

ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ФАХАД ДУЛЬФИКАР Али

**О компьютерной реализации некоторых
задач фильтрации без начальных условий в
пористой среде**

05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
доктор физико–математических наук,
профессор Костин В.А.

В О Р О Н Е Ж — 2020

Оглавление

Введение	4
1 О задачах фильтрации в пористой среде и методах их решений	12
1.1 Уравнения фильтрации для процессов теплопереноса в пористой среде	13
1.2 Постановка задач	16
1.3 Некоторые факты из общей теории операторных уравнений	17
1.4 Оператор–функции.	21
1.5 Экспоненциальная функция, группы и полугруппы операторов	25
1.6 Дробные степени операторов	29
1.7 Корректные задачи	31
1.8 Краевые задачи для уравнения 2–го порядка	33
2 Математические модели процесса фильтрации без начальных условий и их корректная разрешимость	40
2.1 Выбор класса функций	41
2.2 Задачи без начальных условий для модели фильтрации . .	48
2.3 Задача для полуограниченной магистрали с условиями Дирихле	55

2.4	Фильтрационные волны в пористой среде	59
2.5	Задача со смешанным краевым условием	62
3	Численная реализация решений	65
3.1	Интерполяционные полиномы Ньютона–Тейлора	66
3.2	Числа Стирлинга	68
3.3	Многочлены Ньютона–Тейлора	71
3.4	Алгоритм построения численного решения	72
3.5	Задачи возникающие при создании комплексов измерительной аппаратуры	74
3.6	Алгоритм работы комплекса измерительной аппаратуры в режиме тестирования	76
3.7	Алгоритм работы комплекса измерительной аппаратуры в рабочем режиме	77
3.8	Алгоритм измерения отклика	78
3.9	Определение пары значений параметров γ и ν	79
3.10	Рабочий режим измерительного комплекса	81
	Заключение	84
	Литература	86
3.11	Программы используемые для обработки макета	93
3.12	Программы используемые в изделии	105
3.13	Программа с числами Стирлинга	118

Введение

В настоящее время в условиях усиливающегося влияния ограниченности сырьевых и энергетических ресурсов ведущих к проблемам связанным с загрязнением окружающей среды крайне актуальными становятся точные методы исследования геофизических и геотехнологических процессов [1], [12]—[16]. И здесь основное место занимают методы математического моделирования, так как в эксперименте нельзя непосредственно воспроизвести длительность и масштабы соответствующих процессов.

Решение связанных с этими проблемами задач включает следующие этапы: 1) построение математической модели геотехнологического процесса (прямая задача динамики); 2) проверка следствий из модели (с целью ее возможной корректировки); 3) применение модели для определения параметров процесса по данным физического моделирования; 4) разработка с использованием математической модели управления и оптимизации геотехнологических процессов.

В связи с этим, в настоящее время, при построении соответствующих математических моделей широко используются такие понятия как пористые среды, фильтрация, абсорбция и т.д., которые при идентификации их локальных гидродинамических характеристик на основе классических уравнений Навье–Стокса приводят к фактически непреодолимым проблемам. Поэтому, возникает необходимость в рассмотрении новых методов анализа так называемых приближенных моделей с распределенными параметрами типа модели субдиффузии, описываемых уравнениями с дробными производными и модели В.С. Голубева, учитывающие структуру пористых сред. Так, описывая фильтрационные потоки, В.С. Голубев в [12] показывает, что существует структура потока, зависящая

от расхода жидкостей, которая при малом расходе, имея ламинарный поток, охватывает всю элементарную камеру, а с увеличением расхода структура потока приобретает двойственный характер. В то время как в ядре потока (проточной зоне) жидкость движется от входа к выходу по прямолинейным траекториям, на периферии потока (в застойной зоне) она вовлекается в вихревое движение. Такой не ламинарный (но и не турбулентный) режим характерен для течения жидкости в пористой среде.

Феноменологическое уравнение движения жидкости на основе модели пористой среды, состоящей из проточных и застойных зон было предложено В.С. Голубевым в предположении, что процесс нестационарной фильтрации сжимаемой жидкости в полубесконечной области при заданном изменении давления $p(t)$ на границе описывается задачей (см. [2],[3])

$$(1 - \nu) \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial t} + \nu \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 P_1(t, x)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P_2(t, x)}{\partial t} = \gamma(P_1 - P_2)(t, x), \quad (2)$$

$0 < x < \infty, 0 < t < \infty$ с начальными условиями

$$P_1(t, x)|_{t=0} = P_2(t, x)|_{t=0}, \quad (3)$$

и краевыми условиями

$$P_1(t, x)|_{x=0} = q(t), \quad P_1(t, x)|_{x=\infty} = 0, \quad (4)$$

где ν — доля объема проточных зон, $P_1(t, x)$ и $P_2(t, x)$ — давление в проточных и застойных зонах, соответственно, γ — константа массообмена между проточными и застойными зонами.

Требуется найти градиент давления у границы области $\left. \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \varphi(t)$, который определяет скорость течения жидкости согласно равенству

$$u(t, x) = -\frac{k}{\mu\chi} \cdot \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} \text{— эмпирический закон Дарси,}$$

k — проницаемость пористой среды, μ — вязкость жидкости.

В [2], [3] для нахождения градиента $\left. \frac{\partial P_1}{\partial x} \right|_{x=0}$ система (1) приводится к одному уравнению вида

$$\begin{aligned} & \nu \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial t} + (1 - \nu) P_1(t, x) - \\ & - (1 - \nu) \gamma^2 \int_0^t e^{\gamma(s-t)} P_1(s, x) ds = a \frac{\partial^2 P_1(t, x)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (5)$$

с условиями

$$P_1(t, x)|_{t=0}, \text{— условие Коши} \quad (6)$$

$$P_1(t, x)|_{x=0} = q(t), \quad P_1(t, x)|_{x=\infty} = 0. \quad (7)$$

Затем, без указания решения задачи (5)—(7), приводятся два возможных метода вычисления градиента $P_0(t)$.

1. Использование метода Лапласа дает следующее выражение (см. [2], с. 102)

$$\begin{aligned} -\left. \frac{\partial P_1}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau-u}} \left(\frac{d}{du} \int_0^u \left\{ \exp \left[- \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) (u-z) \right] \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \times I_0 \left[\frac{\beta}{2} (u-z) \right] + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (1 + \beta) \int_0^{u-z} \exp \left[- \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) v \right] I_0 \left(\frac{\beta}{2} v \right) dv \right\} P_s(z) dz \right) du, \quad (8) \\ \xi &= x \sqrt{v\gamma/a}, \quad \tau = t\gamma, \quad \beta = (1 - \nu)/\nu \end{aligned}$$

где I_0 —функция Бесселя мнимого аргумента.

Однако формула (8) неудобна для анализа и численных расчетов, так как в нее входит дважды операция дифференцирования и трижды неопределенный интеграл.

2. Второй метод, который приводится в [3], использует понятие дробной производной и получает значение градиента как дробную производную порядка $1/2$ от функции $P_0(t)$, т.е. устанавливается соотношение

$$\left. \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{d^{\frac{1}{2}} P_0(t)}{dt^{\frac{1}{2}}}. \quad (9)$$

При этом, ответ дается в виде

$$\varphi(t) = L_t^{\frac{1}{2}} q(t) = \sqrt{\frac{a}{\nu}} e^{-\gamma t} M e^{\gamma t}, \quad (10)$$

где неограниченный оператор M формально выписывается в виде ряда

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^{\frac{1}{2}-n}, \quad (11)$$

где $a_0 = 1, a_1 = \gamma(\beta - 1), a_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} a_k, (k \geq 3)$, сходимость которого в [2] и [3] не обсуждается.

Тем самым, по существу, не обсуждается вопрос о сходимости приближенных решений к точному и их устойчивости к погрешностям исходных данных.

Таким образом, результаты приведенные в [2], [3] не касаются вопросов корректной разрешимости и следующей из этого устойчивости решений по исходным данным, в этих работах не обсуждаются. В тоже время такие исследования важны при численной реализации задач с применением высококомпьютерных технологий.

Как известно, согласно Ж.Адамару, задача определения решения $u \in U$ уравнения $Au = f, (f \in F)$ корректно поставлена на паре (U, F) метрических пространств U и F с метриками ρ_U и ρ_F соответственно, если выполнены условия:

а) для всякого $f \in F$ существует $u \in U$ — решение уравнения, б) решение определяется однозначно, в) задача устойчива на пространствах (F, U) , то есть для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое что из неравенства $\rho_F(f_1, f_2) < \delta$, следует $\rho_U(u_1, u_2) < \varepsilon$.

Однако устойчивость задачи зависит от выбранных топологий в F и U и, вообще говоря, подходящим выбором топологий формально можно добиться непрерывности оператора A^{-1} , существование которого обеспечивают условия а) и б). Так, в случае линейного взаимоднозначного соответствия оператора A и нормированных пространств U и F , устойчивость будет иметь место, если пространство F наделить нормой $\|f\|_F = \|A^{-1}f\| = \|u\|_U$, и тогда $\|A^{-1}f\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|A^{-1}f\|}{\|f\|} = 1$ (см. [29], с.12).

Первые исследования в этом направлении для указанных задач с применением методов функционального анализа и операторных уравнений были проведены в работах [53], где доказана корректность по С.Г. Крейну равномерная корректность задачи (5)-(6) и получена численная реализация ее решения.

В настоящей диссертации продолжается исследование уравнения Голубева в новых постановках. Так эти уравнения рассматриваются для $t \in \mathbb{R}$, и вместо условий Коши ставится задача без начальных условий. На важность таких задач указывают Г. Баренблатт и Я. Зельдович [4], при постановке вопросов о свойствах явлений, которые не зависят от начальных условий, или не зависят от деталей начальных условий, но вместе с тем система еще далека от состояния равновесия. Поэтому, их можно объединить названием «промежуточная асимптотика».

Такие асимптотики являются решениями вырожденных задач, в которых параметры независимых переменных обращаются в нуль или бес-

конечность.

Так, в соответствии с А.Н. Тихоновым и А.А. Самарским [38], с. 241, изучается процесс теплопроводности в момент достаточно удаленный от начального, то влияние начальных условий практически не сказывается на распределении температуры в момент наблюдения. В этом случае ставится задача об оптимальности решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющего граничным условиям одного из трех типов, заданных для всех $t > -\infty$. Если стереть ограничения, то задаются граничные условия на обоих концах стержня. Для полубесконечного стержня задается лишь одно условие.

Однако для того чтобы решение вырожденной задачи представляло собой промежуточную асимптотику необходимо, чтобы оно было устойчиво относительно изменений малых возмущений, то есть вырожденная задача должна быть корректной.

В диссертации, именно с этой точки зрения исследуются задачи без начальных условий, для уравнений, описывающих процессы субдиффузии, диффузии и фильтрации в пористых средах и приводятся алгоритмы их приближенных решений. В частности, сюда относятся модели субдиффузии и процессы фильтрации в пористой среде с проточными и застойными зонами.

При $t \in (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ и $x \in (0, \infty) = \mathbb{R}^+$ рассматривается система уравнений

$$a \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} + (1 - \nu) \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} = \gamma(u_1(t, x) - u_2(t, x)), \quad (13)$$

где $a > 0$, $0 \leq \nu \leq 1$, $\gamma \geq 0$.

Ставится задача о нахождении решения системы (12)—(13), удовле-

творяющему условиям

$$u_1(t, 0) = \varphi(t), \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |u_1(t, x)| = \lim_{x \rightarrow \infty} |u_2(t, x)| = 0, \quad (15)$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |u_1(t, x)| < \infty, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_2(t, x)| < \infty \quad (16)$$

и рассматриваются случаи

1. функция $\varphi(t)$ является периодической;
2. функция $\varphi(t)$ принадлежит пространству равномерно непрерывных и ограниченных функций на $(-\infty, T]$, $T < \infty$.

В первом случае для задачи (12)–(15) указывается явный вид точного решения, и выписывается и градиент $q(t) = G\varphi(t)$. А именно, доказыва-
ется следующее

Утверждение 1. Если в условии (14) функция $\varphi(t)$ периодическая с периодом T и рядом Фурье

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left[\frac{2\pi n}{T} (t - \delta_n^0) \right], \end{aligned}$$

где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \delta_n^0 = \frac{T}{2\pi n} \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n} \right),$$

то существует решение задачи (12)–(16), периодическое при каждом $x \in \mathbb{R}^+$ и оно имеет вид

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\sqrt{\frac{(\rho_n + \alpha_n)}{2}} x} \cdot \cos \left[\sqrt{\frac{(\rho_n - \alpha_n)}{2}} x - \omega_n t + \delta_n^0 \right], \quad (17)$$

где $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$,

$$\rho_n = \frac{\omega_n}{a} \sqrt{\frac{\gamma^2 + \omega_n^2 \nu^2}{\omega_n^2 + \gamma^2}}, \quad \alpha_n = \frac{\omega_n^2 (1 - \nu) \gamma}{a(\gamma^2 + \omega_n^2)}. \quad (18)$$

Из представления (17) следует выражение для градиента

$$G\varphi(t) = \left. \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0} = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\rho_n} \cos(\Theta_n - \omega_n t), \quad (19)$$

где $\Theta_n = \arccos \sqrt{\frac{\rho_n + \alpha_n}{2\rho_n}}$.

Диссертация состоит из введения, трех глав и приложений. В первой главе дается постановка нестационарных задач без начальных условий для дифференциальных уравнений типа В.С. Голубева, описывающих движение жидкости в пористой среде с застойными зонами, когда время t меняется на всей действительной оси $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ или $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, а пространственная переменная x на положительной полуоси $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Приведенная в диссертации постановка таких задач является новой. Даже в [2] и [3] Ю.И. Бабенко рассматривал уравнение В.С. Голубева для $t \in \mathbb{R}^+$ с условием Коши при $t = 0$, и правым условием Дирихле при $x = 0$.

Далее, учитывая, что для обоснования корректной разрешимости поставленных задач в диссертации используется довольно общий метод С.Г. Крейна, здесь приводятся необходимые понятия и факты из общей теории эволюционных уравнений в банаховом пространстве.

Вторая глава посвящена обоснованию корректной разрешимости поставленных задач.

В третьей главе приводятся вычислительные алгоритмы корректной компьютерной реализации решаемых задач.

Глава 1

О задачах фильтрации в пористой среде и методах их решений

Как указано во введении, при исследовании геофизических и геохимических процессов, с целью разработки способов оптимального управления ими, к числу основных относятся математические методы.

Среди многочисленных исследований в этом направлении [1], [15], [20], [22] важное место занимают работы В.С. Голубева [12]–[15] и, в частности его феноменологическая модель движения жидкости в пористой среде.

В этой главе приводятся уравнения В.С. Голубева в несколько расширенной постановке, указываются соответствующие задачи, которые относятся к классу нестационарных. И указываются методы исследования их корректной разрешимости, позволяющие в дальнейшем получать алгоритмы для корректной численной реализации соответствующих решений. Сюда относятся некоторые факты из общей теории операторных уравнений и их применение к исследованию корректной разрешимости начально–краевых задач.

1.1 Уравнения фильтрации для процессов тепло-массообмена в пористой среде

По аналогии с моделью В.С. Голубева рассмотрим феноменологическое уравнение движения жидкости на основе модели пористой среды, состоящей из проточных и застойных зон. В предположении фильтрации по направлению оси x , при $x > 0$, будем моделировать пористую среду системой из большого числа последовательно соединенных камер, сообщающихся посредством коротких каналов. Разделим объем камеры на проточную зону и застойную зону, жидкость которой участвует лишь в массообмене с проточной зоной.

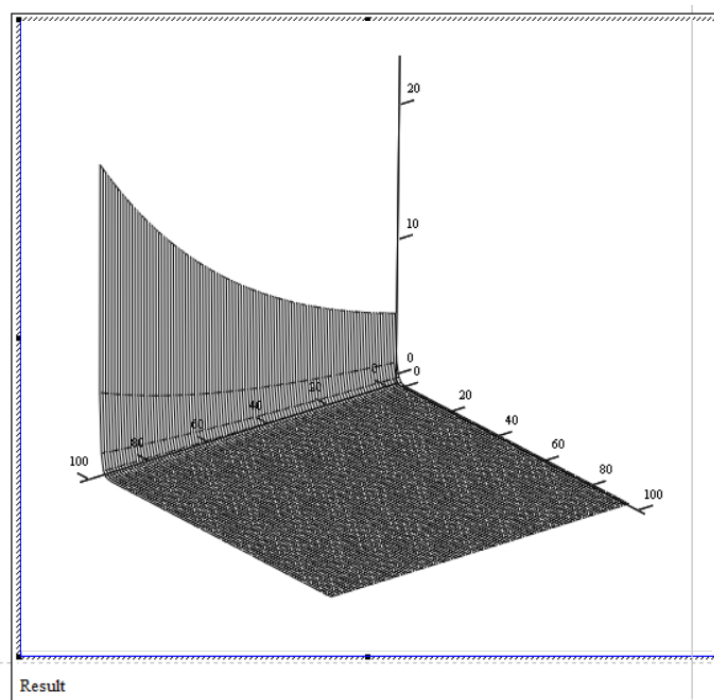


Рис. 1. Схематическое изображение траекторий частиц жидкости в областях ламинарного (а) и вихревого (б) массообмена между проточными и застойными зонами камеры.

Пусть V_1 и V_2 — объемы проточной и застойной зон, приходящихся на

единицу длины системы камер, ориентированных вдоль оси x . Запишем следующее уравнение сохранения массы жидкости в слое $(x, x + \Delta x)$:

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, t)\rho_1(x, \Delta x, t)V_1\Delta t - u(x, t)\rho_1(x, t)V_1\Delta t = \\ = [V_1\rho_1(x, t)\Delta x + V_2\rho_2(x, t)\Delta x] - \\ - [V_1\rho_1(x, t + \Delta t)\Delta x + V_2\rho_2(x, t + \Delta t)\Delta x], \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

где u — скорость течения в проточной зоне; $\rho_1(x, t)$, $\rho_2(x, t)$ — плотность жидкости проточной и застойной зон в момент времени t .

Переходя к пределу $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$, получим следующее уравнение непрерывности:

$$(1 - \nu)\frac{\partial\rho_2}{\partial t} + \nu\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \nu\frac{\partial(u\rho_1)}{\partial x} = 0, \quad (1.1.2)$$

где $\nu = \frac{V_1}{V_1+V_2}$ — доля объема проточных зон камер.

Пусть за единицу времени через 1 см^2 поверхности раздела проточной и застойной зон входит количество вещества $\gamma_0\rho_1$, а выходит $\gamma_0\rho_2$, причем для данного расхода полагаем $\gamma = \text{const}$. Для скорости массообмена между проточной и застойной зонами можно записать

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial t} = \gamma_0 S_V(\rho_1 - \rho_2) = \gamma(\rho_1 - \rho_2), \quad (1.1.3)$$

где $\gamma = \gamma_0 S_V$ — кинетический коэффициент массообмена, $S_V = S/V_2$, S — площадь поверхности раздела проточной и застойной зон. Величина S_V в случае пористой среды характеризует геометрию порового пространства (из соображений размерности $S_V \approx 1/d$, d — диаметр зерна).

Уравнение (1.1.3) аналогично подтвержденному экспериментально уравнению, характеризующему скорость массообмена между проточными и застойными зонами в фильтрующемся растворе.

Для пористой среды скорость u , входящая в уравнение (1.1.2), следующим образом связана с истинной скоростью фильтрации u_0 :

$$u = \frac{\chi_0}{\chi} u_0 = \frac{u_0}{\nu}, \quad (1.1.4)$$

здесь χ_0 и χ — пористость, отнесенная ко всему свободному объему и к объему проточных зон соответственно, ν — доля объема проточных зон порового пространства.

Применяя эмпирический закон Дарси к течению жидкости в проточных зонах, будем иметь

$$u = -\frac{k}{\mu\nu\chi_0} \frac{\partial P_1}{\partial x} = -\frac{k}{\mu\chi} \frac{\partial P_1}{\partial x}, \quad (1.1.5)$$

где P_1 — давление жидкости в проточных зонах, k — проницаемость пористой среды, μ — вязкость жидкости.

Система дифференциальных уравнений (1.1.2), (1.1.3), (1.1.5), совместно с уравнениями жидкости (и пористой среды) характеризует фильтрацию в среде с застойными зонами. Дальнейшие преобразования этой системы проводятся обычным способом. Так, для упругого режима фильтрации в недеформируемой среде полагают, что плотность жидкости линейно зависит от давления

$$\rho_i = \rho_a \left(1 + \frac{P_i - P_a}{E_g} \right), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (1.1.6)$$

где ρ_a — плотность жидкости при давлении P_a , E_g — модуль сжимаемости жидкости.

Преобразуем в (1.1.2) член $\frac{\partial(u\rho_1)}{\partial x}$ с учетом (1.1.5) и (1.1.6)

$$\frac{\partial(u\rho_1)}{\partial x} = -\frac{k}{\mu\chi} \left(\rho_1 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{\partial P_1}{\partial x} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right) \approx -\frac{k}{\mu\chi} \rho_a \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}.$$

Здесь принято осреднение по ρ_1 и отброшены по малости произведения производных ρ_1 и P_1 по x . Учтя в (1.1.2) и (1.1.3) зависимость

$\rho_{1,2}$ от $P_{1,2}$ по (1.1.6), получим следующие уравнения упругого режима фильтрации

$$(-\nu)\frac{\partial P_2}{\partial t} + \nu\frac{\partial P_1}{\partial t} = a\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}; \quad (1.1.7)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = \gamma(P_1 - P_2), \quad (1.1.8)$$

где $a = kE_g/(\mu\chi)$ — коэффициент пьезопроводности.

1.2 Постановка задач

В дальнейшем предполагается, что в уравнениях (1.1.1) и (1.1.2) параметры ν и γ принимают следующие значения: $0 < \nu < 1$, а параметр γ может иметь разный знак. Поэтому, в зависимости от знака γ рассматриваются следующие задачи:

I. Если $\gamma > 0$, то ставятся задачи:

Ia. Задача Дирихле.

