На правах рукописи

Фахад Дульфикар Али

О компьютерной реализации некоторых задач фильтрации без начальных условий в пористой среде

05.13.18 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико–математических наук

Воронеж — 2020

Работа выполнена в Воронежском государственном университете

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, профессор **Костин Владимир Алексеевич**.

Официальные оппоненты:

Вирченко Юрий Петрович, доктор физико–математических наук, профессор, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, институт инженерных и цифровых технологий, кафедра теоретической и эксперементальной физики, профессор (г.Белгород)

Ковалева Марина Игоревна, кандидат физико–математических наук, Военный учебно–научный центр военно–воздушных сил "Военно–воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина", кафедра математики, доцент (г. Воронеж).

Ведущая организация: Воронежский государственный технический университет (г. Воронеж).

Защита состоится 29.12.2020 г. в 15.10 на заседании диссертационного совета Д 212.038.20 при Воронежском государственном университете по адресу: 394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 333.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/dissertations/9088/Диссертация_Фахад_Д.А..pdf

Автореферат разослан «   » ноября 2020.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.038.20
доктор физико–математических наук, доцент

Шабров Сергей Александрович

Актуальность темы.

В настоящее время, при построении математических моделей, описывающие процессы связанные с изучением загрязнения окружающей среды, широко используются такие понятия как пористые среды, фильтрация, абсорбция и т.д., при исследовании которых возникает необходимость в рассмотрении новых методов анализа так называемых приближенных моделей с распределенными параметрами, учитывающие структуры пористых сред. Так, описывая фильтрационные потоки В.С. Голубев показывает [1], что существует структура потока, зависящая от расхода жидкостей, которая имеет не ламинарный (но и не турбулентный) режим характерен для течения жидкости в пористой среде.

По Голубеву такой процесс нестационарной фильтрации сжимаемой жидкости в полубесконечной области при заданном изменении давления $p(t)$ на границе описывается задачей

$$(1-\nu)\frac{\partial P_2(t,x)}{\partial t}+\nu\frac{\partial P_1(t,x)}{\partial t}=a\frac{\partial^2 P_1(t,x)}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial P_2(t,x)}{\partial t}=\gamma(P_1-P_2)(t,x), \qquad (2)$$

$0<x<\infty$, $0<t<\infty$ с начальными условиями

$$P_1(t,x)|_{t=0}=P_2(t,x)|_{t=0}, \qquad (3)$$

и краевыми условиями

$$P_1(t,x)|_{x=0}=q(t), \qquad P_1(t,x)|_{x=\infty}=0, \qquad (4)$$

где ν— доля объема проточных зон, $P_1(t;x)$ и $P_2(t;x)$— давление в проточных и застойных зонах, соответственно, γ— константа массообмена между проточными и застойными зонами.

Первые исследования в этом направлении для задачи с начальным условием Коши с применением методов функционального анализа и операторных уравнений были проведены в диссертации [2].

В настоящей диссертации продолжается исследование уравнения Голубева в новых постановках. Здесь эти уравнения рассматриваются для $t\in R$.

[1]Голубев В.С. Уравнение движения жидкости в пористой среде с застойными зонами. ДАН СССР, Т.238, №6, 1978, С. 1318—1320

[2]Аль Кхасранджи С.Х.М. О компьютерном моделировании некоторых задач фильтрации в пористой среде

На важности таких задач указывают Г. Баренблатт и Я. Зельдович [3], при постановке вопросов о свойствах явлений, которые не зависят от начальных условий или не зависят от деталей начальных условий, но вместе с тем система еще далека от состояния равновесия. Поэтому, их можно объединить названием "промежуточная асимптотика".

Такие асимптотики являются решениями вырожденных задач, в которых параметры независимых переменных обращаются в нуль или бесконечность.

Однако для того чтобы решение вырожденной задачи представляло собой промежуточную асимптотику необходимо, чтобы оно было устойчиво относительно изменений малых возмущений, то есть вырожденная задача должна быть корректной.

