На правах рукописи

Иванова Елена Васильевна

Ограниченные решения векторно-операторных дифференциальных уравнений n-го порядка, не разрешенных относительно старшей производной

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2014

Работа выполнена в Воронежском государственном университете

Научный руководитель

доктор физико-математических наук,
профессор Перов Анатолий Иванович

Официальные оппоненты:

Жуковский Евгений Семенович,
доктор физико-математических наук, профессор, Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина
кафедра алгебры и геометрии, профессор.

Семенов Михаил Евгеньевич,
доктор физико-математических наук, профессор, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил "Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина",
кафедра теоретической гидрометеорологии, профессор.

Ведущая организация – Липецкий государственный педагогический университет,

Защита состоится 17 февраля 2015 г. в 15.10 на заседании диссертационного совета государственном университете, 394006, г. Воронеж, Университетская пл., 1, ауд. 333.г

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Воронежского государственного университета, а также на сайте http://www.science.vsu.ru/disserinfo&cand=2711

Автореферат разослан декабря 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Гликлих Ю. Е.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Изучение ограниченных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (или более частных классов – почти периодических или просто периодических) является одной из важнейших задач теории нелинейных колебаний. В этой области уже много сделано: можно отметить успешно работающие *топологический метод* Т. Важевского, основанный на теории ретрактов, и, опирающийся на теорию топологической степени отображений, *метод направляющих функций*, предложенный А.И. Перовым и М.А. Красносельским, но остаются задачи, которые нуждаются ещё в дальнейшей разработке и детализации, например, такие как оценки указанных решений или признаки устойчивости по Ляпунову. Во многом и на долгое время тематику исследований и характер результатов определила книга Ю.Л. Далецкого и М.Г. Крейна "Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве" 1970 года. В диссертации развиты идеи и продолжены исследования, изложенные в книге А.И. Перова и И.Д. Коструб "Ограниченные решения нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка" 2013 года.

Целью работы является исследование вопросов существования и единственности (или только существования) периодических, почти периодических и ограниченных решений линейных и нелинейных векторно-операторных дифференциальных уравнений, не разрешённых относительно старшей производной, а также их устойчивости, в банаховом и гильбертовом пространствах.

Методика исследований. В диссертации использованы традиционные методы. Основной метод – метод интегральных уравнений, в котором проблема сводится к изучению ограниченных решений систем нелинейных интегральных уравнений. Этот метод сочетается с различными принципами неподвижной точки при доказательстве существования ограниченных решений. Систематически используется обобщённый принцип сжимающих отображений, являющийся обобщением классического принципа сжимающих отображений Банаха–Каччиополли. При доказательстве существования ограниченных решений применяется принцип неподвижной точки Тихонова в линейных локально выпуклых топологических пространствах. Развитие частотных методов во многом базируется на одном из результатов А.Г. Баскакова. "Принцип отсутствия ограниченных решений в проблеме абсолютной устойчивости" М.А. Красносельского и А.В. Покровского играет важнейшую роль при изучении вопросов устойчивости.

Научная новизна. Все основные результаты работы являются новыми, чётко сформулированными и математически строго доказанными. При использовании работ других авторов даны соответствующие ссылки. Наиболее существенные научные результаты:

1. Введены и изучены свойства интегральных и частотных постоянных для линейных векторно-операторных дифференциальных уравнений n-го порядка.

2. Получены локальные и нелокальные условия для существования единственного ограниченного решения векторно-операторного уравнения n-го порядка, не разрешённого относительно старшей производной, в банаховом и гильбертовом пространствах.

3. Для доказательства существования и единственности ограниченного решения нелинейного векторно-операторного дифференциального уравнения n-го порядка применён обобщенный принцип сжимающих отображений А.И. Перова.

4. Для доказательства существования ограниченного решения нелинейного векторно-операторного дифференциального уравнения n-го порядка использован принцип неподвижной точки А.Н. Тихонова.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты представляют особый интерес для развития аналитических методов исследования нелинейных систем дифференциальных уравнений, возникающих в теории нелинейных колебаний.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на Воронежской весенней (Воронеж, 2012) и зимней (Воронеж, 2013) математической школе, в кратких сообщениях на конференциях, посвященных памяти Я.Б. Лопатинского (Украина, Донецк, 2012) и памяти С.Л. Соболева (Россия, Новосибирск, 2013), на научном семинаре под рук. проф. А.И. Перова.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[8]. Из совместных работ [5], [6], [7], [8] в диссертацию вошли только принадлежащие Е.В. Ивановой результаты. Работы [3], [6] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, двух частей, 4 глав и списка литературы. Объём диссертации 118 страниц. Библиография содержит 62 наименования. Нумерация в автореферате совпадает с нумерацией в диссертации.

