На правах рукописи

Салим Бадран Джасим Салим

О некоторых равномерно корректных по С.Г.Крейну задачах для дифференциальных уравнений с дробными производными

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Воронеж — 2014

Работа выполнена в
Воронежском государственном университете

Научный руководитель: доктор физико–математических наук, профессор **Костин Владимир Алексеевич**.

Официальные оппоненты:

Калитвин Анатольий Семенович, доктор физико–математических наук, Липецкий государственный педагогический университет, кафедра математики, заведующий.

Стенюхин Леонид Витальевич, кандидат физико–математических наук, Воронежский государственный архитектурно-строительный университет, кафедра высшей математики, доцент.

Ведущая организация:
Российский университет дружбы народов (г. Москва).

Защита состоится 17 февраля 2014 г. в 16.30 на заседании диссертационного совета Д 212.038.22 при Воронежском государственном университете по адресу: 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 333.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Воронежского государственного университета а также на сайте http://www.science.vsu.ru/disserinfo&cand=2708

Автореферат разослан « » декабря 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.038.22
доктор физико-математических наук, профессор

Гликлих Ю.Е.

Актуальность темы. Как указали Ж.Адамар, А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, М.М.Лаврентьев и др., при численной реализации решения задач математической физики основополагающим фактом является докзательство их корректной разрешимости, которая устанавливает устойчивую стабилизацию сходимости приближенных решений к точному. В диссертации уставнавливается корректная разрешимость в смысле С.Г. Крейна следующих задач

I. Задача Коши

$$\frac{du}{dt} = Au(t), \qquad u(0) = u_0, t \geq 0 \tag{1}$$

II.

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Au(t), \qquad u(0) = \varphi, u'(0) = \psi \tag{2}$$

III. Краевые задачи

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Au(t), \tag{3}$$

$$1) \quad u(0) = \varphi,\, u(a) = \psi, \tag{4}$$

$$2) \quad u(0) = \varphi,\, \lim_{t\to\infty} \|u(t)\| < \infty, \tag{5}$$

где оператор A задается: а) одним из дифференциальных выражений $\mathfrak{D}_{\pm}\varphi(x) = \pm\frac{d\varphi}{dx}$, $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ или $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ в соответствующих весовых пространствах, введенных в диссертации и называемых гипервесовыми, б) одним из дифференциальных выражений вида $l_{\pm}\varphi(x) = \pm x\frac{d\varphi(x)}{dx}$, $x \in \mathbb{R}^+$ или $l^2_{\pm}\varphi(x)$, в обобщенных функциональных пространствах Степанова, которые также здесь вводятся.

Корректная разрешимость и вытекающая из нее устойчивость по исходным данным, необходимая для численной реализации решения существенно зависит от выбора функциональных пространств, в которых ищется это решение и в которых соответствующие обратные операторы ограничены. Начиная с фундаментальных работ Э. Хилле, Р. Филлипса и др. главными инструментами в этих исследованиях являются методы теории сильно непрерывных полугрупп, групп и косинусных функций линейных преобразований. В теории уравнений параболического типа важное место занимает однопараметрические полугруппы линейных преобразований $T(t)$, $t \geq 0$ называемыми *каноническими* и определяемые соотношением $T(\alpha \oplus \beta) = T(\alpha)T(\beta)$, α и β— действительные или комплексные числа. При этом в системе рассматриваемых чисел можно выделить множество полугрупп, соответствующим разнообразым операция сложения.

В настоящей диссертации рассматриваются полугруппы с обычным линейным сложением $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta$. , то есть здесь рассматриваются семейства линейных ограниченных операторов $T(t)$, $t \geq 0$ называемых полугруппой класса (C_0) в E, которое удовлетворяет условиям:

$$1. T(0) = I, \quad 2. T(t+s) = T(t)T(s), \quad 3. \lim_{t \to 0+} \|T(t)\varphi - \varphi\| = 0, \forall \varphi \in E. \quad (6)$$

Для таких полугрупп существуют константы M и ω такие, что выполняется оценка

$$\|T(t)\varphi\|_E \leq Me^{-\omega t}. \quad (7)$$

Для этих полугрупп определен производящий оператор (генератор) $A = \left.\frac{dT(t)}{dt}\right|_{t=0}$ с плотной в E областью определения.