В диссертации, с этой точки зрения исследуются задачи без начальных условий, для уравнений, описывающих процессы фильтрации в пористых средах и приводятся алгоритмы и их численная реализация для приближенных решений. В частности, сюда относятся модели фильтрации в пористой среде с проточными и застойными зонами.

В диссертации рассматривается модель когда процесс начался так давно, что начальные условия при $t = 0$ на него влияют незначительно. Здесь важно выяснить меру влияния параметра α— запаздывания процесса, в случае когда на границе $x = 0$ действует периодический сигнал.

В описании процесса фильтрации рассматривается следующая модель, описываемая системой

$$(1-\nu)\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} + \nu\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial x^2}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} = \gamma(u_1(t,x) - u_2(t,x)), \tag{6}$$

где $a > 0$, $0 \le \nu \le 1$, $\gamma \ge 0$.

Ставится задача о нахождении решений системы (5)—(6), удовлетворяющих условиям

$$u_1(t,0) = \varphi(t), \tag{7}$$

$$\lim_{x\to\infty} |u_1(t,x)| = \lim_{x\to\infty} |u_2(t,x)| = 0, \tag{8}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |u_1(t,x)| < \infty, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} u_2(t,x)| < \infty \tag{9}$$

и рассматриваются случаи

[3]Баренблатт Г.И. Промежуточные асимптотики математической физики/ Г.И. Баренблатт, Я.Б. Зельдович Успехи мат. наук 1971 г., Т. XXVI, в. 2 (158)

1. граничная функция $\varphi(t)$ принадлежит пространству равномерно непрерывных и

ограниченных функций на $(-\infty; T]$, $T < \infty$,

2. граничная функция $\varphi(t)$ является периодической $t \in (-\infty, \infty)$.

Выясняются вопросы:

1. Выбор классов функций в которых рассматриваемые задачи корректно разрешимы, то есть имеют единственное решение и устойчивость к погрешностям по исходным данным, получение представления решения;

2. Оценка поведения решения при $x \to \infty$, в зависимости от параметров γ и ν;

3. Построение алгоритма численной реализации приближенного решения

4. В периодическом случае решается обратная задача вычисления коэффициентов уравнения (5), (6) по результатам эксперимента, что позволяет применить полученные результаты к возможности автоматического регулирования в конкретных технических магистралях.

Анализ математических моделей и численная реализация соответствующих решений проводятся с использованием метода С.Г. Крейна решения граничных задач для уравнения в банаховом пространстве.

Этим и обусловливается актуальность темы. Диссертационное исследование выполнено в рамках г/б НИР ВГУ (№ ГР 01201266154) "Качественная теория некоторых классов дифференциальных уравнений и операторов в специальных функциональных пространствах". НИР в рамках госзадания Минобрнауки РФ 2012-2013гг.

Цели и задачи исследования. Разработка методов анализа математических моделей движения сжимаемых сред в пористых системах на основе установления корректности различных постановок нестационарных краевых задач. Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей. Разработка новых математических методов и алгоритмов, интерпретации натурного эксперимента на основе математической модели.

С этой целью необходимо изучить феноменологическое уравнение движения жидкости на основе моделей для пористой среды, состоящей из проточных и застойных зон.

Установить корректную разрешимость граничных задач для дифференциальных уравнений, описывающих эти модели, с целью обоснования нового численного метода их реализации; применить полученные результаты к построению автоматического регулирования течения вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде, с целью использования компьютерных технологий для реализации соответствующих алгоритмов управления.

Реализация цели исследования осуществляется решением следующих задач, как теоретического, так и прикладного характера:

1. Модификация модели В.С. Голубева движения жидкости в пористой среде с застойными зонами на случай процесса бесконечного во времени.

2. Установление корректной разрешимости задачи фильтрации без начальных условий в полуограниченном интервале времени.

