

**ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ
В НЕЛИНЕЙНОМ АНАЛИЗЕ**

Научная школа проф. Ю.Г.Борисовича



**THE TOPOLOGICAL METHODS
IN NONLINEAR ANALYSIS**

Science school of prof.
Y.G.Borisovich

1. С 1 сентября 1963 г. в ВГУ приказом министра была открыта новая кафедра — Кафедра алгебры и топологических методов анализа — вначале как «кафедра общей математики и топологии», а с 1967 г. она была переименована в «кафедру алгебры и топологических методов анализа» в связи с расширением педагогического цикла. Однако топологическое содержание как общей, так и специальной подготовки сохранилось и усилилось в последующие годы. Кафедра входит в «элитный» список подобных кафедр мира, и в России и за рубежом хорошо известны результаты ее деятельности в области приложений топологии к Анализу и создания учебников по топологии.

Полезно напомнить, что «Топология» как математическая наука начала формироваться во 2-ой половине XIX в., развиваясь как новый инструмент математики для отыскания весьма общих геометрических закономерностей, необходимых для приложения в математике и механике. После длительного периода создания основ, в конце сороковых годов XX в. топология выходит на широкую арену математики, внедряясь почти во все математические дисциплины.

В Воронежском университете с начала 50-х годов топологические методы уже были в центре внимания математической школы профессора М.А.Красносельского и широко использовались в работах по анализу и дифференциальным уравнениям. Подчеркну, что топологические методы в ту эпоху были мало доступны студентам провинциальных университетов; топология и ее приложения интенсивно развивались в Москве, Ленинграде, Ростове, Киеве, Харькове, Воронеже (усилиями М.А.Красносельского), в Грузии (школа Г.С. Чогошвили). В Казани инициаторами тополого-функционального направления стала группа студентов профессора Б.М. Гагаева, к которой и принадлежит автор; мотивами последнего служили

топологические методы, развившиеся ранее в небесной механике (А.Пуанкаре), в качественной теории дифференциальных уравнений (Г.Д.Биркгоф, В.В.Немыцкий), в нелинейных вариационных задачах (Л.А.Люстерник, М.Морс и др.).

Как мы видим сегодня, это было началом реформирования и исследований «океана нелиней-



Ю.Г.Борисович поздравляет М.А.Красносельского с юбилеем

ности» (по выражению Л.А.Люстерника), приведем как к перестройке всей Топологии (Ж.Лере и французская топологическая школа), и грандиозной перестройке Анализа (Р.Том, В.И.Арнольд и др.). В студенческо-аспирантские годы мы почувствовали дыхание этого океана, и его свежие ветры привели меня в воронежский коллектив М.А.Красносельского; здесь я освоил более широко проблематику нелинейного (функционального) анализа и дал топологическое развитие новым идеям в области исследований и преподавания. Быть может, небесполезно рассказать, как это произошло, и, возможно, мой опыт поиска актуального направления пригодится для «начинающих» математиков.

2. Мои контакты с М.А.Красносельским возникли ранее в форме разговора с ним во время приезда (вместе с проф. В.И.Соболевым) в Казань в 1953 г. на защиту диссертации его ученика Л.А.Ладыженского (посвященной полной непрерывности оператора П.С.Урысона), и выступившим с лекцией об u, v – симметричных векторных полях на сферах. Я сообщил ему кратко о своих работах по роду множеств, и он пригласил меня приехать на свой семинар (что и было осуществлено мной в мае 1954 г.). На этом семинаре были одобрены мои исследования, предложена одна задача для завершения диссертации, связанная с исследованием «устойчивых» критических точек слабо непрерывных гладких четных функционалов на сфере бесконечномерного гильбертова пространства. В начале 1955 г. я решил его задачу и неожиданно получил приглашение работать в ВГУ и поддержку в организации кандидатской защиты. Приведу два письма М.А.Красносельского ко мне в 1955 г., иллюстрирующих его исключительное отношение к молодым математикам.

«Многоуважаемый Юрий Григорьевич!

Как ваши дела? По-видимому, диссертация уже принята. Назначены ли оппоненты? Кто? Когда диссертация будет защищаться? Если до середины мая Вы успеете отпечатать автореферат, то срочно вышлите мне его по адресу: Москва, Верхнерадницевская 2, кв.7. Я в середине мая буду в Москве. При наличии автореферата смогу напомнить, чтобы Люстерник послал отзыв. Если диссертация уже подана, то срочно напишите письмо ректору Воронежского университета /проф. Михантьев Б.И./ и попросите, чтобы он вторично обратился в Москву с просьбой о Вашем назначении в Воронеж. Жду Вашего подробного письма обо всех делах.»

«Дорогой Юрий Григорьевич!

Сообщаю о результатах разговора с Люстерником. Я ему показал реферат Вашей диссертации и Вашу заметку для ДАН. Люстерник просил, чтобы Вы ему прислали автореферат — он пошлет отзыв к защите. Заметка ему тоже понравилась — она будет передана в редакцию ДАН. Между прочим, Ваша предыдущая заметка уже в наборе и будет напечатана в т. 101, №2. Всего наилучшего. Жду сообщений о ваших делах.»

3. В Воронежском университете Марк Александрович смог реализовать свои научные программы, создав школу молодых талантливых ученых, из которой вышло 42 доктора наук. Его преподавательская и научная деятельность привлекла к нему талантливых студентов ВГУ (П.П.Забрейко, В.В.Стрыгин, А.И.Перов, И.А.Бахтин и др.), и стажеров из городов Союза (Э.Мухамадиев, В.Я.Стеценко —

ныне профессора, Т.С.Саби́ров — доктор наук, рано умерший). В начале 60-х годов воронежская группа пополнилась молодыми докторами: П.Е.Соболевский, А.И.Перов, Е.М.Семенов, Б.Н.Садовский, В.П.Глушко, Ю.Г.Борисович. Создалась критическая масса, и началась цепная реакция математических исследований. Эта ситуация ассоциировалась в те времена с Геттингенской школой физиков 30-х годов (Гильберт, Борн, Гейзенберг и др.).

Опишу кратко полученные мной результаты кандидатской диссертации, которая делалась под фактическим руководством профессоров Б.М.Гагаева (КГУ) и М.А.Красносельского (ВГУ), и которые я развивал далее, работая на кафедре М.А.Красносельского. Основные интересы в эту пору у меня оформились в направлении топологических методов анализа в конечномерных и бесконечномерных пространствах: теория Морса, теория Люстерника-Шнирельмана, теория критических значений слабо непрерывных функционалов в бесконечномерных пространствах Л.А.Люстерника, В.И.Соболева, М.А.Красносельского, теория Лере-Шаудера. Следует отметить, что изучение этих работ в начале 50-х годов представляло большие трудности (особенно в провинциальном университете) в связи с отсутствием учебников топологии, отражающих современный уровень алгебраической топологии. В дипломной работе и затем в аспирантуре (1953-1955г.г.) я изучал свойства рода множеств и его применения для оценки количества критических точек слабо непрерывных C^1 -гладких функционалов в банаховых пространствах. Род множества — новый топологический инвариант, заменяющий категорию Люстерника-Шнирельмана, был введен М.А.Красносельским в 1952 г. Он зависит от преобразований симметрии, относительно которого функционал инвариантен. Мною /УМН, 1957. - 12:1/ понятие рода было дано относительно конечного числа произвольных непрерывных преобразований метрического пространства, а не только инволюции, и установлен ряд свойств, присущих понятию категории, необходимых для реализации минимаксной конструкции Люстерника-Шнирельмана. В частности — сохранение рода при достаточно малом раздутии множества и его оценка сверху через размерность множества, увеличенную на 1. Это позволило дополнить результаты теории критических точек при слиянии p -критических значений инвариантного функционала, причем род континуума не ниже $p-1$. В работе «Об одной задаче вариационного исчисления в целом гильбертовом пространстве», опубликованной в «Ученых зап.Казанского госуниверситета /m.115, кн.14,1955 г.,С.117-138./, я изучил род множеств относительно инволюции, непрерывной в слабой топологии, и приложил к оценке количества критических точек на гиперболоидах гильбертова пространства и в случае слияния нескольких критических значений, — случай, не рассматривавшийся ранее в работах М.А.Красносельского и А.И.Поволоцкого. Краткое изложение этих результатов дано в заметке /ДАН СССР, m.101, №2, 1955 г., С.205-207/, представленной академиком А.Н.Колмогоровым. В следующей заметке /ДАН СССР m.104, №2, 1955 г., С.156-168/, (представленной академиком П.С.Александровым) дано обобщение известной теоремы М.А.Красносельского об устойчивых критических значениях четных функционалов на сфере гильбертова пространства при возмущении их необязательно четными функционалами на тот случай, когда рассматриваемая сфера

лежит в банаховом пространстве, а также на случай более общих многообразий. Здесь предложена новая конструкция отображения Красносельского, «повышающего» значения функционала, не использующая специфику сферы и гильбертову структуру пространства. Отметим результат А.С.Шварца, исследовавшего обобщение рода методами расслоенных пространств (Труды ММО).

4. Защитив в 1955 г. кандидатскую диссертацию «К вопросу об оценке количества критических точек функционалов» (в КГУ), я досрочно закончил аспирантуру и переехал на работу в Воронежский университет по приглашению М.А.Красносельского, на его кафедру. При этом я отклонил предложение ректора КГУ М.Т.Нужина остаться работать в Казанском университете. Это было вызвано огромной уверенностью в возможностях научного коллектива, складывавшегося тогда в Воронеже под руководством М.А.Красносельского.

М.А.Красносельский, как лидер факультета, в 50-е годы вел активную организационную работу, не занимая официально поста декана или проректора. Он был организатором и собирателем того коллектива, который именуется Воронежской математической школой: он устроил приглашение профессору С.Г.Крейну (лесотехнический институт), а затем и переход его в ВГУ, профессору Я.Б.Рутицкому (строительный институт). В итоге М.А.Красносельскому удалось в конце 50-х годов создать в ВГУ редкую для математических центров концентрацию перwokласнах специалистов по функциональному анализу и топологии: М.А.Красносельский, В.И.Соболев, С.Г.Крейн, Б.С.Митягин, Я.Б.Рутицкий, А.С.Шварц; часто приезжали с лекциями А.Н.Колмогоров, Г.Е.Шилов (из МГУ). К молодежи Марк Александрович относился особенно внимательно, проявляя часто просто отеческую заботу, вооружая молодого человека научной проблемой (я сам это испытал, получив приглашение работать в ВГУ после выступления на его семинаре в 1954 г.).