Связь между такими полугруппами и равномерной корректностью задачи (1) характеризует

Теорема 1 (корректность). Задача Коши (1) равномерно корректна в E, то есть имеет единственное решение $u(t) \in D(A)$, $t \geq 0$ и $u \in C^{(1)}[0, a)$, тогда и только тогда когда оператор A является генератором полугруппы класса (C_0). При этом, решение имеет вид

$$u(t) = T(t)\varphi, \qquad t \in [0, a). \quad (8)$$

В том же отношеннии к задаче Коши (второго порядка) (2), как полугруппы класса (C_0) к задаче Коши (1), находятся операторные косинус–функции (КОФ). Исследованию КОФ посвящены работы многих математиков, начиная с работ С. Куреппы, М. Совы, Г.О. Фатторини. Из воронежских математиков изучением КОФ занимались С.Г. Крейн, А.Г. Баскаков, В.А. Костин и др.

Сильно непрерывной *операторной косинус–функцией* называется семейство линейных и ограниченных операторов $C = \{C(t) : t \in \mathbb{R}\}$, удовлетворяющее условиям (i) $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s)$, (ii) $C(0) = I$, (iii) $C(t)\varphi$— непрерывная функция для каждого $\varphi \in E$.

Генератором A операторной косинус–функции C называется оператор $A = C''(0)$. Его областью определения является множество тех $\varphi \in E$, для которых функция $C(t)$ дважды дифференцируема в точке $t = 0$. Операторные косинус–функции C и (C_0)– полугруппы T связаны между собой формулой

$$T_c(t)\varphi = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} C(s)\varphi ds. \quad (9)$$

Задача (2) называется равномерно корректной если существует подпространство $M \subset E$ такое, что задача (2) имеет единственное решение для $u_0, u_1 \in M$ и когда $u_0^{(n)}, u_1^{(n)}$, $(n = 0, 1, \dots)$ являются последовательностью начальных данных в M, стремящихся к нулю, то соответствующее решение $u^{(n)}(t)$ стремится к нулю в метрике E, равномерно на каждом компакте из $[0, \infty)$.

Теорема 2 (Сова, Куреппа). Задача (2) равномерно корректна тогда и только тогда когда A— генератор (C_0)– косинус функции $C(t)$, при этом решение имеет вид

$$u(t) = C(t)\varphi + \int_0^t C(s)\psi ds. \tag{10}$$

Новые примеры косинус–функций являются предметом изучения в последующих главах диссертации, в связи с корректной разрешимостью рассматриваемых задач.

Эллиптический случай. Классические результаты по равномерно корректной разрешимости задач (3)—(4) и (3)—(5) приводятся в монографии С.Г. Крейна "Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве". Исследованию таких задач посвящены работы М.Л. Горбачука, В.И. Горбачук, А.В. Князюка, а также воронежских математиков П.Е. Соболевского, В.А. Костина, М.Н. Небольсиной и др.

Эти исследования приводят к необходимости введения дробных степеней операторов (в частности $A^{\frac{1}{2}}$) в терминах которого формулируются определения ослабленного и обобщенного решения задачи (2)—(4):

Цели и задачи исследования. 1. Установление корректой разрешимости в смысле С.Г. Крейна начально–краевых задач для дифференциальных уравнений с дробными производными, необходимой при их численной реализации.

2. Получение решений задач и их оценок для некоторых уравнений актуальных в механике, гидродинамике, тепломассопереносе и др.

3. Доказательство корректной разрешимости задач для дифференциальных уравнений с вырождающимися коэффициентами в новых функциональных пространствах, введенных в диссертации.

Методы исследования. В диссертации использованы методы теории дифференциальных уравнений, функционального анализа, теории сильно–непрерывных полугрупп и групп преобразований и их приложений к конкретным задачам.

Научная новизна. 1. Введены и изучены новые классы функциональных пространств, частным случаем которых являются L_p– весовые пространства и S_p– пространства Степанова.

2. Изучены во введенных пространствах новые классы сильно непрерывных полугрупп, групп и косинус–функций и их производящих операторов.

3. Получение точных решения начально–краевых задач для дифференциальных уравнений с оператором Адамара–Эйлера и их оценка через исходные данные во введенных функциональных пространствах.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации дают теоретические обоснования корректной разрешимости задач для дифференциальных уравнений, используемых в механике, гидродинамике, тепломассопереносе и т.д. Они актуальны при численной реализации задач с применнием высокоскоростных компьютерных технологий.