Ищется решение системы (1.1.7)—(1.1.8) удовлетворяющее условию:

$$u(t, 0) = \varphi(t), \quad t \in (-\infty, T), \quad T < \infty, \quad (1.2.1)$$

и условиям

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |P_1(t, x)| = \lim_{x \rightarrow \infty} |P_2(t, x)| = 0, \quad (1.2.2)$$

$$\sup_{t \in (-\infty, T)} |P_1(t, x)| < \infty, \quad \sup_{t \in (-\infty, T)} |P_2(t, x)| < \infty. \quad (1.2.3)$$

Iб. Задача с граничными условиями третьего рода.

Ищется решение системы (1.1.7)—(1.1.8), удовлетворяющее условиям (1.2.2), (1.2.3) и граничному условию 3-го рода

$$\frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} + \mu P_1(t, x)|_{x=0} = \varphi(t). \quad (1.2.4)$$

Iв. Задача с периодическим условием.

Ищется решение системы (1.1.7)–(1.1.8), при $t \in (-\infty, \infty)$, удовлетворяющее условиям (1.2.2), (1.2.3) и условию (1.2.1), где $\varphi(t)$ — периодическая функция.

II. Если $\gamma < 0$ то ищется решение системы (1.1.7)–(1.1.8), удовлетворяющее условиям:

IIa. Задача Дирихле

$$u(t, 0) = \varphi(t), \quad t \in (T, \infty), \quad T > -\infty, \quad (1.2.5)$$

и условиям

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |P_1(t, x)| = \lim_{x \rightarrow \infty} |P_2(t, x)| = 0, \quad (1.2.6)$$

$$\sup_{t \in (T, \infty)} |P_1(t, x)| < \infty, \quad \sup_{t \in (T, \infty)} |P_2(t, x)| < \infty. \quad (1.2.7)$$

IIб. Задача с граничными условиями третьего рода.

Ищется решение системы (1.1.7)–(1.1.8), удовлетворяющее условиям (1.2.6), (1.2.7) и граничному условию (1.2.4) при $t \in [T, \infty)$.

IIв. Задача с периодическим условием.

Ищется решение системы (1.1.7)–(1.1.8), при $t \in (-\infty, \infty)$, удовлетворяющее условиям (1.2.6), (1.2.7) и условию (1.2.1), где $\varphi(t)$ — периодическая функция.

1.3 Некоторые факты из общей теории операторных уравнений

Содержание этого параграфа соответствует монографиям [17], [22], [26], [27], [52]. Здесь мы будем рассматривать *векторнозначные функции* $f(t)$ вещественного аргумента t , то есть функции, значения которых при каждом $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}^1$ являются элементами некоторого линейного банахова

пространства E .

Определение 1.3.1. Функция $f(t)$ называется *непрерывной в точке* t_0 , если $\|f(t) - f(t_0)\|_E \rightarrow 0$ при $t \rightarrow t_0$, и непрерывной на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.

При этом норма $\|f(t)\|_{E-}$ есть скалярная непрерывная функция.

Замечание 1.3.1. Множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций со значениями в E образуют линейную систему $C(E; [a, b])$, в которой можно ввести норму

$$\|f\|_{C[a,b]} = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|_E. \quad (1.3.1)$$

После чего $C(E; [a, b])$ становится линейным нормированным пространством.

При этом, если E — банахово пространство, то $C(E; [a, b])$ также банахово пространство.

Кроме введенного понятия (сильной) непрерывности функции $f(t)$, можно ввести понятие слабой непрерывности.

Если функция $f(t)$ имеет в каждой точке отрезка $[a, b]$ слабую производную, то сохраняется оценка (1.3.2).

В частности, если слабая производная равна нулю во всех точках отрезка $[a, b]$, то функция $f(x)$ постоянна.

Аналогично определяются производные любого порядка от векторнозначных функций.

Если функция $f(t)$ со значениями в банаховом пространстве E непрерывна на отрезке $[a, b]$, то предел интегральных сумм:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N f(t_k) \Delta t_k = \int_a^b f(t) dt.$$

Здесь предел понимается в смысле сходимости по норме пространства E , когда диаметр разбиения $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ стремится к нулю.

Предел существует и не зависит от способа разбиения отрезка на части.

Справедлива оценка

$$\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\| dt \quad (1.3.2)$$

и теорема о среднем

$$\int_a^b f(t) dt = (b - a) \bar{f},$$

где \bar{f} – элемент замкнутой выпуклой оболочки множества значений функции $f(t)$ на отрезке $[a, b]$.

Функция

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds$$

является непрерывно дифференцируемой и $F'(t) = f(t)$.

Для любой непрерывно дифференцируемой функции $F(t)$ справедлива *формула Ньютона–Лейбница*.

$$\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a).$$

Так же, как и в классическом анализе, вводится понятие несобственного интеграла. Например, если функция непрерывна на $[a, b]$ при любом $b > a$, то под ее интегралом на $[a, \infty]$ понимают

$$\int_a^\infty f(t) dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Если предел по норме пространства E существует, то говорят, что интеграл сходится.

Интеграл абсолютно сходится, если

$$\int_a^\infty \|f(t)\| dt < \infty.$$

Из абсолютной сходимости интеграла следует обычная сходимость.

Можно рассматривать интегралы, зависящие от параметра. На них переносятся классические теоремы о непрерывной зависимости от параметра, об интегрировании и дифференцировании по параметру.

Для всякого пространства E , содержащего счетное всюду плотное множество, понятия слабой и сильной измеримости совпадают.

Справедливо утверждение, что если $f(t)$ сильно измерима, то ее норма $\|f(t)\|_E$ является измеримой скалярной функцией.

Для простых функций $f(t)$ интеграл определяется единственным образом:

$$\int_a^b f(t)dt = \sum f_j \text{mes} \Delta_j.$$

Определение 1.3.2. Функция $f(t)$ называется *суммируемой (интегрируемой) по Бохнеру* на отрезке $[a, b]$, если существует сходящаяся к ней почти всюду последовательность простых функций $f_n(t)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \|f(t) - f_n(t)\|_E dt = 0.$$

При этом интегралом суммируемой функции $f(t)$ называется предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Предел понимается в смысле сходимости по норме, то есть

$$\left\| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt \right\|_E \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$.

Справедлив следующий факт.

Для того, чтобы функция $f(t)$ была суммируемой по Бохнеру, необходимо и достаточно, чтобы она была сильно измеримой и чтобы ее норма $\|f(t)\|$ была суммируемой.

Для интеграла Бохнера справедлива оценка (1.3.2).

Также функция $F(t)$, представимая неопределенным интегралом

$$F(t) = \int_a^t f(s)ds$$

от суммируемой функции $f(t)$, почти во всех точках отрезка $[a, b]$ имеет сильную производную, причем в этих точках $F'(t) = f(t)$.

Если A — ограниченный линейный оператор, отображающий банахово пространство E в банахово пространство F , и $f(t)$ — суммируемая функция со значениями в E , то

$$\int_a^b Af(t)dt = A \int_a^b f(t)dt.$$

Совокупность всех суммируемых на $[a, b]$ функций со значениями в банаховом пространстве E образуют линейную систему $L_1(E, [a, b])$, в которой вводится норма

$$\|f\|_{L_1(E; [a, b])} = \int_a^b \|f(t)\|dt.$$

В этой норме пространство $L_1(E; [a, b])$ банахово.

Кроме того, аналогично скалярному случаю вводятся банаховы пространства $L_p(E; [a, b])$ ($1 \leq p < \infty$) с нормой

$$\|f\|_{L_p(E; [a, b])} = \left[\int_a^b \|f(t)\|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

и

$$\|f\|_{L_\infty(E; [a, b])} = \text{vrai sup}_{t \in [a, b]} \|f(t)\|, \quad p = \infty.$$

1.4 Оператор–функции.

Пусть E_1 и E_2 банаховы пространства. Оператор–функции $A(t)$ (то есть функции, значениями которых являются ограниченные операторы) яв-

ляются частными примерами функций со значениями в банаховом пространстве ограниченных операторов, действующих из E_1 в E_2 .

Для оператор–функций определяются три вида непрерывности: а) непрерывность по норме, б) сильная непрерывность, в) слабая непрерывность.

Определение 1.4.1. Будем говорить, что оператор–функция $A(t)$ непрерывна по норме в точке $t_0 \in [a, b]$, если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|A(t) - A(t_0)\| = 0.$$

Определение 1.4.2. Оператор–функция $A(t)$ сильно непрерывна в точке $t_0 \in [a, b]$, если при любом фиксированном $x \in E_1$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|A(t)x - A(t_0)x\|_{E_2} = 0.$$

Определение 1.4.3. Оператор–функция $A(t)$ слабо непрерывна в точке $t_0 \in [a, b]$, если при любых фиксированных $x \in E_1$, $l \in E_2^*$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |l(A(t)x) - l(A(t_0)x)| = 0.$$

Аналогично определяются понятия дифференцируемости (дифференцируемости по норме операторов), сильной дифференцируемости (дифференцируемости всех функций $A(t)x$, $x \in E_1$) и слабой дифференцируемости (дифференцируемости скалярной функции $l(A(t)x)$, $x \in E_1$, $l \in E_2^*$).

Имеет место следующий критерий сильной непрерывности операторной функции.

Теорема (Банах–Штейнгауз). Оператор–функция $A(t)$ сильно непрерывна при $t_0 \in [a, b]$ на всем E_1 , если нормы ее равномерно ограничены, то есть

$$\|A(t)\| \leq M,$$

и функции $A(t)x$ непрерывны для x из некоторого плотного в E_1 множества.

Наиболее важными характеристиками линейных операторов, определенных на линейном многообразии $D(A)$ комплексного банахова пространства E и действующих в это же пространство E являются спектр и резольвента оператора.

Понятие спектра оператора связано с рассмотрением уравнения

$$Ax - \lambda x = y \quad x \in D(A), y \in E, \quad (1.4.1)$$

где λ – комплексное число.

Определение 1.4.4. Число λ называется *регулярной точкой* оператора A , если уравнение (1.4.1) корректно и плотно разрешимо. То есть однородное уравнение

$$Ax - \lambda x = 0$$

имеет только нулевое решение, для любого $x \in D(A)$ справедливо неравенство

$$\|x\|_E \leq k\|(A - \lambda I)x\|_E,$$

и замыкание области значений оператора $A - \lambda I$ совпадает с E .

Определение 1.4.5. Совокупность всех регулярных точек называется *резольвентным множеством* оператора A .

Определение 1.4.6. Дополнение на комплексной плоскости к резольвентному множеству называется *спектром оператора* A .

Если оператор A замкнут, то его резольвентное множество состоит из тех и только тех точек λ , для которых существует ограниченный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, заданный на всем пространстве E .

Определение 1.4.7. Определенный при регулярных λ , оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ называется *резольвентой оператора* A и обозначается $R(\lambda, A)$.

Для замкнутого оператора резольвентное множество является открытым подмножеством комплексной плоскости, спектр—замкнутое множество.

Резольвента $R(\lambda, A)$ является на резольвентном множестве аналитической функцией со значениями в пространстве $L(E, E)$ линейных ограниченных операторов.

Для любых двух регулярных точек λ и μ справедливо *резольвентное тождество Гильберта*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\lambda - \mu)R(\lambda, A)R(\mu, A).$$

Из этого тождества выводится формула для производных

$$\frac{d^k R(\lambda, A)}{d\lambda^k} = k! R^{k+1}(\lambda, A).$$

Классификация точек спектра. Приняты следующие определения.

1. λ принадлежит *точечному спектру*, если оператор $A - \lambda I$ не имеет обратного.

2. λ принадлежит *остаточному спектру*, если оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ определен на не плотном множестве.

3. λ принадлежит *непрерывному спектру*, если оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ определен на плотном множестве, но неограничен.

Таким образом, вся комплексная плоскость разлагается в сумму четырех взаимно непересекающихся множеств: резольвентное множество, точечный, остаточный и непрерывный спектры.

Если оператор задан каким-либо аналитическим выражением, то структура его спектра существенно зависит от того пространства, в котором он исследуется.

1.5 Экспоненциальная функция, группы и полугруппы операторов

Начиная с фундаментальных работ Э. Хилле, Р. Филлипса и др. (см. [17], [52]) в теории уравнений параболического типа важное место занимают однопараметрические полугруппы линейных преобразований $T(t)$, $t \geq 0$ называемыми *каноническими* и определяемые соотношением $T(\alpha \oplus \beta) = T(\alpha)T(\beta)$, α и β — действительные или комплексные числа. При этом в системе рассматриваемых чисел можно выделить множество полугрупп, соответствующим разнообразным операциям сложения.

Если оператор A , действующий в банаховом пространстве E , ограничен, то можно ввести с помощью ряда экспоненциальную функцию

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

Эта функция непрерывна по t в смысле нормы оператора и удовлетворяет групповому соотношению

$$e^{tA} e^{sA} = e^{(t+s)A}.$$

Оказывается, что вообще семейство операторов $T(t)$ ($-\infty < t < \infty$), непрерывно по норме зависящих от t и удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{aligned} T(t)T(s) &= T(t+s), & (-\infty < t < \infty), \\ T(0) &= I, \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

представимо в виде e^{tA} , где A — ограниченный оператор.

Оператор A можно найти основываясь на том, что группа $T(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению для экспоненты

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t),$$

поэтому оператор A можно определить как производную от группы $T(t)$ в нуле, то есть

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (T(h) - I)x. \quad (1.5.2)$$

В связи с этим оператор A называется *производящим оператором* (или *генератором*) группы $T(t)$.

Если отказаться от непрерывности по норме экспоненциальной функции и потребовать только ее *сильную непрерывность по t* , то объект оказывается значительно более богатым. Производящий оператор A снова вводится равенством (1.5.2) на всех тех $x \in E$, для которых предел существует. В этом случае он может быть уже неограниченным оператором, однако A является замкнутым и имеющим плотную в E область определения.

Дальнейшее обобщение понятия экспоненциальной функции от оператора связано с отказом от требования определения этой функции при $t < 0$.

В связи с этим возникли следующие определения:

Определение 1.5.1. Семейство ограниченных операторов $T(t)$ ($t > 0$), действующих в банаховом пространстве E , называется *сильно непрерывной однопараметрической полугруппой операторов*, если $T(t)$ сильно непрерывно зависит от t и удовлетворяет условию $T(t)T(s) = T(t+s)$ ($t, s > 0$).

Определение 1.5.2. Говорят, что $T(t)$ -полугруппа класса C_0 , если она сильно непрерывна и

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \|T(t)x - x\|_E = 0 \quad (1.5.3)$$

при любом $x \in E$.

Для полугрупп класса C_0 также вводится понятие производящего оператора по формуле (1.5.2.) как производной справа от полугруппы в нуле.

Отметим, что если семейство ограниченных операторов $T(t)$ ($0 < t < \infty$) обладает полугрупповым свойством, то из измеримости функций $T(t)x$ при каждом $x \in E$ следует сильная непрерывность полугруппы $T(t)$ при $t > 0$ (см. [6], [29]). Отсюда следует существование предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T(t)\|}{t} = \omega,$$

называемого *типом полугруппы*.

Таким образом, требование сильной непрерывности полугруппы при $t > 0$ является естественным и оно влечет за собой определенный характер поведения полугруппы на бесконечности.

В связи с этим выделение новых типов полугрупп и их классификация в основном ведется по признаку поведения полугрупп в окрестности точки $t = 0$. Многочисленные результаты в этом направлении изложены в [9], [26], [43], [51], [52].

Существует классический критерий определения производящего оператора C_0 -полугруппы:

Для того чтобы линейный оператор A был производящим оператором (генератором) полугруппы $T(t)$ класса C_0 , необходимо и достаточно, чтобы он был замкнутым с плотной в E областью определения, имел спектр лежащий в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq \omega$ и резольвенту, удовлетворяющую условиям

$$\|R^m(\lambda, A)\| \leq \frac{K}{(\lambda - \omega)^m}, \quad \lambda > \omega \quad (1.5.4)$$

и $m = 1, 2, \dots$, где M не зависит от λ и m .

Отметим, что условия на все степени резольвенты трудно проверяемы. В связи с этим, крайне важным является достаточное условие на

резольвенту

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}, \quad \lambda > \omega, \quad (1.5.5)$$

из которого легко следует (1.5.4).

Для полугруппы $T(t)$ класса C_0 справедлива оценка

$$\|T(t)\| \leq K e^{\omega t} \quad (1.5.6)$$

и если $\omega \leq 0$, то полугруппа удовлетворяет оценке

$$\|T(t)\| \leq K$$

и называется равномерно ограниченной C_0 -полугруппой (см. [9], [26], [27], [52]).

Если $K = 1$, то полугруппа называется сжимающей C_0 -полугруппой. Умножив C_0 -полугруппу на $e^{-\omega t}$, очевидно получим новую полугруппу класса C_0 с условием равномерной ограниченности.

Построение полугруппы по производящему оператору можно произвести с помощью интеграла Коши

$$T(t)x = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\lambda t} R(\lambda, A)x d\lambda.$$

При $x \in D(A)$ и $t > 0$ этот интеграл сходится в смысле главного значения и определяет на плотном в E множестве $D(A)$ ограниченный оператор, который замыканием доопределяется на всем пространстве E . При этом $T(t)$ сильно сходится к I при $t \rightarrow +0$.

1.6 Дробные степени операторов

1.6.1 Позитивные операторы и их дробные степени

В исследовании корректной разрешимости начально–краевых задач для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченными операторами важное место занимают дробные степени этих операторов. В частности, это относится к так называемым позитивным операторам см. [26], с. 135.

Определение 1.6.1 Оператор A с плотной областью определения будем называть *позитивным*, если при всех $t > 0$ существуют операторы $(A + tI)^{-1}$ и если

$$\|(A + tI)^{-1}\| \leq \frac{C}{1 + t}. \quad (1.6.1)$$

Позитивные операторы не обязательно являются производящими операторами сильно непрерывных полугрупп.

Оказывается, что для введения дробных степеней можно ослабить условие позитивности.

Как известно, для производящих операторов C_0 -полугрупп, удовлетворяющих оценке

$$\|T(t)\| \leq Me^{-\omega t}, \quad \omega > 0, t > 0, M > 0, \quad (1.6.2)$$

определены дробные степени $(-A)^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$ формулой Балакришнана (см. [17], с. 358)

$$(-A)^\alpha x = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{(T(t) - I)x}{t^{1+\alpha}} dt, \quad (x \in D(A)). \quad (1.6.3)$$

И для резольвенты оператора $A_\alpha = -(-A)^\alpha$ справедливо представление

$$(\mu I - A_\alpha)^{-1} = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^\infty (rI - A)^{-1} \frac{r^\alpha dr}{\mu^2 - 2\mu r^2 \cos \alpha \pi + r^{2\alpha}}. \quad (1.6.4)$$

Оператор A_α является производящим оператором аналитической полугруппы $T_\alpha(t)$, равномерно непрерывной и удовлетворяющей C_0 -условию.

Справедлива следующее

Утверждение 1.6.1 Если A - генератор C_0 -полугруппы, удовлетворяющей оценке (1.6.2), то для полугрупп $T_\alpha(t)$, генераторами которых являются операторы $-(-A)^\alpha$, справедлива оценка

$$\|T_\alpha(t)\| \leq M e^{-\omega^\alpha t}, \quad (1.6.5)$$

где константы M и ω из (1.6.2).

Доказательство этого факта см. в [21].

Лемма 1.6.1 Если оператор A удовлетворяет условиям утверждения 1.6.1, то для резольвенты оператора $A_\alpha = -(-A)^\alpha$ имеет место оценка

$$\|(\mu I - A_\alpha)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\mu + \omega^\alpha)^n}, \quad (1.6.6)$$

где константы M и ω из (1.6.2).

1.6.2 Дробные производные периодических функций

При изучении периодических процессов оказываются полезными следующие определения дробных производных для периодических функций. Так дробная производная порядка ν от периодической функции $f = A \cos(\omega t + \varphi)$, $A, \omega, \varphi = \text{const}$, определим равенством

$$D^\nu A \cos(\omega t + \varphi) = A \omega^\nu \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\nu\right), \quad -\infty < t < \infty. \quad (1.6.7)$$

есть производная Фурье.

Лиувилль определял дробную производную посредством равенства

$$D^\nu e^{at} = a^\nu e^{at}, \quad -\infty < t < \infty, \quad (1.6.8)$$

которое при $\nu < 1$ совпадает с производной Римана–Лиувилля

$$D_c^\nu f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dt} \int_c^t f(\tau)(t-\tau)^{-\nu} d\tau. \quad (1.6.9)$$

1.7 Корректные задачи

Так как целью диссертации является корректная компьютерная реализация некоторых математических моделей и вариационных процессов, то в этом параграфе приводятся необходимые в дальнейшем факты из общей теории корректных задач.

1.7.1 Задачи корректные по Ж.Адамару

Целью исследований настоящей диссертации является применение теории однопараметрических полугрупп и установление корректной разрешимости некоторых краевых задач для эволюционных уравнений с переменными коэффициентами, и, в частности, для уравнений с дробными производными.

Как известно, согласно Ж.Адамару, задача определения решения $u \in U$ уравнения $Au = f$, ($f \in F$) корректно поставлена на паре (U, F) метрических пространств U и F с метриками ρ_U и ρ_F соответственно, если выполнены условия:

а) для всякого $f \in F$ существует $u \in U$ — решение уравнения, б) решение определяется однозначно, в) задача устойчива на пространствах (F, U) , то есть для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$, такое что из неравенства $\rho_F(f_1, f_2) < \delta$, следует $\rho_U(u_1, u_2) < \varepsilon$.

Однако, как было отмечено, устойчивость задачи зависит от выбранных топологий в F и U .

В связи с этим возникает следующая проблема выбора топологий в U и F .

1. С одной стороны важно, чтобы эти топологии не зависели от оператора A . Например, в случае когда $A = A(\lambda)$ — оператор зависящий от некоторого параметра λ , важно чтобы область определения обратного оператора $A^{-1}(\lambda)$ (например резольвенты $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ была не зависящей от λ).

2. С другой стороны желательно иметь наиболее широкий класс начальных данных F при которых решение задачи $u \in U$ сохраняло хорошие свойства.

Таким образом, установление устойчивости существенно зависит от выбора функциональных пространств, в которых ищется решение и в которых соответствующие обратные операторы ограничены.

В связи с этим, в классе корректных по Адамару задач важное место занимают задачи в которых U и F плотно вложены в некоторое банахово пространство E и сходимость понимается в смысле $\|\cdot\|_E$. Такие задачи мы называем равномерно корректными.