5. В Воронежском университете автор был инициатором систематического изучения современной алгебраической топологии (и вел семинар по различным ее разделам, в котором участвовали ныне профессора, а тогда студенты П.П.Забрейко, А.И.Перов, В.В.Стрыгин), и одновременно учился на семинарах М.А.Красносельского исследованию нелинейных проблем. До сих пор я пропагандирую среди молодежи выработанный в тот период принцип иметь для каждой теоремы о неподвижной точке основание для приложений. Помимо известной книги П.С.Александрова, Э.Хопфа и С.Лефшеца по алгебраической топологии, изучались новые книги С.Стинрода и Н.Эйленберга, сборник «Расслоенные пространства и их приложения». Особенно полезной с точки зрения теории неподвижных точек оказалось раннее сочинение Ж.Лере «Алгебраическая топология», в котором теория когомологий строилась на основе нового понятия «перекрытия» (для компактных «выпуклоидных» пространств) и в котором построена в большой степени общности «теория топологического индекса решений». К моему удивлению, не все топологи знали эту работу Лере, и мне приходилось неоднократно излагать ее содержание, например, А.С.Шварцу в Воронеже, на семинаре М.А.Красносельского, А.И.Фету на Всесоюзной топологической конфе-

ренции в Тбилиси, 1955 г. (К сожалению, работа Лере не переведена на русский до сих пор). Тополог А.С.Шварц (сейчас известный физик-теоретик), прочитал нам ряд важных разделов алгебраической и гомотопической топологии, теории расслоений; известный специалист по функциональному анализу Б.С.Митягин — также читал топологические курсы.

В целом математическая атмосфера в Воронеже в 50-х годах была насыщена топологическими идеями и весьма способствовала созреванию моего плана более глубокого внедрения всего спектра топологических представлений, результатов и методов в нелинейный функциональный анализ. Моя докторская диссертация «Теория слабо непрерывных векторных полей и некоторые ее приложения» (защищена в 1964 г., официальные оппоненты Л.А.Люстерник, В.Г.Болтянский, И.И.Ворович, А.С.Шварц) была итогом первого этапа моих исследований. В диссертации (соответствующих публикациях) на основе «полного индекса» Лере было дано обобщение теории степени Лере-Шаудера и теории вращения М.А.Красносельского на новые классы векторных полей в банаховых и локально-выпуклых топологических пространствах, в частности на непрерывные поля в слабой топологии, вполне непрерывные поля на выпуклых замкнутых подмножествах с индуцированной топологией. Первый класс полей также рассматривается на относительно слабо открытых множествах со слабо компактным замыканием. Этот случай не укладывается в теорию степени Лере-Шаудера для линейных топологических пространств, развитую ранее Э.Роте, М.Нагумо, Ф.Браудером, так как допускает поля, некомпактные на полной слабой окрестности. Для рассматриваемых классов векторных полей получены аналоги принципов существования нулей решений (известные ранее для полей Лере-Шаудера) и принципы неподвижной точки для нелинейных операторов, порождающих соответствующие поля, а также получены усиление известной теоремы Ф.Браудера о неподвижной точке и ее относительные аналоги.

В качестве приложений предложенного метода рассмотрены эволюционные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах со слабо непрерывной правой частью, порождающие слабо непрерывный оператор сдвига по траекториям; при условии периодичности по времени правых частей, применением указанных принципов неподвижной точки к оператору сдвига за период, получены теоремы существования слабых периодических решений, а без условия периодичности — развит принцип Важевского для ограниченных решений на всей оси. Рассмотрены приложения к теории положительных и полуположительных решений нелинейных операторных уравнений с инвариантным конусом или, соответственно, клином в банаховом пространстве. В этом случае возникает относительное вращение в конусе или клине, что позволило передоказать (не прибегая к специальным конструкциям) некоторые теоремы о положительных решениях операторных уравнений, а также получить некоторые новые. В качестве примеров эволюционных уравнений рассмотрены некоторые интегро-дифференциальные уравнения и бесконечные системы о.д.у. Эти приложения я получил к 1963 г., работая доцентом на кафедре М.А.Красносельского. Их дальнейшее развитие осуществлялось совместно с моими аспирантами П.Менцем (Германия), А.Л.Бадоевым, В.Ф.Субботи-

ным, А.С.Турбабиным в период 1963-1970 годов, когда я работал заведующим на кафедре «Общей математики и топологии» (кратко ОМТ), переименованной в 1967 г. в «Кафедру алгебры и топологических методов анализа» (кратко АТМА) в соответствии с ее педагогическим и научным направлениями. Дата 1963 г. для меня служит началом становления коллектива кафедры АТМА и моей «научной школы» (по официальной терминологии ВГУ).

6. С первого года существования кафедры на ней развернулась активная научная работа по топологии и ее приложениям к анализу; читались спецкурсы по многим разделам топологии. Кафедра выполнила свой долг — первым в стране учебником по топологии для студентов университетов стал курс «Введение в топологию», подготовленный на кафедре в 1976 году и изданный в 1980 году центральным издательством «Высшая школа» при активной поддержке учебной части ВГУ (В.С.Листенгартен). Эта работа стимулировалась введением курса топологии в учебные планы университетов в 1975 году. В 1985 г. издательство «Мир» выпустило английское издание учебника, переработанное и расширенное.

Интересно отметить, что в создании учебника активно принимали участие аспиранты: Н.М.Близняков, Я.А.Израилевич, Т.Н.Фоменко (см. предисловие к изданию). На основе своего опыта изучения топологии я предложил изложить не один из ее многих разделов, а создать комплексный учебник, содержащий материал всех основных разделов топологии, и определил примерный уровень, исходя из университетских программ по математике для 1-2 курсов обучения, а также из возможных приложений к анализу, геометрии, функциональному анализу, дифференциальным уравнениям; книга предназначалась и для аспирантов, и для прикладников, использующих топологию в приложениях. Книга вышла тиражом 15000 экземпляров — скромным, по тем нормам, и быстро разошлась! Многие вузы и многие математики-специалисты просили прислать экземпляр. Ее содержание было одобрено кафедрой «Геометрии и топологии МГУ». Книга удостоена второго места на Всесоюзном смотре учебных пособий для вузов. Поступали запросы из-за границы, и в 1985 г. появилось английское издание (MIR PUBLI-



Топологическая конференция, Кишинев, 70-е г.г.
Беседа с академиками С.П.Новиковым (АН СССР),
К.С.Сибирским (АН Молдавии)

SHERS), в 1992 году — китайское. В 1995 г. вышли 2-е дополненное издание и его английский вариант: «Introduction to Differential and Algebraic Topology» (Kluwer Academic Publishers). Все названные издания имеют последовательные улучшения как с точки зрения методики, так и дополнений содержания.

7. Одновременно с организацией учебного процесса интенсивно развивалась научная работа сотрудников кафедры. Этому способствовало пополнение кафедры моими и М.А.Красносельского учениками. Первыми сотрудниками кафедры (с 1966 г.) стали доц. Ю.Г.Борисович, доц. Е.С.Тихомирова, ст. преп. В.С.Мущенко. Вскоре к ним присоединились Р.С.Адамова, Б.Н.Садовский, Ю.С.Колесов, О.Ф.Ускова, В.Ш.Бурд, Э.М.Мухамадиев, лаборант А.С.Турбабин (студент), Г.С.Аброськина, В.Ф.Чаплыгин; с 1966 г. — В.Ф.Субботин, закончил (с защитой) аспирантуру при кафедре. Короткое время на кафедре работали также Ю.В.Покорный, В.В.Стрыгин, А.В.Кибенко, московский математик Р.С.Исмагилов. Длительное время на кафедре работали и внесли большой вклад в развитие кафедры ныне профессор Э.М.Мухамадиев (Душанбе), доцент В.Ш.Бурд (ЯрГУ), доцент А.С.Турбабин (Пенза), доцент В.Ф.Субботин.

К 1967 г. на кафедре уже сложился сильный работоспособный коллектив сотрудников: к.ф.-м.н. Э.М.Мухамадиев — специалист по нелинейному функциональному анализу и дифференциальным уравнениям, владеющий топологическими методами (работал на кафедре с 1967 г. по 1973 г.); к.ф.-м.н. В.Ш.Бурд — специалист по почти-периодическим решениям обыкновенных дифференциальных уравнений, также владеющий топологическими методами анализа (работал с 1967 г. по 1970 г.); к.ф.-м.н. В.Ф.Субботин — ученик профессора Ю.Г.Борисовича, окончил Кабардино-Балкарский университет в 1962 г. и обучавшийся в аспирантуре ВГУ в 1963-1966 г.г., специалист по нелинейному анализу и теории функционально-дифференциальных уравнений, теории графов; его диссертация защищена в 1967 г., а результаты опубликованы в ДАН СССР, в дальнейшем он опубликовал по этой тематике 26 научных работ; в аспирантуре кафедры находился А.С.Турбабин, выпускник математического факультета 1967 г., защитил кандидатскую диссертацию «Оператор сдвига, ограниченные и периодические решения дифференциально-разностных уравнений» (научный руководитель Ю.Г.Борисович) в 1970 г., в которой впервые получены важные результаты о существовании решения задачи Коши, периодической задачи для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа; в ней показано, что оператор сдвига и интегральные операторы в рассматриваемой ситуации не вполне непрерывны, и для применения принципов неподвижной точки им разработан метод сужения на инвариантные компактные множества — результаты, которые предваряют применение к этим задачам методов уплотняющих операторов в последующие годы; в этой диссертации дано корректное сведение функционально-дифференциальных уравнений к дифференциальным уравнениям в банаховых пространствах /*статья в ДАН СССР, т.185, №4*/; последний результат в 1986 г. на международной конференции в Болгарии вызвал большой интерес; на кафедре А.С.Турбабин проработал до 1976 г. в звании доцента; аспирантуру кафедры за-

кончил и гражданин ГДР П. Менц (1964-1967), занимавшийся под моим руководством тем же кругом вопросов; его диссертация посвящена исследованию непрерывности абстрактного оператора суперпозиции и исследованию разрешимости соответствующего дифференциального уравнения с приложениями к бесконечным системам обыкновенных дифференциальных уравнений; доцент Е.С. Тихомирова работала на кафедре с 1963 г., предмет ее исследований — риманова геометрия; в ряде работ ею построены различные виды групп равномерных гомотий, ряд работ (совместно с В.А.Ефремовичем) посвящен изучению стабильных эквимоρφизмов; доцент Р.С.Адамова работает на кафедре с 1966 г. по 80-е г.г., она — ученица известных топологов профессора А.С.Шварца и академика П.С.Александрова, закончила аспирантуру и защитила диссертацию в МГУ (1967 г.). Занималась изучением свойств ряда конкретных категорий: рассматривались категории векторных топологических пространств с морфизмами — непрерывными на компактах. Построено понятие двойственности (введенной А.С.Шварцем).