Апробация работы. Материалы диссертации докладывались на Воронежской зимней математической школе в 2014 г., на Воронежской математической школе "Понтрягинские чтения"в 2013, 2014 гг., на Международной молодежной научной школе "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"в 2012 г., а также на семинарах ВГУ по математическому моделированию (рук.— проф. В.А. Костин) и нелинейному анализу (рук.— проф. Ю.И. Сапронов, проф. Б.М. Даринский).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]—[9]. В совместных публикациях [1],[2],[4]—[8] в диссертацию вошли результаты, принадлежащие лично автору. Работы [1] и [2] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых журналов и изданий, рекомендованых ВАК РФ.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на 14 параграфов, литературы из 58 наименований. Общий объем диссертации—90 стр.

Краткое содержание работы. В диссертации методы общей теории полугрупп применяются к исследованию корректной разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений с дробными производными,которые становятся все более актуальными в таких областях, как механика, гидродинамика, теория массопераноса, радиофизика и .т.д.

Однако, как правило, проводимые при этом исследования касаются только вопросов существования решений соответствующих задач, и их интегро–дифференциальным представлениям. Вопрос же устойчивости решений по

исходным данным, один из основных при установлении корректной разрешимости, в этих работах, как правило, не обсуждается.

В диссертации устанавливается равномерно корректная разрешимость для таких задач.

Первая глава диссертации содержит необходимую терминологию, понятия и общие фундаментальные факты, связанные с теорией корректно разрешимых задач для уравнений в банаховом пространстве.

Вводятся понятия сильно непрерывных полугрупп, групп и косинусных функций (КОФ) линейных преобразований, их генераторов и их связи с корректной разрешимостью начально–краевых задач для уравнений вида (0.1), (0.2).

Вводятся понятия решений этих уравнений (§1.2) и равноммерно корректной разрешимости, в смысле С.Г. Крейна, задач (1), (2) и краевых задач (3)–(4), (3)–(5).

Наряду с этим указываеются критерии генераторов сильно непрерывных полугрупп (теорема Хилле–Филлипса) и теорема Совы–Куреппы для косинусной функции. Отметим, что в Воронеже впервые начали исследовать КОФ С.Г. Крейн и А.Г. Баскаков. Позже к этой теме обратился В.А. Костин.

В §1.3 вводятся дробные степени для операторов A— таких, что $-A$ является генератором сильно непрерывной полугруппы класса C_0, удовлетворяющей оценке (7).

В §1.4, в терминах дробных степеней операторов, формулируются критерии корректной разрешимости по С.Г. Крейну краевой задачи (3)–(4), которые формулируются в терминах квадратного корня $(-A)^{\frac{1}{2}}$ (Теорема 1.4.2).

Вторая глава диссертации содержит самостоятельные результаты. Здесь вводятся новые классы функциональных пространств, называемые *гипервесовыми.* Для этого рассматриваются следующие классы весовых функций.

Через Φ_m^+ обозначим класс монотонно возрастающих при $t > 0$ функций $\rho_+(t) > 0$, и таких, что при некотором $m > 0$ выполняется соотношение

$$\rho'_+(t) - m\rho_+(t) \geq 0. \tag{11}$$

Так как из (2.3) при $t \to \infty$ следует оценка $\rho_+(t) \geq \rho_0 \exp(mt) \quad (\rho_0 > 0)$, то классы таких весовых функций будем называть *гипервозрастающими*, а $inf\, m$, при котором выполняется (11) будем называть *символом* гипервеса веса $\rho_+(t)$.

Устанавливаются оценки

$$\int\limits_0^t e^{\lambda s} \cdot \rho_+(s)ds \leq \frac{e^{\lambda t}}{m+\lambda}\rho_+(t) \tag{12}$$

.

и для n-кратного интеграла, $n = 1, 2....$

$$J_+^n \rho_+(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^t (t-s)^{n-1}\rho_+(s)ds \leq \frac{\rho_+(t)}{m^n}. \tag{13}$$

Очевидно, что при соответствующем m классы Φ_m^+ содержат как угодно быстро растущие на бесконечности функции.

Классы Φ_m^-. Наряду с этим вводятся также сопряженные классы Φ_m^- весовых положительных функций $\rho_-(t)$, монотонно убывающих и таких, что для некоторого $m > 0$ выполняется соотношение $\rho_-'(t) + m\rho_-(t) \leq 0$.

Нетрудно видеть, что если $\rho_+ \in \Phi_m^+$, то $\frac{1}{\rho_+} = \rho_- \in \Phi_m^-$.

Таким образом, при $t \to \infty$ функции $\rho_-(t)$ могут убывать как угодно быстро. В связи с этим мы их будем называть *гиперубывающими.*

Заметим, что при $t \to 0$ они могут как угодно быстро расти.