Краткое содержание работы

Во **введении** формулируется общая постановка задачи, делается обзор используемых методов, беглое освещение содержания глав диссертации с содержащимися в них новыми результатами.

В **первой части** рассматриваются дифференциальные векторно-операторные уравнения, не разрешённые относительно старшей производной, в банаховом пространстве. **Первая глава** имеет дело с линейными дифференциальными векторно-операторными уравнениями n-го порядка.

В § 1 рассматриваются ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений n-го порядка следующего вида

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = 0. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{A}_n$ – постоянные линейные ограниченные операторы, действующие в банаховом пространстве $\mathbb{B}$, т.е. из $End\ \mathbb{B}$, причём оператор $\mathbf{A}_0$ непрерывно обратим

$$\mathbf{A}_0^{-1} \in End\,\mathbb{B}. \tag{1.2}$$

Векторная функция $\mathbf{x}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ является гладкой функцией, $\dot{\mathbf{x}}(t) = d/dt\ \mathbf{x}(t), ..., \mathbf{x}^{(n)}(t) = d^n/dt^n\ \mathbf{x}(t)$. Предполагается выполнение *нерезонансного условия* или *условия нерезонансности*, состоящего в том, что при любом $\lambda = i\theta$, $-\infty < \theta < +\infty$, оператор $\mathbf{L}_n(i\theta)$ непрерывно обратим, т.е.

$$\mathbf{L}_n^{-1}(i\theta) \in End\,\mathbb{B},\ -\infty < \theta < +\infty. \tag{1.5}$$

В этом случае в рассмотрение вводятся *частотные постоянные*

$$\sigma_j = \max_{-\infty<\theta<+\infty} \|(i\theta)^j \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\|, \qquad j = 0, 1, ..., n-1, \tag{1.7}$$

$$\sigma_n = \sup_{-\infty<\theta<+\infty} \|(i\theta)^n \mathbf{L}_n^{-1}(i\theta)\|. \tag{1.8}$$

В § 2 в комплексном банаховом пространстве $\mathbb{B}$ рассматривается линейное неоднородное векторно-операторное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \mathbf{f}(t), \tag{2.1}$$

в котором $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ есть векторная измеримая *ограниченная* функция:

$$\|\mathbf{f}(t)\| \le c,\ -\infty < t < +\infty, \tag{2.2}$$

где c – некоторая неотрицательная постоянная. При выполнении нерезонансного условия (1.5) имеют место следующие формулы

$$\mathbf{x}^{(j)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(j)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds, \quad 0 \le j \le n-1; \tag{2.3}$$

$$\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{f}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}^{(n)}(t-s)\mathbf{f}(s)ds \tag{2.4}$$

для производных единственного ограниченного решения $\mathbf{x}(t)$ уравнения (1.2). Здесь $\mathbf{G}(t) : \mathbb{R} \to End\ \mathbb{B}$ есть *приведенная операторная ограниченная* функция Грина. С ней тесно связаны j*-я* и n*-я интегральные постоянные*:

$$æ_j = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(j)}(t)\|dt,\ 0 \le j \le n-1, \tag{2.12}$$

$$æ_n = \|\mathbf{A}_0^{-1}\| + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|\mathbf{G}^{(n)}(t)\|dt\ \ (= \mathcal{V}\{\mathbf{G}^{(n-1)}(t)\}). \tag{2.13}$$

Рассуждения о спектре и резольвенте интегральных операторов приведены в § 3.