3. Решение прямой и обратной задачи численными методами для уравнения фильтрации в среде с застойными и проточными зонами для периодического граничного условия.

4. Оценка скорости затухания фильтрационного потока, с применением численных методов дифференциальных уравнений, в зависимости от доли проточных зон и коэффициента массопереноса.

5. Разработка объектно—ориентированной программы для реализации предлагаемых алгоритмов и их численной реализации.

Объект исследования. Исследуется поток сжимаемой жидкости в магистралях с шероховатыми границами.

Методы исследования. Разработанные в диссертационной работе методы исследования математических моделей задач фильтрации в пористой среде основаны на фундаментальных методах функционального анализа, теории корректных и некорректных задач с приложением к корректной разрешимости задач для математических моделей, описываемых интегро—дифференциальными уравнениями.

Основные положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся аналитические и численные методы исследования граничных задач для математических моделей, описывающих процесс фильтрации с двойственной структурой.

Научная новизна. 1. В диссертационной работе предлагаются новые подходы анализа математических моделей, основополагающим математическим объектом которых являются нестационарные задачи без начальных условий для эволюционных уравнений, описывающих движение жидкости с двойственной структурой в пористой среде, которые ранее не рассматривались.

2. Доказывается корректная разрешимость, обеспечивающая устойчивость и сходимость численных решений к точному.

3. Решается задача вычисления коэффициентов доли проточных зон и тепломассообмена, по результатам эксперимента.

4. Указан новый метод численного решения задач для уравнения фильтрации, с помощью введенных в диссертации интерполяционных многочленов Ньютона–Тейлора для автоматического регулирования течения вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде.

5. По предложенному алгоритму разработан программный комплекс в среде Delphi, проведен вычислительный эксперимент и даны соответствующие рекомендации.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическое значение работы заключается в применении методов функционального анализа, в частности, в теории линейных полугрупп преобразований к исследованию конкретных математических моделей, представляющих собой нестационарные задачи, описывающие явление тепломассопереноса. Практическая значимость результатов и методов диссертационной работы заключается в возможности их использования в качестве инструментов для исследования математических моделей, описывающих процессы фильтрации в пористых средах, например, в трубопроводах с шероховатыми (фрактальными) стенками и в возможности анализа изменения давления сжимаемой жидкости с помощью размещения датчиков давления жидкости вдоль магистралей и для определения структуры измеряемых данных.

Область исследования. Область исследования и содержание диссертации соответствует формуле специальности 05.13.18— Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико— математические науки), область исследования соответствует п. 2 "Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей п. 4 "Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно—ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента п. 6. "Разработка новых математических методов и алгоритмов проверки адекватности математических моделей объектов на основе данных натурного эксперимента п. 7. "Разработка новых математических методов и алгоритмов интерпретации натурного эксперимента на основе его математических моделей".

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на Воронежской зимней математической школе в 2016, 2018 гг., на Воронежской математической школе "Понтрягинские чтения"в 2016, 2017 гг., а также на семинарах ВГУ по математическому моделированию (рук. проф. В.А. Костин) и нелинейному анализу (рук. проф. Ю.И. Сапронов, проф. Б.М. Даринский).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]—[6]. В совместных публикациях [1],[3],[4],[6] в диссертацию вошли результаты, принадлежащие лично автору. Работы [1],[2],[3] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых журналов и изданий, рекомендованных ВАК РФ.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, рех глав, разбитых на 24 параграфа, 1 приложения, в котором описываются алгоритмы и программный код написанный для среды программирования Delphi, литературы из 59 наименований. Общий объем диссертации— 107 стр. Работа содержит 8 рисунков.