Кроме того, веса $\rho_-(t)$ обладают следующим свойством: $\rho_-(\infty) = 0$ и для них при $\lambda + m > 0$ выполняются оценки

$$J_-^n \rho_-(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_t^\infty (s-t)^{n-1}\rho_-(s)ds \leq \frac{\rho_-(s)}{m^n},\ n = 1, 2, \dots\ . \tag{14}$$

Полумультипликативные гипервесовые функции. Важными подклассами гипервесовых функций Φ_m^+ и Φ_m^- являются действительные, измеримые функции на $\mathbb{R}^+$, удовлетворяющие условию *полумультипликативности*

$$0 \leq \psi_-(t+s) \leq \psi_-(t)\psi_-(s),\ \forall t, s \in \mathbb{R}^+, \psi_-(0) = 1 \tag{15}$$

В диссертации рассматриваются и функции $\psi_+(t)$, удовлетворяющие условию обратному (15), то есть

$$\psi_+(t)\psi_+(s) \leq \psi_+(t+s). \tag{16}$$

Классы функций, удовлетворяющие (15) называются *левомультипликативными* и обозначать Ψ^-, а классы, удовлетворяющие условию (16) — *правомультипликативными* и обозначать через Ψ^+.

На связь классов Ψ^+, Ψ^-, Φ_m^+, Φ_m^- указывает следующая

Лемма 1. Если $\psi_+(t)$ непрерывно дифференцируема и $\psi'_+(t) > 0$, то справедливо включение $\Psi^+ \subset \Phi^+_{\psi'(0)}$; если $\psi_-(t)$ непрерывнодифференцируема и $\psi_-(t) < 0$, то $\Psi^- \subset \Phi^-_{\psi'_-(0)}$.

Выясняется, что классы Φ_m^+ и Φ_m^- шире чем Ψ^+ и Ψ^- соответственно.

В §2.3. вводятся функциональные пространства $\mathfrak{C}_{p\pm}$, в которых изучаются операторы дробного интегрирования и дифференцирования Римана-Лиувилля.

На полуоси $t \in [0, \infty)$ будем рассматривать гипервесовые пространства $\mathfrak{C}_{\rho_+^{(0)}}$ и $\mathfrak{C}_{\rho_-}$ непрерывных функций $f(t)$, для которых конечны нормы

$$\|f\|_{\mathfrak{C}_{\rho_\pm}} = \sup_{t>0} \left| \frac{f(t)}{\rho_\pm(t)} \right|, \quad \rho_\pm \in \Phi_m^\pm. \tag{17}$$

Функции $f \in \mathfrak{C}_{\rho_+}(0)$ удовлетворяют условию $f(0) = 0$. Известно, что $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ – банаховы пространства.

Далее рассматриваются операторы $\mathfrak{D}_+$ и $\mathfrak{D}_-$ заданные дифференциальными выражениями

$$l_+\varphi(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad l_-\varphi(t) = -\frac{d\varphi(x)}{dt} \tag{18}$$

и областями определения: $D(\mathfrak{D}_\pm) = \{\varphi \in \mathfrak{C}_{\rho_\pm}, \frac{d\varphi}{dt} \in \mathfrak{C}_\pm\}$.

Справедливы следующие

Теорема 3. Операторы $-\mathfrak{D}_\pm$ является генераторами полугрупп $T(x, -\mathfrak{D}_\pm)$ класса C_0, для которых выполняется оценка

$$\|T(x, \mathfrak{D}_\pm)\varphi\|_{\mathfrak{C}_{\rho_+}} \le e^{-mx}\|\varphi\|_{\mathfrak{C}_{\rho_\pm}}, \tag{19}$$

где m – порядок роста или убывания соответствующего веса.

Теорема 4. Для операторов $\mathfrak{D}_\pm$ определены дробные степени $\mathfrak{D}_\pm^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ равенствами

$$\mathfrak{D}_\pm^\alpha\varphi(t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \int\limits_0^\infty \lambda^{\alpha-1}(\lambda I + \mathfrak{D}_\pm)^{-1}\mathfrak{D}_\pm\varphi(t)d\lambda \tag{20}$$

для $\varphi \in D(\mathfrak{D}_\pm)$.

Из этих формул, в частности, следуют представления для отрицательных степеней

$$\mathfrak{D}_{+}^{-\alpha}\varphi = I_{+}^{\alpha}\varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}\varphi(s)ds, \tag{21}$$

$$\mathfrak{D}_{-}^{-\alpha}\varphi = -I_{-}^{\alpha}\varphi = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{t}^{\infty}(s-t)^{\alpha-1}\varphi(s)ds. \tag{22}$$

И справедливы оценки

$$\|\mathfrak{D}_{\pm}^{-\alpha}\varphi\|_{\rho_{\pm}} \leq \frac{1}{m^{\alpha}}\|\varphi\|_{\rho_{\pm}}, \tag{23}$$

показывающие инвариантность введенных в диссертации пространств относительно операции дробного интегрирования Римана–Лиувилля.