В § 4 изучается дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами вида

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}^{(j)} + \mathbf{f}(t), \tag{4.1}$$

где $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{A}_n$ – постоянные линейные ограниченные операторы, действующие в банаховом пространстве $\mathbb{B}$, причём оператор $\mathbf{A}_0$ непрерывно обратим. Операторный характеристический многочлен предполагается нерезонансным

$$\mathbf{L}_n(\lambda) \equiv \mathbf{A}_0\lambda^n + \mathbf{A}_1\lambda^{n-1} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\lambda + \mathbf{A}_n. \tag{4.2}$$

Относительно операторных функций $\mathbf{B}_j(t) : \mathbb{R} \to End\ \mathbb{B},\ 0 \le j \le n$, предполагается, что они (сильно) измеримы и являются ограниченными

$$\|\mathbf{B}_j(t)\| \le l_j,\ -\infty < t < +\infty,\ 0 \le j \le n, \tag{4.3}$$

где $l_0, l_1, ..., l_{n-1}, l_n$ – некоторые неотрицательные числа. Вводится *интегральное* условие

$$q_æ \equiv \sum_{j=0}^{n} æ_j l_j < 1. \tag{4.4}$$

Векторная функция $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}$ есть измеримая и ограниченная

$$\|\mathbf{f}(t)\| \leq a, \ -\infty < t < +\infty. \tag{4.5}$$

Изложение теоретического материала начинается с основной теоремы.

Теорема 4.1. *При сделанных выше предположениях – фактически в условиях Каратеодори – уравнение (4.1) при любой измеримой ограниченной функции* $\mathbf{f}(t)$ *имеет единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$. *У этого решения оказываются ограниченными все производные* $\dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)$, *причём справедливы оценки*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_\infty \leq \frac{æ_j}{1 - q_æ}\|\mathbf{f}\|_\infty, \ 0 \leq j \leq n. \tag{4.7}$$

Теорема 4.2. *При сделанных выше предположениях ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *и его производные* $\dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t)$ *и* $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ *могут быть найдены методом последовательных приближений*

$$\mathbf{x}^{[k]} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{[k-1]}), \ k = 1, 2, ..., \tag{4.21}$$

начиная с произвольного элемента $\mathbf{x}^{[0]}$ *из* $\mathrm{L}_\infty^{(n)}$. *При этом оценка погрешности выглядит следующим образом*

$$\|\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{[k](j)}\| \leq \frac{q_æ^{k-1}}{1 - q_æ} æ_j \sum_{i=0}^{n} l_i \|\mathbf{x}_i^{[1]} - \mathbf{x}_i^{[0]}\|_\infty, \ 0 \leq j \leq n, \ k = 1, 2, ... \tag{4.22}$$

В приложениях важны приводимые ниже утверждения.

Теорема 4.3. *Если при сделанных выше предположениях операторные функции* $\mathbf{B}_j(t)$ *являются (сильно) почти периодическими, так же как и векторная функция* $\mathbf{f}(t)$, *то единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *уравнения* (4.1) *является почти периодическим вместе с производными* $\dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t)$ *и* $\mathbf{x}^{(n)}(t)$, *причём*

группа частот почти периодической функции $\mathbf{x}^{(j)}(t) \subseteq$
группе частот $\mathbf{B}_0(t), \mathbf{B}_1(t), ..., \mathbf{B}_{n-1}(t), \mathbf{B}_n(t)$ *и* $\mathbf{f}(t)$. (4.23)

Теорема 4.4. *Если при сделанных выше предположениях операторный характеристический многочлен* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ (4.2) *является гурвицевым, то единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *линейного векторно-операторного уравнения* (4.1) *является асимптотически устойчивым по Ляпунову, т.е.*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}(t) - \mathbf{y}^{(j)}(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \ 0 \leq j \leq n, \tag{4.25}$$

где $\mathbf{y}(t)$ *– любое другое решение уравнения* (4.1).

Во второй главе изучаются нелинейные дифференциальные векторно-операторные уравнения n-го порядка. Одно из центральных мест работы занимает § 5; он обобщает задачу, рассмотренную в § 4. В комплексном банаховом пространстве $\mathbb{B}$ рассматривается нелинейное векторно-операторное дифференциальное уравнение n-го порядка, не разрешённое относительно старшей производной, и имеющее следующий вид

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}^{(n-1)}, \mathbf{x}^{(n)}). \qquad (5.1)$$

Предполагается, что $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{A}_n$ – постоянные линейные ограниченные операторы, действующие в пространстве $\mathbb{B}$, то есть элементы из $End\,\mathbb{B}$, причём оператор $\mathbf{A}_0$ непрерывно обратим. Также предполагается, что операторный характеристический многочлен

$$\mathbf{L}_n(\lambda) \equiv \mathbf{A}_0\lambda^n + \mathbf{A}_1\lambda^{n-1} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\lambda + \mathbf{A}_n : \mathbb{C} \to End\,\mathbb{B} \qquad (5.2)$$

удовлетворяет условию нерезонансности

$$\mathbf{L}_n(i\theta) \text{ непрерывно обратим при } -\infty < \theta < +\infty. \qquad (5.3)$$

Вводятся интегральные постоянные вида (2.12) и (2.13).