Основное содержание работы. Во введении обосновывается актуальность темы, научная новизна, формулируются цели и задачи исследования. Указывается связь и основное отличие математических моделей, изучаемых в диссертации с ранее рассматриваемыми близкими моделями. Отмечается, что в диссертации впервые исследуется математическая модель В.С. Голубева без начальных условий, описывающая потоки с двойственной структурой в пористых средах. Впервые ставится вопрос о корректной разрешимости поставленных задач с указанием функциональных классов, в которых корректность имеет место и из которой, в частности, следует устойчивость к погрешностям сходимости приближенных решений к точному.

Указывается алгоритм численной реализации приближенных решений. На важность задач без начальных условий указывают Г. Баренблат и Я.

Зельдович [4], при постановке вопросов о свойствах явлений которые не зависят от деталей начальных условий, но вместе с тем система еще далека от состояния равновесия. Поэтому они их называют "промежуточными асимптотиками".

В первой главе обобщается феноменологическая модель движения жидкости в пористой среде В.С. Голубева на случай когда параметр массобмена может иметь разные знаки, а временная переменная принимает значения $t \in (-\infty, T)$ или $t \in (-\infty, \infty)$.

В этих случаях для уравнения упругого режима фильтрации

$$(-\nu)\frac{\partial P_2}{\partial t} + \nu\frac{\partial P_1}{\partial t} = a\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}; \tag{10}$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = \gamma(P_1 - P_2), \tag{11}$$

[4]3. Баренблатт Г.И. Промежуточные асимптотики математической физики/ Г.И. Баренблатт, Я.Б. Зельдович Успехи мат. наук 1971 г., Т. XXVI, в. 2 (158)

где $a = kE_g/(\mu\chi)$— коэффициент пьезопроводности, рассматриваются следующие задачи

I. Если $\gamma > 0$, то ставятся задачи:

Iа. Задача Дирихле.

Ищется решение системы (10)—(11) удовлетворяющее условию:

$$u(t, 0) = \varphi(t), \quad t \in (-\infty, T), \quad T < \infty, \tag{12}$$

и условиям

$$\lim_{x \to \infty} |P_1(t, x)| = \lim_{x \to \infty} |P_2(t, x)| = 0, \tag{13}$$

$$\sup_{t \in (-\infty, T)} |P_1(t, x)| < \infty, \qquad \sup_{t \in (-\infty, T)} |P_2(t, x)| < \infty. \tag{14}$$

Iб. Задача с граничными условиями третьего рода.

Ищется решение системы (10)—(11), удовлетворяющее условиям (13), (14) и граничному условию 3–го рода

$$\frac{\partial P_1(t, x)}{\partial x} + \mu P_1(t, x)|_{x=0} = \varphi(t). \tag{15}$$

Iв. Задача с периодическим условием.

Ищется решение системы (10)—(11), при $t \in (-\infty; \infty)$, удовлетворяющее условиям (13), (14) и условию (12), где $\varphi(t)$— периодическая функция.

II. Если$\gamma < 0$, то ищется решение системы (10)—(11), удовлетворяющее условиям:

IIа. Задача Дирихле

$$u(t, 0) = \varphi(t), \quad t \in (T, \infty), \quad T > -\infty, \tag{16}$$

и условиям

$$\lim_{x \to \infty} |P_1(t, x)| = \lim_{x \to \infty} |P_2(t, x)| = 0, \tag{17}$$

$$\sup_{t \in (T, \infty)} |P_1(t, x)| < \infty, \qquad \sup_{t \in (T, \infty)} |P_2(t, x)| < \infty. \tag{18}$$

Iб. Задача с граничными условиями третьего рода.

Ищется решение системы (10)–(11), удовлетворяющее условиям
(17), (18) и граничному условию (15) при $t \in [T; \infty)$.

Iв. Задача с периодическим условием.

Ищется решение системы (10)—(11), при $t \in (-\infty; \infty)$, удовлетворяющее условиям (17), (18) и условию (12), где $\varphi(t)$— периодическая функция.

Указываются методы исследования их корректной разрешимости, позволяющие в дальнейшем получать алгоритмы для корректной численной реализации соответствующих решений.