В §2.4 применяются полученные результаты к задаче нахождения функции $u(x)$, $x \in (0,\infty)$, имеющей все производные порядка $m\gamma$, $0 < \gamma < 1$, $m = 0, 1, ..., n$ и удовлетворяющей уравнению

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \mathfrak{D}_{\pm}^{m\gamma}u(x) = f(x), \qquad a_n \neq 0. \tag{24}$$

где $f \in \mathfrak{C}_{\rho_{\pm}}$.

Дифференциальные уравнения такого вида с правыми дробными производными Римана-Лиувиля, но не как операторные уравнения, рассматривались в монографии В.В. Учайкина [49], с. 219–222, где с помощью преобразования Лапласа получено решение задачи Коши для уравнения вида (24) с начальными условиями

$$u(0) = \cdots = u^{(n-1)}(0) = 0, \tag{25}$$

которое выписано в виде

$$u(x) = \int_{0}^{x} G(x-s)ds, \tag{26}$$

где относительно функции Грина $G(x)$ сказано, что она находится из характеристического многочелена $P_n(\lambda^{\gamma})$ с помощью обратного преобразования Лапласа

$$G(x) = L^{-1}\{P_n^{-1}(\lambda(\alpha))\}(x). \tag{27}$$

При этом, проблема устойчивости полученного решения к погрешностям исходных данных не связанных с введением соответствующих простанств в [49] не обсуждался.

В нашем случае следствием теоремы 2.1.1 является

Теорема 5. Задача (24) равномерно корректно разрешима в пространствах $\mathfrak{C}_{\rho_\pm}$ соответственно. Ее решение имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{a_n}\sum_{i=0}^{n} R^{k_i}(\alpha_i, \mathfrak{D}_\pm^\gamma) f(x), \tag{28}$$

и справедливо неравенство

$$\|u\|_{\rho_\pm} \leq \frac{M}{m^\gamma \prod_{i=1}^{n}(Re\alpha_i + m)^{k_i}} \|f\|_{\rho_\pm}, \tag{29}$$

где α_i-корни многочлена $P_n(\alpha) = \sum_{m=0}^{n} a_m \alpha^m$, k_i-их кратности, m-символ веса ρ_+ или ρ_- соответственно.

В диссертации доказывается следующая

Теорема 6. При выполнении условий теоремы 5. решение уравнения

$$\sum_{m=0}^{n} a_m \mathfrak{D}_+^{m\gamma} u(x) = f(x), \tag{30}$$

имеет вид

$$u(x) = \int_0^\infty q(t) T(t, -\mathfrak{D}^\gamma) f dt, \tag{31}$$

где

$$T(t, -\mathfrak{D}_+^\gamma) = \int_0^\infty g_\gamma(t,s) T(s, \mathfrak{D}_+ f(s)) ds, \tag{32}$$

$g_\gamma(t,s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega - i\infty}^{\omega + ß\infty} e^{t\lambda - s\lambda^\gamma} d\lambda$— обратное преобразование Лапласа от функции $e^{-s\lambda^\gamma}$.

Отметим, что для $\mathfrak{D}_-^\gamma$ разрешимость задачи (24) вообще ранее не рассматривалась.

В третьей главе вводятся и изучаются операторы $\mathfrak{D}_a$, выражающиеся через дифференциальное выражение в

$$l = x\frac{d}{dx}, \tag{33}$$

$x \geq 0$, с областями определения в обобщенных функциональных пространствах Степанова $S_{p,\omega,\gamma}^\pm$ с нормами

$$\|\varphi\|_{S_{p,\omega,\gamma}^\pm} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\left[x^{\pm\omega}\int_0^x s^\gamma |\varphi(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}},$$

где $\omega \geq 0$, $\gamma \geq 0$.

Уравнение с конструкцией (33) представляют важный класс в теории дифференциальных укравнений. Например, к их числу относятся классические уравнения Эйлера

$$\sum_{m=0}^{n} a_m x^m \frac{d^m u(x)}{dx^m} = f(x), \qquad a_m \in \mathbb{C}. \tag{34}$$

Конструкции дробного порядка для операций (3.0.1) рассматривались Ж.Адамаром.