8. Однако, основное направление исследовательских работ на кафедре в этот период связано с тематикой диссертации Ю.Г.Борисовича «К теории слабо-непрерывных векторных полей и некоторые ее приложения», а также с методами нелинейного анализа М.А.Красносельского, с приложениями к теории нелинейных функционально-дифференциальных уравнений. Наши результаты получили известность и часто докладывались на Всесоюзных конференциях по уравнениям с отклоняющимся аргументом, организованных чл.-корр. АН СССР Л.Э.Эльсгольцем и проф. А.Д.Мышкисом (одним из основателей данного направления). По этой тематике защищено в разные годы 9 кандидатских диссертаций: В.Ф.Субботин, П.Менц, А.Л.Бадоев, А.С.Турбабин, В.М.Швырев — выполненных под руководством Ю.Г.Борисовича; В.Козоброд, М.Илолов — под руководством В.Ф.Субботина; гражданин ДРВ Ч.Бонг — под руководством Ю.Г.Борисовича, В.Ф.Субботина; выпускник В.Ф.Пуляев — ученик В.Ф.Субботина и профессора Кубанского университета З.Б.Цалюка. Сложившийся на кафедре коллектив позволил с 1963 г. открыть на кафедре специализации «Топологические методы анализа», «Нелинейный функциональный анализ»; кафедра стала выпускающей.



Доцент А.С.Турбабин
(Пенза, Политехнический институт)

С 1966 г. под руководством доц. Ю.Г.Борисовича начал работать научный «семинар по неподвижным точкам», давший начало нынешнему семинару «Топологические методы анализа». Программа работы семинара предусматривала изучение современной алгебраической топологии и дальнейшее развитие теории топологических инвариантов отображений, начатое в докторской диссертации Ю.Г.Борисовича, и приложений к теории нелинейных операторных уравнений.

Разнообразие специальностей, представленных на кафедре в период 1964-1967 молодыми математиками, сыграло важную роль как в развитии научной работы, так и в привлечении на специализацию кафедры способных студентов. Использование и развитие топологических методов в конечномерном и банаховом пространствах требовало разнообразного как геометрического, так и алгебраического подходов, и специалисты нашей кафедры читали в спецкурсах (как обязательных, так и факультативных) различные разделы алгебры и топологии, пополняя образование не только студентов, но и сотрудников кафедры, ведущих исследования в области дифференциальных уравнений или нелинейного функционального анализа.

Семинар по неподвижным точкам работал с большой интенсивностью и заседал несколько раз в неделю. На нем делались доклады по современным методам алгебраической топологии, развитой французской школой Лере-Картана-Сера и российскими математиками С.П.Новиковым, А.С.Шварцем; обсуждались получаемые участниками семинара новые топологические результаты. Интересно отметить, что вместе с преподавателями и аспирантами основными участниками этого семинара в 1966 г. стали студенты 2-го курса математического факультета Б.Д.Гельман, Я.А.Израилевич, В.В.Обуховский, Ю.И.Сапронов, П.Б.Шерман, а через год к ним присоединились второкурсники Н.М.Близняков, Ю.Е.Гликлик, В.Г.Звягин, Т.Н.Щелокова (Фоменко), В.А.Соболев, В.Ф.Пуляев. В разные годы в семинаре работали студенты и выпускники кафедры: В.Н.Козоброд, К.И.Чернышов, В.А.Каплан, Ю.Я.Исаенко, Б.М.Швырев, А.Л.Березовский, Л.Маргулис, А.Катрахова, М.Н.Крейн, М.Травкин, В.Р.Зачепа, И.Шнайдман, Н.Меллер, А.С.Скалецкий, О.Ю.Борисович, О.В.Кунаковская, В.Т.Дмитренко, Ю.С.Баранов, Г.Ю.Любасова, А.В.Косых, А.Ю.Борисович, А.Ф.Моргунов, Л.Бирбраир. Эта группа талантливейшей молодежи составила контингент, из которого пополнялись ряды аспирантов и сотрудников КАТМА.

Отметим ряд результатов этого коллектива. Исследования развивались в нескольких направлениях, которые были выделены мною для разделенных на тематические группы участников, однако объединенных в едином семинаре, где все обсуждали трудности и идеи каждого. Студенты 2-го курса — участники семинара — уже в 1966 году получили неожиданные для «общих топологов» результаты о размерности Урысона-Менгера множеств рациональных точек на сферах в банаховых пространствах m, C, C_0 — имеем $\infty, 1, 0$ — соответственно (Ю.И.Сапронов, Б.Д.Гельман, В.В.Обуховский). Однако вскоре главными темами семинара стали топологические теории уплотняющих (в смысле Б.Н.Садовского) векторных полей, в том числе — многозначных.

Развивая идею Ю.Г.Борисовича привлечения понятия относительного вращения для построения вращения уплотняющего векторного поля, им совместно со студентом Ю.И.Сапроновым был установлен в 1967 г. «принцип компактного сужения» некомпактных векторных полей с операторами, «согласованными» с «различающим отображением». Этот весьма общий принцип прояснил топологическую природу уплотняющих векторных полей и позволил распространить на них теорию относительного вращения и многие принципы неподвижных точек. Одновременно Ю.И.Сапронов в студенческой работе построил «абсолютное вращение» в сепарабельном гильбертовом пространстве и развил аксиоматическую теорию топологического индекса некомпактных операторов в булевых структурах. В 1969 г. за этот цикл работ Ю.И.Сапронов был удостоен бронзовой медали ВДНХ СССР! Основные результаты указанных работ опубликованы в *ДАН СССР, т.183, №1, 1968г., с.18—20*, и в сборнике «Труды семинара по функциональному анализу», *в.12, 1969г. изд-во ВГУ*. Позднее Ю.И.Сапронов дополнил эти результаты широко известным сейчас «принципом биективного соответствия гомотопических классов уплотняющих и вполне непрерывных векторных полей», пополненным в настоящее время основным принципом исследования операторных уравнений с уплотняющими операторами, как однозначных, так и многозначных (т. е. включений).

Параллельно с развитием теории уплотняющих операторов интенсивно исследовались многозначные векторные поля. Здесь Ю.Г.Борисовичем была высказана программа использовать для построения топологических характеристик ε -секущие и гомотопические секущие многозначных отображений, когда они существуют, моделируя многозначное отображение как расслоение или слоение. В случае выпуклых образов для вполне непрерывных векторных полей было построено вращение и относительное вращение и доказаны основные принципы неподвижной точки (Ю.Г.Борисович, Б.Д.Гельман, Э.М.Мухамадиев, В.В.Обуховский, Я.А.Израилевич). Указанные результаты существенно дополнили понятие степени, развитое ранее польскими математиками методами алгебраической топологии (наши результаты получены более простым методом конечномерных аппроксимации и ε -сечения). Наша статья в *ДАН СССР, т.187, №5, с.971—973*, послужила отправной точкой для исследования в этом направлении.

Участники семинара, овладевая основами алгебраической топологии, перешли к исследованию отображений многозначных с образами произвольной структуры. Ю.Г.Борисовичем и Ю.Е.Гликлихом было построено вращение и число Лефшеца для полей с так называемыми «асферическими образами», для которых удается построить ε -сечения, обобщая конструкцию А.Д.Мышкиса. Для более сложных образов удалось использовать для построения вращения гомотопические сечения многозначных отображений (Ю.Г.Борисович, Б.Д.Гельман, В.В.Обуховский). Эквивариантная теория многозначных отображений затем была построена Я.А.Израилевичем и В.В.Обуховским. Важным моментом развития теории степени многозначных отображений явилось перенесение на них В.В.Обу-

ховским в 1971 г. теории вращения уплотняющих векторных полей Ю.Г.Борисовича, Ю.И.Сапронова, Б.Н.Садовского. Принципиально новую конструкцию вращения для многозначных векторных полей, возможно обладающих ε -сечениями, построил Б.Д.Гельман: в этой теории вращение уже не является целым числом, но гомоморфизмом соответствующих групп гомологий; его конструкция оказалась самой общей; развивавшиеся за рубежом параллельно и позднее варианты теории степени следуют из конструкции Б.Д.Гельмана, опубликованной в *ДАН СССР, т.2, №3, с. 524-527*. Им развит и бесконечномерный вариант гомологической характеристики. В развитие принципа компактного сужения Ю.Г.Борисовичем и В.В.Обуховским установлен «принцип биекции» для некоторых классов компактно-сужаемых отображений с выпуклыми образами; более общий результат получен В.В.Обуховским для случая невыпуклых образов.

Указанные выше результаты оказались в русле современных направлений теории многозначных отображений и были опубликованы в центральных математических журналах (см., например [ИТОГИ]). С 1973 г., помимо исследований нелинейных функционально-дифференциальных уравнений, В.Ф.Субботин организует и ведет вплоть до своей трагической гибели алгебраический семинар для студентов 1-2 курсов, пользовавшийся большим успехом. Семинар привлекал тех студентов, интересы которых более тяготели к алгебре, чем к функциональному анализу и дифференциальным уравнениям. Наиболее активно работали студенты Р.Б.Стеколыщик, В.А.Колмыков, Н.Н.Удоденко. Этой группой под руководством В.Ф.Субботина выполнен ряд исследований, посвящённых спектру преобразований Кокстера (см. напр. журнал *«Функциональный анализ и его приложения», т. 12, в. 1.*); под руководством В.Ф. Субботина и моим Р.Б.Стеколыщик защищает в

1986 году кандидатскую диссертацию; В.А. Колмыков позднее защитился в МИРАН. Сам В.Ф.Субботин пользовался большим авторитетом у студентов и как Воспитатель (зам. декана), и как Учитель. Другой его ученик Н.Н. Удоденко работает на кафедре КАТМА, успешно продолжая дело В.Ф.Субботина.