Во второй главе рассматривается математическая модель, описывающая процесс нестационарной фильтрации сжимаемой жидкости в пористой среде, заключающаяся в на-хождении решения системы уравнений:

$$a\frac{\partial^2 P_1(t,x)}{\partial x^2} = \nu\frac{\partial P_1(t,x)}{\partial t} + (1-\nu)\frac{\partial P_2(t,x)}{\partial t},\ x \geq 0, \tag{19}$$

$$\frac{\partial P_2(t,x)}{\partial t} = \gamma(P_1(t,x) - P_2(t,x)),\ t \in R^+ = (0,\infty), \tag{20}$$

где ν— доля объема проточных зон; $P_1(t,x)$, $P_2(t,x)$— давление в проточных и застойных зонах, γ— константа массобмена между проточными и застойными зонами, удовлетворяющих условиям

$$P_1(t,x)|_{x=0} = \varphi(t),\ P_1(t,x)|_{x=\infty} = 0,\ P_2(t,x)|_{x=\infty} = 0, \tag{21}$$

$$\sup_{t\in(-\infty,T)} |P_1(t,x)| < \infty, \qquad \sup_{t\in(-\infty,T)} |P_2(t,x)| < \infty \tag{22}$$

В диссертации доказывается

Теорема 1. Задача (19)—(21),(22) равномерно корректно разрешима и справедливы оценки

$$|P_1(t,x)| \leq M \sup_{t\in(-\infty,\tau)} |\varphi(t)|, \tag{23}$$

$$|P_2(t,x)| \leq M \sup_{t\in(-\infty,\tau)} |\varphi(t)|, \tag{24}$$

Из этой теоремы следует, что если $\varphi(t) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m e^{mt}$, то решение имеет вид

$$P_1(t,x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-\sqrt{\lambda_m}x} e^{mt},\ t \in (-\infty,T), \tag{25}$$

$$P_2(t,x) = \gamma\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{-\sqrt{\lambda_m}x} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\gamma(s-t)} e^{ms} ds, \tag{26}$$

где $\lambda_n = \frac{1}{a}[n + (1-\nu)\gamma - \frac{(1-nu)\gamma^2}{\gamma+n}]$.

Рассматриваются нестационарные задачи фильтрации с периодическими условиями. При $t \in (-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ и $x \in (0,\infty) = \mathbb{R}^+$ рассматривается система уравнений

При $t \in (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ и $x \in (0, \infty) = \mathbb{R}^+$ рассматривается система уравнений

$$a\frac{\partial^2 u_1(t,x)}{\partial x^2} = \nu\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + (1-\nu)\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} = \gamma(u_1(t,x) - u_2(t,x)), \tag{28}$$

где $a > 0$, $0 \le \nu \le 1$, $\gamma \ge 0$.

Ставится задача о нахождении решения системы (27)—(28), удовлетворяющему условиям

$$u_1(t,0) = \varphi(t), \tag{29}$$

$$\lim_{x\to\infty} |u_1(t,x)| = \lim_{x\to\infty} |u_2(t,x)| = 0, \tag{30}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |u_1(t,x)| < \infty, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} |u_2(t,x)| < \infty. \tag{31}$$

и рассматривается случай когда функция $\varphi(t)$ является периодической.

Теорема 2. Если в условии (29) функция $\varphi(t)$ периодическая с периодом T и рядом Фурье

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{T} + b_n\sin\frac{2\pi n}{T}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\left[\frac{2\pi n}{T}(t-\delta_n^0)\right],$$

где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \delta_n^0 = \frac{T}{2\pi n}\left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n}\right),$$

