 5, ч. 2. – С. 134–137.

15. Фролова О. А. Математическое моделирование поля скоростей перемещений для полупространства с цилиндрической полостью / О. А. Фролова // Актуальные проблемы прикладной математики, механики и информатики : сборник трудов международной конференции, Воронеж, 16–18 декабря 2015 г. – Воронеж, 2015. – С. 101–103.

16. Фролова О. А. Математическое моделирование скоростей перемещений связной сыпучей среды / О. А. Фролова // Вестник факультета прикладной математики, информатики и механики. – Воронеж, 2016. – Вып. 13. – С. 262–266.

17. Плиплин М. А. Математическое моделирование поведения сыпучих сред с учетом микроструктуры / М. А. Плиплин, О. А. Фролова // Сборник статей по материалам IV научно-практической конференции "Молодёжные чтения, посвященные памяти Ю.А. Гагарина"(17 мая 2017 г.). – Воронеж, 2017. – Т. 1. – С. 285-290.

18. Вервейко Н. Д. Математическое моделирование поля скоростей перемещений для одномерного предельного напряженного состояния полупространства / Н. Д. Вервейко, А. Л. Фролов, О. А. Фролова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научно-технической конференции, Воронеж, 18–20 декабря, 2017 г. - Воронеж, 2017. – С. 1025–1028.

19. Фролов А. Л. Математическая модель вдавливания тонкого осесимметричного тела в сыпучую среду / А. Л. Фролов, О. А. Фролова, Р. С. Сумина // Вестник Воронежского института ФСИН России. – 2019. – №3 – С. 121–124.

20. Фролов А. Л. Математическое моделирование осесимметричного течения гранулированных материалов / А. Л. Фролов, О. А. Фролова, Р. С. Сумина, Е. Н. Свиридова // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 11–13 ноября 2019 г. – Воронеж, 2020. – С. 1551–1556.