Заседание кафедры (подготовка к юбилею, 1988 г.)
Ю.Г.Борисович, В.А.Колмыков, Г.Ю.Любасова, Ю.Е.Гликлик,
В.Ф.Субботин (в центре), В.Г.Звягин, Ю.Я.Исаенко, В.Н.Штеренгас

9. В начале 70-х годов на кафедре были определены основные направления научной работы и подготовки молодых специалистов-исследователей нелинейных операторных уравнений методами топологии и теории особенностей с приложениями к периодическим и краевым задачам механики, геометрии, анализа; продолжение исследований уплотняющих и многозначных отображений, возникли новые области интересов — топология эквивариантных отображений, вычисление и оценка топологического индекса, теория нелинейных фредгольмовых операторов и их приложения к краевым задачам.

К этому времени на кафедре сложился сплочённый коллектив, в котором активную роль стали играть стажёры и аспиранты (число аспирантов иногда доходило до 12), переходившие после защиты на кафедру или в институт математики: Ю.И.Сапронов, В.Г.Звягин, Б.Д.Гельман, В.В.Обуховский, Ю.Е.Гликлик, Я.А.Израилевич, Ю.Я.Исаенко, А.С.Турбабин, Т.Н.Шелокова (Фоменко). Несколько позже этот круг дополнили Н.М.Близняков, М.Н.Крейн, А.Березовский, В.Р.Зачепа, Б.М.Швырёв, М.Илолов, в конце 70-х годов — В.Т.Дмитриенко, Н.Бенкафадар (Алжир), Ю.Н.Заваровский, М.И.Шпильберг, Н.М.Меллер (Ратинер), в начале 80-х — О.В.Кунаковская, Ю.С.Баранов; с середины 80-х — А.В.Косых, А.Ю.Борисович, Г.Ю.Любасова.

Ю.Г.Борисович активно привлекал к серьёзной научной работе аспирантов и студентов, развивая методы докторской диссертации: развит метод Пуанкаре-Андропова исследования периодических и ограниченных решений общих функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием, метод А.Н.Тихонова в теории сингулярно-возмущённых систем — для периодической задачи в банаховых пространствах с неограниченными операторами, для неё же — асимптотическую теорию Крылова-Боголюбова-Митропольского (совместно с Б.М.Швырёвым). Ю.Г.Борисович совместно с Я.А.Израилевичем и Т.Н.Щелоковой (Фоменко) применил метод спектральных последовательностей для обобщения теории Смита эквивариантных отображений; совместно с Ю.И.Сапроновым, В.Г.Звягиным разрабатывал теорию степени нелинейных фредгольмовых операторов; совместно с Ю.Е.Гликликом, Б.Д.Гельманом, В.В.Обуховским исследовал многозначные отображения; совместно с Ю.И.Сапроновым — компактно сжимаемые отображения.

Сотрудниками кафедры стали:

Сапронов Ю.И. — выпускник ВГУ, 1970г., окончил аспирантуру под моим руководством при кафедре в 1972 г. (за два года) и с этого года по 1998 работал на кафедре. За студенческую научную работу в 1969 г. получил бронзовую медаль ВДНХ, лауреат премии Воронежского комсомола (1981 г.) — за цикл работ по теории фредгольмовых отображений. Автор свыше 90 научных работ. Наиболее интересные (с моей точки зрения) результаты Ю.И.Сапронова той поры:

1. Доказательство нелокальной приводимости фредгольмова отображения к форме Лере-Шаудера и принцип конечномерной редукции в теории степени фредгольмовых отображений, позволяющий существенно ослабить гладкость отображения.
2. Получение гомотопической классификации уплотняющих векторных полей.

3. Исследование многомодовых бифуркаций решений в нелинейных краевых задачах.

Отметим, что современная теория существования и бифуркаций решений нелинейных уравнений математической физики находится на стыке функционального анализа, дифференциальных уравнений, топологии и теории особенностей дифференцируемых отображений. Один из важнейших разделов этой теории широко известен под названием «Теория катастроф». Областью приложения теории существования и бифуркации решений нелинейных уравнений являются вопросы рождения и устойчивости стационарных, периодических и более сложных режимов в различных физических системах. В настоящее время Ю.И.Сапронов — соросовский профессор матфака ВГУ; защитил докторскую диссертацию в 1991 г. по теме «Конечномерные редукции и локальный анализ фредгольмовых уравнений». Основные результаты опубликованы в УМН /1996г. т. 51 в.1/, а также в серии сб. «Новое в глобальном анализе», издававшейся кафедрой, и в серии *Lecture Notes in Mathematics*, т. 1108, 1214 (Springer-Verlag, 1984г., 1986г.).

В.Г. Звягин — выпускник ВГУ 1971 г., закончил аспирантуру в 1974 г. с защитой диссертации (при моём руководстве). Работает на кафедре с 1974 г.; с июня 2000 г. - заведующий кафедрой КАТМА (в связи с моим уходом с этого поста по возрасту). Он лауреат премии Воронежского комсомола (1981 г.), автор более 90 работ, доктор физико-математических наук с 1993 г., соросовский профессор, директор НИИМ с 1998 г. Совместно со мной и Ю.И.Сапроновым он участвовал в разработке топологической теории нелинейных фредгольмовых отображений и их компактных возмущений - в построении теории степени, обобщающей результаты С.Смейла, К.Элворти, А.Тромба (см. обзор и подробности в ж. УМН. 1977 г. т. 35., в.4., с.3-54). Ему принадлежат важные для приложений результаты, обобщающие степень Элворти-Тромба на случай $deg(f - k)$, где $f \in \Phi_0 C^1$ — собственное, а k - вполне непрерывное отображения, сочетающие принцип конечномерной редукции с шаудеровской аппроксимацией компактного оператора k ; эта ситуация обобщена (там же) совместно со мной на случай $f \in \Phi_n C^r$, $n \geq 0$, $r > n + 1$. В.Г.Звягин решил проблему, поставленную мной на семинаре ещё в конце 60-х годов — усовершенствовать теорию фредгольмовых отображений Смейла-Элворти-Тромба таким образом, чтобы охватить классические нелинейные краевые задачи эллиптического типа и обобщить теоремы существования их решений; совместно с Н.Ратинер и В.Дмитриенко (аспиранты) им даны приложения к нелинейным краевым задачам как с частными производными, так и для обыкновенных (см. например, *Матем. сб.* 1991., т.12, с.1738-1768).

В топологическом аспекте теория нелинейных фредгольмовых отображений отшлифовывалась в диссертациях молодёжи — В.Т.Дмитриенко, Н.М.Ратинер — при моём и В.Г.Звягина совместном руководстве. В частности, М.Н.Крейн (совместно со мной) расширила теорию степени и теорию индексов пересечений Ю.Г.Борисовича-Ю.И.Сапронова на класс «полудифференцируемых» фредгольмовых отображений, не имеющих производной Фреше в равномерной топологии; дальнейшее изучение этой проблемы проведено учеником А.С.Мищенко А.А.Ирматовым (Москва, 1989 г.).

Интересно отметить, что поставленное мной направление исследовать нелинейные фредгольмовы операторы и довести их теорию до уровня, позволяющего исследовать нелинейные краевые задачи «напрямую», не прибегая к классической функции Грина, привлекло целую группу исследователей: В.Г.Звягин, В.Т.Дмитриенко, Г.Любасова, Ю.И.Исаенко, Н.М.Ратинер, Ю.И.Сапронов, А.Ю.Борисович, М.Н.Крейн; поэтому данное направление интенсивно развивалось, возникла полезная конкуренция, полученные результаты часто обобщались или использовались в других работах.

Гликлик Ю.Е. — выпускник ВГУ 1971 г., аспирантуры 1974 г. (под моим руководством), работал в НИИМ (1974-1984 г.г.), работает на кафедре с 1984 г., старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук (защита состоялась в 1995 г.), профессор (1998 г.), соросовский доцент (1995-1998 г.г.). Его тематика — анализ на многообразиях, глобальный анализ. Изучал неподвижные точки отображений бесконечномерных многообразий. Построено число Лефшеца и аналог вращения (индекс области многообразия) для широкого класса отображений: локально-компактные, имеющие компактную итерацию; уплотняющие; слабо-компактные и т.д. Построены и изучены интегральные операторы с римановым параллельным переносом (аналоги операторов типа Урысона-Вольтерра) на римановых многообразиях. С их помощью исследована разрешимость двухточечной краевой задачи для дифференциального уравнения 2-го порядка, получено геометрическое условие, гарантирующее разрешимость (несопряжённость точек). Конструкция операторов обобщена на стохастические уравнения на римановых многообразиях, с их помощью, в частности, исследовано уравнение Ланжевена. Основные результаты опубликованы в 3-х монографиях, в сборниках серии «Новое в глобальном анализе» (заместителем научного редактора которого он являлся) и в серии *Lecture Notes in Mathematics: Global Analysis - Studies and*



Воронежская зимняя математическая школа (70-е г.г.)

академик В.И.Арнольд и председатель оргкомитета Ю.Г.Борисович

Applications, I-V (под редакцией Ю.Г.Борисовича и Ю.Е.Гликлиха).