то существует решение задачи (27)—(31), периодическое при каждом $x \in \mathbb{R}^+$ и оно имеет вид

$$u_1(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\sqrt{\frac{(\rho_n+\alpha_n)}{2}}x}\cdot\cos\left[\sqrt{\frac{(\rho_n-\alpha_n)}{2}}x - \omega_n t + \delta_n^0\right], \tag{32}$$

$$u_2(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\sqrt{1+\mu_n^2}} e^{-\sqrt{\frac{(\rho_n+\alpha_n)}{2}}x}\cdot\cos\left[\sqrt{\frac{(\rho_n-\alpha_n)}{2}}x - \omega_n t + \sigma_n^0\right], \tag{33}$$

где $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$, $\mu_n = \frac{\omega_n}{\gamma_n}$, $\sigma_n = \arccos\frac{\omega_n}{\sqrt{1+\mu_n^2}}$,

$$\rho_n = \frac{\omega_n}{a}\sqrt{\frac{\gamma^2 + \omega_n^2\nu^2}{\omega_n^2 + \gamma_2}}, \quad \alpha_n = \frac{\omega_n^2(1-\nu)\gamma}{a(\gamma^2+\omega_n^2)}. \tag{34}$$

Далее, анализируются фильтрационные волны в пористой среде.

Результаты полученные после анализа решения системы (19)—(20) сравниваются с описанием тепловых волн, приведенных в монографии [5], с использованием решения задачи (19), (20), выраженное через параметры ν, μ, ω, α

$$u(t,x) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\cdot\sqrt{M(\nu,\mu)}x}\cos\left(\sqrt{\frac{\rho-\alpha}{2}}x - \omega t\right), \tag{35}$$

где

$$M(\nu,\mu) = \left(\frac{1+\mu^2\nu^2}{1+\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{(1-\nu)\mu}{1+\mu^2} \tag{36}$$

Анализируя полученное решение приходим к следующим результатам. Если температура поверхности длительное время периодически меняется, то в горных трещинах также устанавливаются колебания температуры с тем же периодом. При этом

1. Амплитуда колебаний экспоненциально убывает, с глубиной

$$A(x) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\cdot\sqrt{M(\nu,\mu)}x}. \tag{37}$$

При этом скорость убывания амплитуды зависит от величины константы $M(\nu,\mu)$. И здесь мы имеем следующие возможности:

1. Если $\nu = 1$, то есть среда изотропная, состоящая только из проточных зон, то $M(1,\mu) = 1$ и закон изменения амплитуды совпадает с приведенным законом

2. Если $\mu = 1$, $\nu \in (0,1)$, то при $\omega = \gamma$

$$M(\nu,1) = \frac{1}{2}\left[-\nu + \sqrt{2(1+\nu^2)}\right],$$

амплитуда $A(x)$ затухает быстрее чем в изотропном случае с полностью проточной зоной.

3. Если $\nu = \frac{1}{2}$, то есть когда доля проточных и застойных зон совпадает, то существует μ_0 такое, что при $\mu \in (0,\mu_0)$ убывает быстрее экспоненты $e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}}$, а при $\mu \in (\mu_0,\infty)$ происходит ее замедление.

4. Если $\nu = 0$, т.е. когда нет проточных зон, то на интервале $0 < \mu < \frac{\sqrt{3}}{3}$ функция $M(0,\mu)$ возрастает от 1 до $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, а при $\mu > \frac{\sqrt{3}}{4}$ она убывает.

Третья глава посвящена численной реализации решений для моделей фильтрации с полуограниченной магистралью, а также моделей с неограниченным временем с обеих сторон и с периодическим граничным условием.

[5] Тихонов А.Н. Уравнения математической физики/ А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, М.: Наука, 1966, с. 246.

В первом случае для этого используются интерполяционные многочлены специального вида, называемые многочленами Ньютона–Тейлора [6], которые имеют вид

$$P_n(t) = \sum_{m=0}^{n} c_m t^m \tag{38}$$

с коэффициентами

$$c_m = \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{k!} D(k,m) f^k_{\frac{k}{2}}, \tag{39}$$

где $D(k,m)$— числа Стирлинга первого рода, $f^k_{\pm\frac{k}{2}}$— соответствующие конечные разности.