1.7.2 Задачи для дифференциальных уравнений, равномерно корректные по С.Г. Крейну

Следующие факты связывают понятия (C_0) - полугруппы и (C_0) - косинус функции с корректной разрешимостью задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве первого и второго порядков.

$$u'(t) = Au(t) \tag{1.7.1}$$

$$u''(t) = Au(t) \tag{1.7.2}$$

Определение 1.7.1 ([26], с. 38). Решением уравнения (1.7.1) на отрезке $[0, t_0]$ называется функция $u(t)$, удовлетворяющая условиям: 1) $u(t) \in D(A)$ при всех $t \in [0, t_0]$, 2) в каждой точке $t \in [0, t_0]$ существует

сильная производная $u'(t)$, 3) уравнение (1.8.1) удовлетворяется при всех $t \in [0, t_0]$.

Под задачей Коши на $[0, t_0]$ понимают задачу о нахождении решения уравнения (1.7.1), удовлетворяющее условию

$$u(0) = u_0 \in D(A). \quad (1.7.3)$$

Определение 1.7.2 Задача Коши поставлена корректно на отрезке $[0, t_0]$ если: 1) при любом $u_0 \in D(A)$ существует ее единственное решение и это решение непрерывно зависит от начальных данных в том смысле, что из $x_0(0) \rightarrow 0$ следует, что $x_n(t) \rightarrow 0$ равномерно по t на каждом компакте из $[0, t_0]$.

Известно, что задача (1.7.1)–(1.7.3) равномерно корректна тогда и только тогда когда A является генератором (C_0) -полугруппы $T(t)$, при этом решение имеет вид

$$u(t) = T(t)\varphi \quad (1.7.4)$$

и существуют константы M и ω , не зависящие от φ такие, что выполняется оценка

$$\|u(t)\| \leq M e^{\omega t} \|\varphi\|. \quad (1.7.5)$$

1.8 Краевые задачи для уравнения 2-го порядка

1.8.1 Уравнения второго порядка

В банаховом пространстве E рассматривается однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} = Au(t), \quad (0 \leq t \leq T) \quad (1.8.1)$$

где A –линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в E , с областью определения $D(A)$.

Приведем необходимые нам известные результаты связанные с корректной разрешимостью краевых задач для уравнения (1.8.1), изложенные в [26], гл. III.

В [26] уравнение (1.8.1) рассматривается в предположении сильной позитивности оператора A в соответствии со следующим определением

Определение 1.8.1 Решением уравнения (1.8.1) будем называть функцию $u(t)$ со значениями в $D(A)$, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую (1.8.1) на отрезке $[0, T]$.

Так как сильная позитивность оператора A гарантирует существование его дробных степеней и, в частности, операторов $A^{-\frac{1}{2}}$ и $A^{\frac{1}{2}}$, причем оператор $-A^{\frac{1}{2}}$ является производящим оператором полугруппы $V(t)$ класса C_0 . При этом для $z_0 \in D(A)$ и $w_T \in D(A)$ функции

$$z(t) = V(t)z_0 \quad w(t) = V(T-t)w_T \quad (1.8.2)$$

порождают решения уравнения (1.8.1). Однако решения уравнения (1.8.1) на интервале $0 < t < T$ будут бесконечно дифференцируемы при любых $z_0, w_T \in E$.

В связи с этим вводятся следующие определения, классифицирующие понятие решения в зависимости от поведения на концах отрезка $[0, T]$.

Определение 1.8.2 Функция $u(t)$ называется *ослабленным решением* уравнения (1.8.1) если: 1) она непрерывна и имеет непрерывную первую производную на отрезке $[0, T]$ и вторую производную на $(0, T)$, то есть

$$u'(t) \in C[0, T], u'' \in C(0, T); \quad (1.8.3)$$

2) ее значения принадлежат $D(A)$ при $0 < t < T$, а функция $A^{\frac{1}{2}}u(t)$ непрерывна на всем отрезке $[0, T]$, то есть

$$u(t) \in D(A), \quad 0 < t < T; \quad (1.8.4)$$

$$A^{\frac{1}{2}}u(t) \in C[0, T]; \quad (1.8.5)$$

3) $u(t)$ удовлетворяет уравнению (1.8.1) в интервале $(0, T)$, то есть

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Au(t), \quad t \in (0, T). \quad (1.8.6)$$

Определение 1.8.3 Функция $u(t)$ называется *обобщенным решением* уравнения (1.8.1), если: 1) она удовлетворяет условиям (1.8.4), а функция $A^{-\frac{1}{2}}u(t)$ имеет непрерывную вторую производную на $(0, T)$, то есть

$$A^{-\frac{1}{2}}u(t) \in C^1[0, T]; \quad (1.8.7)$$

2) она удовлетворяет условиям (1.8.5), (1.8.7).

В [26] рассматриваются лишь ослабленные или обобщенные решения уравнения (1.8.1).

Справедливо следующее

Утверждение (С.Г. Крейн) Всякое обобщенное решение уравнения (1.8.1) имеет вид

$$u(t) = V(t)z_0 + V(T-t)w_T \quad (1.8.8)$$

и наоборот, функция вида (1.8.8) является обобщенным решением уравнения (1.8.1) при любых $z_0, w_T \in E$.

Для того чтобы обобщенное решение (1.8.8) было ослабленным, необходимо и достаточно, чтобы $z_0, w_T \in D(A^{\frac{1}{2}})$. Все обобщенные решения уравнения (1.8.1) являются аналитическими функциями от t при $0 < t < T$.

1.8.2 Краевая задача

Введем в рассмотрение систему краевых условий вида

$$\begin{aligned} L_1(u) &= \alpha_{11}u_0 + \alpha_{12}u'_0 + \beta_{11}u_T + \beta_{12}u'_T = f_1; \\ L_2(u) &= \alpha_{21}u_0 + \alpha_{22}u'_0 + \beta_{21}u_T + \beta_{22}u'_T = f_2, \end{aligned} \quad (1.8.9)$$

где $\alpha_{ij}, \beta_{ij} (i, j = 1, 2)$ – комплексные числа, f_1, f_2 – заданные элементы пространства E , $u_0 = u(0), u'_0 = u'(0), u_T = u(T), u'_T = u'(T)$. Формы $L_1(u)$ и $L_2(u)$ предполагаются линейно независимыми.

Определение 1.8.4. Если ослабленное решение $u(t)$ уравнения (1.8.1) удовлетворяет краевым условиям (1.8.9), то оно называется *ослабленным решением* краевой задачи (1.8.1)–(1.8.9).

Обозначая $A^{\frac{1}{2}}z_0 = g_1$ и $A^{\frac{1}{2}}w_T = g_2$, любое ослабленное решение уравнения (1.8.1) можно записать в виде

$$u(t) = V_1(t)g_1 + V_2(t)g_2, \quad (1.8.10)$$

где $V_1(t) = V(t)A^{-\frac{1}{2}}$ и $V_2(t) = V(T-t)A^{-\frac{1}{2}}$, и g_1 и g_2 – некоторые элементы из E .

Вводя операторный определитель

$$D = \begin{vmatrix} L_1(V_1) & L_1(V_2) \\ L_2(V_1) & L_2(V_2) \end{vmatrix}, \quad (1.8.11)$$

называемый *характеристическим определителем*, для решения задачи (1.8.1)–(1.8.9) получается представление

$$Du(t) = S_1(t)f_1 + S_2(t)f_2, \quad (1.8.12)$$

где

$$\begin{aligned} S_1(t) &= V_1(t)L_2(V_2) - V_2(t)L_2(V_1), \\ S_2(t) &= -V_1(t)L_1(V_2) + V_2(t)L_1(V_1). \end{aligned} \quad (1.8.13)$$

Оператор D является линейным ограниченным в E оператором коммутирующим с операторами $A^{-\frac{1}{2}}, V(T), V(T)A^{-\frac{1}{2}}$.

Определение 1.8.5. Всякую непрерывную на $[0, T]$ функцию $u(t)$, удовлетворяющую соотношению (1.8.12), называют *обобщенным решением* краевой задачи (1.8.1)–(1.8.9).

Таким образом, для представления решения задачи (1.8.1)–(1.8.9), необходимо исследовать вопрос о существовании обратного оператора D^{-1} и его связи с операторами $L_i(V_j)$. Здесь возникают разные возможности, связанные с различными свойствами краевой задачи.

1.8.3 Равномерно корректные краевые задачи. Регулярные краевые условия

Определение 1.8.6 Краевая задача (1.8.1)–(1.8.9) называется *равномерно корректной*, если для всяких f_1 и f_2 из E существует единственное обобщенное решение этой задачи, непрерывно зависящее в норме пространства $C(E)$ от f_1 и $f_2 \in E$.

Справедливо следующее утверждение ([28], с. 316) *Для того, чтобы задача (1.8.1)–(1.8.9) была равномерно корректной, необходимо и достаточно, чтобы операторы $D^{-1}S_1(t)$ и $D^{-1}S_2(t)$ были равномерно ограниченными на $[0, T]$.*

Для равномерной корректности задачи, также как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, существенную роль играет свойство регулярности краевых условий.

В рассматриваемом случае краевые условия регулярны лишь когда выполнено одно из условий

1. $d_{24} \neq 0$,

$$d_{24} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12} \\ \alpha_{22} & \beta_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

2. $d_{24} = 0$, но $|\alpha_{12}| + |\beta_{12}| > 0$ и

$$d_{23} - d_{14} = \begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{11} \\ \alpha_{22} & \beta_{21} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (1.8.14)$$

3. $\alpha_{12} = \beta_{12} = \alpha_{22} = \beta_{22} = 0$, но $d_{13} \neq 0$,

$$d_{13} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Примерами регулярных краевых условий являются условие Дирихле

$$u(0) = f_1, u(T) = f_2$$

и условие Неймана

$$u'(0) = f_1, u'(T) = f_2.$$

Если краевые условия задачи (1.8.1)–(1.8.9) регулярны, то оператор D может быть представлен в одной из следующих форм

$$\begin{aligned} 1. D &= c(1 - R), \\ 2. D &= cA^{-\frac{1}{2}}(I - R), \\ 3. D &= cA^{-\frac{1}{2}}(I - R), \end{aligned} \tag{1.8.15}$$

где R — ограниченный оператор в каждом случае свой, а c — константы ([26], с. 318).

Если единица не является точкой спектра оператора R , то краевая задача (1.8.1)– (1.8.9) равномерно корректна на отрезке $[0, T]$. Все обобщенные решения задачи являются обобщенными решениями уравнения (1.8.1).

1.8.4 Ограниченные решения на бесконечности

Если уравнение (1.8.1) рассматривается при $t \in (0, \infty)$, то, в соответствии с [26], с. 324 для обобщенного решения уравнения (1.8.1), в предположении ограниченности

$$\sup_{t \in (0, \infty)} \|u(t)\| < \infty$$

справедливо следующее утверждение:

а) Для всякого $f \in E$ существует единственное ограниченное на полуоси $(0, \infty)$ обобщенное решение уравнения (1.8.1) удовлетворяет условию Дирихле

$$u(0) = f.$$

Это решение задается формулой

$$u(t) = U(t, -A^{\frac{1}{2}})f, \quad (1.8.16)$$

где $U(t, -A^{\frac{1}{2}})$ — полугруппа класса C_0 с генератором $-A^{\frac{1}{2}}$.

б) Задача со смешанным краевым условием

В случае когда для решения уравнения (1.8.1) ставится смешанное краевое условие

$$\mu u'(0) - u'(0) = f, \quad (1.8.17)$$

где $f \in E$, $\mu = \text{const}$, то в [25] показано, что если $-A$ — генератор сильно непрерывной полугруппы $U(t, -A)$ с оценкой

$$\|U(t, -A)\| \leq M e^{-\omega t}, \quad \omega > 0, \quad (1.8.18)$$

то при выполнении условия

$$\mu + \sqrt{\omega} > 0 \quad (1.8.19)$$

краевая задача (1.8.1)–(1.8.17) равномерно корректна и ее решение имеет вид

$$u(t) = \int_0^\infty e^{-\mu s} U(t+s, -A^{\frac{1}{2}}) f(s) ds \quad (1.8.20)$$

и справедлива оценка

$$\|u(t)\| \leq M \frac{\|f\|}{\mu + \sqrt{\omega}}. \quad (1.8.21)$$

Глава 2

Математические модели процесса фильтрации без начальных условий и их корректная разрешимость

В практических исследованиях важное место занимают задачи без начальных условий см. [38], с. 241, [2], с. 57.

Такие задачи описывают либо устоявшиеся периодические процессы, либо задачи для переходного периода, начавшегося так давно, что начальные данные не сказываются на поведении решения. Для класса таких задач в [4] Г. И. Баренблат и Я. Б. Зельдович вводят понятие «промежуточные асимптотики», то есть рассматривается промежуточная стадия, когда процесс продолжается, но вместе с тем «случайные черты» начальных условий уже исчезли.

Эти решения описывают свойства явлений не зависящие от деталей начальных и граничных условий и, таким образом, не представляют собой асимптотику решений исходных решений начальных, граничных или смешанных задач вдали от границ области изменения независимых переменных. И как указывается в [4], промежуточные асимптотики— это такие решения вырожденных задач, для которых начальные или гранич-

ные условия обращаются в нуль или бесконечность.

2.1 Выбор класса функций

Как указано в первой главе, при исследовании корректной разрешимости задач по Ж. Адамару, важное место занимает выбор класса функций в которых рассматриваются такие задачи. В связи с этим здесь указываются классы функций, являющиеся естественными при применении метода С.Г. Крейна к установлению корректной разрешимости задач, описывающих фильтрацию жидкости в пористой среде и указанию соответствующих алгоритмов при их численной реализации.

Пусть функция $\varphi(x) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ определена на параллелепипеде $\Pi^n = \{x_m : x_m \in (\alpha_m, \beta_m) \subseteq R^1 = (-\infty, \infty)\}$ и функции $h_m(x_m)$ такие, что

$$h_m(\alpha_m) = -\infty, \quad h_m(\beta_m) = \infty, \quad h_m(x_m) > 0. \quad (2.1.1)$$

В [4] введены однопараметрические семейства линейных преобразований $U_{h,r}(t), t \in R^1$, заданных соотношением

$$U_{h,r}(t) = \varphi\{h_1^{-1}[h_1(x_1) + t], \dots, h_r^{-1}[h_r(x_r + t)], h_{r+1}^{-1}[h_{r+1}(x) - t], \dots \\ \dots h_n^{-1}[h_n(x_n) - t]\}. \quad (2.1.2)$$

Показано, что операторное семейство (2) является сильно непрерывной группой преобразований, а при $t \geq 0$ — сильно непрерывной сжимающей полугруппой класса C_0 в весовых анизотропных функциональных пространствах с равномерной метрикой. Такие полугруппы мы называем полугруппами сдвигов с деформациями.

Здесь операторные семейства (2.1.1) исследуются в весовых простран-

ствах $L_{\bar{p}, \bar{\rho}, r}(\Pi^n)$ измеримых на Π^n функций $\varphi(x)$ с нормой

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\bar{p}, \bar{\rho}, r} = & \left[\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \rho_n^-(x_n) \left[\cdots \int_{\alpha_{r+1}}^{\beta_{r+1}} \rho_{r+1}^-(x_{r+1}) \left[\int_{\alpha_r}^{\beta_r} \rho_r^+(x_r) \left[\int_{\alpha_{r-1}}^{\beta_{r-1}} \rho_{r-1}^+(x_{r-1}) \cdots \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \left. \cdots \left[\int_{\alpha_2}^{\beta_2} \rho_2^+(x_2) \left[\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \rho_1^+(x_1) |\varphi(x_1, \dots, x_n)|^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \cdots \right]^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n \right]^{\frac{1}{p_n}}, \right. \right. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

здесь

$$\rho_i^+(x_i) = e^{\omega_i h_i(x_i)} g_i(x_i) h_i'(x_i), \quad i = 1 \dots r,$$

$$g_i(x_i) > 0, \quad h_i'(x_i) > 0, \quad \omega_i > 0;$$

$$\rho_i^-(x_i) = \frac{1}{\rho_i^+(x_i)}, \quad \bar{p} = (p_1, \dots, p_n), \quad 1 \leq p_i < \infty,$$

$$\bar{\rho} = (\rho^+, \rho^-) = (\rho_1^+, \dots, \rho_r^+, \rho_{r+1}^-, \dots, \rho_n^-).$$

В случае $\bar{p} = (1, \dots, 1)$ функциональные пространства с такими нормами изучались в работах Бенедека и Панцоне (Benedek A. and Panzone R.) [24], а также Бесова О.В., Ильина В.П., Никольского С.М. (см.[6]), и обозначались $L_{\bar{p}}(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое, не обязательно ограниченное множество.

Такие пространства будем называть $L_{\bar{p}}(G)$ — анизотропными, а $L_{\bar{p}, \bar{\rho}, r}(\Pi^n)$ — весовыми анизотропными пространствами.

Утверждение 2.1.1 Операторное семейство (2.1.2) является сильно непрерывной сжимающей полугруппой в пространствах $L_{\bar{p}, \bar{\rho}, r}(\Pi^n)$ с оценкой

$$\|U_{h,r}(t)\|_{\bar{p}, \bar{\rho}, r} \leq \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{p_i}\right) t. \quad (2.1.4)$$

и производящим оператором

$$\mathfrak{D}_{h,r}\varphi = \sum_{i=1}^r \frac{\partial \varphi}{\partial h_i} - \sum_{i=r+1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial h_i}, \quad \mathfrak{D}_{h,r}\varphi \in L_{\bar{p}, \bar{\rho}, r}(\Pi^n), \quad \varphi \in L_{\bar{p}, \bar{\rho}, r}(\Pi^n). \quad (2.1.5)$$

Случай \mathbb{R}^1 .

Докажем утверждение 2.1.1 сначала для $n = 1$. В этом случае функции $h(x)$ и $g(x)$ определены на интервале $x \in (\alpha, \beta) \subseteq R^1$ и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} h(\alpha) = -\infty, \quad h(\beta) = \infty, \quad h'(x) > 0; \\ g(x) > 0, \quad g'(x) > 0. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Весовая функция имеет вид

$$\rho^+(x) = e^{\omega h(x)} g(x) h'(x) \quad (2.1.7).$$

Операторное семейство $U_h(t)$ запишем в виде

$$U_h^+(t) \varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x) + t)]. \quad (2.1.8)$$

и рассматривается в пространствах L_{p, ρ^+} с нормой

$$\|\varphi\|_{p, \rho^+} = \left[\int_{\alpha}^{\beta} \rho^+(x) |\varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \in [0, \infty). \quad (2.1.9)$$

Покажем, что справедливо следующее

Утверждение 2.1.2 Операторное семейство (2.1.8) является группой линейных преобразований по $t \in R^1$ в пространствах L_{p, ρ^+} с оценкой

$$\|U_h^+(t)\|_{p, \rho^+} = \exp\left(-\frac{\omega t}{p}\right). \quad (2.1.10)$$

Действительно, замена $h^{-1}[h(x) + t] = \tau$ в соотношении

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^+(x) |U_h^+(t) \varphi(x)|^p dx &= \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} e^{\omega h(x)} g(x) h'(x) |\varphi[h^{-1}(h(x) + t)]|^p dx \end{aligned}$$

приводит к равенству

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^+(x) |U_h^+(t) \varphi(x)|^p dx &= \\ &= e^{-\omega t} \int_{\alpha}^{\beta} e^{\omega h(\tau)} g(\tau - t) |\varphi(\tau)|^p h'(t) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу монотонного возрастания $g(x)$, следует оценка

$$\int_{\alpha}^{\beta} \rho^+(x) |U_h(t) \varphi(x)|^p dx \leq e^{-\omega t} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^+(\tau) |\varphi(\tau)|^p d\tau,$$

из которой следует (2.1.10).

Замечание 2.1.1 Из хода доказательства оценки (2.1.10) видно, что если $g(x) = \text{const}$, то неравенство переходит в равенство.

Групповое свойство $U_h^+(t+s) = U_h^+(t)U_h^+(s)$ при $t, s \in R$ нетрудно проверить простыми вычислениями.

Из приведенного утверждения следует

Утверждение 2.1.3 При $\omega > 0$ и $t \geq 0$ семейство $U_h^+(t)$ является сильно непрерывной сжимающей полугруппой в пространствах L_{p,ρ^+} с оценкой (2.1.10) и производящим оператором $\mathfrak{D}_n^+ = \frac{d}{dh}$ с областью определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{D}_h^+) = \left\{ \varphi : \varphi \in L_{p,\rho^+}, \frac{d\varphi}{dh} \in L_{p,\rho^+} \right\}$.

Доказательство. Так как условие $U_h^+(0)\varphi(x) = \varphi$ очевидно, то для сильной непрерывности $U_h^+(t)$ в нуле $\varphi \in L_{p,\rho^+}$ оценим:

$$\begin{aligned} \|U_h^+\varphi(x) - \varphi(x)\|_{p,\rho^+}^p &= \int_{\alpha}^{\beta} e^{\omega h(x)} h'(x) g(x) |\varphi[h(x)+t] - \varphi[h^{-1}(h(x))]|^p dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega \tau} g[h^{-1}(\tau)] |\varphi[h^{-1}(\tau+t)] - \varphi[h^{-1}(\tau)]|^p d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega \tau} g(\tau) |U(t+\tau) - U(\tau)|^p dt = I(t), \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

здесь $\tau = h^{-1}(x)$, $\tilde{g}(\tau) = g[h^{-1}(\tau)]$.

Отсюда, в силу непрерывности в целом норм L_p с весом, заключаем, что $I(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0_+$, что и доказывает сильную непрерывность полугруппы $U_n^+(t)$.

Аналогично для операторных семейств

$$U_h^-(t)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}[h(x)-t]], \quad t \in R^1; \quad (2.1.12)$$

рассмотренных в пространствах L_{p,ρ^-}^- с нормой

$$\|\varphi\|_{p,\rho^-} = \left[\int_{\alpha}^{\beta} p^{-1}(x) |\varphi(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1, \quad (2.1.13)$$

где

$$p^{-}(x) = \frac{1}{g(x)} e^{-\omega h(x)} h'(x). \quad (2.1.14)$$

Справедливо

Утверждение 2.1.4 Операторное семейство (2.1.12) является группой преобразований с оценкой

$$\|U_h^-(t)\|_{p,\rho^-} \leq \exp\left(-\frac{\omega t}{p}\right). \quad (2.1.15)$$

Если $g(x) = \text{const}$, то (2.1.15) переходит в равенство.