В.В.Обуховский — выпускник ВГУ 1970 г., окончил заочную аспирантуру при кафедре в 1975 г. с защитой диссертации по теории многозначных отображений и их приложений в оптимальном управлении и математической экономике (под моим руководством). Работал на кафедре с 1970 г. по 1980 г., с 1980 г. по 1998 г. — в ВГПИ, и с 1998 г. работает на кафедре КАТМА, соросовский профессор. Исследовал многозначные уплотняющие отображения с почти ациклическими образами, установил новые принципы неподвижных точек, существования решений дифференциальных включений. В 1993 г. защитил докторскую диссертацию «Топологические методы в теории нелинейных управляемых систем» (01.01.11 - системный анализ и автоматическое управление). Соавтор монографии «Введение в теорию многозначных отображений»; 1980 г. изд-во ВГУ. Основные результаты научных работ опубликованы в *УМН*, 1980 г., т. 35, в. 1, в работах «Многозначные отображения», М.: ВИНТИ, 1982 г.; «Многозначный анализ и операторные включения», М.: ВИНТИ, 1986 г.

Н.М. Близняков — выпускник ВГУ 1971 г., аспирант, защитил кандидатскую диссертацию в 1982 году (под моим руководством), сотрудник НИИМ ВГУ с 1973 г., учёный секретарь Института до 1985 г., доцент кафедры КАТМА с 1985 г., с.н.с.. Научные исследования Н.М. Близнякова посвящены вычислению топологических и алгебраических характеристик конечномерных отображений. В классической задаче вычисления топологического индекса им получены эффективные алгебраические формулы и алгоритмы вычисления индекса особой точки векторных полей в конечномерных пространствах (см. например, *сб. серии «Новое в глобальном анализе»*, 1985.). На основе методов теории особенностей, применённых В.И.Арнольдом и А.Г.Хованским в задачах вещественной геометрии, им установлены оценки индекса особой точки векторного поля через различные дискретные данные векторного поля (степени компонент полиномиального векторного поля и их диаграммы Ньютона).

Т.Н. Фоменко (Щелокова) — выпускница ВГУ 1974 г., ныне преподаватель «Института стали» (Москва), тополог по специальности, кандидат физико-математических наук. Научные исследования Т.Н.Фоменко связаны с изучением действий конечномерных групп на когомологических образующих и вычислению топологических характеристик эквивариантных отображений многообразий. Ею введено новое понятие «индекса эквивариантности», в терминах которого решена задача о степени эквивариантного отображения сфер в самых общих предположениях (без условий цикличности групп и простоты или полупростоты действия) / *Сибирский математический журнал*, №2, 1978 г./, а также в *сб. серии «Новое в глобальном анализе»*, 1987 г. Н.М. Близняков и Т.Н. Фоменко участвовали как соавторы в написании первых в нашей стране учебников по топологии для математических вузов (см. ниже)

А.Ю. Борисович — окончил ВГУ в 1983 г. с отличием, поступил на работу в ВИСИ. Под руководством В.Г.Звягина принимал активное участие в научной работе, в дипломной работе исследовал минимальные поверхности. Продолжая эти исследования, ему удалось создать функционально-операторный метод исслед-

дования бифуркации минимальных поверхностей, впервые позволяющий дать конструктивные критерии наличия бифуркации /УМН, т. 41, в. 5, 1986г. с. 165-166; Матем. сб. 1997, №1/.

Исаенко Ю.Я. — выпускник 1969 г., аспирант (руководитель — Ю.Г. Борисович), на кафедре работал с 1972 г., ассистент, в настоящее время работает в ВГПУ. Основное направление научной деятельности — изучение фредгольмовости линейных дифференциальных операторов с непрерывными ограниченными на всей числовой оси коэффициентами. Им получены следующие результаты:



к.ф.м.н. Т.Н.Фоменко и проф. В.Хакен (США)

1. Для того, чтобы линейный дифференциальный оператор $(Lx)(t) = x(t) + A(t)$, действующий из $C^1(R) \rightarrow C^0(R)$, был фредгольмов, необходимо и достаточно, чтобы были фредгольмовы операторы $L_+ : C^1(R_+) \rightarrow C^0(R_+)$; $L_- : C^1(R_-) \rightarrow C^0(R_-)$.

2. Для того, чтобы L_+ , L_- были фредгольмовы, необходимо и достаточно, чтобы существовала симметрическая матрица-функция $w(t) \in C^1(R_+)$, соответственно, $w(t) \in C^1(R_-)$, такая, что $w(t) + w(t)A(t) + A^*(t)w(t) \leq \gamma \cdot I$ для всех $t \in R_+$ ($t \in R_-$).

Гельман Б.Д. — выпускник ВГУ 1970 г., окончил аспирантуру при кафедре с защитой диссертации (под моим руководством), работал на кафедре с 1971 г. по 1982 г., с 1983 г. работает на кафедре теории функций, кандидат физико-математических наук, доцент. Изучал вопрос о разрешимости и свойствах решений операторных включений $\Theta \in F(x)$, где F — некоторый многозначный оператор. Им была построена и изучена топологическая характеристика многозначного оператора, отличие от нуля которой гарантирует существование решений включения в случае, если F — полунепрерывный сверху многозначный оператор с произвольными замкнутыми образами. Изучались также свойства множества решений таких включений: связность и ацикличность, топологическая размерность и др. Доказанные общие теоремы применялись для изучения структуры множества решений конкретных классов операторных включений. Основные результаты опубликованы в /УМН, 1980г., т.35, в.1/, а также в сб. серии «Новое в глобальном анализе» и в книгах «Итоги науки и техники», издаваемых ВИНТИ. Соавтор монографии «Введение в теорию многозначных отображений», Воронеж, изд-во ВГУ, 1986г.

Бенкафадар Насреддин Мухамад (Алжир) при научных руководителях Б.Д.Гельмане и Ю.Г.Борисовиче защитил кандидатскую диссертацию на тему «О некоторых топологических методах в теории уравнений с многозначными операторами» (1983 г.), а затем и докторскую (в 1997 г.).

Я.А.Израилевич — окончил ВГУ в 1970 г. и аспирантуру при кафедре (под моим руководством) в 1973 г., защитил диссертацию по топологии в 1974 г. Работал на ВЦ ВГУ инженером и старшим инженером (1973-1980 г.г.), в 1980-1984 г.г. работал на кафедре КАТМА ассистентом, с 1984г. — доцент кафедры математического анализа. Тематика — топология, численные методы. Используя метод спектральной последовательности Бореля, мы с ним установили формулу $\deg\Phi \cdot \text{ind}T_2 = \deg\Phi|_{\text{fix}} T_1 \cdot \text{ind}T_1 \pmod{k}$ для степени эквивариантных (относительно действий Z_p -конечной циклической группы) отображений Φ гомотопических сфер S^n , $n \geq 2$, где p — порядок конечной циклической группы, вообще говоря не простой. Исследованы свойства индексов, входящих в эту формулу, показано, что из неё следуют формулы П.Смита и М.А.Красносельского.

В численных методах он установил формулу для суммы индексов особых точек итерационального процесса Ньютона-Канторовича, не являющихся решениями исходного нелинейного уравнения. Доказана теорема существования ветви таких точек, проходящих через вырожденное решение исходного уравнения (теорема связана с теоремой Адамса об инварианте Хопфа); им разработаны новые численные методы решения задач оптимального управления с фазовыми ограничениями.



Юбилей кафедры (1988 г.):

слева проф. Н.Бенкафадар, рядом доц. Б.Д.Гельман, А.Боровских;
выше — проф. Ю.Е.Гликлик, лаб.Л.Н.Моргунова, доц. Р.С.Адамова, доц. М.Н.Крейн

Меллер Н.М. (Ратинер) — выпускница кафедры, с 1977 по 1984 г. работала на ВЦ ВГУ инженером, м.н.с. в группе Я.А.Израилевича. В 1984 г. переведена в отдел операторных уравнений НИИМ ВГУ. Ведёт преподавательскую работу на ф-те ПММ (ВГУ). В 1978 году работа Меллер «Теория степени фредгольмовых отображений неотрицательного индекса» (руководители — проф. Борисович Ю.Г., доц. Звягин В.Г.) была награждена медалью МВ и ССО СССР за лучшую студенческую работу. Развивая идеи Ю.Г.Борисовича, В.Г.Звягина, Ю.И.Сапронова, усовершенствовала конструкцию степени фредгольмовых отображений, нашла интересные приложения своей теории к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

Любасова Г.Ю. — окончила ВГУ с отличием в 1982 г., и с этого года работала на кафедре инженером х/д; защитила диссертацию под руководством Ю.И.Сапронова; ведёт исследования ветвления и устойчивости периодических решений дифференциальных уравнений. Ею получены интересные результаты по ветвлению интегральных многообразий типа тора.

Косых А.В. — окончил ВГУ в 1983 г. с отличием, ведёт преподавательскую работу, соискатель. В 1983 г. награждён дипломом Всесоюзной студенческой конференции по математике (г. Новосибирск, НГУ). Под руководством В.Г.Звягина выполняет научную работу, исследуя множества решений гидродинамических уравнений; для уравнений типа Навье-Стокса им (совместно с В.Г.Звягиным) доказана конечность множества решений для почти всех начальных данных.

10.Сложившиеся к 90-м годам на кафедре направления научных исследований, на первый взгляд разрозненные, оказались взаимосвязанными через топологию и нелинейные операторные уравнения. Научным руководителем этих исследований является проф. Борисович Ю.Г. Совет и Научная часть ВГУ в результате конкурса 1999 г. научно-педагогических коллективов присвоила моему коллективу статус «Научной школы в области топологических методов в нелинейном анализе». В связи с этим приведу наши результаты за последние 5 лет в соответствии с разделами конкурса.

Направление научных исследований, проводимых в настоящее время в рамках научно-педагогической школы:

«Топологические и алгебраические методы анализа нелинейных задач, возникающих в проблемах математической физики, геометрии, оптимизации, теории операторных уравнений» (по рубрике ГРНТИ: 27.39.27 Нелинейный функциональный анализ; 27.19.19 Топология многообразий).

Характеристика научно-педагогической школы

Руководитель научно-педагогической школы — **Борисович Юрий Григорьевич**, доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, Соросовский профессор, Стипендиат государственной стипендии для выдающихся ученых.



Семинар кафедры

Н.М.Близняков, Ю.Е.Гликлих, О.В.Кунаковская, В.В.Обуховский, Б.Д.Гельман – стоят;
Ю.Г.Борисович, Ю.И.Сапронов, Б.М.Даринский (физик) – сидят.

Организационная форма коллектива:

Кафедра алгебры и топологических методов анализа, учебно-вычислительная лаборатория, научная группа.