Относительно нелинейной векторной функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) : \mathbb{R} \times \mathbb{B} \times ... \times \mathbb{B}$ ($(n+1)$ раз) $\to \mathbb{B}$ предполагается, что она удовлетворяет *условию Каратеодори*: измерима по t (при фиксированных) $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n$ и непрерывна по $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n$ при почти всех t. Она удовлетворяет *условию Липшица* по пространственным переменным

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{y}_n)\| \le \sum_{j=0}^{n} l_j\|\mathbf{x}_j - \mathbf{y}_j\|, \qquad (5.6)$$

где $l_0, l_1, ..., l_{n-1}, l_n$ – некоторые неотрицательные постоянные (*постоянные Липшица* или *липшицевы постоянные*). Особо выделена измеримая векторная функция

$$\mathbf{f}_0(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}, ..., \mathbf{0}, \mathbf{0}) : \mathbb{R} \to \mathbb{B}, \qquad (5.7)$$

относительно которой предполагается, что она является ограниченной

$$\|\mathbf{f}_0(t)\| \le a,\ -\infty < t < +\infty. \qquad (5.8)$$

Выписано интегральное условие

$$q_{æ} \equiv \sum_{j=0}^{n} æ_j l_j < 1. \qquad (5.9)$$

Содержание § 6 составляют следующие четыре теоремы.

Теорема 6.1. *Пусть выполнено нерезонансное условие* (5.3) *и тем самым определены положительные интегральные постоянные* $æ_0, æ_1, ..., æ_{n-1}, æ_n$. *Пусть нелинейная векторная функция* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори: измерима по времени* t *и удовлетворяет условию Липшица по пространственным переменным* (5.6); *тем самым определены неотрицательные липшицевые постоянные* $l_0, l_1, ..., l_{n-1}, l_n$. *Пусть измеримая векторная функция* $\mathbf{f}_0(t)$ (5.7) *является ограниченной, т.е. выполнено условие* (5.8). *Пусть выполнено основное интегральное условие* (5.9). *Тогда нелинейное дифференциальное уравнение* (5.1) *имеет единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$. *У этого решения оказываются ограниченными все производные до* n*-го порядка включительно и справедливы оценки*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_\infty \leq \frac{æ_j}{1 - q_æ}\|\mathbf{f}_0\|_\infty, \ 0 \leq j \leq n. \tag{6.1}$$

Отмечено, что при $0 \leq j \leq n-1$ слева в (6.1) можно писать $\|\mathbf{x}^{(j)}\|$.

Теорема 6.2. *В условиях теоремы* 6.1 *единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *и его производные* $\dot{\mathbf{x}}, ..., \mathbf{x}^{(n-1)}, \mathbf{x}^{(n)}$ *до* n*-го порядка включительно могут быть получены обычным методом последовательных приближений, причём погрешности приближений характеризуются следующими оценками*

$$\|\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{[k](j)}\| \leq \frac{q_æ^{k-1}}{1 - q_æ} æ_j \sum_{i=0}^{n} \|\mathbf{x}^{[1](i)} - \mathbf{x}^{[0](i)}\|_\infty, \ 0 \leq j \leq n, \ k = 1, 2, ... \tag{6.2}$$

Теорема 6.3. *Если в условиях теоремы* 6.1 *нелинейная векторная функция* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ *по времени* t *является стационарной, периодической или почти периодической, то единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *(и его производные до* n*-го порядка включительно) также является стационарным, периодическим или почти периодическим соответственно, причём имеет место включение:*

группа частот решения $\mathbf{x}(t)$ *включена в*
группу частот функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$. (6.3)

Теорема 6.4 *Пусть операторный характеристический многочлен* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ (5.2) *является гурвицевым. Тогда выполнено нерезонансное условие* (5.3). *Пусть выполнены все остальные требования теоремы* 6.1. *Тогда единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *нелинейного дифференциального уравнения* (5.1) *является асимптотически устойчивым в целом, т.е.*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}(t)-\mathbf{y}^{(j)}(t)\| \to 0 \ \text{ при } \ t\to+\infty, \ \ \text{для } \ 0\le j\le n-1, \tag{6.4}$$

где $\mathbf{y}(t)$ *– любое другое решение этого же самого уравнения* (5.1).