Аналогично утверждению 2.1.3 доказывается

Утверждение 2.1.5 При $\omega > 0, t \geq 0$ семейство $U_h^-(t)$ является сильно непрерывной сжимающей полугруппой в пространствах L_{p,ρ^-} с оценкой (2.1.15) и производящим оператором $\mathfrak{D}_h^- = \frac{d}{dx}$ с областью определения $\mathfrak{D}(\mathfrak{D}_h^-) = \left\{ \varphi \in L_{p,\rho^-}, \frac{d\varphi}{dh} \in L_{p,\rho^-} \right\}$.

Из полученных утверждением и [3] стр. 258 следует, что полугруппа $U_h^+(t)$ ($U_h^-(t)$) имеют производящие операторы:

$$\mathfrak{D}_h^+ \varphi(x) = \frac{d}{dt} U_h^+(t) \varphi(x) |_{t \rightarrow 0^+} = \frac{d\varphi(x)}{dh(x)} = \frac{1}{h'(x)} \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\mathfrak{D}_h^- \varphi(x) = \frac{d}{dt} U_h^-(t) \varphi(x) |_{t=0^+} = -\frac{d\varphi(x)}{dh(x)} = -\frac{1}{h'(x)} \frac{d\varphi}{dx}$$

с областями определения

$$\mathfrak{D}_h^{\pm} \varphi(x) = \left\{ \varphi(x) : \varphi \in L_{p,\rho^{\pm}} \pm \frac{1}{h'(x)} \frac{d\varphi}{dx} \in L_{p,\rho^{\pm}} \right\}$$

и для оператора $\mp D_h^\pm$ определены отрицательные дробные степени

$$\begin{aligned} (\mathfrak{D}_h)^{-\alpha} \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} U_h^\pm(t) \varphi(x) dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \varphi[h^{-1}[h(x) + t]] dt = \\ &= \int_\tau^\infty [h(x) - h(x)]^{\alpha-1} h'(x) \varphi(x) d\tau. \end{aligned}$$

Случай R^n .

Для доказательства утверждения 2.1.1 запишем нормы (2.1.3) в виде

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\bar{p}, \bar{\rho}, r} &= \|\dots\| \|\varphi\|_{p_1, \rho_1^+} \|\dots\| \|\varphi\|_{p_2, \rho_2^+} \|\dots\| \|\varphi\|_{p_n, \rho_n^-} = \\ &= \|\Phi(x) \varphi(x)\|_{L_{\bar{p}}(\Pi^n)}, \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

где

$$\Phi(x) = \prod_{i=1}^r (\rho_i^+(x_i))^{\frac{p_1}{p_i}} \prod_{i=r+1}^n (\rho_i^-(x_i))^{\frac{p_1}{p_i}}. \quad (2.1.17)$$

Далее отметим следующие свойства пространств $L_{\bar{p}, \bar{\rho}, r}$

Пространства $L_{\bar{p}, \bar{\rho}, r}$ являются банаховыми. То есть справедливы следующие свойства

- 1) $\|\varphi\|_{\bar{p}, \bar{\rho}, r} = 0$ эквивалентно $\varphi(x) = 0$ почти для всех $x \in \Pi^n$.
- 2) $\|c\varphi\|_{\bar{p}, \bar{\rho}, r} = |c| \|\varphi\|_{\bar{p}, \bar{\rho}, r}$.
- 3) $\|\varphi_1 + \varphi_2\|_{\bar{p}, \bar{\rho}, r} \leq \|\varphi_1\|_{\bar{p}, \bar{\rho}, r} + \|\varphi_2\|_{\bar{p}, \bar{\rho}, r}$.

Свойства 1) и 2) очевидны, а свойство 3) следует из аналогичного неравенства для норм $L_{\bar{p}}(G)$ ([1] стр. 10), примененного к функциям $f_1(x) = \Phi(x)\varphi_1(x)$ и $f_2(x) = \Phi(x)\varphi_2(x)$.

4) Пространства $L_{\bar{p}, \bar{\rho}, r}(\Pi^n)$ являются полными, то есть из того, что $\varphi_k \in L_{\bar{p}, \bar{\rho}, r}(\Pi^n)$, $k = 1, 2, \dots$, $\|\varphi_k - \varphi_l\|_{\bar{p}, \bar{\rho}, r} \rightarrow 0$ ($k, l \rightarrow \infty$), следует существование $\varphi \in L_{\bar{p}, \bar{\rho}, r}(\Pi^n)$ и $\|\varphi_k - \varphi\|_{\bar{p}, \bar{\rho}, r} \rightarrow 0$.

Доказательство следует из аналогичных свойств норм $L_{\bar{p}}(G) = L_{\bar{p}}(\Pi^n)$, примененных к функциям $f_k(x) = \Phi(x)\varphi_k$.

5) Функция $f \in L_{\bar{p}, \bar{\rho}, r}(G)$ является непрерывной в целом, то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\|f(x+y) - f(x)\|_{\bar{p}, \bar{\rho}, r} < \varepsilon$.

Доказательство следует из аналогичного свойства для функции $f(x) = \Phi(x) \varphi(x)$ из пространства $L_{\bar{p}}(G)$ ([1] стр. 14).

Утверждение 2.1.6 Операторное семейство (2.1.2) удовлетворяет оценке (2.1.4).

Доказательство следует из соотношения (2.1.3), примененного к $U_{h,r}(t)$ вида (2.1.2) и замен

$$h_i^{-1}[h_i(x_i) + t] = \tau_i, \quad i = 1, \dots, r;$$

$$h_i^{-1}[h_i(x_i) - t] = \tau_i, \quad i = r+1, \dots, n,$$

произведенных во внутренних интегралах равенства (2.1.16)

Групповое свойство $U_{h,r}(t+s) = U_{h,r}(t)U_{h,r}(s)$ устанавливается очевидными вычислениями.

Для доказательства сильной непрерывности $U_{h,r}(t)$ при $t = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \|U_{h,r}(t)\varphi(x) - \varphi(x)\|_{\bar{p}, \bar{\rho}, r} &= \left[\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \rho_n^-(x_n) \left[\dots \int_{\alpha_{r+1}}^{\beta_{r+1}} \rho_{r+1}^-(x_{r+1}) \left[\int_{\alpha_r}^{\beta_r} \rho_r^+(x_{r-1}) \dots \right. \right. \right. \\ &\dots \left[\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \rho_1^+(x_1) \mid \varphi[h_1^{-1}[h_1(x_1) + t], \dots, h_r^{-1}[h_r(x_r) + t], h_{r+1}^{-1}[h_{r+1}(x_{r+1}) - t], \dots \right. \\ &\left. \left. \left. \dots, h_n^{-1}[h_n(x_n) - t] \right] - \varphi(x_1, \dots, x_n) \right]^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \left]^{p_n} dx_n \right]^{\frac{1}{p_n}} \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

Делая замены $s_i = h_i(x_i)$ в каждом из интегралов соотношения (2.1.18) и применяя очевидные неравенства, получаем оценку

$$\begin{aligned} &\|U_{h,r}(t)\varphi(x) - \varphi(x)\|_{\bar{p}, \bar{\rho}, z} \leq \\ &\leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n^-(s_n) \left[\dots \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{r+1}^-(s_{r+1}) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \rho_r^+(s_{r-1}) \dots \right. \right. \right. \\ &\dots \left[\int_{-\infty}^{\infty} \rho_2^+(s_2) \left[\int_{-\infty}^{\infty} [\rho_1^+(s_1) \mid U[(s_1+t), (s_2+t), \dots \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots, (s_n + t)] - U(s_1, s_2, \dots, s_n) \left[\int^{p_1} ds_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \left[\int^{p_n} ds_n \right]^{\frac{1}{p_n}} = \\ & = \|\Phi(s) \mid U(t+s) - U(s) \mid\|_{L_{\bar{p}}(R^n)}. \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Последнее выражение в равенстве (2.1.19) стремится к нулю, в силу непрерывности в целом норм $L_{\bar{p}}(G)$.

Отсюда следует доказательство утверждения 2.1.1.

2.2 Задачи без начальных условий для модели фильтрации

В работе [12] В.С. Голубева для описания процесса нестационарной фильтрации сжимаемой жидкости в пористой среде предложена следующая система уравнений:

$$a \frac{\partial^2 P_1(t, x)}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial t} + (1 - \nu) \frac{\partial P_2(t, x)}{\partial t}, \quad x \geq 0, \quad (2.2.1)$$

$$\frac{\partial P_2(t, x)}{\partial t} = \gamma(P_1(t, x) - P_2(t, x)), \quad (2.2.2)$$

где $t \in R^+ = (0, \infty)$, ν — доля объема проточных зон; $P_1(t, x)$, $P_2(t, x)$ — давление в проточных и застойных зонах, γ — константа массообмена между проточными и застойными зонами.

Требуется найти градиент давления на границе $\left. \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0} = q(t)$ области, который определяет скорость течения жидкости согласно равенству $V(t) = -\frac{k}{\mu\chi} q(t)$, где k — проницаемость среды, μ — вязкость жидкости, χ — пористость, отнесенная к объему проточных зон.

В работах Ю.И. Бабенко [2], [3] при $t \geq 0$ для системы (2.3.1)—(2.3.2) рассматривается начально-краевая задача:

$$P_1(t, x)|_{x=0} = \varphi(t), \quad P_1(t, x)|_{x=\infty} = 0, \quad P_2(t, x)|_{x=\infty} = 0, \quad (2.2.3)$$

$$P_1(t, x)|_{t=0} = P_2(t, x)|_{t=0} = 0 \quad (2.2.4)$$

и указывается представление градиента давления в виде

$$q(t) = L_t^{\frac{1}{2}}\varphi(t) = \sqrt{\frac{a}{\nu}}e^{-\gamma t}Me^{\gamma t}, \quad (2.2.5)$$

где неограниченный оператор M формально выписывается в виде ряда

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^{\frac{1}{2}-n}, \quad (2.2.6)$$

где $a_0 = 1$, $a_1 = \gamma(\beta - 1)$, $a_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}a_k$ ($n \geq 3$), сходимость которого в [2] и [3] не обсуждается.

Тем самым по существу не обсуждается вопрос о сходимости приближенных решений к точному и их устойчивости к погрешностям исходных данных.

Корректная разрешимость задачи (2.2.1)—(2.2.4) в пространствах непрерывных и ограниченных функций с точки зрения существования, единственности и устойчивости решения по исходным данным была установлена в [53].

В настоящей работе для системы (2.2.1)—(2.2.2), при $t \in (-\infty, T)$, $-\infty$ рассматривается задача, в которой условия Коши в (2.2.4) заменяются условиями

$$\sup_{t \in (-\infty, T)} |P_1(t, x)| < \infty, \quad \sup_{t \in (-\infty, T)} |P_2(t, x)| < \infty. \quad (2.2.7)$$

Как известно (см. [2], с. 57, [38], с. 238), такие задачи относятся к классу задач без начальных условий, которые описывают процессы начавшиеся так давно, что начальные данные не сказываются на поведении решения.

В диссертации доказывается

Утверждение 2.2.1 Задача (2.2.1)-(2.2.3),(2.2.7) равномерно корректно разрешима и справедливы оценки

$$|P_1(t, x)| \leq M \sup_{t \in (-\infty, \tau)} |\varphi(t)|, \quad (2.2.8)$$

$$|P_2(t, x)| \leq M \sup_{t \in (-\infty, \tau)} |\varphi(t)|, \quad (2.2.9)$$

При этом указывается алгоритм численной реализации решения задачи.

2.2.1 Метод и схема исследования

Здесь мы применяем метод С.Г. Крейна исследования разрешимости краевых задач для уравнения эллиптического типа в банаховом пространстве (см. [26] с. 322), для применения которого система (2.2.1)–(2.2.3), (2.2.7) записывается в абстрактной форме

$$\frac{d^2 p(x)}{dx^2} = Ap(x), \quad x \geq 0, \quad (2.2.10)$$

$$p(0) = \varphi, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \|p(x)\| = 0. \quad (2.2.11)$$

Показывается, что оператор $-A$ является генератором равностепенно непрерывной, в смысле К. Иосиды, полугруппы операторов $U(x, -A)$, удовлетворяющей условию

$$\|U(x, -A)\| \leq Me^{-\omega x}, \quad \omega \geq 0, \quad x \geq 0. \quad (2.2.12)$$

Из этой оценки следует существование квадратного корня $A^{\frac{1}{2}}$. При этом оператор $-(A)^{\frac{1}{2}}$ является также генератором равностепенно непрерывной полугруппы $U(x, -A^{\frac{1}{2}})$ с оценкой

$$\|U(x, -A^{\frac{1}{2}})\| \leq Me^{-\sqrt{\omega}x}. \quad (2.2.13)$$

В соответствии с этим вводятся следующие понятия:

Определение 2.2.1 Функция $p(x)$ называется обобщенным решением уравнения (2.2.10), если она непрерывна на $[0, \infty)$, имеет непрерывную вторую производную на $(0, \infty)$, $p(x) \in D(A)$, $A^{\frac{1}{2}}p(x) \in C_{(0, \infty)}$ и удовлетворяет уравнению (2.2.10).

Определение 2.2.2 Краевая задача (2.2.10)—(2.2.11) называется равномерно корректной, если для всех $f \in E$ существует единственное обобщенное решение уравнения (2.2.10), удовлетворяющее (2.2.11), непрерывно зависящее в норме $\|p\|_{C(E)} = \sup_{x \in R^+} \|p(x)\|_{C(E)}$ от f .

По теореме С.Г. Крейна [26] для решения равномерно корректной задачи справедливо представление

$$p(x) = U(x, -A^{\frac{1}{2}})\varphi. \quad (2.2.14)$$

Из (2.2.13) и (2.2.14) следует равномерно корректная разрешимость задачи (2.2.10)—(2.2.11) с оценкой $\|p\| \leq Me^{-\sqrt{\omega}x}\|\varphi\|$.

Для дальнейшего полезно следующее

Утверждение 2.2.1 Если φ_n — собственный элемент оператора A , то есть

$$A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n,$$

где $\lambda_n > 0$, то решение задачи (2.2.10)—(2.2.11) имеет вид

$$p(x) = e^{-\sqrt{\lambda_n}x}\varphi_n. \quad (2.2.15)$$

Доказательство следует из формулы Иосиды (см. [17], с. 358)

$$U(x, -A^{\frac{1}{2}})\varphi_n = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} s^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4s}} U(s, -A)\varphi_n ds, \quad (2.2.16)$$

пользуясь которой в (2.2.14), получаем соотношение

$$U(x, -A^{\frac{1}{2}})\varphi_n = \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} s^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2}{4s}} e^{-\sqrt{\lambda_n}s}\varphi_n ds = e^{-\sqrt{\lambda_n}x}\varphi_n. \quad (2.2.17)$$

Отсюда следует (2.2.15).

Таким образом, если в (2.2.11) $\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \varphi_m$, то решение задачи (2.2.10)—(2.2.11) имеет вид

$$p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-\sqrt{\lambda_m} x} \varphi_m. \quad (2.2.18)$$

2.2.2 Доказательство основного результата

Делая в системе (2.2.1)—(2.2.2) замену $t = \ln \tau$ и, полагая $u(\tau, x) = P_1(\ln \tau, x)$, $v(\tau, x) = P_2(\ln \tau, x)$, перейдем к системе

$$a \frac{\partial^2 u(\tau, x)}{\partial x^2} = \nu \tau \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} + (1 - \nu) \tau \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau}, \quad x \geq 0, \quad (2.2.19)$$

$$\tau \frac{\partial v(\tau, x)}{\partial \tau} = \gamma [u(\tau, x) - v(\tau, x)], \quad \tau \in (0, e^T) \quad (2.2.20)$$

При этом условия (2.2.3) и (2.2.7) принимают вид

$$u(\tau, x)|_{x=0} = P(\ln \tau) = \varphi(\tau), \quad u(\tau, x)|_{x=\infty} = 0, \quad v(\tau, x)|_{x=\infty} = 0 \quad (2.2.21)$$

$$\sup_{\tau \in (0, e^T)} |u(\tau, x)| < \infty \quad (2.2.22)$$

$$\sup_{\tau \in (0, e^T)} |v(\tau, x)| < \infty \quad (2.2.23)$$

Далее, решая уравнение $\tau \frac{dv}{d\tau} + \gamma v(\tau) = \gamma u(\tau)$, при условии (2.2.22), получаем соотношение

$$v(\tau, x) = \frac{\gamma}{\tau^\gamma} \int_0^\tau s^{\gamma-1} u(s, x) ds, \quad (2.2.24)$$

используя которые в (2.2.19), приходим к задаче нахождения решения уравнения

$$\begin{aligned} a \frac{\partial^2 u(\tau, x)}{\partial x^2} &= \nu \tau \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial \tau} + (1 - \nu) \gamma u(\tau, x) - \\ &- \frac{(1 - \nu) \gamma^2}{\tau^\gamma} \int_0^\tau s^{\gamma-1} u(s, x) ds = L_\tau u(\tau, x), \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

удовлетворяющего условию (2.2.22).

Полагая $a > 0$, приведем задачу (2.2.25), (2.2.22) к виду

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = Au(x) = \frac{1}{a}L_\tau u(x), \quad (2.2.26)$$

$$u(0) = \varphi. \quad (2.2.27)$$

Утверждение 2.2.2 Оператор $-A$ является генератором полугруппы $U(x, -A)$ в классе ограниченных для $\tau \in (0, e^T)$ функций.

Действительно, оператор $A_1u = \nu\tau\frac{\partial u}{\partial \tau}$ является оператором Ж. Адамара и он является генератором равностепенно непрерывной полугруппы вида

$$U(x, -A_1)\varphi(\tau) = \varphi(\tau e^{-\frac{x}{a}}), \quad (2.2.28)$$

а интегральный оператор, заданный выражением

$$A_2\varphi = \frac{(1-\nu)\gamma^2}{\tau^\gamma} \int_0^\tau s^{\gamma-1}\varphi(s)ds, \quad (2.2.29)$$

ограничен с оценкой $\|A_2\varphi\|_C \leq (1-\nu)\gamma\|\varphi\|_C$.

И следовательно задача (2.2.26)–(2.2.27) равномерно корректна.

Теперь применяя оператор A к функции $\varphi_n(\tau) = \tau^n$, $n \geq 0$, получим

$$\begin{aligned} A\tau^n &= \frac{\nu}{a}n\tau^n + \frac{(1-\nu)\gamma\tau^n}{a} - \frac{(1-\nu)\gamma^2}{a} \int_0^\tau s^{\gamma+n-1}ds = \\ &= \frac{1}{a} \left[n + (1-\nu)\gamma - \frac{(1-\nu)\gamma^2}{\gamma+n} \right] \tau^n = \lambda_n\tau^n. \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

Таким образом, функции $\varphi_n(\tau) = \tau^n$ являются собственными функциями оператора A , при этом $\lambda_n \geq 0$.

И, следовательно, в силу теоремы С.Г. Крейна и формулы (2.2.18), получаем, что если краевые условия $\varphi(\tau)$ представимы в виде

$$\varphi(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m\tau^m, \quad \tau \in (0, e^T), \quad (2.2.31)$$

то решение задачи (2.2.26)—(2.2.27) имеет вид

$$u(\tau, x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-\sqrt{\lambda_m} x} \tau^m. \quad (2.2.32)$$

Отсюда для решения исходной задачи для системы (2.2.1)—(2.2.4) получим

$$P_1(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-\sqrt{\lambda_m} x} e^{mt}, \quad t \in (-\infty, T), \quad (2.2.33)$$

$$P_2(t, x) = \gamma \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-\sqrt{\lambda_m} x} \int_{-\infty}^t e^{\gamma(s-t)} e^{ms} ds. \quad (2.2.34)$$

В частности из (2.2.31) имеем формально

$$P_2(t, x) = \gamma \sum_{m=0}^{\infty} c_m \frac{1}{m + \gamma} e^{-\sqrt{\lambda_m} x} e^{mt}. \quad (2.2.35)$$

Градиент давления представлен в виде

$$\left. \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0} = - \sum_{m=0}^{\infty} c_m \sqrt{\lambda_m} e^{mt}, \quad t \in (-\infty, T). \quad (2.2.36)$$

Однако ряд (2.2.36) может расходиться. Поэтому, пользуясь (2.2.31), для приближенного вычисления градиента давления укажем следующий алгоритм:

1. Так как $\varphi \in D(A)$, то $\varphi' \in C_{(0, e^T)}$ и в силу сепарабельности пространства $C_{(0, e^T)}$ для любого $\epsilon > 0$ найдется многочлен $Q_N(\tau) = \sum_{m=0}^N b_m \tau^m$, такой, что выполняется неравенство

$$\|\varphi' - Q_N\| < \epsilon. \quad (2.2.37)$$

Отсюда и из представления

$$\varphi(\tau) = \varphi(0) + \int_0^{\tau} [\varphi'(s) - Q_N(s)] ds + \int_0^{\tau} Q_N(s) ds$$

следует оценка

$$\|\varphi - \tilde{Q}_{N+1}\| < e^T \epsilon, \quad (2.2.38)$$

где $\tilde{Q}_{N+1}(\tau) = \int_0^\tau Q_N(s) ds - \varphi(0)$.

И, таким образом, в качестве давления на границе области $x = 0$, с точностью до произвольного $\epsilon > 0$, берется многочлен $Q_N(\tau)$. Например, это может быть интерполяционный многочлен Ньютона или Тейлора, если $\varphi(\tau)$ - достаточно гладкая функция.

2. Окончательно для градиента давления в случае функции $P_1(t, x)$ с точностью до $\epsilon > 0$ получаем соотношение

$$q(t) = \left. \frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0} \simeq \left. \frac{\partial Q_N(e^t x)}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

2.3 Задача для полуограниченной магистрали с условиями Дирихле

При $t \in (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ и $x \in (0, \infty) = \mathbb{R}^+$ рассматривается система уравнений

$$a \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} + (1 - \nu) \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t}, \quad (2.3.1)$$

$$\frac{\partial u_2(t, x)}{\partial t} = \gamma(u_1(t, x) - u_2(t, x)), \quad (2.3.2)$$

где $a > 0$, $0 \leq \nu \leq 1$, $\gamma \geq 0$.