Состав коллектива:

Соросовские профессора — доктора физико-математических наук Ю.Г.Борисович, В.Г.Звягин, Ю.И.Сапронов (ВГУ), В.В.Обуховский (ВГПУ); доктор ИМ Польской АН профессор А.Ю.Борисович (ВАСА), доктор ф.-м. наук профессор Н.Бенкафадар (Алжир); Соросовские доценты — доктор физико-математических наук Ю.Е.Гликлих, кандидат физико-математических наук доцент Б.Д.Гельман (ВГУ); доценты — Н.М.Близняков (ВГУ), В.Р.Зачепа (ВГПУ), Я.А.Израилевич (ВГУ), В.Т.Дмитриенко (г.Липецк, Педагогический институт), Ю.С.Баранов (Украина, Луганская обл., Рубежанский филиал Восточноукраинского университета), Г.Ю.Любасова (Старый Оскол, филиал Московского института стали и сплавов), М.Н.Крейн (Липецк, ГПИ), Б.М.Швырев (ВГУ), преп. Кунаковская О.В. (ВГУ) (все окончили аспирантуру у Ю.Г.Борисовича); Соросовский аспирант Царев С.Л. (защитился, руководитель Ю.И.Сапронов), аспиранты Ю.Г.Борисовича: Л.Стенюхин, А.Попова, Т.Портная, И.Зо-

лотарев, Т.Сапронова (защитила кандидатскую диссертацию 14.11.2000), аспи-



Ю.Г.Борисович. Пленарный доклад.

Симпозиум Эдмонтского университета (L.Erve and W.Krawcewich), 1995г.
(Канада, оз.Онтарио)

ранты Ю.Е.Гликлиха: Е.Богачева, Л.Морозова, а также имеющие серьезные публикации за последние два года магистры Г.Каладзе, А.Копенкина, Д.Воротников, О.Осинцева.

Профессор **Ю.Г.Борисович** работает в Воронежском государственном университете с 1955 года. С 1963 года по 2000 год возглавлял кафедру алгебры и топологических методов анализа. В 1964 году он защитил докторскую диссертацию, а в 1967 году получил звание профессора. В 1995 году ему присвоено почетное звание «Заслуженного деятеля науки Российской Федерации», в 1997 году — звание «Соросовский профессор», и присуждается государственная стипендия для выдающихся ученых России. Под непосредственным руководством профессора Борисовича Ю.Г. защищено 27 кандидатских диссертаций. Пятеро из его учеников защитили докторские и один подготовил докторскую диссертацию к защите. Он разработал и реализовал (вместе со своими учениками) научную программу, связанную с развитием новых методов алгебраической и гомотопической топологии и их применением к проблемам нелинейного функционального анализа. В рамках этой программы были получены новые существенные вклады в теорию некомпактных и многозначных отображений, в теорию фредгольмовых отображений банаховых многообразий. Выполненные в этой программе исследования отражены в ряде обзоров, написанных Ю.Г.Борисовичем совместно с учениками и коллегами:

«Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера» (УМН, 1977, т.32, вып.4);

«Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений» (УМН, 1980, т.35, вып.1);

цикл обзоров «Итоги науки и техники» (М.: ВИНТИ, 1982, 1986, 1987),

В последнее пятилетие Ю.Г.Борисович работает над объединением различных теорий степени для фредгольмовых, уплотняющих, многозначных векторных полей. Руководящими идеями здесь служат «принцип компактного сужения», «принцип биекции» Ю.Г.Борисовича, Ю.И.Сапронова, «принцип A -уплотняющего векторного поля» В.Г.Звягина, В.Т.Дмитриенко. Для полей f , где $f = A - g$, g – уплотняющий относительно A , однозначный или многозначный полунепрерывный сверху оператор с выпуклыми или обобщённо-ациклическими образами, удаётся обобщить «принцип биективного соответствия» и построить универсальную конструкцию топологических характеристик нелинейных фредгольмовых и многозначных S_+ и α_0 (Ф.Браудера, И.В.Скрыпника) операторов, возмущённых многозначными операторами, уплотняющими относительно главного. Получены новые приложения к глобальным задачам оптимального управления динамическими системами функционально-дифференциальных уравнений сингулярного типа (по Лионсу) при нелинейных связях, к нелинейным краевым задачам, топологической классификации кристаллов по акустическим свойствам (при участии О.В.Кунаковской и физика Даринского Б.М.).

Им опубликовано более 190 основных научных работ, издано (совместно с учениками) 5 учебников (из них 2 — за рубежом), 15 томов научных трудов в серии межвузовских сборников «Новое в глобальном анализе», издаваемой с 1982 года, главным редактором которой он является; 11 из них переизданы (совместно с Ю.Е.Гликлихом) на английском языке в серии *Lecture Notes in Mathematics* (издательство *Springer-Verlag*) в пяти томах «*Global Analysis - Studies and Applications I-V*» (vol. 1108, 1214, 1334, 1453, и V в 1992 г., vol.1520). Подготовлен тематический том №2, 1997 г. журнала «Известия высших учебных заведений. Математика»



Ю.Г.Борисович на заседании Редколлегии журнала «Известия вузов. Математика» (Казань, КГУ, октябрь 2000 г.)

со статьями российских и зарубежных специалистов по развиваемой его коллективом тематике. Борисович Ю.Г. поддерживает контакты с редколлегиями международных научных изданий: журналов «*Set-Valued Mappings*» (Kluwer Academic Publishers, the Netherlands), «*Abstract and Applied Analysis*» (Mancorp Publishers, Inc., Tampa, Florida, USA), «Известия ВУЗов. Математика» (Россия,



Участники ВЗМШ (70-е г.г.)

Лекторы: Б.Ю.Стернин, А.С.Мищенко, В.М.Бухштабер, В.Я.Левин, С.Г.Крейн.
А.М.Виноградов, А.Я.Хелемский

член редколлегии). Он участник международных научных конференций: The Second Worlds Congress of Nonlinear Analysts (Athens, Greece, July 1996, IFNA); «Топологические, вариационные и сингулярные методы в нелинейном анализе», (Гданьск, Польша, 1997, пленарный доклад). В течение ряда лет он являлся одним из организаторов широко известной Воронежской зимней математической школы, носившей международный характер. В 1993-2000 гг. его коллектив удостоивался грантов Сороса, РФФИ, Американского математического общества, «Университетов России», РАЕН и местных (ВГУ). На руководимой профессором Ю.Г.Борисовичем кафедре организована уникальная специализация по топологическим методам анализа. Одним из базовых учебников является написанный Ю.Г.Борисовичем, Н.М.Близняковым, Я.А.Израилевичем и Т.Н.Фоменко учебник по курсу топологии, читаемому им для студентов математического факультета ВГУ: /«Введение в топологию», М.: Физматлит, 1995. - 495с. (второе издание)/. Этот учебник переиздан на английском (дважды) и на китайском языках. В России является одним из основных учебников по курсу топологии, читаемому в университетах и пединститутах.

Доктором физико-математических наук **Ю.Е.Гликлих** были разработаны новые методы изучения задач математической физики, основанные на сочетании техники глобального анализа и стохастического анализа и применимые для описания движения вязкой несжимаемой жидкости. Другой важный результат получен в задаче о разрешимости уравнения Ньютона-Нельсона, приводящий к процедуре квантования для механических систем, для которых классические методы квантования не определены. Ю.Е.Гликлих многократно приглашался для проведения научных исследований в ведущие университеты Европы и Америки

Он принимал участие в работе Международного конгресса математиков (Цюрих, Швейцария, 1994), Европейского конгресса математиков (Будапешт, Венгрия, 1996), Международной научной конференции «Secondary calculus and cohomological physics» (Москва, 1997) и других. Он автор более 90 публикаций, среди которых три монографии.

Профессором **В.Г.Звягиным** развиваются с использованием теории степени фредгольмовых отображений и их возмущений исследования различных задач геометрии и механики. Были получены критерии однозначной разрешимости и конечности множества решений для различных уравнений эллиптического типа, в частности, уравнений Монжа-Ампера и др. Вычислена степень эквивариантных фредгольмовых отображений, коммутирующих с действием окружности и тора. Исследована разрешимость краевых и начально-краевых задач из динамики обобщенных жидкостей. Он участник международных научных конференций: «Международный конгресс математиков» (Цюрих, Швейцария, 1994); «Топологические, вариационные и сингулярные методы в нелинейном анализе» (Гданьск, Польша, 1997).

Исследования профессора **Сапронова Ю.И.** связаны с развитием и применением прямого функционально-аналитического метода исследования нелинейных вариационных краевых задач — метода конечномерных редукиций, включающего вариационную версию локальной редукиции Ляпунова-Шмидта и глобальную редукицию Морса-Ботта. Изучены условия, при которых являются глобально редуцируемыми краевые задачи вариационного исчисления, найдены в явном виде ключевые функции, полученные по редуцирующей схеме Морса-Ботта. Исследованы распределения значений индекса Морса по ветвям экстремалей, бифурциру-



Конференция (Польша, Гданьск, 1997 г.):
Ю.И.Сапронов, В.Г.Звягин, А.И.Перов и члены Оргкомитета К.Гемба,
В.Марзантович, З.Кухарский

ющих из конечнократной точки минимума с особенностью многомерной сборки. Получены новые теоремы о нелокальной структуре решений вариационных задач. Он автор более 80 публикаций (в том числе обзора в *УМН*, 1996г., №1), участник международных научных конференций: по небесной механике (Великие Луки, август, 1996); по дифференциальным уравнениям (С.-Петербург, декабрь, 1996 г.); по топологическим, вариационным и сингулярным методам в нелинейном анализе (Гданьск, сентябрь, 1997 г.); «Стохастический и глобальный анализ» (г.Воронеж, 13-19 января 1997 г.).