В § 7 рассматривается дифференциальное уравнение (5.1). Относительно нелинейной векторной функции $\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{x}_n)$ предполагается, что она удовлетворяет условию Каратеодори: измерима по времени t (при фиксированных $\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{x}_n$) и непрерывна по пространственным переменным $\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{x}_n$ (при почти всех t). Кроме этого предполагается, что выполнено *условие типа Липшица*

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{x}_n)\| \le \sum_{j=0}^{n} l_j\|\mathbf{x}_j\| + a, \tag{7.1}$$

где $l_0,l_1,...,l_{n-1},l_n$ – некоторые неотрицательные постоянные (*постоянные Липшица* или *липшицевы постоянные*) и $a\ge 0$. Также выполнено *условие компактности*:

для любых отрезка $[a,b]$ *числовой прямой* $\mathbb{R}$ *и ограниченных множеств*

$S_0,S_1,...,S_{n-1},S_n$ *в банаховом пространстве* $\mathbb{B}$ *множество*

$$\mathbf{f}([a,b],S_0,S_1,...,S_{n-1},S_n) \ \textit{компактно в}\ \mathbb{B}. \tag{7.2}$$

Далее приводятся теорема Арцела-Асколи и обобщённая теорема Арцела-Асколи. В приведённой ниже теореме 7.4 условие Липшица предполагается выполненным не на всём фазовом пространстве, а в некотором параллелотопе, то есть речь идёт о локальной теореме.

Задан набор положительных чисел $a_0,a_1,...,a_{n-1},a_n > 0$. Через S_j обозначен шар $\|\mathbf{x}_j\|\le a_j$. Нелинейная векторная функция $\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{x}_n):\mathbb{R}\times S_0\times S_1...\times\times S_{n-1}\times S_n\to\mathbb{B}$ предполагается измеримой по t и удовлетворяющей *условию Липшица* по пространственным переменным

$$\|\mathbf{f}(t,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_{n-1},\mathbf{x}_n)-\mathbf{f}(t,\mathbf{y}_0,\mathbf{y}_1,\ldots,\mathbf{y}_{n-1},\mathbf{y}_n)\| \le \sum_{j=0}^{n} l_j\|\mathbf{x}_j-\mathbf{y}_j\| \tag{7.16}$$

при $-\infty<t<+\infty$ и $\|\mathbf{x}_j\|,\|\mathbf{y}_j\|\le a_j$ при $0\le j\le n$, где $l_0,l_1,...,l_{n-1},l_n\ge 0$ – некоторые неотрицательные постоянные. Измеримая векторная функция $\mathbf{f}_0(t)\equiv\mathbf{f}(t,\mathbf{0},\mathbf{0},...,\mathbf{0},\mathbf{0})$ также предполагается ограниченной : $\|\mathbf{f}(t,\mathbf{0},\mathbf{0},...,\mathbf{0},\mathbf{0})\|\le a,\ -\infty<t<+\infty$. Пусть выполнено интегральное условие (5.9). Предполагается ещё, что

$$æ_j \left(\sum_{k=0}^{n} l_k a_k + a \right) \le a_j, \qquad 0 \le j \le n. \tag{7.20}$$

Теорема 7.4. *При выполнении всех перечисленных предположений нелинейное дифференциальное уравнение* (5.1) *имеет единственное решение, лежащее в параллелотопе* $S_0 \times S_1 ... \times S_{n+1} \times S_n$*, причём справедливы оценки*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_\infty \le \frac{æ_j}{1 - q_æ} \|\mathbf{f}_0\|_\infty, \qquad 0 \le j \le n. \tag{7.22}$$

В § 8 приведены теорема Тихонова о неподвижной точке и теоремы существования ограниченного решения.