Ставится задача о нахождении решения системы (2.3.1)–(2.3.2), удовлетворяющему условиям

$$u_1(t, 0) = \varphi(t), \quad (2.3.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |u_1(t, x)| = \lim_{x \rightarrow \infty} |u_2(t, x)| = 0, \quad (2.3.4)$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |u_1(t, x)| < \infty, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_2(t, x)| < \infty. \quad (2.3.5)$$

и рассматривается случай когда функция $\varphi(t)$ является периодической

Утверждение 2.3.1 Если в условии (2.3.3) функция $\varphi(t)$ периодическая с периодом T и рядом Фурье

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{T} + b_n \sin \frac{2\pi n}{T} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \left[\frac{2\pi n}{T} (t - \delta_n^0) \right],\end{aligned}$$

где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \delta_n^0 = \frac{T}{2\pi n} \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n} \right),$$

то существует решение задачи (2.3.1)–(2.3.5), периодическое при каждом $x \in \mathbb{R}^+$ и оно имеет вид

$$u_1(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\sqrt{\frac{(\rho_n + \alpha_n)}{2}} x} \cdot \cos \left[\sqrt{\frac{(\rho_n - \alpha_n)}{2}} x - \omega_n t + \delta_n^0 \right], \quad (2.3.6)$$

$$u_2(t, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{1 + \mu_n^2}} e^{-\sqrt{\frac{(\rho_n + \alpha_n)}{2}} x} \cdot \cos \left[\sqrt{\frac{(\rho_n - \alpha_n)}{2}} x - \omega_n t + \sigma_n^0 \right], \quad (2.3.7)$$

$$\text{где } \omega_n = \frac{2\pi n}{T}, \quad \mu_n = \frac{\omega_n}{\gamma_n}, \quad \sigma_n = \arccos \frac{\omega_n}{\sqrt{1 + \mu_n^2}},$$

$$\rho_n = \frac{\omega_n}{a} \sqrt{\frac{\gamma^2 + \omega_n^2 \nu^2}{\omega_n^2 + \gamma^2}}, \quad \alpha_n = \frac{\omega_n^2 (1 - \nu) \gamma}{a(\gamma^2 + \omega_n^2)}. \quad (2.3.8)$$

Доказательство. Пусть в условии (2.3.3) $\varphi(t) = A \cos \omega t$.

В предположении (2.3.4) и, пользуясь (2.3.2), выразим

$$u_2(t, x) = \gamma \int_{-\infty}^t e^{\gamma(s-t)} u_1(s, x) ds. \quad (2.3.9)$$

Отсюда, в частности, следует неравенство

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |u_2(t, x)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_1(t, x)|.$$

Далее, подставляя (2.3.9) в (2.3.1), получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1(t, x)}{\partial x^2} &= \frac{\nu}{a} \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial t} + \frac{(1 - \nu)\gamma}{a} u_1(t, x) + \\ &+ \frac{(1 - \nu)\gamma^2}{a} \int_{-\infty}^t e^{\gamma(s-t)} u_1(s, t) ds = L_t u_1. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Условия (2.3.3)–(2.3.5) переходят в условия

$$u_1(t, 0) = A \cos \omega t, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u_1(t, x) = 0, \quad (2.3.11)$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |u_1(t, x)| < \infty. \quad (2.3.12)$$

Будем искать решение задачи (2.3.9)–(2.3.11) в виде

$$u(t, x) = A g(x) e^{i\omega t}. \quad (2.3.13)$$

Подставляя (2.3.13) в (2.3.10), учитывая соотношение

$$\int_{-\infty}^t e^{\gamma(s-t) + i\omega s} ds = \frac{(\gamma - i\omega) e^{i\omega t}}{\gamma^2 + \omega^2} \quad (2.3.14)$$

и, разделяя в (2.3.10) действительную и мнимую части, приходим к уравнению для $g(x)$

$$g''(x) = (\alpha + i\beta)g(x), \quad (2.3.15)$$

где

$$\alpha = \frac{\omega^2(1 - \nu)\gamma}{a(\gamma^2 + \omega^2)}, \quad \beta = \frac{\omega(\gamma^2 + \nu\omega^2)}{a(\gamma^2 + \omega^2)}. \quad (2.3.16)$$

Так как общее решение для уравнения (2.3.15) имеет вид

$$g(x) = C_1 e^{\sqrt{\alpha + i\beta}x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha + i\beta}x}, \quad (2.3.17)$$

то полагая $\alpha + i\beta = \rho e^{i\varphi}$, $\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\varphi = \arccos \frac{\alpha}{\rho}$, получаем выражение для

$$\sqrt{\alpha + i\beta} = \rho^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} + i \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{2}} \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{\rho + \alpha}{2}} + i\sqrt{\frac{\rho - \alpha}{2}}. \quad (2.3.18)$$

Отсюда и из (2.3.17) получаем соотношение

$$\begin{aligned} q(x) = & C_1 e^{\sqrt{\frac{\rho + \alpha}{2}}x} \left(\cos \sqrt{\frac{\rho - \alpha}{2}}x + i \sin \sqrt{\frac{\rho - \alpha}{2}}x \right) + \\ & + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\rho + \alpha}{2}}x} \left(\cos \sqrt{\frac{\rho - \alpha}{2}}x - i \sin \sqrt{\frac{\rho - \alpha}{2}}x \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, выбираем решение

$$g(x) = e^{-\sqrt{\frac{\rho + \alpha}{2}}x} \left(\cos \sqrt{\frac{\rho - \alpha}{2}}x - i \sin \sqrt{\frac{\rho - \alpha}{2}}x \right). \quad (2.3.19)$$

Подставляя (2.3.19) в (2.3.11) и, выделяя действительную часть, окончательно получаем решение задачи (2.3.1)–(2.3.5) с $\varphi(t) = A \cos \omega t$

$$u_1(t, x) = A e^{-\sqrt{\frac{\rho + \alpha}{2}}x} \left(\cos \sqrt{\frac{\rho - \alpha}{2}}x - \omega t \right). \quad (2.3.20)$$

Теперь, пользуясь (2.3.20) и линейностью уравнения (2.3.1), проводя стандартные рассуждения о сложении гармоник, указанные, например, в [38] получаем решение задачи (2.3.1)–(2.3.5) в виде (2.3.7), а затем несложными вычислениями доказываем равенство (2.3.6).

Далее, полагая $\beta_n = \frac{\sqrt{\rho_n + \alpha_n}}{2}$, вычислим функцию $u_2(t, x)$, в силу (2.3.9), имеем для n -ой гармоники

$$\begin{aligned} u_2^{(n)}(t, x) &= \gamma_n \int_{-\infty}^t e_n^\gamma(s - t) u_1^{(n)}(s, x) ds = \\ &= \gamma_n \int_{-\infty}^t e^{\gamma_n(s-t)} e^{-B_n x} \cos(B_n x - \omega_n s) ds. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Замена $B_n x - \omega_n s = \tau$ дает соотношения

$$J = \int_{-\infty}^t e^{\gamma_n s} \cos(B_n x - \omega_n s) ds = \frac{1}{\omega_n} \int_{B_n x - \omega_n t}^{\infty} e^{\gamma_n(B_n x - \tau)} \cos \tau d\tau.$$

2.4 Фильтрационные волны в пористой среде

Как указано в [12], с. 32 уравнения вида (2.3.1), (2.3.2) описывают и другие физические процессы, в частности, процессы теплопроводности в пористой среде. Это является более оправданным по сравнению с описанием таких процессов в изотропной среде.

Поэтому, естественно сравнить результаты полученные после анализа решения системы (2.3.1)–(2.3.2) с описанием тепловых волн, приведенных в [38], с.246.

Для этого, введем параметр $\mu = \frac{\omega}{\gamma}$ в представлении решения

$$u(t, x) = Ae^{-\sqrt{\frac{\rho+\alpha}{2}}x} \cos \left(\sqrt{\frac{\rho-\alpha}{2}}x - \omega t \right). \quad (2.4.1)$$

Тогда получим соотношения

$$\alpha = \frac{\omega^2(1-\nu)\gamma}{a(\gamma^2 + \omega^2)} = \frac{\omega}{a} \cdot \frac{(1-\nu)\mu}{\mu^2 + 1}; \quad (2.4.2)$$

$$\beta = \frac{\omega(\gamma^2 + \nu\omega^2)}{a(\gamma^2 + \omega^2)} = \frac{\omega}{a} \cdot \frac{(1 + \nu\mu^2)}{(1 + \mu^2)}. \quad (2.4.3)$$

Из (2.4.2) и (2.4.3) следуют соотношения

$$\begin{aligned} \rho + \alpha &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} + \alpha = \alpha \left[\left(1 + \frac{(1 + \nu\mu^2)^2}{\mu^2(1 - \nu)^2} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right] = \\ &= \frac{\omega}{a} \cdot \frac{\mu(1 - \nu)}{\mu^2 + 1} \cdot \left[1 + \left(1 + \frac{(1 + \nu\mu^2)^2}{\mu^2(1 - \nu)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \\ &= \frac{\omega}{a} \cdot \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \left[(1 - \nu) + \left((1 - \nu)^2 + \frac{(1 + \nu\mu^2)^2}{\mu^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{\omega}{a} \cdot M(\nu, \mu). \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Подставляя (2.4.4) в решение $u(t, x)$ получаем представление решения задачи (2.3.1), (2.3.2), выраженное через параметры ν, μ, ω, a

$$u(t, x) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot \sqrt{M(\nu, \mu)}x} \cos \left(\sqrt{\frac{\rho-\alpha}{2}}x - \omega t \right), \quad (2.4.5)$$

где

$$M(\nu, \mu) = \left(\frac{1 + \mu^2 \nu^2}{1 + \mu^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{(1 - \nu)\mu}{1 + \mu^2}. \quad (2.4.6)$$

Анализируя полученное решение приходим к следующим результатам.

Если температура поверхности длительное время периодически меняется, то в горных трещинах также устанавливаются колебания температуры с тем же периодом. При этом, амплитуда колебаний экспоненциально убывает, с глубиной

$$A(x) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot \sqrt{M(\nu, \mu)} x}. \quad (2.4.7)$$

При этом скорость убывания амплитуды зависит от величины константы $M(\nu, \mu)$. И здесь мы имеем следующие возможности:

1. Если $\nu = 1$, то есть среда изотропная, состоящая только из проточных зон, то $M(1, \mu) = 1$ и закон изменения амплитуды совпадает с приведенным законом в [38], с. 247.

2. Если $\mu = 1$, $\nu \in (0, 1)$, то

$$\begin{aligned} M(\nu, 1) &= \frac{1}{2} \left[(1 - \nu) + \left[(1 - \nu)^2 + \left(\frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \nu + \left((1 - \nu)^2 + (1 + \nu)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{2} \left[-\nu + \sqrt{2(1 + \nu^2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Отсюда следуют соотношения $M(0, 1) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2} > 1$, $M(1, 1) = 1$, $M'_\nu(\nu, 1) = \frac{1}{2} \left[\frac{2\nu}{1 + \nu^2} - 1 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{2\nu - 1 - \nu^2}{1 + \nu^2} \right] = -\frac{1}{2} \frac{(1 - \nu)^2}{1 + \nu^2} < 0$.

И, таким образом, функции $M(\nu, 1)$ убывают. Следовательно, справедлива оценка $M(\nu, 1) > 1$ и если $\gamma = \omega$ и $\nu \in (0, 1)$, то амплитуда $A(x)$ затухает быстрее чем в изотропном случае, с полностью проточной зоной.

3. Если $\nu = \frac{1}{2}$, то есть когда доля проточных и застойных зон совпадает, то в это случае

$$\begin{aligned}
M\left(\frac{1}{2}, \mu\right) &= \frac{\mu}{1 + \mu^2} \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{\left(1 + \frac{\mu^2}{2}\right)^2}{\mu^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \\
&= \frac{\mu}{1 + \mu^2} \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{(2 + \mu^2)^2}{4\mu^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \\
&= \frac{\mu}{2(1 + \mu^2)} \left[1 + \left(1 + \frac{4 + 4\mu^2 + \mu^4}{\mu^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \\
&= \frac{1}{2(1 + \mu^2)} [\mu + (\mu^4 + 5\mu^2 + 4)^{\frac{1}{2}}]. \tag{2.4.9}
\end{aligned}$$

$$M\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 1, \quad M\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{10}) > 1, \quad M\left(\frac{1}{2}, \infty\right) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, существует μ_0 такое, что при $\mu \in (0, \mu_0)$ убывает быстрее экспоненты $e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}}$, а при $\mu \in (\mu_0, \infty)$ происходит ее замедление.

4. $\nu = 0$, то есть нет проточных зон. В этом случае

$$M(0, \mu) = \frac{\mu}{\mu^2 + 1} \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2}} + \frac{\mu}{\mu^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + 1}} + \frac{\mu}{\mu^2 + 1}. \tag{2.4.10}$$

Из (3.2.10) следуют соотношения $M(0, 0) = 1$, $M(0, \infty) = 0$, $M(0, 1) = \frac{\sqrt{2}+1}{2} > 1$.

Отсюда следует, что функция $M(0, \mu)$ имеет точку максимума, которую легко получить с помощью стандартных вычислений.

$$\frac{d}{d\mu} M(0, \mu) = \frac{1 - \mu^2}{(\mu^2 + 1)^2} - \frac{\mu}{(\mu^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Отсюда следуют равенства $(1 - \mu^2) = \mu\sqrt{\mu^2 + 1}$, $(\frac{1}{\mu} - \mu)^2 = \mu^2 + 1$, которые определяют точку максимума $\mu_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Подставляя это значение в (2.4.10), получаем равенство

$$M(0, \frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}. \quad (2.4.11)$$

Таким образом, на интервале $0 < \mu < \frac{\sqrt{3}}{3}$ функция $M(0, \mu)$ возрастает от 1 до $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, а при $\mu > \frac{\sqrt{3}}{3}$ она убывает.

Из (3.2.10) также следует, что если μ_1 — корень уравнения

$$\mu + (\mu^4 + 5\mu^2 + 4)^{\frac{1}{2}} = 2(1 + \mu^2), \quad (2.4.12)$$

то при $\mu < \mu_1$, амплитуда $A(x)$ затухает быстрее, а при $\mu > \mu_1$ — медленнее амплитуды $A(x) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x}$.

2.5 Задача со смешанным краевым условием

В этом параграфе методом С.Г. Крейна исследуется общая краевая задача без начальных условий для дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} L_t u(t, x) &= \frac{\nu}{a} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{(1 - \nu)\gamma}{a} u(t, x) + \\ &+ \frac{(1 - \nu)\gamma^2}{a} \int_{-\infty}^t e^{\gamma(s-t)} u(t, s) ds \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

с граничным условием

$$\lambda u(t, x) - \frac{d}{dx} u(t, x) \Big|_{x=0} = \varphi(t) \quad (2.5.2)$$

$$u(t, \infty) = 0 \quad (2.5.3)$$

и доказывается

Утверждение 2.5.1 Если в условии (2.5.2) функция $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = \cos \omega t, \quad t \in (-\infty, \infty) \quad (2.5.4)$$

и выполнено условие

$$\lambda + \sqrt{\frac{\rho + \alpha}{2}} > 0. \quad (2.5.5)$$

где ρ и α имеют вид, то задача (2.5.1)—(2.5.3) имеет единственное ограниченное решение и оно представимо в виде

$$u(t, x) = \frac{e^{-(\lambda+B)x}}{\sqrt{(\lambda+B)^2 + B^2}} \cos(Bx - \omega t - \Theta) \quad (2.5.6)$$

$$\text{где } B = \sqrt{\frac{\rho+\alpha}{2}}, \quad \Theta = \arccos \frac{B}{\sqrt{B^2 + \sqrt{(B+\lambda)^2}}}.$$

Для доказательства утверждения воспользуемся представлением этого решения формулой (1.8.20), где оператор A задается дифференциальным выражением L_t из (2.5.1) и областью определения $D(A) = \{\varphi \in \overline{C}_{(-\infty, \infty)},$

$\frac{d\varphi}{dt} \in \overline{C}_{(-\infty, \infty)}\}$, где $\overline{C}_{(-\infty, \infty)}$ — пространство равномерно непрерывных и ограниченных на оси функций с нормой $\|\varphi\| = \sup_{t \in (-\infty, \infty)} |\varphi(t)|$.

И, следовательно, задача (2.5.1)—(2.5.3) равномерно корректна и имеет вид

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_0^\infty e^{-\lambda s} U(x + s, -(-L_t)) \varphi(t) ds = \\ &= \int_x^\infty e^{\lambda(x-\tau)} U(\tau, -A^{\frac{1}{2}}) \varphi(t) d\tau. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

В рассматриваемом случае из утверждения 2.5.1 следует соотношение

$$U(\tau, -A^{\frac{1}{2}}) \varphi(t) = U(\tau, -A^{\frac{1}{2}}) \cos \omega t = e^{-B\tau} \cos(Bx - \omega t), \quad (2.5.8)$$

где $B = \sqrt{\frac{\rho+\alpha}{2}}$.

Отсюда, для решения $u(t, x)$ имеем представление

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \int_x^\infty e^{\lambda(x-\tau)} e^{-B\tau} \cos(B\tau - \omega t) d\tau = \\ &= e^{\lambda x} \left[\int_x^\infty e^{-(\lambda+B)\tau} \cos B\tau d\tau \cdot \cos \omega t + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_x^\infty e^{-(\lambda+B)\tau} \sin B\tau d\tau \cdot \sin \omega t + \Big] = \\
&= e^{\lambda x} \left[\frac{e^{-(\lambda+B)x}}{\sqrt{(\lambda+B)^2 + B^2}} \cos(Bx - \omega t - \Theta) \right]. \quad (2.5.9)
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались известными интегральными представлениями и [18], с. 118.

Из (2.5.9) следует (2.5.6) и доказательство утверждения.

Из представления (2.5.6) имеем равенство

$$u(t, 0) = \frac{\cos(\Theta - \omega t)}{\sqrt{(\lambda + B)^2 + B^2}}, \quad (2.5.10)$$

пользуясь которым в (2.5.8) находим

$$-\frac{d}{dx}u(t, x) \Big|_{x=0} = \varphi(t) - \lambda u(t, 0) = \cos \omega t - \frac{\lambda \cos(\Theta - \omega t)}{\sqrt{(\lambda + B)^2 + B^2}}. \quad (2.5.11)$$

Глава 3

Численная реализация решений

Эта глава посвящена численной реализации решений для моделей фильтрации с полуограниченной магистралью, а также моделей с неограниченным временем с обеих сторон и с периодическим граничным условием.

В первом случае для этого используются интерполяционные многочлены специального вида, приведенные в [37] и [45], называемые многочленами Ньютона–Тейлора, которые имеют вид

$$P_n(t) = \sum_{m=0}^n c_m t^m \quad (3.1)$$

с коэффициентами

$$c_m = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k!} D(k, m) f_{\pm \frac{k}{2}}^k, \quad (3.2)$$

где $D(k, m)$ — числа Стирлинга первого рода (см. [45], с. 52), $f_{\pm \frac{k}{2}}^k$ — соответствующие конечные разности.

Необходимость применения интерполяционных многочленов вида (3.1)—(3.2), а не многочленов Ньютона

$$L_n(x_0 - th) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (t)_k f_{\pm \frac{k}{2}}^k, \quad (3.3)$$

где

$$(t)_k = t(t-1)\dots(t-k+1) \quad (3.4)$$

символ Похгаммера (убывающий факториал) (3.5) заключается в том, что функции $\varphi_m(t) = t^m$ являются собственными элементами оператора $aA = L$ в соответствии с формулой (2.2.31).

Для процессов с неограниченным с двух сторон временем, которые рассматриваются с периодическими граничными условиями в начале магистральной в случае распространения волн в пористой среде численно решается обратная задача нахождения коэффициентов ν и γ по известным из эксперимента амплитуды и фазы процесса.

На основе полученных результатов строится алгоритм, позволяющий численно сравнивать амплитуды решений в зависимости от коэффициентов уравнений.

3.1 Интерполяционные полиномы Ньютона–Тейлора

Здесь мы используем следующие понятия и обозначения:

На интервале $x \in (a, b)$ и $h = \frac{b-a}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, $x_0 \in (a, b)$, в соответствии с [5], с. 119, для $t = \frac{x-x_0}{h}$, интерполяционный многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, \dots, n$ при интерполировании вперед имеет вид

$$\begin{aligned} L_n(x - 0 + th) &= f_0 + tf'_{\frac{1}{2}} + \frac{t(t-1)}{2!}f''_1 + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!}f^n_{\frac{n}{2}} = \\ &= \sum_{k=0}^n f^k_{\frac{k}{2}}(t)_k, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

где $(t)_k$ — символ Похгаммера, $f^k_{\frac{k}{2}}$ — конечные разности функции $f(x_0) +$

th , которые строятся по правилу (см. [5], с. 115)

$$f_i = f(t_i),$$

$$f_{i+\frac{1}{2}}^1 = f_{i+1} - f_i,$$

$$f_{i-\frac{1}{2}}^2 = f_{i+\frac{1}{2}}^1 - f_{i-\frac{1}{2}}^1 = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1},$$

.....

$$f_{i+\frac{1}{2}}^k = f^{k-1} - f_i^{k-1} = \sum_{m=0}^k (-1)^m C_k^m f_{i-m+\frac{k}{2}}.$$

Для разностей составляется таблица

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4	f^5	
x_0	<u>f_0</u>						
		<u>$f_{\frac{1}{2}}^1$</u>					
x_1	f_1		<u>f_1^2</u>				
			<u>$f_{\frac{3}{2}}^1$</u>	<u>$f_{\frac{3}{2}}^3$</u>			
x_2	f_2		<u>f_2^2</u>		<u>f_2^4</u>		
			<u>$f_{\frac{5}{2}}^1$</u>	<u>$f_{\frac{5}{2}}^3$</u>	<u>$f_{\frac{5}{2}}^5$</u>		(3.1.2)
x_3	f_3		<u>f_3^2</u>	<u>f_3^4</u>			
			<u>$f_{\frac{7}{2}}^1$</u>	<u>$f_{\frac{7}{2}}^3$</u>			
x_4	f_4		<u>f_4^2</u>				
			<u>$f_{\frac{9}{2}}^1$</u>				
x_5	f_5						

Из таблицы (3.1.2) видно, что в построении многочлена Ньютона для интерполирования вперед (3.1.1) участвуют разности расположенные в верхней стороне «треугольника» (3.1.2).