Следует также отметить, что закон реактивного движения объекта (ракеты) с переменной массой описывается уравнением

$$m\frac{dv(m)}{dm} = V(m), \tag{35}$$

где $m(t)$— масса горючего в момент t, $v(m)$— скорость ракеты, $V(m)$— скорость истекания горючего из ракеты.

Интересное приложение операторов Адамара при прогнозировании временных рядов с использованием уравнения $\sum_{m=0}^{3} a_m l^3 u(t) = K$, $a_m \in \mathbb{R}$ приводится в работе Р.Р. Нигматуллина и А. Тенрейро Махадо. Операторы $\mathfrak{D}_a$ в диссертации названы операторами Адамара-Эйлера.

В §3.1 вводятся операторные семейства $T(t)\varphi(x) = \varphi(xe^t)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 7. Семейство $T(t)$ является сильно непрерывной группой преобразований в $L_{p,\omega}$ с нормой $\|\varphi\|_{S^-_{p,\omega,\gamma}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left[x^\omega \int_0^x s^{-\gamma}|\varphi(s)|^p ds\right]^{\frac{1}{p}}$, и справедлива оценка

$$\|T(t)\varphi\|_{p,\omega} = e^{-\frac{(1+\omega)t}{p}} \|\varphi\|_{p,\omega}. \tag{36}$$

Также показывается, что производящий оператор группы $T(t)$ является оператором $\mathfrak{D}_a$ с областью определения $D(\mathfrak{D}_a) = \{\varphi \in L_{p,\omega}\, x\frac{d\varphi}{dx} \in L_{p,\omega}\}$.

В §3.2 исследуются операторы косинус–функций

$$C(t) = \frac{1}{2}[T(t) + T(-t)]. \tag{37}$$

Устанавливается оценка

$$\|C(t)\varphi(x)\|_{p,\omega} \le ch\left(\frac{\omega+1}{p}\right) t\|\varphi\|_{p,\omega}, \tag{38}$$

а также оценка на полугруппу $T_c(t)$, связанную с $C(t)$ соотношением

$$\|T_c(t)\varphi(x)\|_{p,\omega} \le e^{\left(\frac{1+\omega}{p}\right)^2 t} \cdot \|\varphi\|_{p,\omega}. \tag{39}$$

Оценка (36) позволяет построить дробные степени операторов $\mathfrak{D}_a$ и получить представление полугруппы $T(t, -\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}})$ в виде

$$T(t, -\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}}) = \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(xe^{\xi})}{t^2 + \xi^2} d\xi. \tag{40}$$

В §3.3 изучаются полугруппы и группы Адамара–Эйлера в обобщенных пространствах Степанова.

Определение 1. Множества интегрируемых на каждом интервале $\delta \subset \mathbb{R}^+$ функций, определенных нормами

$$\|f\|_{S^{\pm}_{p,\omega,\gamma}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left[x^{\mp\omega} \int_0^x s^{\pm\gamma} |\varphi(s)|^p ds \right]^{\frac{1}{p}}, \tag{41}$$

На вопрос о вложении пространств непрерывных и ограниченных функций в обобщенные пространства Степанова отвечает следующая

Лемма 2. Пусть $C(\mathbb{R}^+)$— пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^+$ функций с нормой $\|f\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f(x)|$, тогда

а) $C(\mathbb{R}^+) \subset S^-_{p,\omega,\gamma}$, в том и только в том случае, когда $\omega = \gamma + 1 > 0$. При этом справедливо неравенство $\|f\|_{S^+_{p,\omega,\gamma}} \leq \frac{\|f\|_C}{\gamma+1}$,

б) $C(\mathbb{R}^+) \subset S^-_{p,\omega,\gamma}$, в том и только в том случае, когда $\omega = \gamma - 1 > 0$. При этом справедливо неравенство $\|f\|_{S^-_{p,\omega,\gamma}} \leq \frac{\|f\|_C}{\gamma-1}$.

Далее, в этих пространствах рассматриваются полугруппы Адамара–Эйлера.

Доказывается справедливость теорем:

Теорема 8. Операторные семейства $T^{\pm}(t)$ являются ограниченными полугруппами в пространствах $S^+_{p,\omega,\gamma}$ $S^-_{p,\omega,\gamma}$ соответственно.