Необходимость применения интерполяционных многочленов заключается в том, что функции $\varphi_m(t) = t^m$ являются собственными элементами оператора $A\varphi = aL_n$. Отсюда следует, что решение задачи

$$a\frac{\partial^2 u(\tau,x)}{\partial x^2} = \nu\tau\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial \tau} + (1-\nu)\gamma u(\tau,x) -$$

$$-\frac{(1-\nu)\gamma^2}{\tau^\gamma}\int\limits_0^\tau s^{\gamma-1}u(s,x)ds = L_\tau u(\tau,x),$$

которое получается из уравнения (5) заменой $\tau = e^t$ является точным для граничных условий, являющихся алгебраическими полиномами вида

$$\varphi(\tau) = \sum_{m=0}^{N} c_m \tau^m = Q_N(\tau). \tag{40}$$

При этом, решение имеет вид

$$u(\tau,x) = \sum_{m=0}^{N} c_m e^{-\sqrt{\lambda m}x}\tau^m, \tag{41}$$

где

$$\lambda_m = \frac{1}{a}\left[m + (1-\nu) - \frac{(1-\nu)\gamma^2}{\gamma+m}\right]. \tag{42}$$

Таким образом, получается следующий алгоритм построения приближенного решения:

1. В соответствии с заданной погрешностью выбирается N— порядок интерполяционного многочлена Ньютона

[6]Костин В.А. Операторные многочлены Ньютона и корректная разрешимость задач для обобщенного уравнения Эйлера /В.А.Костин, А.В.Костин, Д.В.Костин// ДАН. — 2016, Т.470 №2 с.141—143

2. Строится таблица конечных разностей для интерполирования вперед (или назад)

3. По рекуррентным формулам

$$D^{-}(n,k) = D^{-}(n-1,k-1) - (n-1)D^{-}(n-k,k) \tag{43}$$

для $0 < k < n$,

$$\begin{array}{ll} D^{-}(0,0) = 1, & D^{-}(n,0) = 0,\ n > 0 \\ D^{-}(0,k) = 0,\ k > 0, & D^{-}(n,k) = 0,\ n < k \end{array} \tag{44}$$

Числа Стирлинга первого рода без знака определяются как

$$D(n,k) = |D^{-}(n,k)|. \tag{45}$$

они удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$D(n,k) = D(n-1,k-1) + (n-1)D(n-1,k), \tag{46}$$

для $0 < k < n$.

$$\begin{array}{ll} D(0,0) = 1, & D(n,0) = 0,\ n > 0 \\ D(0,k) = 0\, k > 0 & \\ D(n,k) = 0,\ n < k, & D(n,n) = 1. \end{array} \tag{48}$$

строится таблица чисел Стирлинга со знаком или без знака, в зависимости от направления интерполирования.

4. Вычисляются значения λ_m по формулам (42)

5. По формулам (39) вычисляются коэффициенты и c_m Ньютона–Тейлора

6. Строится многочлен $Q_N(\tau)$

7. Строится решение задачи по формуле (41)

8. Вычисляется градиент давления по формуле

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = Au(x) = \frac{1}{a}L_\tau u(x).$$

.

Для процессов с неограниченным с двух сторон временем, которые рассматриваются с периодическими граничными условиями в начале магистрали в случае распространения волн в пористой среде численно решается обратная задача нахождения коэффициентов ν и γ по известным из эксперимента амплитуды и фазы процесса.

На основе полученных результатов строится алгоритм, позволяющий численно сравнивать амплитуды решений в зависимости от коэффициентов уравнений.

Данный программный комплекс предназначен для работы с измерительной аппаратурой жидкость-проводящих магистралей и проведения численных экспериментов. Основной его целью являются определение параметров характеризующих поверхностную структуру внутренних частей жидкость-проводящих магистралей и выработки рекомендаций для расположения датчиков давления и алгоритмов их работы. Это осуществляется посредством решения задач заданных уравнениями В.С. Голубева.