Как известно, что для интерполирования в другую сторону, т.е. назад строятся многочлены Ньютона вида

$$L_h(x_0 + th) = f_0 + tf'_{-\frac{1}{2}} + \frac{t(t+1)f''_{-1}}{2!} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)f^{(n)}_{-\frac{n}{2}}}{n!},$$

где разделенные разности $f^k_{-\frac{k}{2}}$ строятся в соответствии с таблицей (см. [5], с. 121).

Из таблицы (3.1.2) видно, что в построении многочлена Ньютона для интерполирования назад участвуют разности стоящие в нижней строке таблицы.

В случае когда на рассматриваемом отрезке конечные разности меняются не сильно, остаточный член $R_n = f - L_n(x)$ представим в виде

$$R_n \approx \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}_{\frac{n+1}{2}}(t)_n, \quad (3.1.3)$$

при интерполировании вперед и

$$R_n \approx \frac{(-1)^n}{(n+1)!} f^{(n+1)}_{-\frac{n+1}{2}}(-t)_n, \quad (3.1.4)$$

в случае интерполирования назад.

3.2 Числа Стирлинга

Числа Стирлинга, используемые в комбинаторном анализе и которые нам понадобятся для построения интерполяционных многочленов специального вида, необходимого нам, вводятся различными способами ([45], с. 52, [37], с.34).

В частности, числа Стирлинга $D(n, k)$ первого рода со знаком определяются из выражения

$$t(t-1)\dots(t-n+1) = (t)_n = \sum_{k=0}^n D(n, k)t^k. \quad (3.2.1)$$

Числа $D^-(n, k)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$D^-(n, k) = D^-(n-1, k-1) - (n-1)D^-(n-k, k) \quad (3.2.2)$$

для $0 < k < n$,

$$\begin{aligned} D^-(0, 0) &= 1, & D^-(n, 0) &= 0, \quad n > 0 \\ D^-(0, k) &= 0, \quad k > 0, & D^-(n, k) &= 0, \quad n < k. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Числа Стирлинга первого рода без знака определяются как

$$D(n, k) = |D^-(n, k)|. \quad (3.2.4)$$

они удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$D(n, k) = D(n-1, k-1) + (n-1)D(n-1, k), \quad (3.2.5)$$

для $0 < k < n$.

$$\begin{aligned} D(0, 0) &= 1, & D(n, 0) &= 0, \quad n > 0 \\ D(0, k) &= 0, \quad k > 0 \\ D(n, k) &= 0, \quad n < k, & D(n, n) &= 1. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Их производящей функцией является выражение (возрастающий факториал)

$$t(t+1)(t+2)\dots(t+n-1) = (t+n-1)_n = \sum_{k=0}^n D(n, k)t^k. \quad (3.2.7)$$

Обратные им числа Стирлинга второго рода $S(n, k)$ определяются из соотношения

$$t^n = \sum_{k=0}^n S(n, k)(t)_k = \sum_{k=0}^n S(n, k)t(t-1)\dots(t-n+1). \quad (3.2.8)$$

Для них справедливо рекуррентное соотношение

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k) \quad (3.2.9)$$

для $0 < k < n$

$$S(0, 0) = 1 \quad S(n, 0) = 0 \quad n > 0$$

$$S(n, k = 0) \quad k > n.$$

Их также можно вычислять по формулам

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k+j} C_j^k j^n, \quad (3.2.10)$$

где $C_j^k = \frac{k!}{(k-j)!j!}$, а также из равенства

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (3.2.11)$$

Числа Стирлинга первого и второго рода связаны соотношением (см. [37], стр. 22)

$$D(n, k) = k! S(n, k). \quad (3.2.12)$$

Кроме того, для $S(n, k)$ и $D^-(n, k)$ справедливо соотношение ортогональности

$$\sum_{k=0}^n S(n, k) D^-(n, k) = \delta_{n,m}, \quad (3.2.13)$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Пример чисел Стирлинга первого рода со знаком указан для $0 \leq k \leq n \leq 6$

	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	0	-1	1				
3	0	2	-3	1			
4	0	-6	11	-6	1		
5	0	24	-50	35	-10	1	
6	0	-120	274	-225	85	-15	1

3.3 Многочлены Ньютона–Тейлора

Используя формулы (3.1.1) и (3.1.3), получаем представление многочленов Ньютона для интерполирования вперед через числа Стирлинга первого рода

$$L_n(x_0 + th) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (t)_k f_{\frac{k}{2}}^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k D^-(k, m) f_{\frac{k}{2}}^k t^m.$$

Далее, меняя порядок суммирования, получаем представление полиномов Ньютона для интерполирования вперед в виде

$$L_n(x_0 + th) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{m=k}^n \frac{D^-(k, m)}{k!} f_{\frac{k}{2}}^k \right) t^m = \sum_{k=0}^n b_m t^m. \quad (3.3.1)$$

Коэффициенты

$$b_m = \sum_{k=m}^n \frac{D^-(k, m)}{k!} f_{\frac{k}{2}}^k$$

будем называть коэффициентами Ньютона–Тейлора для интерполирования вперед в разложении многочлена Ньютона по степени t^m , а сам многочлен (3.3.1)— многочленом Ньютона–Тейлора для интерполирования вперед.

Аналогично, используя числа Стирлинга первого рода $D(n, k)$ без знака в интерполяционной формуле Ньютона для интерполирования назад получаем интерполяционный многочлен Ньютона–Тейлора для интерполирования назад

$$\begin{aligned} L_n(x_0 + tn) &= \sum_{k=0}^n \frac{t(t+1)\dots(t+k-1)}{k!} f_{-\frac{k}{2}}^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^k D(k, m) f_{-\frac{k}{2}}^k t^m = \\ &= \sum_{m=0}^n \left(\sum_{k=m}^n \frac{D(k, m)}{k!} f_{-\frac{k}{2}}^k \right) t^m = \sum_{m=0}^n c_m^* t^m. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Числа c^* , определяемые формулой

$$c_m^* = \sum_{k=m}^n \frac{D(k, m)}{k!} f_{-\frac{k}{2}}^k \quad (3.3.3)$$

будем называть коэффициентами Ньютона–Тейлора для интерполирования назад.

3.4 Алгоритм построения численного решения

Формула (2.2.32) показывает, что решение задачи (2.2.27)–(2.2.28) является точным для граничных условий, являющихся алгебраическими полиномами вида

$$\varphi(\tau) = \sum_{m=0}^N c_m \tau^m = Q_N(\tau). \quad (3.4.1)$$

При этом, в соответствии с (2.2.33), решение имеет вид

$$u(\tau, x) = \sum_{m=0}^N c_m e^{-\sqrt{\lambda_m x} \tau} \tau^m, \quad (3.4.2)$$

где

$$\lambda_m = \frac{1}{a} \left[m + (1 - \nu) - \frac{(1 - \nu)\gamma^2}{\gamma + n} \right]. \quad (3.4.3)$$

Поэтому, в общем случае, граничную функцию $\varphi(\tau)$ естественно приближать полиномами вида (3.4.1). Для этого можно воспользоваться разложением Тейлора

$$\varphi(\tau) \approx \sum_{m=0}^N \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} \tau^m. \quad (3.4.4)$$

Но, в этом случае, мы приходим к вычислению производных $\varphi^{(m)}(0)$, что не рационально с вычислительной точки зрения. Поэтому, для построения полиномов $Q_N(\tau)$ мы используем метод полиномов Ньютона–Тейлора, который сохраняет все преимущества приближений полиномами Ньютона.

Таким образом, получается следующая вычислительная схема приближенного построения решения:

1. В соответствии с заданной погрешностью выбирается N - порядок интерполяционного многочлена Ньютона
2. Строится таблица конечных разностей для интерполирования вперед (или назад)
3. По рекуррентным формулам (3.2.2) или (3.2.5) строится таблица чисел Стирлинга со знаком или без знака, в зависимости от направления интерполирования.
4. Вычисляются значения λ_m по формулам (3.4.3)
5. По формулам (3.3.1) и (3.3.3) вычисляются коэффициенты b_m и c_m^* Ньютона–Тейлора
6. Строится многочлен $Q_N(\tau)$
7. Строится решение задачи по формуле (3.4.2)
8. Вычисляется градиент давления по формуле (2.5.27).

3.5 Задачи возникающие при создании комплексов измерительной аппаратуры

Процессы производства и эксплуатации жидкость проводящих магистралей предполагают создание комплексов измерительной аппаратуры, которые обеспечивают: на этапе производства - определение значений параметров, характеризующую поверхностную структуру её внутренней части; на этапе эксплуатации - на основе измеренных значений давления в магистрали вычисление параметров входного периодического сигнала. Принципиальная схема одного варианта комплекса измерительной аппаратуры, используемого на этапе производства, представлена на рисунке 2. Этот комплекс работает под управлением двух микроконтроллеров, соединенных линией связи, обеспечивающей обмен данными между ними.



Рис.2

Здесь, на первом этапе, устройство управления тестированием формирует

мирует входное периодическое воздействие в форме простейшего сигнала $\cos(t)$. Устройство измерения отклика проводит измерение значений функции в точке подключения. Как только в точке измерения значения функции выходят на периодический режим, это устройство производит расчет параметров, определяющих характер течения жидкости с использованием принятой модели. Затем полученные результаты оно передает на устройство отображения результатов измерения в составе устройства управления тестированием. В результате с тестируемой жидкостью проводящей магистралью связываются вычислительные модельные параметры. На втором этапе контроля магистрали устройство управления тестированием последовательно генерирует периодические сигналы $\cos(2t), \cos(3t)$. Амплитуду и фазу сигнала в точке измерения устройство измерения отклика сравнивает с предсказанным модельными значениями и если совпадение удовлетворительное, то жидкость проводящая магистраль передается для эксплуатации.

В рабочем режиме схема, представленная на рисунке 3. В этом режиме на входе формируется сигнал в форме $\sum_{i=1}^7 a_i \cos(it)$. Комплекс аппаратуры используется для вычисления значений коэффициентов a_i на основе измеренных значений функции с учетом известных параметров течения жидкости.

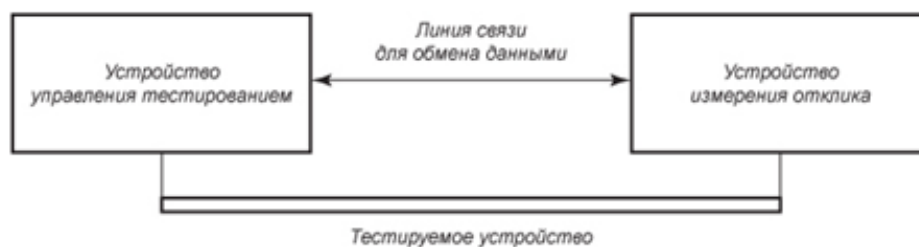


Рис.3

3.6 Алгоритм работы комплекса измерительной аппаратуры в режиме тестирования

Комплекс измерительной аппаратуры может использоваться в двух режимах: оценки параметров среды и вычисления параметров сигнала. Рабочий режим комплекса измерительной аппаратуры обеспечивает выполнение следующей последовательности действий, выполняемых устройством управления измерением:

- 1.1 контроль установки и подготовки тестируемого устройства к проведению эксперимента;
- 1.2 управление величиной давления жидкости на входе тестируемого устройства;
- 1.3 обеспечение обмена данными с устройством измерения отклика;
- 1.4 формирование заданного периодического измерения давления жидкости на входе тестируемого устройства;
- 1.5 обработку и отображение данных, полученных от устройства измерения отклика;
- 1.6 управление операциями по демонтажу тестируемого устройства;

Устройство измерения отклика обеспечивает:

- 2.1 обмен данными с устройством управления тестированием;
- 2.2 контроль установления стационарного течения жидкости в тестируемом устройстве;
- 2.3 получение данных о значениях периодически изменяющегося давления жидкости на входе тестируемого устройства;
- 2.4 контроль установления режима периодически изменяющегося давления жидкости;
- 2.5 вычисление значений измеряемых параметров;

2.6 передачу измеренных значений устройству управления измерением. Для проведения расчетов устройство управления тестированием передает по линии связи: устанавливает значение интервала времени разделяющего последовательные измерения значений давления; передает сигнал начала процесса тестирования.

На первом этапе процесса тестирования устройство измерения отклика определяет момент перехода измерения величины давления в периодический режим. Как только результаты измерений на двух последовательных периодических интервалах станут отличаться на величину сравнимую с допустимой ошибкой измерения, исполнительное устройство перейдет в режим расчета параметров тестируемого устройства.

Принципиальная схема выполнения операции тестирования приведена на рисунке 3.

3.7 Алгоритм работы комплекса измерительной аппаратуры в рабочем режиме

В рабочем режиме периодический закон изменения давления на входе формируется внешней средой. Поэтому устройство измерения отклика начинает работу с выполнения программы, определения момента выхода изменения давления на периодический режим. Затем, учитывая тот факт, что значения параметров модели течения в данной жидкости проводящей магистрали был определен на этапе тестирования, измеренные значения давления используются для вычисления значений коэффициентов входного тригонометрического многочлена. Максимальный порядок входного тригонометрического полинома определяется из физических соображений.

3.8 Алгоритм измерения отклика

Точное решение уравнения с краевым условием

$$u(t, 0) = A \cos(\omega t) \quad -\infty < t < \infty;$$

имеет вид:

$$u(t, x) = A e^{-\sqrt{\frac{\rho+\alpha}{2}}x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\rho-\alpha}{2}}x\right), \quad (3.8.1)$$

где

$$\alpha = \frac{\omega^2(1-\nu)\gamma}{(\gamma^2 + \omega^2)} \quad (3.8.2)$$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\omega^2(1-\nu)\gamma}{(\gamma^2 + \omega^2)}\right)^2 + \left(\frac{\omega(\gamma^2 + \nu\omega^2)}{(\gamma^2 + \omega^2)}\right)^2}, \quad (3.8.3)$$

γ - коэффициент модели,

ν - коэффициент модели,

ω - частота граничной функции,

A - амплитуда граничной функции.

Для каждого измерительного эксперимента с целью вычисления значений параметров модели течение жидкости краевое условие, формируемое на входе магистрали, описывается функцией

$$u(t, 0) = \cos(t).$$

В качестве точки наблюдения выбирается значение $x = l$.

Точное решение модельной краевой задачи в точке наблюдения записывается выражением:

$$u(t, 1) = e^{-\sqrt{\frac{\rho+\alpha}{2}}} \cos\left(t - \sqrt{\frac{\rho-\alpha}{2}}\right). \quad (3.8.4)$$

из которого возникает пара соотношений для определения значений параметров γ и ν .

3.9 Определение пары значений параметров γ и ν

Выберем шаг измерения значений функции $f(t)$ равным d . В процессе измерения значений функции на отрезке $x \in [0, 2\pi]$ получена последовательность значений $\{f_1 \dots f_n\}$. На основе этих данных вычислим коэффициенты Фурье:

$$F = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \cos(jd)d, \quad G = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n \sin(jd)d$$

Таким образом, для функции наблюдений получим приближенное представление в форме:

$$f(t) = F \cos(t) + G \sin(t).$$

Преобразуем его к виду, заданному формулой (3.8.1) и в результате получим:

$$f(t) = \sqrt{F^2 + G^2} \cos\left(t + \arccos\left(\frac{F}{\sqrt{F^2 + G^2}}\right)\right)$$

Обозначим

$$\sqrt{F^2 + G^2} = V$$

$$\arccos\left(\frac{F}{\sqrt{F^2 + G^2}}\right) = S$$

тогда из представления решений в форме (3.8.1) получим пару соотношений:

$$V = e^{-\sqrt{\frac{\rho+\alpha}{2}}} \quad (3.9.1)$$

$$S = \sqrt{\frac{\rho - \alpha}{2}}. \quad (3.9.2)$$

Запишем (3.8.3) в виде

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{\gamma^2 + \nu^2}{\gamma^2 + 1}\right)^2}. \quad (3.9.3)$$

Тогда

$$\rho^2 - \alpha^2 = \left(\frac{\gamma + \nu}{1 + \gamma^2} \right)^2, \quad (3.9.4)$$

Из (3.9.1) и (3.9.2)имеем

$$\sqrt{\rho + \alpha} = -\sqrt{2} \ln V, \quad \sqrt{\rho - \alpha} = \sqrt{2} S. \quad (3.9.5)$$

Подставляя (3.9.5) в (3.9.4) получим

$$-2 \ln V \cdot S = \frac{\gamma + \nu}{1 + \gamma^2} \quad (3.9.6)$$

или

$$\frac{1 - \nu}{1 + \gamma^2} = 1 + 2 \ln V \cdot S. \quad (3.9.7)$$

Из (3.8.2), учитывая, что $\omega = 1$ имеем

$$\gamma = \frac{\alpha}{1 + 2 \ln V \cdot S}. \quad (3.9.8)$$

Возводя в квадрат уравнения (3.9.5) и решая систему относительно ρ и α получим

$$\alpha = \ln^2 V - S^2, \quad \rho = 2 \ln(VS). \quad (3.9.9)$$

Подставляя значение α в (3.9.7) получим

$$\gamma = \frac{\ln^2 V - S^2}{\ln(VS)}. \quad (3.9.10)$$

Далее, из (3.9.7) получим

$$\begin{aligned} \nu &= -2 \ln V \cdot S \cdot (1 + \gamma^2) = -2 \ln V \cdot S \cdot \left(\frac{(\ln^2 V - S^2)^2}{(1 + 2 \ln v \cdot S)^2} + 1 \right) = \\ &= -2 \ln V \cdot S \cdot \left(\frac{(\ln^2 V - S^2)^2 + (1 + 2 \ln V \cdot S)^2}{(1 + 2 \ln v \cdot S)^2} \right) = \\ &= -2 \ln V \cdot S \cdot \left(\frac{(\ln^2 V + S^2)^2 + 4 \ln V \cdot S + 1}{(1 + 2 \ln V \cdot S)^2} \right). \end{aligned} \quad (3.9.11)$$

3.10 Рабочий режим измерительного комплекса

В рабочем режиме на вход жидкость проводящей магистрали подается периодический сигнал в виде

$$\sum_{k=1}^7 a_k \cos(kt).$$

В точке измерения при $x = 1$ граничная функция будет иметь вид:

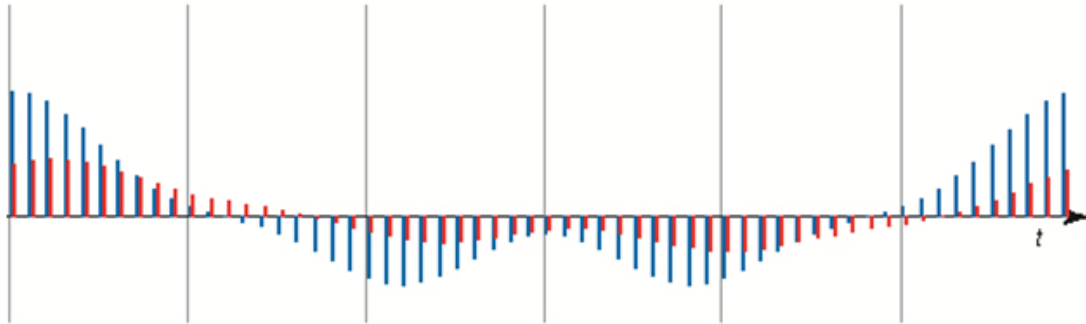
$$u(t, x) = \sum_{k=1}^7 a_k e^{-\sqrt{\frac{\rho+\alpha}{2}}} \cos\left(\sqrt{\frac{\rho-\alpha}{2}} - kt\right);$$

где

$$\alpha = \frac{k^2(1-\nu)\gamma}{(\gamma^2 + k^2)}$$

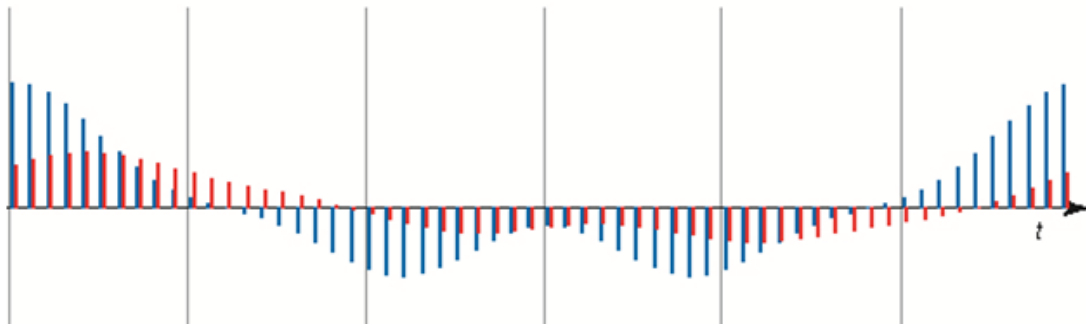
Краевое условие = $2\cos t + \cos 2t + 0,5\cos 4t$.
Параметры модели: $\gamma = 0,8$; $\nu = 0,3$.

— Входной сигнал
— Измеренный сигнал



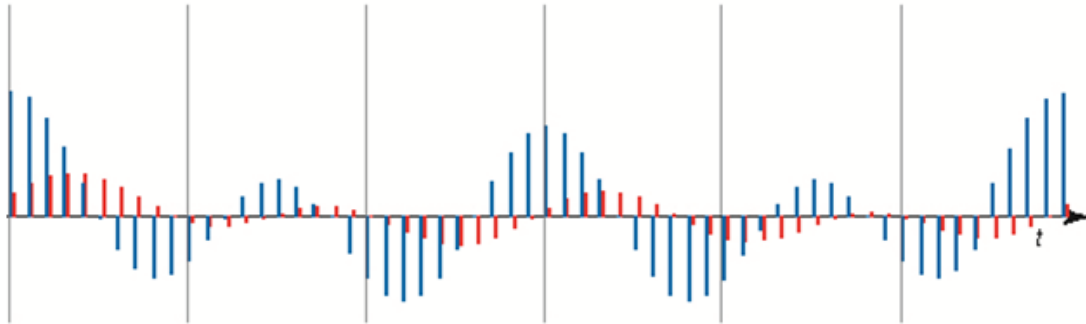
Краевое условие = $2\cos t + \cos 2t + 0,5\cos 4t$.
Параметры модели: $\gamma = 0,3$; $\nu = 0,8$.