Теорема 8.1. *Рассмотрим дифференциальное уравнение* (5.1)*. Пусть операторный характеристический многочлен* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ *удовлетворяет нерезонансному условию* (5.3)*. Пусть нелинейная векторная функция* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ *непрерывна по совокупности аргументов и удовлетворяет условию типа Липшица* (7.1)*. Пусть выполнены условия компактности* (7.2)*. Пусть, наконец, выполнено интегральное условие* (5.9)*.*

Тогда нелинейное дифференциальное уравнение (5.1) *имеет по крайней мере одно ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$ *и это решение является компактным; у любого ограниченного решения уравнения* (5.1) *ограниченными и компактными являются все производные до* n*- го порядка включительно и справедливы оценки*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_{\mathrm{C}} \le \frac{æ_j}{1 - q_æ} a, \quad 0 \le j \le n. \tag{8.1}$$

Теорема 8.2. *Если в условиях теоремы* 8.1 *нелинейная векторная функция* $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$ *по времени* t *является стационарной, периодической или почти периодической, то среди ограниченных вместе с производными до порядка* n *решений уравнения* (5.1) *есть по крайней мере одно стационарное, периодическое или почти периодическое решение соответственно, причём имеет место следующее включение:*

группа частот решения $\mathbf{x}(t)$ *(и его производных*
$\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)$ *) включена в группу частот* (8.28)
векторной функции $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n)$.

Приведены теоремы существования единственного ограниченного решения для нелинейного дифференциального уравнения n—го порядка следующего специального вида:

$$a_0x^{(n)} + a_nx = f(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n-1)}, x^{(n)}), \qquad (8.34)$$

не разрешенного относительно старшей производной, в котором коэффициенты в левой части отличны от нуля, нелинейная функция $f(t, x_0, \ldots, x_n)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица:

$$|f(t, x_0, x_1, \ldots, x_n) - f(t, y_0, y_1, \ldots, y_n)| \leq \sum_{j=0}^{n} l_j|x_j - y_j|, \qquad (8.36)$$

где $l_0, l_1, \ldots, l_n$ — некоторые неотрицательные постоянные. Непрерывная функция

$$f_0(t) = f(t, 0, \ldots, 0) \text{ является ограниченой.} \qquad (8.37)$$

Теорема 8.3. *Пусть n - чётное число, $n = 2m$, причём $a_0 \cdot a_1 > 0$, если m - чётное число, и $a_0 \cdot a_1 < 0$, если m - нечётное число. Пусть выполнены условие Липшица* (8.36) *и условие* (8.37). *Пусть, наконец, выполнено частотное условие*

$$l_0\frac{1}{|a_n|} + \sum_{j=0}^{n-1} l_j \left(\frac{j}{n}\right)^{j/n} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{1-j/n} \frac{1}{|a_n|^{1-j/n}|a_1|^{j/n}} + l_n\frac{1}{|a_0|} < 1. \qquad (8.38)$$

Тогда нелинейное дифференциальное уравнение (8.34) *имеет единственное ограниченное решение; у этого решения оказываются ограниченными все производные до n-го порядка включительно.*

Теорема 8.4. *Пусть n - нечётное число, пусть выполнены условие Липшица* (8.36) *и условие* (8.37). *Пусть, наконец, выполнено частотное условие*

$$l_0\frac{1}{|a_n|} + \sum_{j=0}^{n-1} l_j \sqrt{\left(\frac{j}{n}\right)^{j/n} \left(1 - \frac{j}{n}\right)^{1-j/n}} \frac{1}{|a_n|^{1-j/n}|a_1|^{j/n}} + l_n\frac{1}{|a_0|} < 1. \qquad (8.39)$$

Тогда нелинейное дифференциальное уравнение (8.34) *имеет единственное ограниченное решение; у этого решения оказываются ограниченными все производные до n-го порядка включительно.*

В **части второй** рассматриваются ограниченные решения векторно-операторных дифференциальных уравнений n-го порядка, не разрешённых относительно старшей производной, в гильбертовом пространстве. Нумерация параграфов для сохранения логики продолжена.

В **первой главе** речь идёт о линейном векторно-операторном дифференциальном уравнении n-го порядка. В § 9 вводятся нерезонансное условие и частотные постоянные и приводится теорема существования и единственности, а также устойчивости единственного решения. В комплексном гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ рассматривается линейное однородное векторно-операторное дифференциальное уравнение n-го порядка, не разрешённое относительно старшей производной следующего вида

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}^{(j)}, \tag{9.1}$$

где $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{A}_n$ – постоянные линейные ограниченные операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, причём оператор $\mathbf{A}_0$ непрерывно обратим, а операторные функции $\mathbf{B}_j(t) : \mathbb{R} \to End\ \mathbb{H}$ (сильно) непрерывные или измеримые ω-периодические и ограниченные:

$$\mathbf{B}_j(t+\omega) = \mathbf{B}_j(t), \qquad -\infty < t < +\infty, \tag{9.2}$$

$$\|\mathbf{B}_j(t)\| \le l_j, \qquad 0 \le j \le n, \tag{9.3}$$

Основное внимание обращено на уравнение вида,

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}^{(j)} + \mathbf{f}(t), \tag{9.4}$$