В работах доктора ф.-м. наук **Борисовича А.Ю.** создан новый общий метод исследования бифуркаций семейств минимальных поверхностей, основанный на построении нелинейного оператора фредгольмова типа, названного им оператором Плато. Этот метод позволил исследовать бифуркации при различных типах граничных условий (поверхности с гладкими границами, с угловыми точками на границе, с непрерывной круговой симметрией). Он позволил отыскать общие (как необходимые, так и достаточные) условия бифуркации и сколь угодно точно вычислять критические значения параметров бифуркации, определить число ответвляющихся семейств минимальных поверхностей и их асимптотику, изучить устойчивость бифуркационных диаграмм, в том числе для бифуркации капиллярных минимальных поверхностей в гравитационном поле. Он опубликовал более 40 работ, участник международных научных конференций: «The Second Worlds Congress of Nonlinear Analysts» (Athens, Greece, July 1996, IFNA); «Топологические, вариационные и сингулярные методы в нелинейном анализе», Гданьск, Польша, 1997; «Стохастический и глобальный анализ» (Воронеж, 13-19 января 1997 г.).

Профессором **В.В.Обуховским** на основе развития теории топологической степени для различных классов некомпактных многозначных отображений получены новые результаты о разрешимости и структуре решений для операторных включений в банаховых пространствах. С использованием этих результатов проведено исследование полулинейных дифференциальных включений в банаховом пространстве и соответствующих им управляемых систем. Он автор более 60 работ, участник международных научных конференций: «The Second Worlds Congress of Nonlinear Analysis» (Athens, Greece, July 1996, IFNA); «Стохастический и глобальный анализ» (Воронеж, 13-19 января 1997 г.).

В работах доцента **Б.Д.Гельмана** построены и изучены новые топологические инварианты многозначных отображений с образами сложной природы; доказаны новые теоремы о неподвижных точках многозначных отображений и рассмотрены приложения к изучению множества решений интегральных и дифференциальных включений. Он автор более 60 работ, участник международной научной конференции «Стохастический и глобальный анализ» (Воронеж, 13-19 января 1997 г.). Недавно опубликована интересная статья: */N.M.Benkafadar, B.D. Gel'man «Generalized local degree for multi-valued mappings» International Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra., vol. 10, №5, 2000. - 22p/*. В этой статье строится локальная степень для широкого класса многозначных отображений конечномерных пространств, обобщающих рассматриваемые ранее и удовлетворяющих следующему алгебраическому условию: соответствующий проектор

из графика многозначного отображения порождает правообратный гомоморфизм Чеховских гомологий с компактными носителями. До сих пор требовалась обратимость этого гомоморфизма.

Доцентом **Близняковым Н.М.** разработаны новые методы вычисления топологических инвариантов отображений конечномерных пространств, основанные на специальных деформациях отображений и комбинаторном анализе носителей компонент отображений. Получены формулы для вычисления топологического индекса, установлены его оценки. Им опубликовано более 50 работ, он соавтор учебников по топологии.

О.В.Кунаковской построена теория глобальных и локальных индексов обобщенных собственных векторов нелинейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве, использующая методы теории пересечений и позволяющая формулировать достаточные признаки существования таких векторов. Она автор более 30 работ и участник международных научных конференций: 1) русско-французская конференция, организованная «femmes et mathematiques» и Российской Ассоциацией «Женщины-математики» (2 - 6 декабря 1996 г., Марсель – Люмини, Франция); 2) 8 Конгресс Ассоциации «Европейские женщины в математике» (13-17 декабря 1997, Триест, Италия).

Общественное признание научно-педагогической школы.

Ю.Г.Борисович, Ю.Е.Гликлих, Ю.И.Сапронов, В.Г.Звягин, В.В.Обуховский являются членами Американского математического общества. Ю.Г.Борисович избран почетным членом Академии Нелинейных Наук (21.06.1999) и председателем Воронежского

отделения АНН, в котором коллективным членом состоит НИИ математики ВГУ; профессора В.Г.Звягин и В.В.Обуховский — соответственно член и ученый секретарь отделения. О.В.Кунаковская — член Французского математического общества, международный координатор Ассоциации «Европейские женщины в



Конференция в Польше (1994 г.)

Участники: Ю.Г.Борисович, О.Менц, П.Менц, А.Ю.Борисович

математике». В Воронеже проведена в январе 1997 года Международная научная конференция «Стохастический и глобальный анализ», финансируемая РФФИ и INTAS (грант 94-0378). В конференции приняли участие 96 математиков из 12 стран (см. *Успехи математических наук*, 1997. - Т.52. - вып.6. - С.211-212). В программном комитете этой конференции участвовали академик РАН А.Т.Фоменко и профессор МГУ А.В.Болсинов. Коллектив кафедры связан тесными научными контактами с МГУ: участие в организации Воронежских школ и конференций ведущих специалистов (проф.Болсинов А.В., проф. Бухштабер В.М., проф.Мищенко А.С., проф.Никольский М.С., проф.Розов Н.Х., проф.Соловьев Ю.П., проф.Тихомиров В.М., проф.Трофимов В.В), а также научное консультирование сотрудников Воронежского университета.

В 2000 г. (4-28 января) нашим коллективом проведена Воронежская зимняя математическая школы (ВЗМШ 2000), посвященная 80-летию со дня рождения М.А.Красносельского: СОВРЕМЕННЫЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ. В оргкомитете школы были представлены, наряду с воронежскими математиками (председатели школы — ректор ВГУ проф. И.И.Борисов, проф. ВГУ Ю.Г.Борисович), известные ученые МГУ, МИРАН им.В.И.Стеклова, НИИМ ВГУ и другие математики. Школа вызвала большой интерес российских и зарубежных математиков, а также аспирантов и студентов. Особенностью данной школы являлось возрождение традиции приглашения крупных специалистов с циклами лекций: прочитаны циклы лекций А.В.Болсинова–А.Т.Фоменко, В.П.Маслова–О.Ю.Шведова, А.А.Давыдова, И.С.Красильщика, Г.Л.Литвинова, Е.Ф.Мищенко–Н.Х.Розова, А.С.Мищенко, Ф.Ю.Попеленского, А.Скопенкова, Б.Ю.Стернина, В.Е.Назайкинского–А.Ю.Савина, В.М.Тихомирова, О.Ю.Шведова.Из-за рубежа приехали математики R.Bader, N.M.Bencafadar, Z.Dzedzej, M.Marven, P.Wong. Опубликовали тезисы 135 российских ученых. В 2000 г. (15-20 мая) проведена Международная конференция «Нелинейный анализ и функционально-дифференциальные уравнения» (АДМ-2000), посвященная 80-летию со дня рождения выдающегося математика А.Д.Мышкиса.В работе конференции приняли участие 12 зарубежных и 202 российских математика.

Список лиц, защитивших кандидатские и докторские диссертации под руководством проф. Борисовича Ю.Г. и сотрудников кафедры.

Кандидатские

1. **Бадоев А.Л.** О некоторых приложениях функционального анализа к теории дифференциальных уравнений с запаздыванием. (1968).
2. **Баранов Ю.** Операторы и уравнения на функциональном многообразии диффеоморфизмов, связанные с геометрическими методами в механике (соруководитель Ю.Е.Гликлик.) (1984).
3. **Бенкафадар Н.М.** (Алжир) О некоторых топологических методах в теории уравнений с многозначными операторами (соруководитель Б.Д.Гельман) (1983)

4. **Березовский А.Л.** Области устойчивости линейных положительных гамильтоновых систем с периодическими коэффициентами (1979).
5. **Близняков Н.М.** Вычисление и оценки индекса особой точки векторного поля (1982).
6. **Чанг Хыу Бонг** (Вьетнам). К теории периодических и почти периодических решений некоторых классов дифференциально-разностных уравнений (соруководитель В.Ф.Субботин)(1975)
7. **Гельман Б.Д.** Топологические методы в теории многозначных операторных уравнений (1975).
8. **Гликлик Ю.Е.** Операторные методы исследования интегральных кривых на многообразиях.(1975)
9. **Дмитриенко В.Т.** Обобщенно-уплотняющие нелинейные отображения и их приложения (соруководитель В.Г.Звягин) (1984).
10. **Заваровский Ю.Н.** Метод ключевых функций и их нормальных форм в вариационных задачах (соруководитель Ю.И.Сапронов) (1981).
11. **Зачепа В.Р.** Конечноопределенные фредгольмовы уравнения (соруководитель Ю.И.Сапронов) (1981).
12. **Звягин В.Г.** Исследование топологических характеристик нелинейных операторов (1974).
13. **Израилевич Я.А.** Вычисление степени эквивариантных отображений (1973).
14. **Крейн М.Н.** Нелинейные фредгольмовы отображения и их топологические инварианты (1983).
15. **Любасова Г.Ю.** Многомерные бифуркации стационарных точек динамических систем (соруководитель Ю.И.Сапронов) (1969).
16. **Менц П.**(Германия). О непрерывности некоторых нелинейных операторов (1967).
17. **Обуховский В.В.** Уравнения с многозначными операторами и некоторые их приложения (1975).
18. **Ратинер Н.М.** Теория степени фредгольмовых отображений неотрицательного индекса и приложения (соруководитель Звягин В.Г.) (1988).
19. **Сапронов Ю.И.** К теории компактных, фредгольмовых и уплотняющих отображений (1972).
20. **Стекольщик Р.Б.** Исследование преобразований Кокстера и вопросов регулярности в связи теорией представления графов (соруководитель В.Ф.Субботин).
21. **Субботин В.Ф.** К теории периодических решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (1967).
22. **Швырев Б.М.** Функционально-операторные методы в теории интегральных многообразий и периодические решения (1983).
23. **Борисович А.Ю.** Дифференциальный оператор задачи Плато, свойства

и применение в проблеме бифуркации минимальных поверхностей (1987) (консультаты В.Г.Звягин, Ю.И.Сапронов, А.И.Перов).

24. **Царев С.Л.** Существование и сравнение конечномерных редукций в гладких вариационных задачах (2000) (руководитель Сапронов Ю.И.)

25. **Шерман П.Б.** Нелинейные фредгольмовы отображения и теоремы существования (1975).

26. **Турбабин А.С.** Оператор сдвига, ограниченные и периодические решения дифференциально-разностных уравнений (1970).

27. **Фоменко (Щелокова) Т.Н.** О некоторых топологических инвариантах эквивариантных отображений (1977).

28. **Шпильберг М.И.** О топологических характеристиках отображения и некоторых ее приложениях (1977).

29. **Сапронова Т.Ю.** Фредгольмовы функционалы с непрерывной симметрией и их возмущения (2000).