— Входной сигнал
— Измеренный сигнал



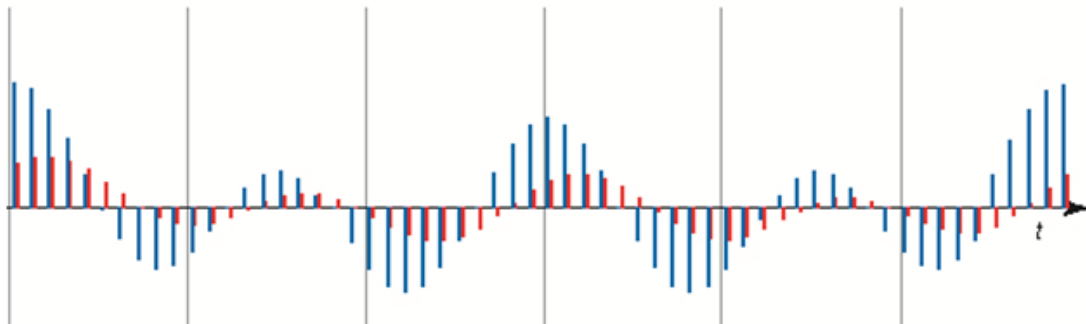
Краевое условие = $0,5\cos t + \cos 2t + 2\cos 4t$.
Параметры модели: $\gamma = 0,8$; $\nu = 0,3$.

— Входной сигнал
— Измеренный сигнал



Краевое условие = $0,5\cos t + \cos 2t + 2\cos 4t$.
Параметры модели: $\gamma = 0,3$; $\nu = 0,8$.

— Входной сигнал
— Измеренный сигнал



Заключение

Таким образом, в диссертации методами теории сильно непрерывных полугрупп устанавливается корректная разрешимость нестационарных задач для уравнения теплопроводности, которые описывают движение жидкости в пористых средах, когда с увеличением расхода структура потока приобретает двойственный характер. В то время как в ядре потока (проточной зоне) жидкость движется от входа к выходу по прямолинейным траекториям, на периферии потока (в застойной зоне) она вовлекается в вихревое движение. Такой же ламинарный (но и не турбулентный) режим характерен для течения жидкости в пористой среде. Первые исследования в этом направлении для указанных задач с применением методов функционального анализа и операторных уравнений были проведены в работах Аль-Кхазраджи С. Х. М.

В настоящей диссертации были продолжены исследования таких уравнений в новых постановках. Здесь эти уравнения были рассмотрены в том случае, когда время изменяется на всей числовой оси, т.е. в постановке вопроса о свойствах явлений, которые не зависят от начальных условий или не зависят от деталей начальных условий, но вместе с тем система еще далека от состояния равновесия. Поэтому, следуя Я.Б. Зельдовичу и Г.И. Баренблатту, здесь они носят название "промежуточная асимптотика". Такие асимптотики являются решениями вырожденных задач, в которых параметры независимых переменных обращаются в нуль или бесконечность.

Однако, для того чтобы решение вырожденной задачи представляло собой промежуточную асимптотику необходимо, чтобы оно было устойчиво относительно изменений малых возмущений, то есть вырожденная

задача должна быть корректной.

В диссертации, именно с этой точки зрения, были исследованы и решены задачи без начальных условий, для уравнений, описывающих процессы субдиффузии, диффузии и фильтрации в пористых средах и приводятся алгоритмы их приближенных решений. В частности, сюда относятся модели субдиффузии и процессы фильтрации в пористой среде с проточными и застойными зонами.

В диссертации получены следующие новые результаты, как теоретического, так и прикладного характера:

1. Модификация модели движения жидкости в пористой среде с застойными зонами на случай процесса бесконечного во времени.

2. Установление корректной разрешимости задачи фильтрации без начальных условий в полуограниченном интервале времени.

3. Решение прямой и обратной задачи численными методами для уравнения фильтрации в среде с застойными и проточными зонами для периодического граничного условия.

4. Оценка скорости затухания фильтрационного потока, с применением численных методов дифференциальных уравнений, в зависимости от доли проточных зон и коэффициента массопереноса.

5. Разработка объектно-ориентированной программы для реализации предлагаемых алгоритмов и их численной реализации.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Аренс В.Ж. Геотехнологические методы добычи полезных ископаемых/ В.Ж. Аренс.— М.: Наука, 1975.— 263 с.
- [2] Бабенко Ю.И. Тепломассообмен, методы расчета тепловых и диффузионных потоков./ Ю.И. Бабенко.— Л.: Химия, 1986.— 144 с.
- [3] Бабенко Ю.И. Методы дробного интегродифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена. / Ю.И. Бабенко.— СПб.: НПО «Профессионал», 2009.— 584 с.
- [4] Баренблатт Г.И. Промежуточные асимптотики в математической физике/ Г.И. Баренблатт, Я.Б. Зельдович// Успехи мат. наук, 1971, Т. XXVI, в. 2 (158).
- [5] Березин И.С. Методы вычислений Т.1 / И.С. Березин, Н.П. Жидков.— М.: Физматгиз, 1962.— 464 с.
- [6] Бесов О.В. Интегральные представления функций и теоремы вложения/ О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский.— М.: Наука, 1975.— 480с.
- [7] Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. / Г.Н. Ватсон. — М.: ИЛ, 1949.— 799 с.
- [8] Вишик М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области/ М.И.Вишик,

- В.В.Грушин//Математический сборник–1969.–Т.80(112), вып.4.– С.455-491.
- [9] Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн.—Киев: Высша школа, 1989. — 347 с.
- [10] Горбачук В.И., Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений/ В.И. Горбачук, А.И. Князюк // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, № 3 (267).— С. 55—91.
- [11] Горбачук В.И. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений/ В.И. Горбачук, М.Л. Горбачук.— Киев, «Наука Думка». 1984.— 283 с.
- [12] Голубев В.С. Уравнение движения жидкости в пористой среде с застойными зонами// ДАН СССР, Т.238, №6, 1978, С. 1318—1320.
- [13] Голубев В.С. Динамика геотехнологических процессов/ В.С. Голубев, Г.Н. Кричевец.— М.: Недра, 1989.— 120 с.
- [14] Голубев В.С. Динамика геохимических процессов/ В.С. Голубев.— М.: Недра, 1981.— 208 с.
- [15] Голубев В.С. Математическая модель диффузионного выщелачивания/ В.С. Голубев, Г.Н. Кричевец// Проблемы геотехнологии, М.: ГИГХС, 1983.— с. 113—117.
- [16] Грабовников В.А. Геотехнологические исследования при разведке металлов. — 2-е изд., перераб.и доп./ В.А. Грабовников.— М.: Недра, 1995.— 155 с.: ил.
- [17] Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида.— М.: Мир, 1967.— 624 с.

- [18] Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы/ Г.Б. Двайт.— М.: Наука, 1978.— 221 с.
- [19] Карлсроу Г. Теплопроводность твердых тел/ Г. Карлсроу, Д.Егер.— М.: Наука, 1964.— 488 с.
- [20] Костин В.А. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка/ В.А. Костин В.А., М.Н. Небольсина // Доклады Академии Наук, 2009, Т.428, №1.— С. 20-22.
- [21] Костин В.А. К теории функциональных пространств Степанова/ В.А. Костин, А.В. Костин.— Воронеж: Изд-полиграф. центр ВГУ, 2007.— 258 с.
- [22] Костин В.А. Операторный метод Маслова-Хевисайда и C_0 -операторный интеграл Дюамеля /В.А.Костин, А.В.Костин, Д.В.Костин// ДАН. - 2013, Т.452, №4. - с.367-370
- [23] Костин В.А. Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения /В.А.Костин, А.В.Костин, Д.В.Костин// ДАН. — 2014. - Т.455 №2 С.142-146
- [24] Костин В.А. Операторные многочлены Ньютона и корректная разрешимость задач для обобщенного уравнения Эйлера /В.А.Костин, А.В.Костин, Д.В.Костин// ДАН. — 2016, Т.470 №2 С.141-143
- [25] Kostin D.V. On well-posed solvability of boundary value problems for equations with fractional derivatives in hyper-weight spaces of continuous functions on R^+ // D.V. Kostin, *Applicable Analysis* Volume 96, 2017 – Issue 3, p.396-408.

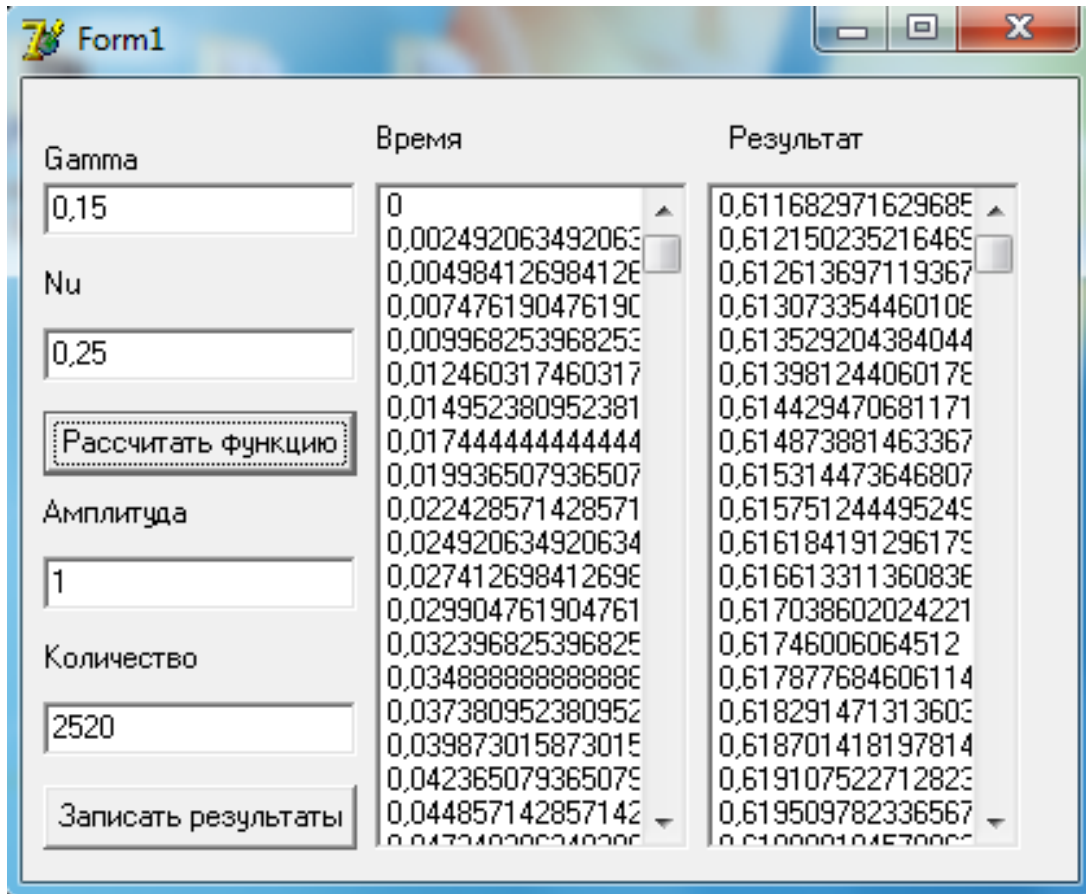
- [26] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве/ С.Г. Крейн.— М.: Наука, 1967.—464 с.
- [27] Красносельский М. А., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, М., Наука, 1966, 499 с.
- [28] Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного/ М.А. Лаврентьев, Б.П. Шабат.—М.: Наука, 1973.—736 с.
- [29] Лаврентьев М.М. Одномерные обратные задачи математической физики // М.М. Лаврентьев, К.Г. Резницкая, В.Г. Яхно. — Наука, Сибир.отд. Новосибирск, 1982, 88 с.
- [30] Кошляков Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики/ Н.С. Кошляков, Э.Б. Глиер, М.М. Смирнов, М.: Физмат.лит., 1962, 767 с.
- [31] Лыков А.В. Теория теплопроводности/ А.В.Лыков. М.: Высшая школа, 1967. — 593 с.
- [32] Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях. Перев. с англ.-М.:Мир, 1988.—448 с.
- [33] Мартыненко Н.А. Конечные интегральные преобразования и их применение/ Н.А. Мартыненко, Л.М. Пустыльников.—М.: Наука, 1986. 301 с.
- [34] Маслов В.П. Операторные методы/ В.П. Маслов.—М.: Наука, 1973.— 543 с.
- [35] Маслов В.П. Математическое моделирование процессов тепло-массо-переноса/ В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов, М.:Наука, 1987.— 352 с.

- [36] Мещеряков М.В. Избранные лекции по дискретной математике. Ч.1. Комбинаторика и графы: Учеб. пособие/М.В.Мещеряков—Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2003.— 116 с.
- [37] Небольсина М.Н. Исследование корректной разрешимости некоторых математических моделей теплопереноса методом С.Г. Крейна. Диссертация на соискание уч. ст. канд. физ-мат. наук. – Воронеж, ВГУ, 2009,—102 с.
- [38] Тихонов А.Н. Уравнения математической физики/ А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, М.: Наука, 1966.— 724 с.
- [39] Полянин А.Д. Справочник по точным решениям уравнений теплопереноса, А.Д. Полянин, А.В. Вязьмин, А.И. Журов, Д.А. Казенин.— М.: Факториал, 1998. 368 с.
- [40] Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и в радиолокации / А.А. Потапов.— М.: Логос, 2002.— 664 с.
- [41] Самарский А. А., Методы решения сеточных уравнений/ А.А. Самарский А. А., С.С. Николаев // М., Наука, 1978.— 591 с.
- [42] Смирнов М.М. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка/ М.М. Смирнов.— М.: Наука, 1964.— 205 с.
- [43] Свиридюк Г.А. Полугруппы операторов с ядрами / Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров// Вестник Челяб. ун-та. Серия3, Математика. Механика. Информатика, 2002, No1.— С. 42–70.
- [44] Рыбников К.А. Введение в комбинаторный анализ/К.А. Рыбников.— М.: Изд-во МГУ, 1972.— 255 с.

- [45] Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач. Учебное пособие для вузов. Изд. 3-е исправленное/ А. Н. Тихонов, В.Я. Арсенин // М.:Наука. Гл.ред.физ.мат.лит, 1986.—288 с.
- [46] Уиттекер Э.Т. Курс современного анализа, т. 2/ Э.Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, пер с англ. под ред. Ф.В. Широкого.— М.: Физ-мат. лит., 1963.—515 с.
- [47] Учайкин В.В. Методы дробных производных/ В.В. Учайкин.— Ульяновск, Изд. «Логос», 2002.— 512 с.
- [48] Фадеев Д. К., Лекции по алгебре/ Д.К. Фадеев.— М., Наука, 1984.— 416 с.
- [49] Фадеев Д. К. О свойствах матрицы обратной Хессенберговой, Записки научных семинаров/ Д.К. Фадеев// ЛОМИ, 1981. т. 111.— с. 177–179
- [50] Хчеян Г.Х. Геотехнологические процессы добычи полезных ископаемых/ Г.Х. Хчеян, И.С. Нафтулин, М.: Наука, 1983.
- [51] Федоров В.Е. Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов /В.Е. Федоров// Алгебра и анализ. 2000. Т.12, вып.3. С.173–200.
- [52] Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы// Э. Хилле, Р.Филлипс.— М.: Издательство иностранной литературы, 1962. – 829 с.
- [53] Хчеян Г.Х. Геотехнологические процессы добычи полезных ископаемых/ Г.Х. Хчеян, И.С. Нафтулин, под ред. В.Ж. Аренса.— М.: Наука, 1983.— 221 с.

- [54] С.Х.М. Аль-Кхазраджи. О компьютерной реализации обратной задачи для уравнения движения жидкости в пористой среде с проточными и застойными зонами / М.В. Муковнин, С.Х.М. Аль-Кхазраджи, Д.А. Фахад// Воронеж: Вестник ВГУ. Серия: Физика.Математика, №1— 2017.— С. 128–134.
- [55] Чехов С.А. Об однопараметрических полугруппах преобразований весовых анизотропных пространствах функций с интегральными метриками/ С.А. Чехов, Д.А. Фахад// Воронеж: Вестник ВГУ. Серия: Физика.Математика, №1, 2016.— С. 150–156.
- [56] Костин В.А. Косинус-весовые пространства функций и полугруппа Гаусса-Вейерштрасса/ В.А. Костин, С.А. Чехов, Д.А. Фахад// Воронеж: Материалы конференции «АННИ XXI века», №5, ч.1, 2014.— С. 50-51
- [57] Костин В.А. О решении задачи без начальных условий для системы уравнений описывающих динамика некоторых процессов тепло-массопереноса / В.А. Костин, А.В. Костин, Д.А. Фахад// Воронеж: Сборник факультета ПМиМ, 2016.— С. 145-149.
- [58] Костин В.А. О корректной разрешимости задач без начальных условий для уравнений В.С. Голубева, описывающих движение сжимаемой жидкости в пористой среде/ В.А. Костин, С.А. Чехов, Д.А. Фахад// Воронеж: Вестник Воронежского государственного университета, 2016, С.162-169
- [59] Фахад Д.А. Задача со смешанным краевым условием для уравнения В.С. Голубева/ Д.А. Фахад// Материалы Международной "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна-2018 Воронеж:

3.11 Программы используемые для обработки макета



```
unit SolveFilteringTask;
```

```
interface
```

```
uses
```

```
Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes,  
Graphics, Controls, Forms, Dialogs, Menus,
```

```
StdCtrls, Math, StrUtils;
```

```
type
```

```
TForm1 = class(TForm)  
    MainMenu1: TMainMenu;  
    N1: TMenuItem;  
    module21: TMenuItem;  
    module31: TMenuItem;  
    module41: TMenuItem;  
    Edit1: TEdit;  
    Edit2: TEdit;  
    Button1: TButton;  
    Label1: TLabel;  
    Label2: TLabel;  
    Label3: TLabel;  
    AmplInput: TEdit;  
    OtInput: TEdit;  
    Label4: TLabel;  
    SaveresultsToFile: TButton;  
    Label5: TLabel;  
    ListBox1: TListBox;  
    ListBox2: TListBox;  
    Label6: TLabel;  
    OpenDialog1: TOpenDialog;  
    SaveDialog1: TSaveDialog;  
    N2: TMenuItem;  
    procedure showModule2(Sender: TObject);
```

```

    procedure showModule3(Sender: TObject);
    procedure showModule4(Sender: TObject);
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
    procedure SaveresultsToFileClick(Sender: TObject);
    procedure FormCreate(Sender: TObject);
    procedure N2Click(Sender: TObject);

private
    { Private declarations }
public
    { Public declarations }
end;

var
    Form1: TForm1;

implementation

uses EmulateInputData, SolveInverseFilteringTask,
    SolveInverseFilteringTaskWithInputRow;

{$R *.dfm}

const
    QANTITY:integer = 2520;
    DELIMITER:string = ',';
    EXTENSION:string = '.txt';

```

```

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var
  funcnab: array [1..2530] of real;
  gamma, nu:real;
  quantity,omega:integer;
  h,ht,amplitude,alpha,ro,am,fa,c:real;
  i,j:integer;

begin
gamma:=StrToFloat(Edit1.Text);
nu:=StrToFloat(Edit2.Text);
quantity:=StrToInt(0tInput.Text);
amplitude:=StrToFloat(AmplInput.Text);

for i:=0 to QANTITY do
  funcnab[i]:=0;

h:=2 * PI/quantity;
ht:=0;
omega:=1;

alpha:=(sqr(omega)*(1-nu)*gamma)/(sqr(gamma)+sqr(omega));
ro:=sqrt(sqr((sqr(omega)*(1-nu)*gamma)/(sqr(gamma)+sqr(omega)))
+sqr((omega*(sqr(gamma)+nu*sqr(omega)))/(sqr(gamma)+sqr(omega))));

am:=exp(-sqrt((ro + alpha) / 2));

```



```

fa:=sqrt((ro - alpha) / 2);

am:=amplitude * am;

for i:=1 to quantity do
  begin
    c:= cos(ht - fa);
    funcnab[i]:=funcnab[i] + am*c;
    ht:= ht + h;
  end;
ht:=0;

for j:=0 to quantity - 1 do
  begin
    form1.ListBox2.Items[j]:=FloatToStr(ht);
    form1.ListBox1.Items[j]:=FloatToStr(funcnab[j + 1]);
    ht:=ht + h;
  end;
end;

procedure TForm1.SaveresultsToFileClick(Sender: TObject);
var
  f:textfile;
  i:integer;
begin
  if not SaveDialog1.Execute then exit;
  assignfile(f, SaveDialog1.FileName + EXTENSION);

```

```

rewrite(f);
for i:=0 to ListBox2.Items.Count - 1 do
    writeln(f,ListBox2.Items[i]+DELIMITER+ListBox1.Items[i]);
CloseFile(f);
end;

procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);
begin
OtInput.Text:=IntToStr(QANTITY);
AmplInput.Text:='1';
end;

procedure TForm1.showModule2(Sender: TObject);
begin
Form1.Hide();
Form2.show();

end;

procedure TForm1.showModule3(Sender: TObject);
begin
Form1.Hide();
Form3.Show();
end;

procedure TForm1.showModule4(Sender: TObject);
begin

```

```

Form1.Hide();
Form4.Show();
end;

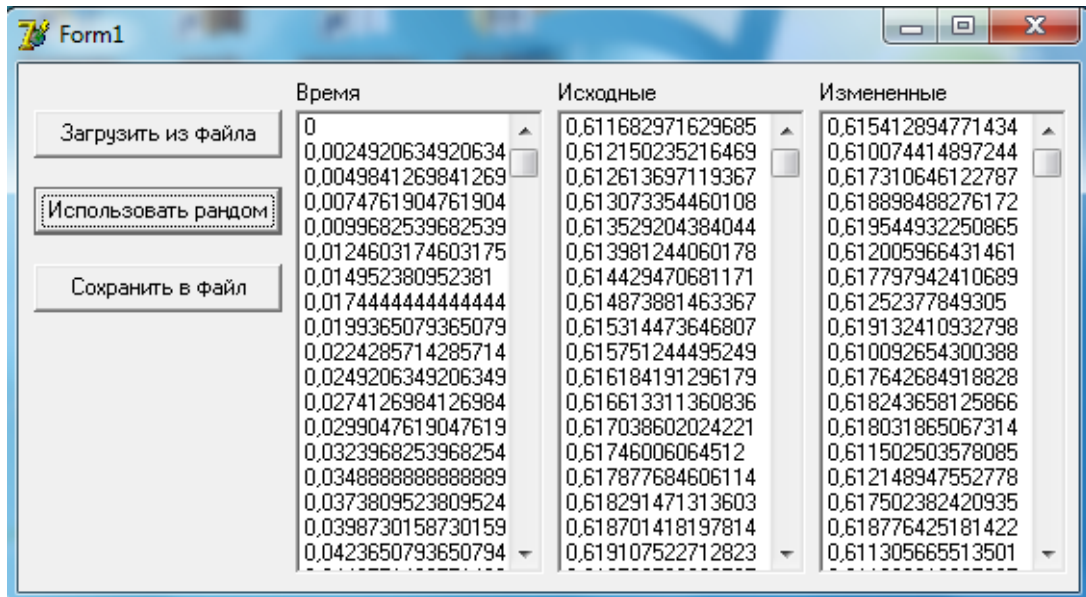
```

```

procedure TForm1.N2Click(Sender: TObject);
begin
ListBox1.Clear;
ListBox2.Clear;
end;

end.