в котором непрерывная или измеримая векторная функция $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ является ω – периодической

$$\mathbf{f}(t+\omega) = \mathbf{f}(t), \qquad -\infty < t < +\infty, \tag{9.5}$$

и из $\mathbf{L}_2[0,\omega]$. Операторный характеристический многочлен $\mathbf{L}_n(\lambda) \equiv \mathbf{A}_0\lambda^n + \mathbf{A}_1\lambda^{n-1} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\lambda + \mathbf{A}_n$ является нерезонансным. Приведено *частотное условие*

$$q_\sigma \equiv \sum_{j=0}^{n} l_j\sigma_j < 1. \tag{9.10}$$

Теорема 9.1. *Пусть операторный характеристический многочлен* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ *является нерезонансным. Пусть операторные функции* $\mathbf{B}_j(t)$ *являются измеримыми* ω *– периодическими и ограниченными, то есть выполнены условия* (9.2) *и* (9.3) *при* $0 \le j \le n$. *Пусть выполнено частотное условие* (9.10). *Тогда неоднородное дифференциальное уравнение* (9.4) *при любой* $\mathbf{f}(t)$ *из* $\mathbf{L}_2[0,\omega]$ *имеет единственное* ω *– периодическое решение* $\mathbf{x}(t)$ *также из* $\mathbf{L}_2[0,\omega]$, *как и все его производные* $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)$. *При этом справедливы следующие оценки*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_2 \leq \frac{\sigma_j}{1-q_\sigma}\|\mathbf{f}\|_2, \qquad 0 \leq j \leq n. \tag{9.11}$$

Теорема 9.2. *В условиях теоремы* 9.1 *единственное* ω – *периодическое решение* $\mathbf{x}(t)$ *и его производные* $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)$ *могут быть найдены указанным выше методом последовательных приближений; при этом имеют место следующие оценки погрешности*

$$\|\mathbf{x}^{(j)} - \mathbf{x}^{[k](j)}\|_2 \leq \frac{q_\sigma^{k-1}}{1-q_\sigma}\sigma_j \sum_{i=0}^{n} l_j\|\mathbf{z}_i\|, \ 0 \leq j \leq n; k = 1, 2, ...; \mathbf{x}^{[0]} = 0. \tag{9.27}$$

Теорема 9.3. *Если в условиях теоремы* 9.1 *операторный характеристический многочлен* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ *не только является нерезонансным, но и является гурвицевым, то единственное* ω – *периодическое решение уравнения* (9.4) *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

В § 10 основное внимание обращено на линейное неоднородное векторно-операторное дифференциальное уравнение n-го порядка, не разрешённое относительно старшей производной:

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{n}\mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}^{(j)} + \mathbf{f}(t). \tag{10.4}$$

Предполагается, что $\mathbf{f}(t)$ - почти периодическая векторная функция.

Теорема 10.1. *Пусть операторный характеристический многочлен* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ *является нерезонансным. Пусть операторные функции* $\mathbf{B}_j(t)$ *являются (сильно) почти периодическими. Пусть выполнено частотное условие* (9.10). *Тогда для любой векторной почти периодической функции* $\mathbf{f}(t)$ *уравнение* (10.4) *имеет единственное почти периодическое решение* $\mathbf{x}(t)$ *(других ограниченных решений* (10.4) *не имеет). Производные* $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)$ *этого решения также являются почти периодическими и имеют место следующие оценки*

$$[\![\, \mathbf{x}^{(j)} \,]\!]_2 \leq \frac{\sigma}{1-q_\sigma}[\![\, \mathbf{f} \,]\!], 0 \leq j \leq n. \tag{10.8}$$

Норма $[\![\cdot]\!]$ обозначает *норму Безиковича.*

При рассмотрении уравнения вида

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{A}_1\mathbf{x}^{(n-1)} + ... + \mathbf{A}_{n-1}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_n\mathbf{x} = \sum_{j=0}^{n}\mathbf{B}_j(t)\mathbf{x}^{(j)} + \mathbf{f}(t), \tag{10.11}$$

непрерывная или измеримая векторная функция $\mathbf{f}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ предполагается ограниченной.