И справедливы оценки

$$\|T^+(t)\|_{S^+_{p,\omega,\gamma}} \leq e^{-\frac{(1+\gamma-\omega)t}{p}}, \tag{42}$$

$$\|T^-(t)\|_{S^-_{p,\omega,\gamma}} \leq e^{-\frac{(\gamma+\omega-1)t}{p}}. \tag{43}$$

Теорема 9. Полугруппы $T^{\pm}(t)$ являются сильно непрерывными в пространствах $\overline{S}^{\pm}_{p,\omega}$ соответственно, где $\overline{S}^{\pm}_{p,\omega}$— есть изометрия пространств $\overline{S}_p(\mathbb{R})$, соответствующая пробразованию $x \to \ln \tau$.

В §3.4 исследуются дробные степени оператоов Адамара–Эйлера и устанавливаются оценки

$$\|(-\mathfrak{D}^+_a \varphi)^{-\alpha}\|_{S^+_{p,\omega,\gamma}} \leq \left(\frac{p}{1+\gamma-\omega} \right)^{\alpha} \cdot \|\varphi\|_{S^+_{p,\omega,\gamma}}, \tag{44}$$

если $1+\gamma-\omega>0$ и

$$\|(-\mathfrak{D}_a^-\varphi)^{-\alpha}\|_{S^-_{p,\omega,\gamma}} \le \left(\frac{p}{\omega+\gamma-1}\right)^{\alpha}\cdot\|\varphi\|_{S^-_{p,\omega,\gamma}}, \tag{45}$$

если $\omega+\gamma-1>0$.

В §3.5 полученные результаты применяются к корректной разрешимости задач (1)—(2).

В §3.6 изучаются операторные семейства $T(t)\varphi(x)=\varphi[h^{-1}(h(x)+t)]$, $t\in\mathbb{R}$, где $h(x)$— определенная для $x\in(a,b)\subset\mathbb{R}$, такая, что $h'(x)>0$, $h(a)=-\infty$, $h(b)=\infty$.

Доказывается (теорема 3.6), что это семейство является сильно непрерывной группой преобразований в пространствах $L_{p,\nu,h}$ с нормой $\|\varphi\|_{p,\nu,h}=\left[\int_a^b e^{\nu h(x)}|\varphi(x)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$, $\quad p\ge 1$, $\nu\in\mathbb{R}$.

Наряду с этим, для $t\ge 0$ рассматриваются полугруппы $T_+(t)\varphi(x)=T(t)\varphi(x)$ и $T_-(t)=T(-t)\varphi(x)$, которые порождают КОФ $C(t)=\frac{1}{2}[T_+(t)+T(-t)]$.

Устанавливается, что производящими операторами полугрупп $T_\pm(t)$ являются операторы $\mathfrak{D}_{\pm h}=\pm\frac{d\varphi(x)}{dh(x)}$ с областью определения $D(\mathfrak{D}_{\pm h})=\{\mathfrak{D}_h\in L_{p,\nu,h},\ \varphi\in L_{p,\nu,h}\}$.

А производящим оператором $C(t)$ является оператор $\mathfrak{D}_h^\alpha$ с областью определения $D(\mathfrak{D}_h^\alpha)=\{\mathfrak{D}_h\in L_{p,\nu,h},\ \varphi\in L_{p,\nu,h}\}$, и справедливы оценки

$$\|T_\pm(t)\varphi\|_{p,\nu,\pm h}\le e^{-\frac{\nu t}{p}}\|\varphi\|_{p,\nu,\pm h}, \|C(t)\varphi\|_{p,\nu,h}\le ch\left(\frac{\nu t}{p}\right)\|\varphi\|_{p,\nu,h},\quad \nu\ge 0. \tag{46}$$

Оценки (46) позволяют ввести дробные степени $\mathfrak{D}_{\pm h}^\alpha$ и получить оценки на полугруппы $T_\pm(t,-\mathfrak{D}_\pm^\alpha)$: $\|T_\pm(t,-(-\mathfrak{D}_\pm^\alpha)\|_{p,\nu,h}\le e^{-(\frac{|\nu|}{p})^\alpha}t$.

При этом, для отрицательных дробных степеней $0<\alpha<1$ получены представления

$$(-\mathbb{D}_{+h}^{-\alpha})\varphi(x) == \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b [h(s)-h(x)]^{\alpha-1}\varphi(s)dh(s), \tag{47}$$

$$(-\mathbb{D}_{-h}^{-\alpha})\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x [h(x)-h(s)]^{\alpha-1}\varphi(s)dh(s). \tag{48}$$

Очевидно, что при $h(x)=x$ интегралы (47), (48) являются интегралами Римана–Лиувилля, а при $h(x)=\ln x$— интегралами Адамара–Эйлера.