Докторские

1. **Сапронов Ю.И.** Конечномерные редукции и локальный анализ фредгольмовых уравнений (1991).

2. **Звягин В.Г.** Топологические характеристики возмущения нелинейных фредгольмовых отображений и их приложения (1992).

3. **Обуховский В.В.** Топологические методы в теории нелинейных уравнений управляемых систем (1993).

4. **Гликлик Ю.Е.** Дифференциальные уравнения типа закона Ньютона на конечномерных и бесконечномерных римановых многообразиях и их приложения в математической физике (1995).

5. **Бенкафадар Н.** Обобщенная степень мультиотображений (1997).

6. **Борисович А.Ю.** Бифуркации некоторых минимальных поверхностей (1997, Академия наук, Польша) (консультанты К.Гемба, В.Г. Звягин, Ю.И.Сапронов).

При непосредственном руководстве и консультациях проф. Ю.Г.Борисовича защищено 27 кандидатских и 5 докторских диссертаций.

Книги по специальности и методические материалы

1. Борисович Ю.Г. Введение в топологию. Учебное пособие. Изд-во «Высшая школа», М.: 1980, 295 с. (соавторы — Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н.).

2. Борисович Ю.Г. Введение в топологию. Учебное пособие (второе издание). М.: Физматлит, 1995, 416 с. (соавторы — Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н.)

3. Борисович Ю.Г. Топология. Методические указания. Изд-во МГУ, Москва, 1982, 96с. (соавторы — Звягин В.Г., Соловьев Ю.П.).

4. Borisovich Yu.G. Introduction to topology. Mir Publishers, Moscow, 1985, 320p. (co-authors Blyznyakov N.M., Izrailevich Ya.A., Fomenko T.N.).
5. Borisovich Yu.G. Introduction to Differential and Algebraic Topology. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, Boston, London, 1995, 493p. (co-authors Bliznyakov N.M., Izrailevich Ya.A., Fomenko A.T.)
6. Борисович Ю.Г. Топологические методы в теории нелинейных фредгольмовых операторов. Учебное пособие. Воронеж, изд-во ВГУ, 1978, 83с. (соавторы — Звягин В.В., Шерман П.Б.)
7. Борисович Ю.Г. Введение в топологию. Китай, Пекин: Пекинское научное бюро, 1992, с.399, книга по специальности (совместно с Близняковым Н.М., Израилевичем Я.А., Фоменко Т.Н.).
8. С.Г.Валюхов, В.А.Костин, Ю.И.Сапронов, С.М.Семенов. Зацепления винтовых поверхностей. — Воронеж, изд-во ВГУ, 1999, 131с.
9. С.Г.Валюхов, Б.Д.Гельман, С.В.Григорьев, Л.А.Минин, В.П.Орлов. Геометрические методы в теории гидравлических цепей. — Воронеж, изд-во ВГУ, 1999, 126с.
10. Gliklikh Yu.E. Ordinary and Stochastic Differential Geometry as a Tool for Mathematical Physics. Dordrecht: Kluwer, 1996. — xvi+189p.
11. Gliklikh Yu.E. Global Analysis in Mathematical Physics. Geometric and Stochastic Methods. New York: Springer-Verlag, 1997. — xv+213p.

Выпуск научной литературы в России

“Новое в глобальном анализе” (межвузовская серия), научные сборники (под общей редакцией проф.Ю.Г.Борисовича)

1. Уравнения на многообразиях, 1982 г.
2. Топологические и геометрические методы в математической физике, 1983 г.
3. Геометрия и топология в глобальных нелинейных задачах, 1984 г.
4. Применение топологии в современном анализе, 1985 г.
5. Анализ на многообразиях и дифференциальные уравнения, 1986 г.
6. Глобальный анализ и математическая физика, 1987 г.
7. Геометрия и теория особенностей в нелинейных уравнениях, 1987г.
8. Глобальный анализ и нелинейные уравнения, 1988 г.
9. Топологические и геометрические методы анализа, 1989 г.
10. Алгебраические вопросы анализа и топологии, 1990 г.
11. Нелинейные операторы в глобальном анализе. 1991 г.
12. Задачи геометрии, топологии и математической физики, 1992 г.
13. Methods and Applications of Global Analysis, 1993.
14. Applied Aspects of Global Analysis, 1994.
15. Глобальный и стохастический анализ, 1995.

Важнейшие статьи

1. Борисович Ю.Г. Теория фредгольмовых отображений и некоторые задачи оптимального управления // ВИНТИ. Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т.68. С.27-48, – Москва, 1999.
2. Борисович Ю.Г. Топологические характеристики и исследование разрешимости нелинейных проблем // Изв. Вузов. Мат., 1997, №2, С.3-23 (РЖМат, 1997, 12Б895).
3. Борисович Ю.Г. Глобальный анализ операторных уравнений, возникающих в сингулярных задачах оптимизации // Докл. РАН., 1997, 355, №1, С.11-13 (РЖМат, 1999, 2Б887)
4. Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис Л.Д., Обуховский В.В. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // Успехи мат. наук, 1980, 35, №1, С.59-126 (РЖМат, 1980, 6А571)
5. Борисович Ю.Г., Звягин В.Г., Сапронов Ю.И. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера // Успехи мат. наук, 1980, 1977, 35, №4, С.3-54 (РЖМат, 1977, 12Б990)
6. Борисович Ю.Г., Сапронов Ю.И. О некоторых топологических инвариантах нелинейных фредгольмовых отображений // Докл. АН СССР, 1971, 196, №1, С.12-15 (РЖМат, 1971, 5Б931)
7. Борисович Ю.Г., Даринский Б.М., Кунаковская О.В. Применение топологических методов для оценки числа продольных упругих волн в кристаллах // Теор. и мат. физика, 1993, т.94, №1, С.146-152.
8. Борисович Ю.Г., Золотарев И.Ю., Портная Т.В. О некоторых обобщениях теории степени Л.Кронекера, М.А.Красносельского, Х.Хопфа // Известия РАН. Серия ММИУ, том 4, № 1-2, С.82-96 — Самара:2000
9. Борисович Ю.Г., Осинцева О.В. Обобщенная топологическая степень конечномерных отображений и разрешимость включений // Вестник Воронежского государственного университета. Серия 2. Естественные науки, 4/1999, Изд-во ВГУ, 8с.
10. Borisovich Yu.G., Fomenko T.N. Homological methods in the theory of periodic and equivariant maps // Lecture Notes in Math., 1988, V.1334, 20p.
11. Borisovich Yu.G. A generalized degree of multivalued mappings and its application to nonlinear problems // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, v.30, №1, pp.101-109, 1997. Proc. 1nd World Congress of Nonlinear Analysts. July 10-17, 1996, Athens, Greece. Elsevier Science Ltd. Printed in Great Britain.
12. Borisovich Yu.G. Generalized topological characteristics of nonlinear Fredholm and monotone maps and solvability of operator inclusions // Nonlinear and Applications (T.M.Rassias, ed.), Palm Harbor, Fl.; Hadronic Press, 1998, 1-18.
13. Borisovich A.Yu. Functional-Topological Properties of the Plaeau Operator and Applications to the Study of Bifurcations in Problems of Geometry and Hydrodynamics // Advances in Soviet Mathematics, American Mathematical Society, USA, 1993, v.15, P. 287-329.

14. Борисович А.Ю. Бифуркация капиллярной минимальной поверхности в слабом гравитационном поле // Математический сборник, 1997, №1, v.188(3)
15. Близняков Н.М. Об оценках вращения векторных полей на алгебраических многообразиях // Функт. анализ и его приложения. —1979, т.13, вып.2, с.78.
16. Близняков Н.М. *Cauchy Indices and the Index of a Singular Points of a Vector Field* // *Global Analysis – Studies and Application II*. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo, 1986, P. 1-20 (*Lecture Notes in Math.*,1214).
17. Близняков Н.М. *Topological Index Estimates* // *Global Analysis – Studies and Application II*. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo, 1988, P. 180-198.– (*Lecture Notes in Math.*,1334).
18. Gel'man B.D. *Generalized degree of multy-valued mappings/ / Lecture Notes in Math*. Springer-Verlag.-vol. 1520, 1992, P.173-192.
19. Gel'man B.D. *On a local degree of one class of multy-valued vector fields in infinite-dimensional Banach spaces* // *Abstract and Applied Analysis*, v.1, №4, 1996, P. 381-396 (with N.M. Bekafadar).
20. Gliklikh Yu. E. *Total and local topological indices for maps of Hilbert and Banach manifolds* // *Topological Methods in Nonlinear Analisis*, v.15, №1, 2000
21. Израилевич Я.А. О вычислении степени эквивариантного отображения методом спектральных последовательностей // Труды мат. фак. ВГУ, Воронеж, 1974. Вып.12.
22. Дмитриенко В.Т., Звягин В.Г. Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений // *Мат. заметки*, 1982, 31, №5, С.801-812
23. Zvyagin V.G., Ratiner N.M. *Oriented defgree of Fredholm mapsof non-negaativ index and its aplication to global bifurcation of solution* // *Lecture Notes in Math.*, 1992, V.1520, P.111-137.
24. Dmitrienko V.T., Zvyagin V.G. *On weak solutions for some model of motion of nonlinear viscous-elastic fluid* // *Topological Methods in Nonlinear Analysis*. Gdansk, 1999, V.4, №2 pp.295-235.
25. Борисович Ю.Г. , Обуховский В.В. О задаче оптимизации для управляемых систем параболического типа // Труды математического института РАН, 1995, 2116, С. 95-101.
26. V.Obukhovskii, P.Zecca *On some properties of dissipative functional differential inclusions in a Banach spase//Topological Methods in Nonlinear Analysis*, v.15, №1, 2000.
27. Сапронов Ю.И. Конечномерные редукции в гладких экстремальных задачах // *Успехи мат. наук*, 1996, Е.51, Вып.1, С.100-132.
28. Сапронов Ю.И. К гомотопической классификации уплотняющих отображений // *Тр. мат. фак. ВГУ. — Воронеж, 1972, Вып. 6, С.78-80*
29. Щелокова Т.Н.(Фоменко Т.Н.) К задаче вычисления степени эквивариантного отображения // *Сибирский мат. журнал*.1978. Т.ХІХ, №2