Общие сведенья о программе. Программный комплекс называется GolubevTaskSolution. Он написан на языке Object Pascal в среде Delphi. Для работы программного комплекса достаточно установленной операционной системы. Для нормальной работы программного комплекса необходимо порядка 100 мегабайт оперативной памяти.

Функциональное назначение. Программный комплекс вычисляет параметры входного и выходного периодического сигнала модель которого представлена задачей и обратной задачей для уравнения В. С. Голубева, то есть решает задачу и обратную задачу фильтрации. Она позволяет измерять параметры течения вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде. Вычислять, по данным эксперимента, значения коэффициента массообмена между проточной и застойной зонами, и объемную долю проточных зон, в зависимости от входного периодического сигнала.

Структура программы. Вычислительный процесс реализуется четырьмя модулями. Для каждого модуля предусмотрена своя форма. Модули solveTask и emulateInputData численно решают задачу фильтрации, а модули solveInverseTask и solveInverseTaskWithInputRow обратную задачу фильтрации. Модуль solveTask решает задачу фильтрации по исходным значениям параметров входного периодического сигнала и восстанавливает этот сигнал для начального условия $\cos(t)$. Модуль emulateInputData эмулирует значения входного периодического сигнала которые эквивалентны реальным значениям получаемых с датчиков давления и уровня, и записывает их в файл. Модуль solveInverseTask производит расчет целевых параметров исходя из данных полученных из модуля emulateInputData и вычисляет параметры входного сигнала то есть решает обратную задачу фильтрации при начальном условии $\cos(t)$, а модуль solveInverseTaskWithInputRow вычисляет параметры входного периодического сигнала при начальном ряде $\sum\limits_{i=0}^{N} a_i \cos(a_i t)$ результатом являются γ коэффициент теплообмена и ν коэффициент застойных зон, и если они соответствуют рабочему диапазону данных коэффициентов, то жидкость-проводящая магистраль признается не бракованной с правильной внутренней структурой.

Требование к программному окружению. Операционная система Windows, версии начиная с XP.

Список литературы

[1] Фахад, Д. А. О компьютеоной реализации обратной задачи для уравнения движения жидкости в пористой среде с проточными и застойными зонами / М. В. Муковнин, С.Х.М. Аль–Кхазраджи, Д. А. Фахад // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2017. — № 1. — С. 128–134.

[2] Фахад, Д. А. Об однопараметрических полугруппах преобразований весовых анаизотропных пространствах функций с интегральными метриками / С. А. Чехов, Д. А. Фахад // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2016. — № 1. — С. 150–156.

[3] Фахад, Д. А. О корректной разрешимости задач без начальных условий для уравнений В.С. Голубева, описывающих движение сжимаемой жидкости в пористой среде / В. А. Костин, С. А. Чехов, Д. А. Фахад // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. — 2016. — № 3. — С. 162–169.

[4] Фахад Д.А. Косинус–весовые пространства функций и полугруппа Гаусса–Вейерштрасса// В.А. Костин, С.А. Чехов, Д.А. Фахад, Воронеж: Материалы конференции "АННИ XXI века", №5, ч.1, 2014

[5] Фахад Д.А. О решении задачи без начальных условий для системы уравнений описывающих динамика некоторых процессов тепломассопереноса // В.А. Костин, А.В. Костин, Д.А. Фахад, Воронеж: Сборник факультета ПМиМ, вып. 13, 2016, С 145–149.

[6] Фахад Д.А. Задача со смешанным краевым условием для уравнения В.С. Голубева// Д.А. Фахад, Материалы Международной "Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна– 2018 Воронеж: Издательско–полиграфический центр "Научная книга 2018, С. 336–337.

Свидетельства, полученные автором:

Свидетельство о регистрации программ для ЭВМ / Фахад Дульфикар Али // Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ № 2017661210