Результаты применяются к установлению корректной разрешимости задачи Коши для обобщенного телеграфного уравнения.

$$\mathbb{D}^2_{h,x}\omega(t,x) + 2\beta\mathbb{D}_{h,x}\omega(t,x) = a_0\frac{\partial^2\omega(t,x)}{\partial t^2} + 2b_0\frac{\partial\omega(t,x)}{\partial t} + c_0\omega(t,x),$$

$$\omega(0,x) = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial\omega}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x),$$

где $x \in (a,b)$, $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_{h,x} = \frac{\partial}{\partial h(x)}$, $\varphi \in L_{p,\nu,h}$, $\mathbb{D}_{h,x}\varphi \in L_{p,\nu,h}$, $\psi \in L_{p,\nu,h}$, $\mathbb{D}_{h,x}\psi \in L_{p,\nu,h}$. Справедлива

Теорема 10. Если коэффициенты a_0, b_0, c_0, β такие, что выполняется неравенство

$$a_0(c_0 + \beta^2) \leq b_0^2, \tag{49}$$

то задача (3.6.22)—(3.6.23) равномерно корректна и ее решение имеет вид

$$\omega(t,x) = e^{-\frac{b_0}{a_0}t}[C_f(t)\varphi(x) + \int_0^t C_a(s)\psi(s)ds], \tag{50}$$

где

$$C_a(t)\varphi(x)\psi(x) = C_0(t)\varphi(x) + \frac{at}{2}\int_0^t (t^2-s^2)^{-\frac{1}{2}} I_1[a(t^2-s^2)^{\frac{1}{2}} C_0(s)\varphi(x), \tag{51}$$

здесь $C_0(s)\varphi(x) = \frac{1}{2}[T\sqrt{a_0}s) + T(-\sqrt{a_0}s)]\varphi(x)$, T— полугруппа вида (49), $a = \frac{b_0 - a_a(c_0+\beta^2)}{a_0^2}$, I_1— модифицированная функция Бесселя первого рода.

Из этой теоремы следует корректная разрешимость задачи Коши для классического телеграфного уравнения в пространствах $L_{p,\nu}$ с оператором $\|\varphi\|_{p,\nu} = [\int_0^\infty e^{\nu x}|\varphi(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}}$, где $\beta = 0$, $h(x) = x$ и с оператором Адамара–Эйлера в пространствах $L_{p,\nu}$ с оператором $\|\varphi\|_{p,\nu} = [\int_0^\infty x^\nu \|\varphi(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}}$.

Публикации автора по теме диссертации.

[1] Бадран С. C_0-операторные многочлены и корректная разрешимость уравнений с дробными производными// С.Бадран, В.А. Костин, М.Н. Небольсина, Белгород: Научные ведомости БелГУ, серия Математика.Физика, №5 (144), вып. 30, 2013, с. 68—78.

[2] Бадран С. О корректной разрешимости задачи Коши для обобщенного телеграфного уравнения// С. Бадран, В.А. Костин, А.В. Костин, Вестник Южно-Уральского государственного университета, серия Матмоделирование и программирование, 2014, т. 7, №3, с. 50—59.

[3] Бадран С. Дробные интегралы Адамара в обобщенных пространствах Степанова// С.Бадран, Воронеж: Материалы международной конференции ВЗМШ 2014, с. 288—289.

[4] Бадран С. О корректной разрешимости одного уравнения с дробными производными / М.Н. Небольсина, Салим Бадран Джасим Салим // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения XXIV".- Воронеж, 2013 .- С. 131-133.

[5] Бадран С. Об одном представлении краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения второго порядка / В.А. Костин, М.Н. Небольсина, Салим Бадран Джасим Салим // Современные методы теории краевых задач : материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения XXV".- Воронеж, 2014 .- С. 98-100.

[6] Бадран С. Гипервесовые пространства Степанова и корректная разрешимость некоторых нестационарных задач для уравнений с дробными производными// С. Бадран, А.В. Костин, Воронеж: Современные проблемы теории краевых задач, 2013, с.

[7] Бадран С. О корректной разрешимости некоторых начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с вырождением // Костин А.В., Салим Б.Д. Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2014. Т. 2. № 4-2 (9-2). С. 94-99.

[8] Бадран С. О корректной разрешимости некоторых нестационарных задач для уравнений с дробными производными// С. Бадран, А.В. Костин, Д.В. Костин, Воронеж: Изд.–полиграф. центр "Научная книга Материалы Международной молодежной научной школы Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач, 2012, с. 219—224.

Работы [1] и [2] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых журналов и изданий, рекомендованых ВАК РФ.