Теорема 10.2. *Пусть операторный характеристический многочлен* $\mathbf{L}_n(\lambda)$ *является нерезонансным. Пусть операторные функции* $\mathbf{B}_j(t)$ *являются (сильно) измеримыми и ограниченными. Пусть выполнено частотное условие. Тогда неоднородное дифференциальное уравнение* (10.11) *при любой измеримой и ограниченной векторной функции* $\mathbf{f}(t)$ *имеет единственное ограниченное решение* $\mathbf{x}(t)$. *При этом ограниченными являются все производные* $\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), ..., \mathbf{x}^{(n-1)}(t), \mathbf{x}^{(n)}(t)$ *и справедливы оценки*

$$\|\mathbf{x}^{(j)}\|_\infty \leq c_j \|\mathbf{f}\|_\infty, \qquad 0 \leq j \leq n, \tag{10.13}$$

где $c_0, c_1, ..., c_{n-1}, c_n$ *– некоторые положительные постоянные, определяемые линейной частью уравнения* (10.11) *с постоянными коэффициентами (точнее частотными постоянными* $\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_{n-1}, \sigma_n$ *) и липшицевыми постоянными* $l_0, l_1, ..., l_{n-1}, l_n$.

Во **второй главе** рассматривается нелинейное векторно-операторное дифференциальное уравнение n-го порядка, не разрешённое относительно страшей производной. Приведено распространение основной теоремы 10.1 на нелинейную теорию, рассматриваются оценки решения в условиях Липшица и типа Липшица. Центральная идея заключается в том, чтобы ограниченные решения нелинейного дифференциального уравнения (5.1) старались интерпретироваться как ограниченные решения некоего линейного дифференциального уравнения (10.11) с коэффициентами $\mathbf{B}_j(t), \quad -\infty < t < +\infty, \quad 0 \leq j \leq n$. Это объясняет, почему рассуждения, которые можно истолковать как применение и дальнейшее развитие "принципа линейного включения" Б.Ф. Былова, Д.М. Гробмана, приходилось вести в условиях Каратеодори.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю профессору А.И. Перову за постановку задачи и неоценимую помощь в работе.

Публикации автора по теме диссертации

1. Иванова Е.В. Ограниченные решения нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка, не разрешённого относительно старшей производной / Е. В. Иванова // Материалы Воронежской весенней математической школы. – Воронеж, 2012. – С. 46–47.

2. Иванова Е.В. Об одном признаке конвергентности. Современные методы теории функций и смежные проблемы / Е.В. Иванова // Материалы Воронежской зимней математической школы. – Воронеж: Издательско-

полиграфический центр, Воронежский государственный университет, 2013. – С. 107 – 108.

3. Иванова Е.В. Свойства логарифмической выпуклости последовательности L_2-норм производных периодических функций / Е.В. Иванова // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. – Тамбов, 2013. – Т. 18, № 5. – С. 2536 – 2538.

4. Иванова Е.В. Частотные признаки существования ограниченных решений / Е. В. Иванова // Материалы Воронежской весенней математической школы. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга" , 2014. – С. 73 – 75.

5. Иванова Е.В. Принцип неподвижной точки Тихонова и ограниченные решения нелинейных дифференциальных уравнений / А.И. Перов, И.Д. Коструб, Е.В. Иванова // Fourth International Conference for Young Mathematicians on Differential Equations and Applications Dedicated to Ya.B. Lopatinskii : book of abstracts, 14–17 November 2012, Donetsk, Ukraine. – Donetsk, 2012. – С. 61 – 62.

6. Иванова Е.В. Ограниченные решения векторно-операторных нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка, не разрешённых относительно старшей производной / А.И. Перов, Е.В. Иванова // Вестник Воронежского государственного университета, Серия физика, математика. – Воронеж: Воронежский государственный университет, 2012. – Выпуск 2. – С. 198 – 206.

7. Иванова Е.В. Ограниченные решения нелинейных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве и теорема Тихонова о неподвижной точке / А.И. Перов, И.Д. Коструб, Е.В. Иванова // Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений : Международная конференция, посвящённая 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева, Новосибирск, Россия, 18–24 августа 2013 г. – Новосибирск, 2013. – 214 с.

8. Иванова Е.В. Ограниченные решения нелинейных дифференциальных уравнений и теорема Тихонова о неподвижной точке / А.И. Перов, И.Д. Коструб, Е.В. Иванова // Препринт № 48, июль 2014. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2014. – 51 с.

Работы [3], [6] опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки РФ.