```



```

unit EmulateInputData;

interface

uses

```

Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes,
Graphics, Controls, Forms, Dialogs, Menus,
StdCtrls, Math, StrUtils;

type

```
TForm2 = class(TForm)
    MainMenu1: TMainMenu;
    module1: TMenuItem;
    module11: TMenuItem;
    module31: TMenuItem;
    module41: TMenuItem;
    LoadFromFile: TButton;
    UseRandom: TButton;
    SaveToFile: TButton;
    ListBox1: TListBox;
    ListBox2: TListBox;
    ListBox3: TListBox;
    Label1: TLabel;
    Label2: TLabel;
    Label3: TLabel;
    OpenFileDialog1: TOpenDialog;
    SaveDialog1: TSaveDialog;
    N1: TMenuItem;
    procedure showModule3(Sender: TObject);
    procedure showModule1(Sender: TObject);
    procedure module41Click(Sender: TObject);
    procedure LoadFromFileClick(Sender: TObject);
```

```

    procedure SaveToFileClick(Sender: TObject);
    procedure UseRandomClick(Sender: TObject);
    procedure N1Click(Sender: TObject);
private
    { Private declarations }
public
    { Public declarations }
end;

var
    Form2: TForm2;

implementation

uses SolveFilteringTask, SolveInverseFilteringTask,
    SolveInverseFilteringTaskWithInputRow;

{$R *.dfm}

const
    DELIMITER:string = ',';
    EXTENSION:string = '.txt';
    RANDOMTUNE:integer = 100;

procedure TForm2.LoadFromFileClick(Sender: TObject);
var
    f:textfile;

```

```

    s:string;
    i:integer;
begin
if not OpenFileDialog1.Execute then exit;
    assignfile(f,OpenDialog1.FileName);
    reset(f);
    i:=0;
    while not eof(f) do
        begin
            readln(f,s);
            ListBox3.Items[i]:=TrimRight(LeftStr(s,Pos(DELIMITER,s)-1));
            ListBox1.Items[i]:=TrimLeft(RightStr(s,Length(s)-Pos(DELIMITER,s)));
            inc(i);
        end;
    closefile(f);
end;

procedure TForm2.SaveToFileClick(Sender: TObject);
var
    f:textfile;
    i:integer;
begin
if not SaveDialog1.Execute then exit;
    assignfile(f, SaveDialog1.FileName + EXTENSION);
    rewrite(f);
for i:=0 to ListBox2.Items.Count - 1 do
    writeln(f,ListBox1.Items[i] + DELIMITER + ListBox2.Items[i]);

```

```

CloseFile(f);
end;

procedure TForm2.UseRandomClick(Sender: TObject);
var
    i:integer;
begin
for i:=0 to ListBox1.Count - 1 do
    begin
    Randomize;
    if StrToFloat(ListBox1.Items[i]) > 0 then
        ListBox2.Items[i]:=FloatToStr(trunc(StrToFloat(ListBox1.Items[i])
            * RANDOMTUNE)/RANDOMTUNE + Random / RANDOMTUNE)
    else
        ListBox2.Items[i]:=FloatToStr(trunc(StrToFloat(ListBox1.Items[i])
            * RANDOMTUNE)/RANDOMTUNE - Random / RANDOMTUNE)
    end;
end;

procedure TForm2.showModule3(Sender: TObject);
begin
Form2.Hide();
Form3.Show();
end;

procedure TForm2.showModule1(Sender: TObject);
begin

```

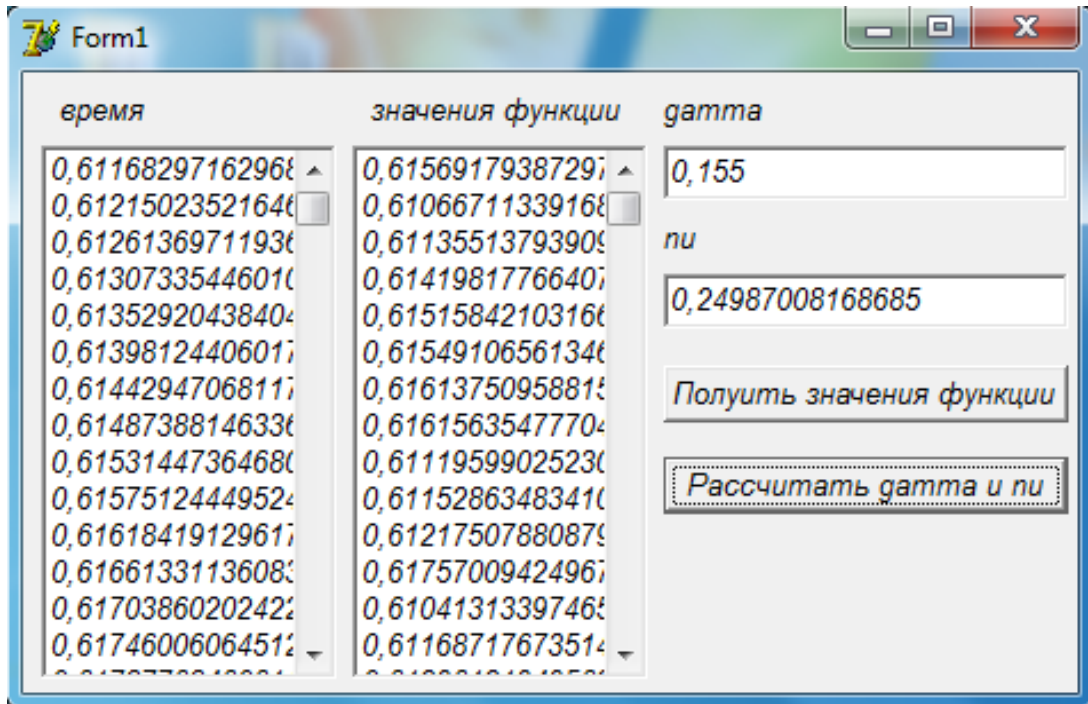
```
Form2.Hide();
Form1.Show();
end;

procedure TForm2.module41Click(Sender: TObject);
begin
Form2.Hide();
Form4.Show();
end;

procedure TForm2.N1Click(Sender: TObject);
begin
ListBox1.Clear;
ListBox2.Clear;
ListBox3.Clear;
end;

end.
```


3.12 Программы используемые в изделии



```
unit SolveInverseFilteringTask;
```

```
interface
```

```
uses
```

```
Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes,  
Graphics, Controls, Forms, Dialogs, Menus,  
StdCtrls, Math, StrUtils;
```

```
type
```

```
TForm3 = class(TForm)  
    MainMenu1: TMainMenu;  
    N1: TMenuItem;  
    model11: TMenuItem;
```

```

model21: TMenuItem;
model41: TMenuItem;
ListBox1: TListBox;
ListBox2: TListBox;
Label1: TLabel;
Label2: TLabel;
GammaResult: TEdit;
Label3: TLabel;
Label4: TLabel;
NuResult: TEdit;
LoadDataFromFile: TButton;
CalculateGammaNu: TButton;
OpenDialog1: TOpenDialog;
SaveDialog1: TSaveDialog;
N2: TMenuItem;

procedure showModule1(Sender: TObject);
procedure showModule2(Sender: TObject);
procedure showModule4(Sender: TObject);
procedure CalculateGammaNuClick(Sender: TObject);
procedure LoadDataFromFileClick(Sender: TObject);
procedure N2Click(Sender: TObject);

private
    { Private declarations }

public
    { Public declarations }

end;
```

```

var
    Form3: TForm3;

implementation

uses SolveFilteringTask, EmulateInputData,
    SolveInverseFilteringTaskWithInputRow;

{$R *.dfm}

const
    PRECISION:real = 0.005;
    DELIMITER:string = ',';

procedure TForm3.CalculateGammaNuClick(Sender: TObject);
var
    h : real; // шаг по шкале аргумента
    ht : real; // значение аргумента
    j: integer;
    F,G:real;
    V,S:real; //V - амплитуда S - фаза
    SS,W,a:real;
    pol: array[1..4] of real;
    g1,g2,h1,gamma,nu:real;

begin
    h:=2 * PI/ListBox1.Items.Count;
    ht:=0;

```

```

//Расчет коэффициентов фурье F и G
F:=0;G:=0;
for j := 0 To ListBox1.Items.Count - 1 do
  begin
    F:=F + StrToFloat(ListBox2.Items[j])*cos(ht)*h/PI;
    G:=G + StrToFloat(ListBox2.Items[j])*sin(ht)*h/PI;
    ht := ht + h;
  end;

V:=sqrt(sqr(G) + sqr(F));
S:=arccos(F/V);

W:=sqrt(ln(V)) + sqr(S);
SS:=sqrt(ln(V)) - sqr(S);
a:=sqrt(sqr(W) - sqr(SS));

pol[1]:=SS;
pol[2]:=(a-1);
pol[3]:=SS;
pol[4]:=(a-1);

g1:=pol[1];
h1:=PRECISION;
g2:=(((pol[4]*h1+pol[3])*h1+pol[2])*h1+pol[1]);

while ((g1*g2>0) and (h1<1)) Do

```

```

begin
g1:=g2;
h1:= h1 + PRECISION;
g2:= ((pol[4] * h1 + pol[3]) * h1+pol[2]) * h1 + pol[1];
end;

gamma:=h1;
nu:=((a - 1) * sqr(gamma) + a);
GammaResult.Text:=FloatToStr(gamma);
NuResult.Text:=FloatToStr(nu);
end;

procedure TForm3.LoadDataFromFileClick(Sender: TObject);
var
    f:textfile;
    s:string;
    i:integer;
begin
if not OpenFileDialog1.Execute then exit;
    assignfile(f, OpenFileDialog1.FileName);
    reset(f);
    i:=0;
    while not eof(f) do
        begin
            readln(f,s);
            ListBox1.Items[i]:=LeftStr(s, Pos(DELIMITER,s) - 1);
            ListBox2.Items[i]:=RightStr(s,Length(s) - Pos(DELIMITER,s));
            inc(i);
        end;
    end;
end;

```

```
        end;
CloseFile(f);
end;

procedure TForm3.showModule1(Sender: TObject);
begin
Form3.Hide();
Form1.Show();
end;

procedure TForm3.showModule2(Sender: TObject);
begin
Form3.Hide();
Form2.Show();
end;

procedure TForm3.showModule4(Sender: TObject);
begin
Form3.Hide();
Form4.Show();
end;

procedure TForm3.N2Click(Sender: TObject);
begin
ListBox1.Clear;
ListBox2.Clear;
end;
```

end.

время	значения функции	гамма	nu
0,61168297162961	0,61569179387297	0,155	0,24987008168685
0,61215023521646	0,61066711339168	1	0,3641392042226
0,61261369711936	0,61135513793909	1	2,91575001377818
0,61307335446010	0,61419817766407	1	2,89210626446521
0,61352920438404	0,61515842103166	1	2,59070713922829
0,61398124406017	0,61549106561346	1	2,33031180250001
0,61442947068117	0,61613750958815	1	2,11132904045254
0,61487388146336	0,61615635477704	1	1,9229367304165
0,61531447364680	0,61119599025230	1	1,75861430436883
0,61575124449524	0,61152863483410		
0,61618419129617	0,61217507880879		
0,61661331136083	0,61757009424967		
0,61703860202422	0,61041313397465		
0,61746006064512	0,61168717673514		

```
unit SolveInverseFilteringTaskWithInputRow;
```

```
interface
```

```
uses
```

```
Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes,  
Graphics, Controls, Forms, Dialogs, Menus,  
StdCtrls, Math, StrUtils;
```

```
type
```

```
TForm4 = class(TForm)  
    MainMenu1: TMainMenu;  
    module1: TMenuItem;  
    module11: TMenuItem;
```

```

module21: TMenuItem;
module31: TMenuItem;
ListBox1: TListBox;
Label1: TLabel;
ListBox2: TListBox;
Label2: TLabel;
GammaResultList: TListBox;
Label3: TLabel;
NuResultList: TListBox;
Label4: TLabel;
LoadDataFromFile: TButton;
CalculateGammaNu: TButton;
OpenDialog1: TOpenDialog;
SaveDialog1: TSaveDialog;
N1: TMenuItem;

procedure showModule1(Sender: TObject);
procedure module21Click(Sender: TObject);
procedure module31Click(Sender: TObject);
procedure CalculateGammaNuClick(Sender: TObject);
procedure LoadDataFromFileClick(Sender: TObject);
procedure N1Click(Sender: TObject);

private
    { Private declarations }
public
    { Public declarations }

end;
```



```

var
    Form4: TForm4;

implementation

uses SolveFilteringTask, EmulateInputData, SolveInverseFilteringTask;

{$R *.dfm}

const
    PRECISION:real = 0.005;
    DELIMITER:string = ',';
    N:integer = 7; //количество членов в тригонометрическом ряду
procedure TForm4.CalculateGammaNuClick(Sender: TObject);
var
    h: real; // шаг по шкале аргумента
    ht: real; // значения аргумента
    j, i, k: integer;
    F, G: array[1..7] of real;
    V, S: array[1..7] of real; //V - амплитуда, S - фаза
    SS, W, a: real;
    pol: array[1..4] of real;
    g1, g2, h1, gamma, nu: real;
    coeff: array[1..7] of real; //массив коэффициентов ряда
begin
    //-----
    coeff[1] := cos(2 * PI);

```

```

for i := 2 to N do
    coeff[i] := coeff[i - 1] + cos(i * PI) + sin(i * PI);
//-----
h := 2 * PI / ListBox2.Items.Count;

for k := 1 to N do
    F[k] := 0;
for k := 1 to N do
    G[k] := 0;

for i := 1 to N do
begin
    ht := 0;
    for j := 0 to ListBox2.Items.Count - 1 do
begin
    G[i]:=G[i]+StrToFloat(ListBox2.Items[j])*sin(ht)*h/PI;
    F[i]:=F[i]+StrToFloat(ListBox2.Items[j])*cos(ht)*h/PI;
    ht := ht + i * h;
end;
end;

for i := 1 to N do
    V[i] := sqrt(sqr(G[i]) + sqr(F[i]));
for i := 1 to N do
    S[i] := arccos(F[i] / V[i]);
//-----
for i := 1 to N do

```

```

begin
  if (abs(coeff[i]) > 0) then
  begin
    V[i] := V[i] / coeff[i];
    W := sqr(ln(V[i])) + sqr(S[i]);
    SS := sqr(ln(V[i])) - sqr(S[i]);
    a := sqrt(sqr(W) - sqr(SS));

    pol[1] := Power(i, 3) * SS;
    pol[2] := (a * i - Sqr(i));
    pol[3] := SS;
    pol[4] := (a - i) / i;

    g1 := pol[1];
    h1 := PRECISION;
    g2 := (((pol[4] * h1 + pol[3]) * h1 + pol[2]) * h1 + pol[1]);

    while ((g1 * g2 > 0) and (h1 < 1)) do
    begin
      g1 := g2;
      h1 := h1 + PRECISION;
      g2 := (((pol[4] * h1 + pol[3]) * h1 + pol[2]) * h1 + pol[1]);
    end;
    gamma := h1;
    nu := ((a - i) * sqr(gamma) + a * Sqr(i)) / Power(i, 3);
    GammaResultList.Items.Add(FloatToStr(gamma));
    NuResultList.Items.Add(FloatToStr(nu));
  end;
end;

```

```

        end;
    end;
end;

procedure TForm4.LoadDataFromFileClick(Sender: TObject);
var
    f: textfile;
    s: string;
    i: integer;
begin
    if not OpenFileDialog1.Execute then exit;
    assignfile(f, OpenFileDialog1.FileName);
    reset(f);
    i := 0;
    while not eof(f) do
    begin
        readln(f, s);
        ListBox1.Items[i] := LeftStr(s, Pos(DELIMITER, s) - 1);
        ListBox2.Items[i] := RightStr(s, Length(s) - Pos(DELIMITER, s));
        inc(i);
    end;
    CloseFile(f);
end;

procedure TForm4.showModule1(Sender: TObject);
begin
    Form4.Hide();

```

```
    Form1.Show();
end;

procedure TForm4.module21Click(Sender: TObject);
begin
    Form4.Hide();
    Form2.Show();
end;

procedure TForm4.module31Click(Sender: TObject);
begin
    Form4.Hide();
    Form3.Show();
end;

procedure TForm4.N1Click(Sender: TObject);
begin
    ListBox1.Clear;
    ListBox2.Clear;
    NuResultList.Clear;
    GammaResultList.Clear;
end;

end.
```

3.13 Программа с числами Стирлинга

```
unit Unit1;

interface

uses

    Windows, Messages, SysUtils, Variants, Classes,
    Graphics, Controls, Forms, Dialogs, StdCtrls,
    Math;

type

    TForm1 = class(TForm)
        Label1: TLabel;
        Button1: TButton;
        ListBox1: TListBox;
        ListBox2: TListBox;
        ListBox3: TListBox;
        ListBox4: TListBox;
        Label3: TLabel;
        Label4: TLabel;
        Label5: TLabel;
        Label6: TLabel;
        procedure Button1Click(Sender: TObject);
        procedure FormCreate(Sender: TObject);
    private
        { Private declarations }
    end;
end;
```

```

public
  { Public declarations }
end;

const N=5;

var
  Form1: TForm1;
  //массив с конечными разностями вперед
  mas: array[0..5,0..N] of real;
  //массив с конечными разностями назад
  inversemas: array[0..N,0..N] of real;
  //массив числе стирлинга 1 рода со знаком
  stirling: array[0..N,0..N] of integer;
  //массив числе стирлинга 1 рода без знака
  unsigstirling: array[0..N,0..N] of integer;
  function LM(m:Integer):real;
  function coeff_c(xx:integer):real;
  function factor(g:Integer):integer;
  function calculateSolution(x:real):real;

implementation

{$R *.dfm}

//инициализация и заполнение массивов нулями
procedure TForm1.FormCreate(Sender: TObject);

```

```

var
  i,j:integer;
begin
  ListBox1.Clear;
  ListBox2.Clear;
  ListBox3.Clear;
  ListBox4.Clear;

  for i:=0 to N do
    for j:=0 to N do
      mas[i,j]:=0;

  for i:=0 to N do
    begin
      for j:=0 to N do
        begin
          stirling[i,j]:=0;
          unsigstirling[i,j]:=0;
        end;
      end;

  for i:=0 to N do
    mas[0,i]:=exp(i+1);
  for i:=0 to N do
    begin
      ListBox1.Items.Add(FloatToStr(i));
      ListBox2.Items.Add(FloatToStr(mas[0,i]));

```



```

        end;
end;

//конечные разности и числа стирлинга
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var
    i,j,k:integer;
begin
    //расчет конечных разностей
    k:=1;
    for i:=1 to N do
    begin
        for j:=0 to N-k do
            mas[i,j]:=mas[i-1,j+1]-mas[i-1,j];
        k:=k+1;
    end;

    //рассчитать числа стирлинга 1 рода со знаком и без
    for i:=0 to N do
    begin
        stirling[i,0]:=0;
        unsigstirling[i,0]:=0;
    end;
    for i:=0 to N do
    begin
        stirling[i,i]:=1;
        unsigstirling[i,i]:=1;
    end;
end;

```

```

end;
for i:=1 to N do
  for j:=1 to i-1 do
    begin
      stirling[i,j]:=stirling[i-1,j-1]-(i-1)*stirling[i-1,j];
      unsigstirling[i,j]:=unsigstirling[i-1,j-1]+
        (i-1)*unsigstirling[i-1,j];
    end;
  end;

for i:=0 to N do
  begin
    ListBox3.Items.Add(FloatToStr(i));
    ListBox4.Items.Add(FloatToStr(calculateSolution(i)));
  end;

end;

function coeff_c(xx:Integer):Real;
var
  c,cc:Real;
  i,nn:Integer;
begin
  c:=0;
  for i:=0 to N do
    begin
      c:=c+stirling[xx,i]/factor(i)*mas[xx,i];
      cc:=cc+unsigstirling[xx,i]/factor(i)*mas[xx,i];
    end;
  end;
end;

```

```

        end;
    result:=c;
end;

//расчет факториала
function factor(g:Integer):integer;
var
    i,a:integer;
begin
a:=1;
if (g=0) or (g=1) then
    a:=1
else
    for i:=1 to g do
        a:=a*i;
result:=a;
end;

//вычисляет лямбда m
function LM(m:integer):real;
var
    gamma,nu,a:Real;
begin
    a:=1;
    gamma:=0.5;
    nu:=0.5;
    result:=1/a*(m+(1-nu)-((1-nu)*sqr(gamma))/(gamma+m));

```

```

end;

//тау m это функция e в степени x ф-ла (3.4.2)
function calculateSolution(x:Real):real;
var
    i:integer;
    utx:real;
begin
    utx:=0;
    for i:=0 to N do
        utx:=utx+coeff_c(i)*Exp(-sqrt(LM(i))*x)*exp(x);
    result:=utx;
end;

end.

```